UNIVERSITÉ AIX-MARSEILLE II - MEDITERRANÉE
U.F.R. DE SCIENCES

THESE

pour obtenir le grade de
DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ AIX-MARSEILLE II

Spécialité : MATHÉMATIQUES DISCRÈTES ET FONDEMENTS DE L'INFORMATIQUE

présentée et soutenue publiquement par

Patrick BAILLOT

le 22 Janvier 1999

TITRE :

APPROCHES DYNAMIQUES EN SÉMANTIQUE DE LA LOGIQUE LINÉAIRE : JEUX ET GÉOMÉTRIE DE L'INTERACTION

Directeur de thèse :
Jean-Yves GIRARD

Rapporteurs :

MM.	Jean-Louis	KRIVINE
	Guy	McCUSKER

JURY

MM.	Pierre-Louis	CURIEN	
	Vincent	DANOS	
	Jean-Yves	GIRARD	Directeur
	Jean-Louis	KRIVINE	Président
	Laurent	REGNIER	

Remerciements

Je remercie Laurent Regnier qui a suivi et encadré mon travail, puis patiemment relu cette thèse. Sa compétence et son enthousiasme ont nourri mon travail, tant mathématiquement qu'humainement. Vincent Danos a également joué un rôle déterminant en encadrant mon mémoire de DEA et en m'introduisant au sujet de cette thèse ; après avoir guidé mes premiers pas il a continué à être une source permanente d'inspiration et de conseils.

Je remercie Jean-Yves Girard d'avoir accepté d'être mon directeur de thèse ; je lui suis reconnaissant de son soutien, de son aide (plus particulièrement pour la dernière partie de ce travail) ainsi que de la stimulation qu'il sait maintenir dans l'équipe et que j'ai beaucoup appréciée. Merci à Thomas Ehrhard pour les nombreuses discussions et collaborations que j'ai eu le plaisir de mener avec lui ; mon travail a beaucoup bénéficié de son écoute et de ses avis éclairés.

Merci à Marco Pedicini pour sa collaboration qui s'est révélée agréable et productive.

Je remercie également Jean-Louis Krivine et Guy McCusker pour avoir accepté d'être les rapporteurs de cette thèse, ainsi que Pierre-Louis Curien qui a bien voulu faire partie du jury.

Je souhaite exprimer ma reconnaissance à toute l'équipe de Logique de la Programmation, aux thésards de l'IML et aux assistants administratifs pour la qualité de l'ambiance que j'ai trouvée dans ce laboratoire. J'ai plus particulièrement une pensée pour Alexandra Bac, Claudia Faggian, Luca Roversi, Marie-Renée Donnadieu-Fleury, Myriam Quatrini, Nuno Barreiro, Olivier Laurent, Pierre Boudes, Stéphane Ballet, Stefano Guerrini, Sylvain Lippi, Tom Krantz, Virgile Mogbil, Yves Lafont ainsi que pour Aurélia Lozingot et France Bodin ; merci à Olivier pour ses conseils en LaTeX.

Enfin je souhaite remercier ma famille pour le soutien et les encouragements qu'elle m'a apportés.

Table des matières

Introduction

Afin d'introduire le sujet de cette thèse il nous faut préalablement situer le contexte de notre problématique. Plantons donc brièvement le décor avant d'en venir à nos protagonistes : la logique linéaire et les sémantiques *dynamiques*.

Depuis les années soixante un rôle déterminant a été joué en théorie de la démonstration par l'*isomorphisme de Curry-Howard* : celui-ci établit une correspondance entre preuves formelles en logique intuitionniste et programmes du lambda-calcul typé, un langage de programmation élémentaire avec spécifications. À une preuve de la formule $A \Rightarrow B$ (A “implique” B) est associé un terme (programme) de type $A^\star \to B^\star$, c'est-à-dire une fonction prenant en argument un objet de type $A^\star$ (traduction en type de la formule A) et rendant un résultat de type $B^\star$; la preuve est une construction (*dérivation*) de type du terme qui lui est associé.

De plus cette bijection ne se contente pas de relier statiquement ces deux catégories d'objets, elle met aussi en correspondance deux dynamiques : la *β-réduction* des lambda-termes (exécution des programmes) et l'*élimination de la règle de coupure* dans les preuves. Par ce biais un sens calculatoire est attribué au processus d'élimination des coupures dans les preuves, appelé aussi *normalisation*. Ce processus se présente comme un ensemble de règles de réécriture sur les preuves. La logique intuitionniste offre des propriétés de *confluence* et de *normalisation forte* : quelle que soit la stratégie choisie pour appliquer ces règles de réécriture, le procédé termine ; autrement dit on a la garantie d'arriver au même résultat, indépendamment de la méthode choisie pour exécuter le programme. Ce paradigme de calcul n'est toutefois pas implémentable en l'état : les règles de réécriture ne sont en effet pas élémentaires, c'est-à-dire qu'elles ne peuvent se faire en temps et espace mémoire bornés.

Deux nécessités se font alors jour :

- d'un côté une décomposition de la normalisation en étapes de calcul élémentaires ;
- de l'autre la recherche d'une compréhension des programmes plus synthétique qu'un déchiffrage fastidieux de la syntaxe, qui fournisse un moyen de prévoir le comportement de la composition de programmes.

Le premier problème a conduit à l'étude des machines abstraites d'évaluation, le second à la *sémantique dénotationnelle*. Un exemple de sémantique dénotationnelle est fourni par le modèle de Scott des fonctions continues : aux types (formules) on associe des ordres partiels complets et aux lambda-termes (preuves) des fonctions vérifiant une propriété de continuité. Quant aux machines abstraites on peut citer la machine de Krivine, calculant la réduction linéaire de tête (voir [DR96] pour une brève présentation).

C'est sur cette scène qu'intervient la logique linéaire avec un lot d'intuitions et de perspectives nouvelles pour ces deux problèmes, à première vue pourtant assez distincts. Introduite par J.-Y. Girard en 1986 la logique linéaire repose sur une prise en compte plus fine des *règles structurelles* de la logique : ce sont les règles de gestion des hypothèses et conclusions, permettant de dupliquer des hypothèses ou d'en retrancher, ou inversement de contracter ou d'ajouter des conclusions. La possibilité de réutiliser à volonté une hypothèse est soumise à la condition préalable de lui avoir attribué une “modalité” (connecteur unaire) notée ! . La fécondité de cette idée peut être mesurée à ses fruits : elle donne naissance à un système “classique”, c'est-à-dire où la négation est involutive (en d'autres termes une forme de tiers-exclu est valide) tout en préservant la propriété de normalisation forte ([Gir87]). La négation linéaire restaure une symétrie entre hypothèses et conclusions qui est sacrifiée en logique intuitionniste en vue de la constructivité. Mais du fait de la normalisation forte et de la confluence (pour un fragment du système), les preuves de la logique linéaire sont par ailleurs candidates à être considérées comme des programmes. Enfin, la logique linéaire est équipée d'une syntaxe plus satisfaisante que le calcul des séquents : les *réseaux de preuves*, une représentation des preuves par des graphes. Ceux-ci présentent l'avantage de ne pas nécessiter d'information séquentielle superflue (sur l'ordre d'application des règles). Ils permettent en outre une approche géométrique dans l'étude des preuves.

Revenons maintenant à nos deux préoccupations précédentes et essayons de préciser comment la logique linéaire se situe par rapport à elles :

- sur la décomposition de la β-réduction ou de la normalisation: les étapes de réduction de la logique linéaire sont plus fines ; elles subdivisent la β-réduction en étapes de duplication et de réduction “logique” ;
- sur le plan de la sémantique dénotationnelle : la logique linéaire est née avec une sémantique des preuves : la sémantique cohérente ; les éléments (*cliques*) de l'espace $A_1, \ldots, A_n$ peuvent être vus comme (sont en bijection avec) une classe de fonctions de $A_1^\perp \otimes \ldots \otimes A_{i-1}^\perp \otimes A_{i+1}^\perp \otimes \ldots A_n^\perp$ vers A_i (les *fonctions linéaires*).

Le premier point nous conduit à introduire un nouvel acteur de notre étude : des avancées notables sur la question de la décomposition de la normalisation ont en effet été obtenues à travers le programme de *géométrie de l'interaction* (*GdI*) initié par Girard ([Gir89, Gir88]). Il consiste en l'étude de sémantiques *calculatoires*, c'est-à-dire dans lesquelles les preuves sont interprétées non pas par des objet statiques mais par des objets auxquels une opération d'évaluation (appelée *exécution*) peut être appliquée. À une preuve Π est associé un couple (U, σ) d'éléments d'un certain espace (espaces d'applications ou d'opérateurs par exemple), où σ est obtenu uniquement par les coupures de Π et U par le reste de la preuve. L'opération d'exécution appliquée à un couple rend un élément $\mathtt{Ex}_\sigma(U)$ qui sous certaines hypothèses est l'interprétation de la forme normale de Π. Le calcul dans la sémantique est plus local que la normalisation syntaxique et une machine abstraite d'évaluation des lambda-termes (calculant la réduction linéaire de tête) a été dérivée d'un de ces modèles (voir [DR96]). Toutefois le lien avec les sémantiques dénotationnelles n'est pas complètement satisfaisant car le résultat de l'exécution n'est pas en général un invariant de la normalisation.

Passons à la sémantique cohérente, en quoi peut-elle nous laisser sur notre faim ? Elle ne nous dit que peu de choses sur le déroulement de l'interaction, *comment* s'évalue la composition de deux preuves/programmes et se contente de donner un résultat de bord : la *trace*, le graphe d'une fonction. Elle ne cède pas de renseignement sur qui commence l'interaction, suivant quel protocole les agents échangent leur information, ce qui dans la communication est déterminé par l'un ou par l'autre et dans quel ordre. En outre, le monde de la sémantique cohérente est plus vaste que celui de la logique : toutes les cliques ne viennent pas de preuves.

Sur ces questions une vague de travaux récents a apporté un éclairage nouveau avec la *sémantique des jeux*, notre troisième personnage (citons sans être exhaustifs les noms de Blass, Abramsky, Jagadeesan, Malacaria, Hyland, Ong, Lamarche, Nickau). La théorie des *catégories* fournit un langage et des outils adaptés pour introduire ces modèles, comme en général les modèles du lambda-calcul ou de la logique linéaire. Dans ces sémantiques une formule est interprétée par un jeu à deux joueurs (appelés Opposant et Joueur) et une preuve par une stratégie pour Joueur sur le jeu interprétant sa conclusion. Cette approche a permis à Abramsky, Jagadeesan et Malacaria ([AJM94, AJM95]) (et indépendamment à Hyland et Ong d'une part et Nickau d'autre part) de donner un *modèle pleinement adéquat* du langage *PCF*, un langage de programmation basé sur le lambda-calcul typé. Un modèle pleinement adéquat est un modèle identifiant exactement les programmes *observationnellement équivalents*, c'est-à-dire en un mot les programmes indiscernables au moyen de tests par d'autres programmes. L'intuition est que le jeu représente le type du programme, le Joueur (ou plutôt une stratégie pour le Joueur) représente le programme et l'Opposant l'environnement. Une partie est une suite alternée de coups Opposant et Joueur et correspond à une interaction entre le programme et un environnement. Là où la sémantique cohérente ne nous donnait qu'un point (correspondant au résultat final, à l'issue de l'interaction), les sémantiques de jeux apportent une description temporelle de l'échange qui a conduit au résultat. Pour une introduction à l'utilisation des catégories de jeux comme modèles de langages de programmation et pour un résumé des différents résultats de pleine adéquation on peut se reporter à [AM98a]. Soulignons que les sémantiques de jeux ne sont pas limitées à l'interprétation de langages purement fonctionnels mais permettent par exemple de caractériser les programmes de langages avec opérateurs de contrôle, états, types récursifs.

D'un point de vue logique maintenant on peut penser au Joueur comme à un défenseur cherchant à établir la vérité d'une formule et à l'Opposant comme à un contradicteur voulant mettre en défaut le Joueur. Des règles du jeu propres à la formule spécifient la forme de leur interaction ; l'Opposant dispose par exemple d'un avantage sur une conjonction $A \wedge B$ puisqu'il lui suffit pour contredire la validité de l'énoncé de contredire la validité de A ou de B, tandis que le Joueur dispose d'un avantage sur une disjonction $A \vee B$. Mentionnons le fait que cette idée était déjà à la base de travaux sur la logique intuitionniste développés dans les années 1960 (Lorentz, Lorenzen).

Cette approche semble prometteuse pour la compréhension de la négation de la logique linéaire puisqu'il est naturel d'interpréter la négation par l'interversion des deux joueurs. Par ailleurs l'interprétation des termes dans le modèle d'Abramsky *et al.* repose sur l'interprétation du terme dans un modèle de géométrie de l'interaction. Comme la géométrie de l'interaction n'est pas cantonnée au cadre intuitionniste mais a été décrite pour la logique linéaire classique on a donc un outil candidat à décrire la composition dans un modèle de jeux pour cette syntaxe.

Nous pouvons maintenant esquisser le plan de notre étude :

- Dans un chapitre préliminaire (chapitre 1) nous donnons quelques rappels sur la logique linéaire, ses calculs des séquents classiques et intuitionnistes et les notions de préréseaux et de réseaux (multiplicatifs et multiplicatifs exponentiels).

- Nous nous penchons ensuite sur le *fragment multiplicatif* de la logique linéaire (MLL) (chapitre 2) afin d'étudier les apports des sémantiques de jeux en termes de définissabilité : à quelle condition une stratégie sur une formule décrit-elle une preuve valide de cette formule? Des réponses ont été données pour MLL par Abramsky-Jagadeesan et Hyland-Ong et nous chercherons à les relier à des critères syntaxiques de validité des preuves (*critères de correction*).

- Dans le chapitre 3 nous définissons pour un préréseau multiplicatif exponentiel une application associée (agissant sur les copies de littéraux de ses conclusions) et montrons qu'elle induit une stratégie sur le jeu donné par la conclusion. Nous introduisons ensuite le modèle d'Abramsky, Jagadeesan et Malacaria (abrégé en "modèle AJM") du fragment intuitionniste IMELL et montrons que l'application précédente permet le calcul de l'interprétation des preuves dans cette catégorie.

- Le chapitre 4 est consacré à la logique linéaire multiplicative exponentielle classique

(MELL) : nous en décrivons un modèle, le modèle des stratégies saturées, le processus d'évaluation associé ainsi que les liens avec le modèle précédent de IMELL.

- Dans le chapitre 5 nous abordons la question des ponts entre sémantiques de jeux et sémantiques sans temporalité : nous décrivons des modèles relationnels de MELL (les formules sont interprétées par des ensembles et les preuves par des relations) et un (pseudo-)foncteur d'oubli du temps du modèle de jeux et stratégies saturées vers un de ces modèles relationnels. Nous montrons en quoi ce modèle peut être considéré comme un modèle de *positions* du jeu (*positions bipolarisées*) et définissons une structure d'ordre sur les objets venant de formules.

- Le chapitre 6 repart du point d'arrivée du chapitre 5 pour essayer de faire le chemin inverse : nous définissons des constructions multiplicatives et exponentielles sur les ordres (polarisés), associons ainsi à une formule de MELL un ordre (polarisé) et montrons que le jeu associé à la formule peut être défini directement à partir de cet ordre.

- Dans le chapitre 7 nous nous penchons sur un modèle de géométrie de l'interaction permettant l'interprétation des preuves de la *logique linéaire élémentaire* et étudions une variante de l'opération d'exécution (*exécution faible*) pour laquelle nous donnons une borne de complexité élémentaire sur la longueur du calcul. Ce dernier chapitre est rédigé en anglais, que le lecteur veuille bien nous pardonner cet écart à l'unité de langue ...

Chapitre 1

Préliminaires

Dans ce chapitre préliminaire nous rappelons brièvement les calculs des séquents de la logique linéaire classique propositionelle et de la logique linéaire intuitionniste multiplicative exponentielle, ainsi que les notions de préréseaux et de réseaux (multiplicatifs exponentiels). Pour plus de détails le lecteur peut se reporter à [Gir87].

1.1 Formules de la logique linéaire classique

Les *formules* de la logique linéaire propositionelle classique (sans constante) sont construites au moyen de formules atomiques et des connecteurs suivants :

- le connecteur unaire de négation : $(.)^\perp$,
- les connecteurs binaires logiques :

  $\otimes$ (*tenseur*) et $⅋$ (*par*), dits *multiplicatifs*,
  $\oplus$ (*plus*) et $\&$ (*avec*), dits *additifs*,
- les connecteurs unaires exponentiels : ! (*bien sûr*) et ? (*pourquoi pas*).

Une relation d'équivalence sur l'ensemble des formules est donnée par les égalités de De Morgan :

$$\begin{array}{ll} A^{\perp\perp} = A & \\ (A \otimes B)^\perp = A^\perp ⅋ B^\perp & (A ⅋ B)^\perp = A^\perp \otimes B^\perp \\ (A \oplus B)^\perp = A^\perp \& B^\perp & (A \& B)^\perp = A^\perp \oplus B^\perp \\ (!A)^\perp = ?A^\perp & (?A)^\perp = !A^\perp \end{array}$$

Chaque classe a un unique représentant dont toutes les négations portent sur des formules atomiques ; par la suite nous entendrons par *formule* un représentant de cette forme. Un *littéral* d'une formule est une occurrence de formule atomique ou de négation de formule atomique, notées en général α et $\alpha^\perp$. L'ensemble des littéraux d'une formule A sera noté $L(A)$. Nous ne nous intéresserons dans notre étude qu'aux formules multiplicatives exponentielles, c'est-à-dire ne contenant pas de connecteurs additifs.

1.2 Calcul des séquents de la logique linéaire classique

Un *séquent classique* est un multiensemble de formules noté $\vdash \Gamma$. L'ensemble $L(\Gamma)$ des littéraux d'un séquent Γ est l'union disjointe des littéraux de ses formules. Le calcul des séquents classique (sans constantes) est défini par les règles suivantes :

Groupe d'identité

$$\frac{}{\vdash A^{\perp}, A}\ \text{(Axiome)} \qquad \frac{\vdash A, \Gamma \quad \vdash A^{\perp}, \Delta}{\vdash \Gamma, \Delta}\ \text{(Coupure)}$$

Groupe des règles logiques

$$\frac{\vdash A, \Gamma \quad \vdash B, \Delta}{\vdash A \otimes B, \Gamma, \Delta}\ \text{(Tenseur)} \qquad \frac{\vdash A, B, \Gamma}{\vdash A \parr B, \Gamma}\ \text{(Par)}$$

$$\frac{\vdash \Gamma, A}{\vdash \Gamma, A \oplus B}\ \text{(Plus gauche)} \qquad \frac{\vdash \Gamma, A \quad \vdash \Gamma, B}{\vdash \Gamma, A \,\&\, B}\ \text{(Avec)}$$

$$\frac{\vdash \Gamma, B}{\vdash \Gamma, A \oplus B}\ \text{(Plus droit)}$$

Groupe des règles structurelles

$$\frac{\vdash ?\Gamma, A}{\vdash ?\Gamma, !A}\ \text{(Promotion)} \qquad \frac{\vdash \Gamma}{\vdash \Gamma, ?A}\ \text{(Affaiblissement)}$$

$$\frac{\vdash \Gamma, A}{\vdash \Gamma, ?A}\ \text{(Déréliction)} \qquad \frac{\vdash \Gamma, ?A, ?A}{\vdash \Gamma, ?A}\ \text{(Contraction)}$$

Les preuves du fragment multiplicatif MLL (resp. multiplicatif exponentiel MELL) sont les preuves dont toutes les formules ne contiennent que des connecteurs multiplicatifs (resp. connecteurs multiplicatifs et exponentiels).

Une variante de ce système est obtenue en ajoutant la règle suivante (MIX) :

$$\frac{\vdash \Gamma \quad \vdash \Delta}{\Gamma, \Delta}\ \text{(MIX)}$$

1.3 Calcul des séquents de la logique linéaire intuitionniste

Les formules de la logique linéaire intuitionniste multiplicative exponentielle (IMELL) sont construites au moyen de formules atomiques, des connecteurs binaires logiques $\multimap$ (*flèche linéaire*), et $\otimes$ et du connecteur unaire exponentiel !.

Un séquent intuitionniste est donné par un multiensemble de formules intuitionnistes Γ et une formule A et noté $\Gamma \vdash A$. Le calcul des séquents de IMELL est défini par les règles suivantes :

Groupe d'identité

$$\frac{}{A \vdash A}\ \text{(Axiome)} \qquad \frac{\Gamma \vdash A \quad A, \Delta \vdash B}{\Gamma, \Delta \vdash B}\ \text{(Coupure)}$$

Groupe des règles logiques

$$\frac{\Gamma, A, B \vdash C}{\Gamma, A \otimes B \vdash C}\ \text{(Tenseur à gauche)} \qquad \frac{\Gamma \vdash A \quad \Delta \vdash B}{\Gamma, \Delta \vdash A \otimes B}\ \text{(Tenseur à droite)}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A \quad \Delta, B \vdash C}{\Gamma, \Delta, A \multimap B \vdash C}\ \text{(Flèche à gauche)} \qquad \frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \multimap B}\ \text{(Flèche à droite)}$$

Groupe des règles structurelles

$$\frac{!\Gamma \vdash A}{!\Gamma \vdash !A}\ (\text{Promotion}) \qquad \frac{\Gamma \vdash B}{\Gamma, !A \vdash B}\ (\text{Affaiblissement})$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma, !A \vdash B}\ (\text{Déréliction}) \qquad \frac{\Gamma, !A, !A \vdash B}{\Gamma, !A \vdash B}\ (\text{Contraction})$$

Soulignons qu'une formule intuitionniste peut être traduite en une formule de MELL en utilisant l'égalité $A \multimap B = A^\perp \parr B$. De même une preuve de IMELL peut être traduite en une preuve de MELL.

1.4 Préréseaux et réseaux

1.4.1 Préréseaux multiplicatifs

Définition 1.1 *Un* préréseau multiplicatif *est un graphe avec arêtes pendantes orienté dont chaque arête est munie d'une formule (de MLL) et construit à partir des nœuds et conditions de typage de la figure 1.1:*

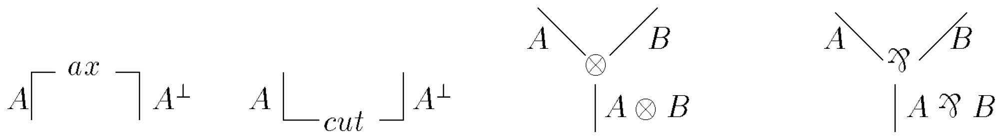


FIG. 1.1: *Noeuds de préréseau multiplicatif.*

Les arêtes sont implicitement orientées de haut en bas; les arêtes entrantes d'un nœud sont les prémisses du nœud *et les arêtes sortantes les* conclusions du nœud. *Les conclusions de R sont les formules $A_1, \cdots, A_n$ des arêtes pendantes de R et on désignera par* formule conclusion *(au singulier) de R la formule $A_1 \parr \cdots \parr A_n$.*

À une preuve Π du calcul des séquents multiplicatif sans constante on associe de façon naturelle un préréseau multiplicatif R. Rappelons maintenant à quelle condition un préréseau est la traduction d'une preuve.

Définition 1.2 *Un* graphe de correction *d'un préréseau multiplicatif R est un graphe obtenu à partir de R en effaçant une arête prémisse de chaque nœud $\parr$.*

Définition 1.3 *(Critère de correction de Danos-Regnier) Un* réseau multiplicatif *est un préréseau dont tous les graphes de correction sont acycliques et connexes (en tant que graphes non orientés).*

Théorème 1.4 *Un préréseau multiplicatif R est la traduction d'une preuve de MLL (on dit que R est* séquentialisable*) ssi R est un réseau.*

1.4.2 Préréseaux multiplicatifs exponentiels

On considère maintenant des graphes (avec arêtes pendantes) orientés et étiquetés (au moyen de formules de MELL) construits au moyen des nœuds ax, cut, $\otimes$ et $\parr$ de la figure 1.1 ainsi que des nœuds exponentiels de la figure 1.2.

Une *boîte* d'un tel graphe est un sous-graphe (avec arêtes pendantes) dont exactement une arête pendante est prémisse d'un nœud ! et les autres sont prémisses de nœuds $?p$ (représentée

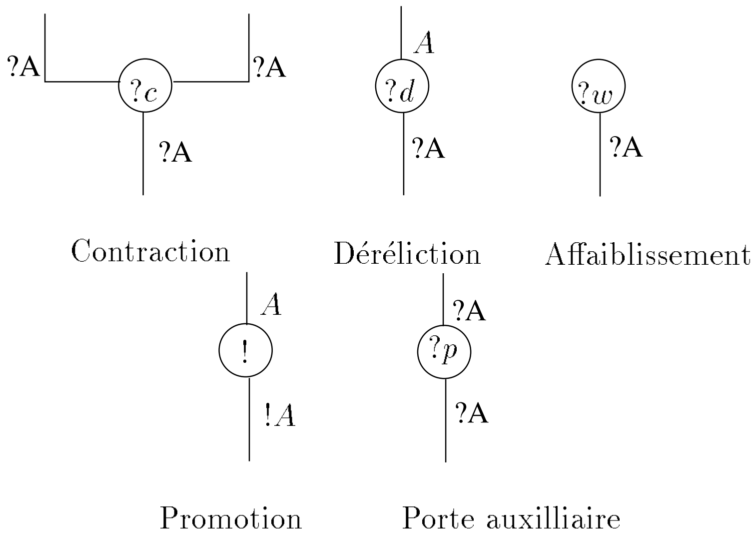


FIG. 1.2: *Noeuds exponentiels de préréseau*

comme sur la figure 1.3). Ces nœuds ! et $?p$ n'appartiennent pas à la boîte ; leurs prémisses sont appelées *conclusions de la boîte.*

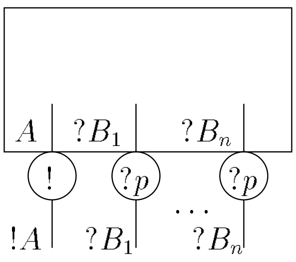


FIG. 1.3: *Boîte*

Définition 1.5 *Un* préréseau multiplicatif exponentiel *(abrégé simplement en préréseau) est un graphe R avec boîtes, construit au moyen des nœuds et arêtes précédents et vérifiant les conditions suivantes :*

- *la prémisse de chaque nœud ! ou $?p$ est conclusion d'une boîte.*
- *étant données deux boîtes de R distinctes, soit elles sont disjointes (c'est-à-dire qu'elles n'ont pas d'arête en commun), soit l'une est incluse dans l'autre.*

La *profondeur d'une arête ou d'un nœud* de R est le nombre de boîtes de R auxquelles il appartient. La *profondeur d'une boîte* de R est le nombre de boîtes (distinctes d'elle-même) dans lesquelles elle est incluse. La *profondeur de R* est la profondeur maximale de ses arêtes et nœuds.

Comme dans le cas multiplicatif, à une preuve Π de MELL on associe un préréseau multiplicatif exponentiel $\Pi^\star$.

Définition 1.6 *On dit qu'un préréseau multiplicatif R est un réseau s'il existe une preuve Π de MELL telle que $\Pi^\star = R$. Une telle preuve Π sera appelée une* construction *de R.*

Rappelons qu'une procédure de *réduction* (élimination des coupures) confluente et fortement normalisante est définie sur les réseaux de MELL (voir [Gir87]). On désigne les étapes élémentaires de réduction par **m** (multiplicative), **ax** (axiome), **de** (déréliction), **co** (contraction), **cc** (coupure commutative), **w** (affaiblissement). La réduction définie en considérant toutes les étapes élémentaires sauf **w** est appelée *réduction stricte* (ou *réduction non-affaiblissement*) ; elle est aussi confluente et fortement normalisante (voir [Dan90]).

Par ailleurs comme dans le cas multiplicatif il existe un critère de correction des préréseaux multiplicatifs exponentiels ; celui-ci nécessite l'ajout d'une information supplémentaire dans les préréseaux : pour chaque nœud affaiblissement un lien (*saut*) du nœud vers un autre nœud (voir [Gir96]).

Chapitre 2

Jeux et critères de correction des préréseaux multiplicatifs

Nous nous intéressons dans cette partie à la Logique Linéaire multiplicative sans constantes. Deux modèles de jeux ont été proposés pour ce fragment par Abramsky et Jagadeesan ([AJ94]) d'une part et Hyland et Ong ([HO93]) d'autre part ; ils présentent une propriété de définissabilité ou complétude forte (*full completeness*) : tout morphisme est l'interprétation d'une preuve de MLL+MIX (resp. MLL sans la règle MIX pour le modèle de Hyland-Ong). Les morphismes sont des stratégies sans-mémoire totales ; *sans-mémoire* signifiant que les coups du Joueur sont déterminés par le coup précédent de l'Opposant. Une stratégie sans-mémoire peut être définie par une fonction des coups Opposant vers les coups Joueur (fonction de stratégie).

Nous définissons pour un préréseau multiplicatif quelconque une application involutive sur les atomes de ses conclusions. Dans le cas d'un réseau cette application donne la fonction de stratégie interprétant le réseau dans les modèles de jeux mentionnés.

Nous donnons une preuve de définissabilité plus directe pour le modèle d'Abramsky et Jagadeesan utilisant le critère de correction de Danos-Regnier (critère des graphes de correction). Nous présentons ensuite pour le modèle de Hyland et Ong une preuve de définissabilité utilisant le critère des longs voyages de Girard (critère original de [Gir87]). Cette preuve repose sur un résultat reliant les voyages de préréseaux aux parties du modèle de jeux : à un voyage nous associons une suite de coups donnés par les axiomes visités ; nous montrons que l'Opposant joue dans cette suite de coups de manière valide et *équilibrée*, c'est-à-dire de façon à parvenir à une partie visitant toutes les composantes du jeu. Dans le cas particulier d'un réseau les voyages donnent alors des parties du jeu correspondant, plus précisément des parties de la stratégie interprétant le réseau. Inversement toute partie de la stratégie ne vient pas d'un voyage du réseau.

2.1 Application associée à un préréseau multiplicatif

Dans ce chapitre nous entendrons par préréseau un préréseau multiplicatif. Nous allons associer à un préréseau R une application f_R sur l'ensemble des littéraux de sa formule conclusion. Notons $A_1, \cdots, A_n$ les conclusions de R et $B_1, B_1^\perp \cdots, B_k, B_k^\perp$ ses formules coupées. On considère la formule

$$F = A_1 \parr \cdots \parr A_n \parr (B_1 \otimes B_1^\perp) \parr \cdots \parr (B_k \otimes B_k^\perp).$$

Les liens axiomes de R donnent une application involutive f_R^{ax} sur l'ensemble des littéraux de F :

$$f_R^{ax}(\alpha) = \alpha^\perp$$

où α et $\alpha^\perp$ sont deux littéraux duaux respectivement dans les conclusions C et $C^\perp$ d'un même lien axiome. Il est clair que f_R^{ax} est totale et que $f_R^{ax} \circ f_R^{ax}(\alpha) = \alpha$.

Soit maintenant f_R^{cut} l'application partielle sur les littéraux de F donnée par :

$$f_R^{cut}(\alpha) = \alpha^\perp$$

où α et $\alpha^\perp$ sont deux littéraux duaux respectivement dans les prémisses B_i et $B_i^\perp$ d'un même lien coupure. Le domaine de f_R^{cut} est donc l'ensemble des littéraux apparaissant dans les B_i, $B_i^\perp$ et f_R^{cut} est également involutive.

On définit maintenant pour α dans $\Gamma = A_1 \parr \cdots \parr A_n$:

$$f_R(\alpha) = (f_R^{ax} \circ f_R^{cut})^{n_0} \circ f_R^{ax}(\alpha)$$

où n_0 est le plus petit entier telle que l'expression de droite est définie et a pour valeur un littéral de $A_1 \parr \cdots \parr A_n$.

Remarquons tout d'abord que s'il existe un tel n_0 :

- pour $i < n_0$ le résultat de $(f_R^{ax} \circ f_R^{cut})^i \circ f_R^{ax}(\alpha)$ appartient à l'un des B_j ou $B_j^\perp$ et n'appartient pas à $A_1 \parr \cdots \parr A_n$.
- pour $i > n_0$, $(f_R^{ax} \circ f_R^{cut})^i \circ f_R^{ax}(\alpha)$ n'est pas définie.

Lemme 2.1 *L'application $f_R : L(\Gamma) \rightharpoonup L(\Gamma)$ associée au préréseau R est totale et involutive.*

Preuve :

D'après ce qui précède, la fonction $f_R^{ax} \circ f_R^{cut}$ est injective et de réciproque $f_R^{cut} \circ f_R^{ax}$. Supposons $f_R(\alpha)$ non définie, alors pour tout $i \geq 0$ on a :

$$(f_R^{ax} \circ f_R^{cut})^i \circ f_R^{ax}(\alpha) \text{ est définie et à valeur dans } (B_1 \otimes B_1^\perp) \parr \cdots \parr (B_k \otimes B_k^\perp).$$

Notons N le nombre de littéraux de $(B_1 \otimes B_1^\perp) \parr \cdots \parr (B_k \otimes B_k^\perp)$. Alors il existe $i_1 < i_2 \leq N+1$ tels que :

$$(f_R^{ax} \circ f_R^{cut})^{i_1} \circ f_R^{ax}(\alpha) = (f_R^{ax} \circ f_R^{cut})^{i_2} \circ f_R^{ax}(\alpha).$$

Prenons le plus petit $i_1 \geq 0$ tel qu'il existe un tel i_2 et choisissons alors i_2 minimal. Alors si $i_1 \geq 1$ l'injectivité de $(f_R^{ax} \circ f_R^{cut})$ nous donne :

$$(f_R^{ax} \circ f_R^{cut})^{i_1 - 1} \circ f_R^{ax}(\alpha) = (f_R^{ax} \circ f_R^{cut})^{i_2 - 1} \circ f_R^{ax}(\alpha)$$

ce qui contredit l'hypothèse sur i_1. Donc $i_1 = 0$ et

$$\begin{array}{rcl} f_R^{ax}(\alpha) & = & (f_R^{ax} \circ f_R^{cut})^{i_2} \circ f_R^{ax}(\alpha) \\ \alpha & = & f_R^{ax} \circ (f_R^{ax} \circ f_R^{cut})^{i_2} \circ f_R^{ax}(\alpha) \\ \alpha & = & f_R^{ax} \circ f_R^{ax} \circ (f_R^{cut} \circ f_R^{ax})^{i_2}(\alpha) \\ \alpha & = & (f_R^{cut} \circ f_R^{ax})^{i_2}(\alpha) \end{array}$$

Comme $i_2 \geq 1$, cette dernière égalité nous donne une contradiction puisque f_R^{cut} est à valeurs dans les littéraux de $(B_1 \otimes B_1^\perp) \parr \cdots (B_k \otimes B_k^\perp)$ et α est un littéral de $A_1 \parr \cdots \parr A_n$.

Par conséquent $f_R(\alpha)$ est bien définie pour tout littéral α de $A_1 \parr \cdots \parr A_n$. D'après les remarques faites précédemment on sait qu'il existe un unique n_0 tel que $(f_R^{ax} \circ f_R^{cut})^{n_0} \circ f_R^{ax}(\alpha)$ appartienne à $A_1 \parr \cdots \parr A_n$ et c'est le résultat $f_R(\alpha)$. Justifions maintenant l'involutivité de f_R.

Pour $0 \leq i < j$ on a :

$$\begin{aligned}(f_R^{ax}\circ f_R^{cut})^i\circ f_R^{ax}\circ(f_R^{ax}\circ f_R^{cut})^j\circ f_R^{ax}(\alpha) &= (f_R^{ax}\circ f_R^{cut})^i\circ(f_R^{ax}\circ f_R^{ax})\circ(f_R^{cut}\circ f_R^{ax})^j(\alpha)\\ &= (f_R^{ax}\circ f_R^{cut})^i\circ(f_R^{cut}\circ f_R^{ax})^j(\alpha)\\ &= (f_R^{cut}\circ f_R^{ax})^{j-i}(\alpha)\end{aligned}$$

Pour la dernière égalité on a utilisé le fait que f_R^{cut} et f_R^{ax} sont involutives. Par conséquent si n_0 est l'entier associé au calcul de $f_R(\alpha)$, on a pour $i \leq n_0$:

$$\begin{aligned}(f_R^{ax}\circ f_R^{cut})^i\circ f_R^{ax}\circ f_R(\alpha) &= (f_R^{ax}\circ f_R^{cut})^i\circ f_R^{ax}\circ(f_R^{ax}\circ f_R^{cut})^{n_0}\circ f_R^{ax}(\alpha)\\ &= (f_R^{cut}\circ f_R^{ax})^{n_0-i}(\alpha)\end{aligned}$$

Ainsi le plus petit entier i tel que le résultat de $(f_R^{ax}\circ f_R^{cut})^i\circ f_R^{ax}\circ f_R(\alpha)$ soit à valeur dans $A_1 \parr \cdots \parr A_n$ est n_0. Or

$$(f_R^{ax}\circ f_R^{cut})^{n_0}\circ f_R^{ax}\circ f_R(\alpha) = (f_R^{cut}\circ f_R^{ax})^{n_0-n_0}(\alpha) = \alpha.$$

Donc $f_R(f_R(\alpha)) = \alpha$. □

Remarquons que la fonction f_R est totale même si l'exécution du préréseau ne termine pas, c'est-à-dire s'il n'existe pas d'entier k tel que $(f_R^{ax}\circ f_R^{cut})^k$ soit de domaine vide ($(f_R^{ax}\circ f_R^{cut})$ nilpotente) (pour plus de précision sur l'opération d'exécution on peut se reporter au chapitre 7). En effet les cycles éventuels donnés par $(f_R^{ax}\circ f_R^{cut})$ ne visitent que des littéraux de formules coupées et on ne peut par conséquent entrer dans un tel cycle en partant d'un littéral de formule conclusion. Il s'agit d'une propriété spécifique au fragment multiplicatif qui disparaît dans MELL (fragment multiplicatif exponentiel).

Exemple :

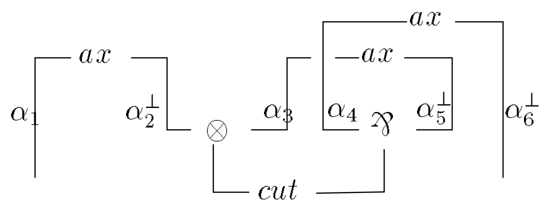


FIG. 2.1: *Exemple*

La fonction f_R associée au préréseau de la figure 2.1 permute α_1 et $\alpha_6^\perp$ (il s'agit de la même fonction que pour un réseau réduit à un lien axiome). Pour tout i, $(f_R^{ax}\circ f_R^{cut})^i(\alpha_3) = \alpha_3$ et l'exécution ne termine pas.

Nous allons maintenant nous intéresser au calcul de f_R dans le cas où R est obtenu par une coupure entre deux réseaux R_1 et R_2 sur une de leurs conclusions respectives A, $A^\perp$. Nous avons vu que le calcul de l'image $f_R(\alpha)$ d'un littéral α implique en général un certain nombre de passages par la coupure et d'applications consécutives de f_{R_1} et f_{R_2}. La notion de jeu permet d'énoncer des propriétés sur les suites de résultats intermédiaires obtenues dans A et $A^\perp$ dans ce cas de "bonne interaction", de mettre en évidence des régularités dans ces successions de littéraux ; ces suites seront des *parties* d'un jeu associé à A et $A^\perp$.

2.2 Jeux

Dans cette section nous rappelons les définitions et résultats de [AJ94].

Définition 2.2 *Un* jeu *A consiste en la donnée de :*

- *un ensemble de* coups *M_A ;*
- *une fonction λ_A de M_A vers l'ensemble de* joueurs *$\{O,P\}$ attribuant à chaque coup un auteur (O pour* Opposant *et P pour* Joueur*) ;*
- *un ensemble P_A clos par préfixe de suites de coups alternées et finies, qui est l'ensemble des* parties valides *; on écrira parfois $(s \in A)$ pour $(s \in P_A)$;*
- *une relation d'équivalence $\equiv_A$ sur P_A satisfaisant les conditions suivantes :*
  - *si $s \equiv_A s'$ alors s et s' ont la même longueur et, dans le cas où elles sont non vides, commencent toutes les deux par un coup du même joueur O ou P,*
  - *clôture par préfixe : si $s \equiv_A s'$ et si t et t' sont respectivement des préfixes de s et s' de même longueur, alors : $t \equiv_A t'$,*
  - *extensibilité : si sa, s' appartiennent à P_A et $s \equiv_A s'$ alors il existe a' dans M_A tel que $s'a'$ appartienne à P_A et $sa \equiv_A s'a'$.*

Nous noterons la relation préfixe sur les suites finies par $\sqsubseteq$ et la longueur d'une suite finie s par $|s|$.

Remarque 2.3 Dans ce chapitre où nous nous contenterons d'interpréter des formules multiplicatives la relation d'équivalence ne nous sera d'aucune utilité ... On considérera comme relation d'équivalence pour les jeux de base simplement la relation identité et cette propriété sera préservée par les constructions multiplicatives. Les relations d'équivalence non triviales n'apparaîtront qu'à partir des constructions exponentielles au chapitre 3.

2.2.1 Constructions multiplicatives sur les jeux

Orthogonal. Un jeu A étant donné, $A^\perp$ est défini par :

- M_A ;
- $\bar{\lambda}_A$, avec $\bar{\lambda}(m) = P$ si $\lambda(m) = O$ et $\bar{\lambda}(m) = O$ si $\lambda(m) = P$;
- P_A.
- $\equiv_A$

Tenseur. Deux jeux A et B étant donnés, $A \otimes B$ est défini par :

- $M_{A\otimes B} = M_A + M_B$;

  A et B sont les *composantes* du jeu ;

  étant donnée une suite s d'éléments de $M_{A\otimes B}$ on appelle *projection* de s sur A (resp. B) et on note s_A (resp. s_B) la suite des éléments de s appartenant à M_A (resp. M_B) ;
- $\lambda_{A\otimes B} = [\lambda_A, \lambda_B]$, i.e. $\lambda_{A\otimes B}(m) = \lambda_A(m)$ si $m \in M_A$, $\lambda_B(m)$ si $m \in M_B$;
- $s \in P_{A\otimes B}$ si s est alternée, $s_A \in P_A$, $s_B \in P_B$ (*condition de projection*) et seul O peut *changer de composante* : si m et m' sont deux coups successifs dans s tels que $(m \in M_A)$ et $(m' \in M_B)$ (ou l'inverse), alors $\lambda_{A\otimes B}(m') = O$. Cette dernière condition sera appelée *condition de switching* ;
- $\equiv_{A\otimes B}$ est donnée par : $(s \equiv_{A\otimes B} s')$ si s et s' sont de même longueur, si pour $n \leq |s|$ les n-èmes coups respectifs de s et s' sont dans la même composante et si on a : $s_A \equiv_A s'_A$ et $s_B \equiv_B s'_B$.

Par. Deux jeux A et B étant donnés, $A \parr B$ est défini par :
$A \parr B = ((A^\perp) \otimes (B^\perp))^\perp$.

Le jeu $A \multimap B$ est défini par $A \multimap B = (A \otimes (B^\perp))^\perp$, soit $A \multimap B = A^\perp \parr B$.

Si des jeux sont choisis pour interpréter les formules atomiques alors ces constructions nous permettent d'associer à chaque formule A de MLL un jeu A^*. Quand il n'y aura pas de risque de confusion on écrira simplement A pour le jeu A^*.

On associe à un séquent $\vdash \Gamma$ avec $\Gamma = A_1, \ldots, A_n$ le jeu $A_1^* \parr \ldots \parr A_n^*$.

On généralise maintenant la notion de projection introduite pour le tenseur :

Définition 2.4 *Étant données une formule A de MLL et des sous-formules $B_1, \ldots, B_k$ de A deux à deux disjointes, les constructions précédentes nous donnent une injection naturelle i de $(M_{B_1} + \cdots + M_{B_k})$ dans M_A. Si s est une partie du jeu A, on appelle alors projection de s sur $B_1, \ldots, B_k$ (notée $s_{B_1,\ldots,B_k}$) la suite des éléments de s appartenant à $i(M_{B_1} + \cdots + M_{B_k})$.*

On a alors comme conséquence des définitions précédentes (par la condition de projection) :

Lemme 2.5 (Projection) *Si B est une sous-formule de A et s appartient à P_A, alors s_B appartient à P_B.*

Les quelques notations suivantes nous serons utiles par la suite :

- M_A^O (resp. M_A^P) est l'ensemble des coups m de M_A tels que $\lambda_A(m) = O$ (resp. $\lambda_A(m) = P$).
- P_A^O (resp. P_A^P) est l'ensemble des parties non vides de P_A commençant par un coup O (resp. P).

Quand B est une sous-formule de A, on utilisera les représentations suivantes pour indiquer que m est un coup de M_B tel que $\lambda_A(m) = O$: $\underset{B}{m^O}$ ou $\underset{\substack{B\\O}}{m}$.

2.2.2 Stratégies

Définition 2.6 *Une* stratégie déterministe *σ (pour le joueur P) sur un jeu A est un sous-ensemble de P_A satisfaisant :*

- *σ est clos par préfixes et toutes ses parties non vides commencent par un coup O.*
- *σ est close par coups O valides, c.a.d. :*

$$si\ s \in \sigma,\ \lambda_A(a) = O\ et\ sa \in P_A,\ alors\ sa \in \sigma.$$

- *si sab et sac appartiennent à σ et $\lambda_A(a) = O$, alors $b = c$ (*condition de déterminisme*).*

On dira de plus que σ est une stratégie gagnante *(ou* totale*) si elle satisfait la condition suivante :*

$$si\ s \in \sigma,\ sa \in P_A\ et\ \lambda_A(a) = O\ alors\ il\ existe\ b\ tel\ que\ sab \in \sigma.$$

Remarque 2.7 La condition de déterminisme entraîne que σ est *engendrée par une fonction partielle $F : P_A^O \rightharpoondown M_A^P$*, c'est-à-dire que σ est la clôture par préfixes de l'ensemble $\{sF(s)/\ \ s \in \mathrm{dom}\, F\}$. Réciproquement une fonction partielle $F : P_A^O \rightharpoondown M_A^P$ engendre une stratégie si :

- $(s \in \mathrm{dom}\, F) \Rightarrow (sF(s) \in P_A)$,

– $(s \in \mathrm{dom}\, F,\, t \in P_A^O,\, t \sqsubseteq s) \Rightarrow (t \in \mathrm{dom}\, F$ et $tF(t) \sqsubseteq s)$.

Dans ce chapitre nous entendrons par *stratégie* sans plus de précision une stratégie déterministe. Ce ne sera par contre plus le cas à partir du chapitre 4 où nous serons amenés à considérer des stratégies plus générales ; en particulier nous n'exigerons plus que toutes les parties d'une stratégie commencent par un coup O.

Définition 2.8 *Une stratégie σ est* sans-mémoire *si la condition suivante est vérifiée : si $sab, ta \in \sigma$ et $\lambda(a) = O$ alors $tab \in \sigma$.*

Remarque 2.9 Une stratégie sans mémoire vérifie la propriété suivante : si $sab, tac \in \sigma$ et $\lambda(a) = O$ alors $b = c$. En effet comme sab et ta appartiennent à σ, tab appartient à σ. Or tac appartient à σ, donc $b = c$ par déterminisme.

Définition 2.10 *Une application partielle $h : M_A^O \to M_A^P$ est une* fonction de stratégie *si l'ensemble σ_h défini inductivement par :*

$$\sigma_h = \{\epsilon\} \cup \{sa^O / s \in \sigma_h, sa \in P_A\} \cup \{sa^O b^P / s \in \sigma_h, sa \in P_A \textit{ et } h(a) = b\}$$

est une stratégie. Noter que σ_h est bien définie car l'ensemble P_A ne contient que des suites finies. On dit alors que σ_h est la stratégie induite *par h.*

Inversement, étant donnée une stratégie sans-mémoire σ il existe une fonction de stratégie induisant σ et on appellera *fonction associée à σ* la plus petite fonction (au sens du domaine de définition) induisant σ.

Définition 2.11 *Étant donné un jeu A, id_A est la stratégie sur $A \multimap A$ définie par :*

$$id_A = \{s \in P^O_{A^\perp, A} \textit{ t.q. pour tout préfixe } t \textit{ de } s \textit{ de longueur paire } t_{A^\perp} = t_A\}.$$

La stratégie id_A est sans-mémoire et induite par la fonction de copie :

$$\begin{array}{cccccccc} & M^O_{A^\perp} & + & M^O_A & \to & M^P_{A^\perp} & + & M^P_A \\ h: & m & & & \mapsto & & & m \\ & & & m & \mapsto & m & & \end{array}$$

Si Γ est un séquent $A_1, \ldots, A_n$ on désignera par id_Γ la stratégie $id_{A_1 \otimes \ldots \otimes A_n}$.

2.2.3 Composition des stratégies

Définition 2.12 *Étant donnés des jeux A_1,A_2,A_3, on désigne par $L(M_{A_1}, M_{A_2}, M_{A_3})$ l'ensemble des suites s d'éléments de $(M_{A_1} + M_{A_2} + M_{A_3})$ telles que deux éléments consécutifs dans s ne sont pas repectivement dans M_{A_1} et M_{A_3}, ou dans M_{A_3} et M_{A_1}.*

Définition 2.13 *Soit A, B et C des jeux et σ, τ deux stratégies respectivement de $A \multimap B$ et $B \multimap C$. Leur composition $\sigma;\tau : A \multimap C$ est définie de la manière suivante :*

$$\sigma;\tau = \{s_{A,C} / \quad s \in L(M_A, M_B, M_C), s_{A,B} \in \sigma \textit{ et } s_{B,C} \in \tau\}.$$

Cette composition est associative et admet pour identités les stratégies $id_A : A \multimap A$.

On désigne par $\mathcal{G}$ la catégorie dont les objets sont les jeux et les morphismes de A vers B les stratégies déterministes sur $A \multimap B$.

Proposition 2.14 *Considérons deux stratégies sans-mémoire σ_{h_1} et σ_{h_2} respectivement sur $A \multimap B$, $B \multimap C$ et h_3 l'application sur $M_{A \multimap C}$ définie par :*

- *si $m \in M_A$:*
  - *Si pour tout n, $(h_2 \circ h_1)^n(m)$ et $h_1 \circ (h_2 \circ h_1)^n(m)$ sont indéfinies ou donnent un résultat dans M_B alors $h_3(m)$ est indéfinie.*
  - *Si pour un entier n l'une des deux compositions ci-dessus est définie et donne un résultat dans M_C ou M_A alors $h_3(m)$ est définie et a pour valeur le résultat obtenu dans M_C ou M_A avec le plus petit tel n par l'une des deux compositions.*
- *si $m \in M_C$: même définition en intervertissant les rôles de h_1 et h_2.*

Alors h_3 est une fonction de stratégie sur $A \multimap C$ et $\sigma_{h_1}; \sigma_{h_2} = \sigma_{h_3}$. Par conséquent la composée de deux stratégies sans-mémoire est sans-mémoire.

La preuve est donnée dans [AJ94]. L'application h_3 est le résultat de l'opération d'*exécution* appliquée à h_1, h_2.

On désigne par $\mathcal{G}_{sm}$ la catégorie dont les objets sont les jeux et les morphismes de A vers B sont les stratégies sans-mémoire de $A \multimap B$. C'est une sous-catégorie de $\mathcal{G}$.

2.2.4 Constructions multiplicatives sur les stratégies

Définition 2.15 (Tenseur de stratégies déterministes) *Soient $\sigma_i : A_i \multimap B_i$ $(i = 1, 2)$ deux stratégies, on appelle $\sigma_1 \otimes \sigma_2$ la stratégie sur $(A_1 \otimes A_2) \multimap (B_1 \otimes B_2)$ donnée par :*

$$\{s \in P_{(A_1 \otimes A_2) \multimap (B_1 \otimes B_2)} \text{ t.q. pour } i = 1, 2, \quad s_{A_i, B_i} \in \sigma_i\}.$$

Remarquons que dans une partie s de $\sigma_1 \otimes \sigma_2$ tous les passages de 1 à 2 ou de 2 à 1 sont faits dans $B_1 \otimes B_2$ et par l'Opposant. C'est une conséquence des conditions de switching et du fait que toutes les parties d'une stratégie déterministe commencent par un coup O.

Lemme 2.16 *Si σ_1 et σ_2 sont sans-mémoire, de fonctions associées h_1 et h_2, alors $\sigma_1 \otimes \sigma_2$ est sans-mémoire et de fonction associée h définie par :*

$$h(m) = h_i(m) \text{ si } m \in M^O_{A_i^\perp} \text{ ou } M^O_{B_i}.$$

On écrira : $h = h_1 + h_2$.

En prenant pour objet unité du tenseur le jeu trivial I d'ensemble de coups vide on obtient sur $\mathcal{G}$ une structure de catégorie monoïdale symétrique.

L'adjonction est obtenue à partir de la construction $\multimap$ par la bijection :

$$\alpha : \mathcal{G}[A \otimes B, C] \to \mathcal{G}[A, B \multimap C]$$

induite par la bijection “naturelle” entre les espaces de coups $M_{(A \otimes B) \multimap C}$ et $M_{A \multimap (B \multimap C)}$.

$\mathcal{G}$ est une catégorie monoïdale close. La même construction donne une structure de catégorie monoïdale close pour $\mathcal{G}_{sm}$.

Le jeu I fournit pour chacune de ces deux catégories un objet dualisant, c'est-à-dire qu'on a un isomorphisme naturel entre A et $((A \multimap I) \multimap I)$.

Proposition 2.17 *Les catégories $\mathcal{G}$ et $\mathcal{G}_{sm}$ sont $*$-autonomes.*

Par conséquent $\mathcal{G}_{sm}$ est un modèle de la logique linéaire multiplicative avec règle MIX (concernant la caractérisation catégorique des modèles de la logique linéaire on pourra se reporter à l'article original de Seely [See89] ou à [AC97]).

2.3 Interprétation d'un réseau par une stratégie

Des jeux étant choisis pour les formules atomiques, les propriétés de la catégorie $\mathcal{G}_{sm}$ permettent d'associer à un réseau R de conclusion Γ une stratégie sans-mémoire sur le jeu correspondant Γ. Par ailleurs on a vu que les constructions multiplicatives pouvaient être faites directement sur les fonctions de stratégies, sans avoir à passer par les stratégies comme ensembles de parties. Cependant cette interprétation suppose en théorie de revenir à une séquentialisation du réseau R et d'appliquer successivement les constructions multiplicatives sur les fonctions.

Revenons à la permutation f_R sur les littéraux de Γ introduite dans 2.1. Elle définit naturellement une fonction $g_R : M^O_\Gamma \to M^P_\Gamma$ de la manière suivante :

Si m appartient à M^O_Γ il existe un unique littéral α de la formule Γ tel que m est jouée dans le sous-jeu interprétant α. Notons $\alpha^\perp = f_R(\alpha)$. Alors si m' désigne le même coup joué dans le sous-jeu de $\alpha^\perp$ on pose $g_R(m) = m'$.

Ainsi g_R est une fonction qui recopie les coups d'un sous-jeu atomique de Γ dans un autre sous-jeu atomique (dual du premier) de Γ.

Proposition 2.18 *Si R est un réseau de MLL+MIX, alors la fonction g_R est la fonction associée à la stratégie sans-mémoire σ interprétant R dans le modèle $\mathcal{G}_{sm}$.*

Preuve:

On le prouve par induction sur une construction de R. Appelons h_R la fonction de stratégie associée à la stratégie sans-mémoire interprétant R et montrons que $g_R = h_R$.

- Si R est réduit à un axiome de conclusion $A^\perp, A$.

  Soit m un coup de $M^O_{A^\perp,A}$; mettons que m est dans M^O_A. Alors m est joué dans le sous-jeu α interprétant un littéral α de A. Soit $\alpha^\perp$ le littéral dual de α dans la formule $A^\perp$. Notons m' le coup de $M^P_{A^\perp}$ correspondant à m (par définition on a $M_{A^\perp} = M_A$). Alors comme la fonction de stratégie h_R est la fonction de copie de 2.2.2 on a : $h_R(m) = m'$. Par ailleurs $f_R = f^{ax}_R$ et $f_R(\alpha) = \alpha^\perp$; la définition de g_R ci-dessus donne $g_R(m) = m'$. Par conséquent $g_R(m) = f_R(m)$.

- Supposons R de conclusion $\Gamma_1, (A_1 \otimes A_2), \Gamma_2$, obtenu par un $\otimes$ à partir de R_i de conclusion Γ_i, A_i $(i = 1, 2)$.

  Par hypothèse d'induction sur les R_i on a $g_{R_i} = h_{R_i}$ pour $i = 1, 2$. La fonction h_R est obtenue par :
  $$h_R(m) = h_{R_i}(m) \text{ si } m \in M^O_{\Gamma_i} \text{ ou } M^O_{A_i}.$$
  donc $h_R(m) = g_{R_i}(m)$ si $m \in M^O_{\Gamma_i}$ ou $M^O_{A_i}$.

  Examinons maintenant f_R. Appelons Δ_i le multiensemble des formules de R_i prémisses de coupure. Les applications $f^{ax}_{R_i}$ et $f^{cut}_{R_i}$ agissent sur des littéraux de Δ_i, Γ_i, A_i. L'ensemble L des littéraux de $\Delta_1, \Gamma_1, (A_1 \otimes A_2), \Gamma_2, \Delta_2$ est l'union disjointe des ensembles L_i des littéraux des Δ_i, Γ_i, A_i pour $i = 1, 2$: $L = L_1 + L_2$. Comme les liens axiomes de R sont les liens axiomes de R_1 et R_2, l'application f^{ax}_R est donnée par : pour α dans L_i, $f^{ax}_R(\alpha)$ est définie si $f^{ax}_{R_i}(\alpha)$ est définie et dans ce cas $f^{ax}_R(\alpha) = f^{ax}_{R_i}(\alpha) \in L_i$. Même chose pour f^{cut}_R puisque R n'a pas d'autres coupures que les coupures venant de R_1 et R_2.

  On a : $f_R(\alpha) = (f^{ax}_R \circ f^{cut}_R)^{n_0} \circ f^{ax}_R(\alpha)$ où n_0 est l'entier tel que l'expression donne pour résultat un littéral de $\Gamma_1, (A_1 \otimes A_2), \Gamma_2$. Or si α est dans L_i, pour tout j on a $(f^{ax}_R \circ f^{cut}_R)^j \circ f^{ax}_R(\alpha) = (f^{ax}_{R_i} \circ f^{cut}_{R_i})^j \circ f^{ax}_{R_i}(\alpha) \in L_i$. Donc la condition (le résultat est un littéral de $\Gamma_1, (A_1 \otimes A_2), \Gamma_2$) équivaut à : le résultat est un littéral de Γ_i, A_i. Par conséquent $f_R(\alpha) = f_{R_i}(\alpha)$.

Ceci nous donne maintenant pour g_R : $g_R(m) = g_{R_i}(m)$ si $m \in M^O_{\Gamma_i}$ ou $M^O_{A_i}$. Donc finalement $g_R = h_R$, ce qui reconduit à R notre hypothèse d'induction.

- Supposons R de conclusion Γ_1, Γ_2 obtenu par une règle MIX à partir de R_i de conclusion Γ_i $(i = 1, 2)$.

  La fonction h_R est obtenue par :

  $$h_R(m) = h_{R_i}(m) \text{ si } m \in M^O_{\Gamma_i}.$$

  Le même raisonnement que dans le cas de la règle $\otimes$ nous donne $h_R = g_R$.

- Supposons R de conclusion $\Gamma, (A \parr B)$ obtenu par une règle $\parr$ à partir de R' de conclusion Γ, A, B.

  Le passage de R' à R ne change rien au calcul de $f_{R'}$, f_R, puisqu'on a les mêmes liens axiomes, coupures et les mêmes littéraux dans le séquent conclusion ; par conséquent $f_R = f_{R'}$ et $g_R = g_{R'}$. Par ailleurs en ce qui concerne les interprétations de R' et R dans $\mathcal{G}_{sm}$ les deux fonctions de stratégies $h_{R'}$ et h_R sont les mêmes à isomorphisme près sur leurs domaines et codomaines de coups. L'égalité $h_R = g_R$ est donc conséquence de $h_{R'} = g_{R'}$.

- Supposons R de conclusion Γ_1, Γ_2, obtenu par une règle coupure à partir de R_1 et R_2 de conclusions respectives Γ_1, A et $A^\perp, \Gamma_2$. Appelons Δ_i le multiensemble des formules de R_i prémisses de coupures.

  On a :

  $$\begin{array}{rcl} f^{ax}_R & = & f^{ax}_{R_1} + f^{ax}_{R_2}, \\ f^{cut}_R & = & f^{cut}_{R_1} + f^{cut}_{R_2} + f^{cut}_{A/A^\perp}, \end{array}$$

  où $f^{cut}_{A/A^\perp}$ est l'application envoyant un littéral de A (resp. $A^\perp$) sur le littéral dual de $A^\perp$ (resp. A).

  Explicitons la valeur de $(f^{ax}_R \circ f^{cut}_R)$ sur un littéral :

  - si β est un littéral de Δ_i alors $(f^{ax}_R \circ f^{cut}_R)(\beta) = (f^{ax}_{R_i} \circ f^{cut}_{R_i})(\beta)$ et est donc un littéral de Δ_1, Γ_1, A si $i = 1$ ou de $\Delta_2, \Gamma_2, A^\perp$ si $i = 2$,
  - si β est un littéral de A alors $(f^{ax}_R \circ f^{cut}_R)(\beta) = (f^{ax}_{R_2} \circ f^{cut}_{A/A^\perp})(\beta)$ et est donc un littéral de $\Delta_2, \Gamma_2, A^\perp$,
  - si β est un littéral de $A^\perp$ alors $(f^{ax}_R \circ f^{cut}_R)(\beta) = (f^{ax}_{R_1} \circ f^{cut}_{A/A^\perp})(\beta)$ et est donc un littéral de Δ_1, Γ_1, A.

  Soit α un littéral de Γ_1, Γ_2, mettons par exemple dans Γ_1. Soit n l'entier tel que : $f_R(\alpha) = (f^{ax}_R \circ f^{cut}_R)^n \circ f^{ax}_R(\alpha)$. On considère les entiers m inférieurs à n tels que $(f^{ax}_R \circ f^{cut}_R)^m \circ f^{ax}_R(\alpha)$ soit un littéral de $A, A^\perp$:

  - s'il n'existe pas de tel m, alors la description de $(f^{ax}_R \circ f^{cut}_R)$ ci-dessus nous donne (par induction sur k) : $\forall k \leq n, (f^{ax}_R \circ f^{cut}_R)^k \circ f^{ax}_R(\alpha) = (f^{ax}_{R_1} \circ f^{cut}_{R_1})^k \circ f^{ax}_{R_1}(\alpha)$. Par conséquent, comme pour $k < n$ ceci donne un résultat dans Δ_1 et pour $k = n$ le résultat est dans Γ_1 on en déduit que $f_R(\alpha) = f_{R_1}(\alpha)$.
  - s'il existe de tels entiers m, notons $(m_i)_{1 \leq i \leq k}$ leur suite (strictement croissante). Montrons tout d'abord que :

    $$\begin{array}{rl} \text{si } i \leq k-1 \text{ et } (f^{ax}_R \circ f^{cut}_R)^{m_i} \circ f^{ax}_R(\alpha) & \in A \text{ (resp. } A^\perp), \\ \text{alors } (f^{ax}_R \circ f^{cut}_R)^{m_{i+1}} \circ f^{ax}_R(\alpha) & \in A^\perp \text{ (resp.} A). \end{array}$$

Pour cela il suffit d'observer que dans le premier cas la description précédente de $f_R^{ax} \circ f_R^{cut}$ nous donne pour tout $m_i < j < m_{i+1}$:

$$(f_R^{ax} \circ f_R^{cut})^j \circ f_R^{ax}(\alpha) \in \Delta_2$$

et de Δ_2, l'application $(f_R^{ax} \circ f_R^{cut})$ ne peut pas faire passer à A. Soit maintenant $(n_i)_{1 \leq i \leq k+1}$ la suite définie par : $n_1 = m_1$, pour $2 \leq i \leq k$, $n_i = m_i - m_{i-1} - 1$, $n_{k+1} = n - m_k - 1$. Appelons (pour $1 \leq i \leq k$) α_i le littéral obtenu par $(f_R^{ax} \circ f_R^{cut})^{m_i} \circ f_R^{ax}(\alpha)$. Mettons que α_i appartient à A ; alors $f_R^{cut}(\alpha_i) = f_{A/A^\perp}^{cut}(\alpha_i) = \alpha_i^\perp \in A^\perp$. D'après ce qui précède on a pour $i \leq (k-1)$:

$$(f_R^{ax} \circ f_R^{cut})^{n_i+1} \circ f_R^{ax}(\alpha_i^\perp) = (f_{R_2}^{ax} \circ f_{R_2}^{cut})^{n_i+1} \circ f_{R_2}^{ax}(\alpha_i^\perp).$$

Comme on sait que ce résultat est dans A on en déduit :

$$f_{R_2}(\alpha_i^\perp) = (f_R^{ax} \circ f_R^{cut})^{n_i+1} \circ f_R^{ax}(\alpha_i^\perp).$$

D'où : $\alpha_{i+1} = f_{R_2}(\alpha_i^\perp) = f_{R_2} \circ f_{A/A^\perp}^{cut}(\alpha_i)$.

De la même façon, si α_i appartient à $A^\perp$ on a : $\alpha_{i+1} = f_{R_1} \circ f_{A/A^\perp}^{cut}(\alpha_i)$,

et $f_R(\alpha) = f_{R_\epsilon} \circ f_{A/A^\perp}^{cut}(\alpha_k)$ où $\epsilon = 2$ si $\alpha_k \in A$, $\epsilon = 1$ si $\alpha_k \in A^\perp$. On obtient donc finalement, en posant $k' = (k:2)$:

$$\begin{array}{lcll} f_R(\alpha) & = & f_{R_1} \circ (f_{A/A^\perp}^{cut} \circ f_{R_2} \circ f_{A/A^\perp}^{cut} \circ f_{R_1})^{k'}(\alpha) & \text{si } k \equiv 0[2] \\ f_R(\alpha) & = & f_{R_2} \circ f_{A/A^\perp}^{cut} \circ f_{R_1} \circ (f_{A/A^\perp}^{cut} \circ f_{R_2} \circ f_{A/A^\perp}^{cut} \circ f_{R_1})^{k'}(\alpha) & \text{si } k \equiv 1[2]. \end{array}$$

Ceci nous donne bien en passant à $g_R(m)$ et grâce à la proposition 2.14, pour un coup m dans $M_{\Gamma_1}^O$: $g_R(m) = h_R(m)$. L'hypothèse d'induction est donc reconduite pour R. Ce dernier cas termine notre preuve. □

On considérera des jeux de base de la forme :

$$M_\alpha = \{\alpha^O, \alpha^P\} \quad P_\alpha = \{\epsilon, \alpha^O, \alpha^O\alpha^P, \alpha^P, \alpha^P\alpha^O\}$$

où $\lambda(\alpha^O) = O$, $\lambda(\alpha^P) = P$.

Pourquoi ce choix?

- le choix de M_α à deux coups O et P se justifie comme le choix d'un jeu "minimal" ayant la propriété que les deux joueurs peuvent commencer (ainsi on évite de polariser les formules atomiques).

- le choix de parties maximales à deux éléments a été fait afin dans la section suivante de pouvoir introduire pour les mêmes jeux la notion de partie équilibrée.

Étant donnée une formule A de MLL, nous pouvons caractériser les parties valides sur le jeu A de la manière suivante :

Lemme 2.19 *Étant donnée une suite s de coups alternée sur A, s est une partie de A ssi pour toute sous-formule B de A la sous-suite s_B vérifie la condition de switching pour le connecteur principal de B (on dira par la suite que s vérifie la* condition de switching *pour B).*

Preuve: La première implication est claire par induction sur A car : si A n'est pas une formule atomique et s est une partie valide de A alors s vérifie la condition de switching pour le connecteur principal de A ; de plus les deux restrictions de A aux deux composantes sont des parties valides de ces jeux donc on peut leur appliquer l'hypothèse d'induction.

Quant à la réciproque on la montre à nouveau par induction sur A. Si A est une formule atomique, alors d'après le choix de jeux fait pour interpréter les formules atomiques le fait que s soit alternée implique que s est une partie de A. Si A est obtenue par un $\otimes$ ou un $\parr$ (mettons par exemple $A = A_1 \otimes A_2$) alors du fait que s est alternée et vérifie la condition de switching pour le connecteur principal on déduit que s_{A_1} et s_{A_2} sont alternées (ou vides). Maintenant pour toute sous-formule B de A_i on a $s_B = (s_{A_i})_B$; par conséquent s_{A_i} vérifie la condition de switching pour le connecteur principal de B. Par h.i. sur A_i on sait alors que s_{A_i} appartient à P_{A_i}. Comme les deux projections de s sur ses composantes A_i sont des parties des A_i et comme s vérifie la condition de switching pour le tenseur on a donc : $s \in P_A$. Le même raisonnement est valable si $A = A_1 \parr A_2$. □

On se pose alors le problème réciproque : étant donné un préréseau R tel que sa fonction f_R induit une stratégie gagnante, R est-il valide ? La réponse est positive et ce théorème est du à Abramsky et Jagadeesan. On en donne dans la section suivante une preuve un peu plus simple.

2.4 Une preuve de la définissabilité pour MLL+MIX

Théorème 2.20 (Abramsky-Jagadeesan) *Étant donné un préréseau R (sans coupure), R est un réseau de MLL+MIX si et seulement si f_R induit une stratégie gagnante.*

L'énoncé du théorème d'Abramsky-Jagadeesan ([AJ94]) est en fait plus général (même si l'assertion ci-dessus en donne le principal contenu technique) : *toute stratégie* uniforme *sans-mémoire est l'interprétation d'un unique réseau de MLL+MIX.* Une stratégie uniforme est une famille de stratégies indexée par les n-uplets de jeux instantiant les atomes de sa formule et vérifiant une condition de naturalité. Une stratégie uniforme sur Γ définit un préréseau sans coupure de conclusion Γ.

Preuve: On peut supposer que les liens axiomes de R ne portent que sur des formules atomiques. Appelons Γ la conclusion de R.

On va raisonner par l'absurde en supposant que R n'est pas un réseau valide et que f_R induit une stratégie gagnante. On utilise le critère des graphes de correction (voir [Dan90]) pour contredire cette propriété de f_R : l'idée est de définir à partir d'un cycle de graphe de correction une partie jouée par f_R et de montrer que cette partie contredit la condition de switching pour un sous-jeu tenseur.

Comme R n'est pas un réseau de MLL+MIX il admet un graphe de correction cyclique. Prenons alors parmi les cycles de graphes de correction de R un cycle γ minimal pour le nombre d'axiomes visités. Le chemin γ passe au plus une fois par chaque arête de R et deux arêtes consécutives dans γ sont de l'une des formes représentées sur la figure 2.2.

Un nœud tenseur de type (2) (resp. de type (3)) sera appelé un nœud tenseur *réfléchissant* (resp. *traversant*) pour γ. Observons qu'entre deux axiomes traversés consécutivement par γ il y a exactement un tenseur réfléchissant traversé par γ.

Lemme 2.21 *Soit $\otimes_0$ un nœud tenseur réfléchissant de γ. Alors dans R il n'y a pas au-dessous de $\otimes_0$ d'autre nœud visité par γ.*

Preuve: Supposons qu'en dessous de $\otimes_0$ dans R il y ait un nœud visité par γ et prenons le premier rencontré en descendant depuis $\otimes_0$, qu'on note N. Comme N est le premier nœud rencontré une de ses deux arêtes prémisses descend de $\otimes_0$ et n'est pas dans γ. Par conséquent

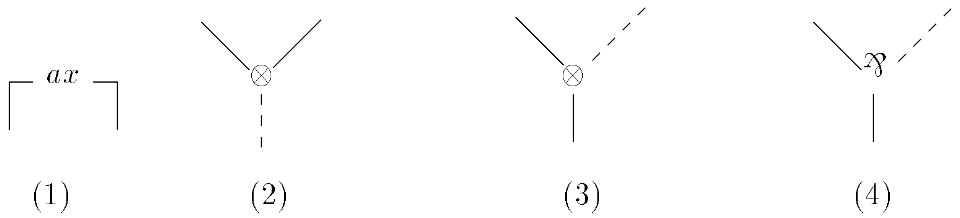


FIG. 2.2: *Arêtes successives de γ*

N n'est pas un Tenseur réfléchissant de γ, c'est donc un nœud Tenseur traversant ou un nœud Par (type (3) ou (4) donc).

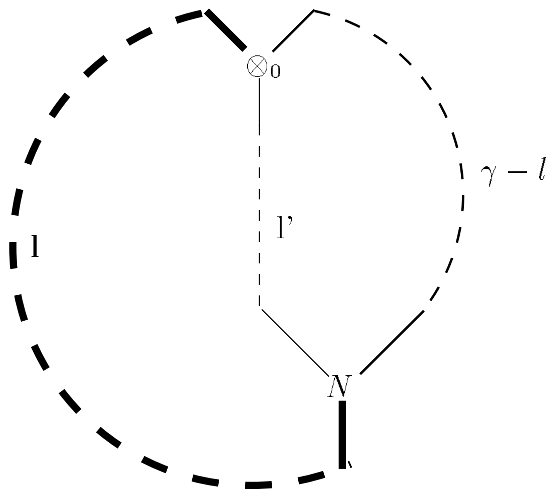


FIG. 2.3: *γ et γ'*

Maintenant coupons le cycle γ en $\otimes_0$ et N et appelons l celui des deux chemins de R ainsi obtenus qui contient l'arête conclusion de N. Appelons l' le chemin obtenu en descendant dans R de $\otimes_0$ à N. On remarque qu'aucun nœud de R n'est visité à la fois par l' et γ car N est le premier nœud de γ rencontré en descendant dans R depuis $\otimes_0$. Par conséquent aucun nœud de R n'est visité à la fois par l et l' et il existe un graphe de correction de R dont ce sont des chemins. En concaténant l et l' on obtient un nouveau cycle γ' de graphe de correction de R. Le nombre de nœuds axiomes visités par γ' est le même que celui de l ; comme par ailleurs $\gamma - l$ visite au moins un nœud axiome on en déduit que le nombre de nœuds axiomes traversés par γ' est strictement inférieur au nombre de ceux visités par γ, ce qui contredit l'hypothèse sur γ. □

Considérons un des nœuds tenseurs réfléchissants qu'on désigne par $\otimes_0$. Choisissons une orientation pour γ. Notons $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ la suite maximale des conclusions d'axiomes deux à deux distinctes traversées par γ en remontant, à partir de $\otimes_0$. Soit s la suite de coups

$$\alpha_1^O \alpha_1^{\perp P} \alpha_2^O \alpha_2^{\perp P} \cdots \alpha_n^O \alpha_n^{\perp P}.$$

Montrons que s est une partie valide de Γ. On sait déjà que les coups P sont donnés par f_R. Montrons donc par induction sur i que pour $i \leq n$ la suite $s^i = \alpha_1^O \alpha_1^{\perp P} \cdots \alpha_i^O$ est une partie.

C'est vrai pour $n = 1$; supposons l'hypothèse vraie pour $i \leq n - 1$. Alors par hypothèse sur f_R, $s^i \alpha_i^{\perp P}$ est valide.

Maintenant $s^{i+1} = s^i \alpha_i^{\perp P} \alpha_{i+1}^O$ est-elle valide ? Le coup α_{i+1}^O est le premier coup de s^{i+1} dans le sous-jeu α_{i+1} et α_{i+1}^O appartient à $P_{\alpha_{i+1}}$. Il suffit d'après le lemme 2.19 de vérifier que les conditions de switching sont satisfaites pour toute sous-formule. Comme c'est un coup Opposant, la seule qui pourrait être contredite serait une condition de switching pour un $⅋$. Supposons donc qu'il existe A sous-formule de Γ telle que $A = A_1 ⅋ A_2$ et $\alpha_{i+1} \in A_1$. Considérons la restriction à A de $s^i \alpha_i^{\perp P}$ et montrons que si elle est non vide son dernier coup est dans A_1.

Entre les axiomes de α_i et α_{i+1}, γ traverse un unique nœud tenseur réfléchissant. On désigne par $B_1 \otimes B_2$ la formule associée et par $\otimes_B$ le nœud.

Le littéral α_{i+1} appartient à A_1 donc on a deux cas :

- **Premier cas** : le $⅋$ de $A_1 ⅋ A_2$ est dans R au-dessous du $\otimes$ de $B_1 \otimes B_2$ (i.e. $B_1 \otimes B_2$ est sous-formule de A_1, voir figure 2.4).

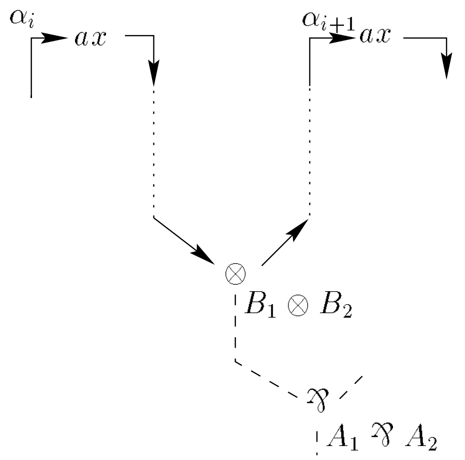


FIG. 2.4: *Premier cas*

  Alors $\alpha_i^{\perp P} \in A_1$, donc le dernier coup de $(s^i \alpha_i^{\perp P})_A$ est $\alpha_i^{\perp P}$ qui est dans A_1.

- **Deuxième cas** : le $⅋$ de $A_1 ⅋ A_2$ est au-dessus de B_2 (i.e. $A_1 ⅋ A_2$ est sous-formule de B_2, voir figure 2.5).

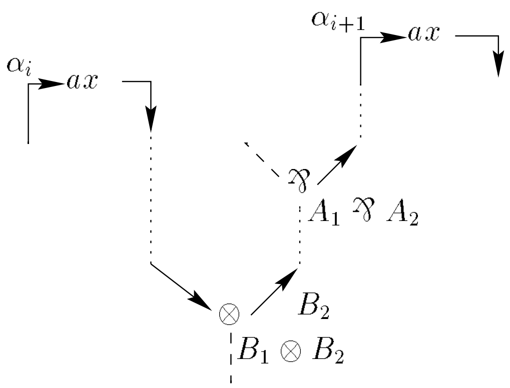


FIG. 2.5: *Deuxième cas*

  Alors $(s^i \alpha_i^{\perp P})_A = \epsilon$. En effet supposons que α_j (ou $\alpha_j^\perp$) appartient à A pour $1 \leq j \leq i$; mettons que ce soit par exemple un α_j. Soit $\otimes_j$ le tenseur réfléchissant visité par γ juste avant l'axiome α_j. Comme α_j appartient à A et A est sous-formule de $B_1 \otimes B_2$, les nœuds $\otimes_j$ et $\otimes_B$ sont dans des positions comparables dans le préréseau et tous deux réfléchissants, ce qui contredit le lemme 2.21.

Par conséquent $s^i \alpha_i^{\perp P} \alpha_{i+1}^O$ est valide, donc l'hypothèse d'induction est reconduite et on peut conclure à la validité de $s = s^n$.

Montrons maintenant que la suite s contredit la condition de switching. Pour $1 \leq i \leq n-1$ appelons $\otimes_i$ le nœud tenseur réfléchissant liant dans γ le nœud axiome de $\alpha_i^\perp$ à celui de α_{i+1}. Les nœuds axiome de $\alpha_n^\perp$ et α_1 sont aussi liés par un tenseur réfléchissant qu'on note $\otimes_n$ (voir figure 2.6) ; désignons par C_1 et C_2 les formules de ses arêtes prémisses.

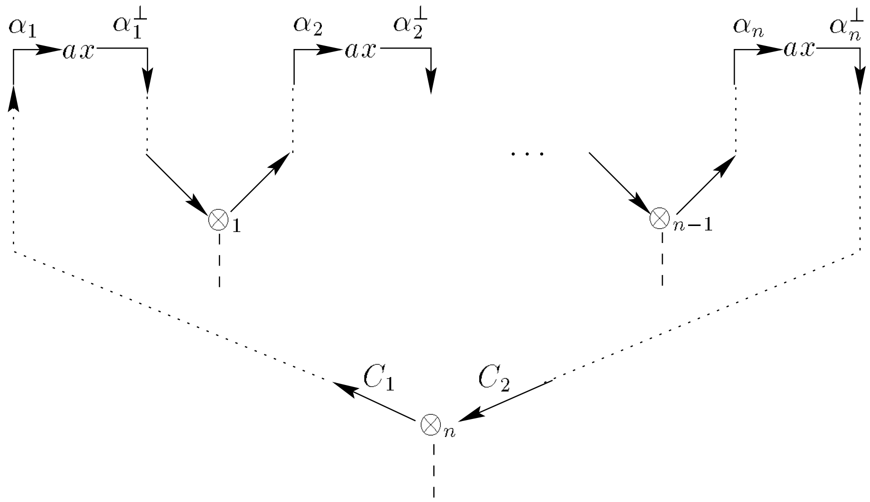


FIG. 2.6: *Le cycle γ*

Montrons qu'aucun α_j ou $\alpha_j^\perp$ différent de α_1 et $\alpha_n^\perp$ n'apparaît dans $C_1 \otimes C_2$. Supposons que c'est le cas par exemple pour un α_j ; alors comme précédemment $\otimes_j$ et $\otimes_n$ sont dans des positions comparables, ce qui contredit le lemme 2.21.

Donc

$$s_{C_1 \otimes C_2} = \begin{array}{cc} \alpha_1^O & \alpha_n^{\perp P} \\ C_1 & C_2 \end{array} .$$

Cette suite ne vérifie pas la condition de switching sur $C_1 \otimes C_2$; ceci contredit le fait que s soit partie valide de Γ. Ainsi l'hypothèse de départ est absurde : aucun graphe de correction de R ne possède de cycle, donc R est un réseau de MLL+MIX. □

Remarquons que le résultat n'est pas vrai pour un préréseau avec coupures : le préréseau incorrect de la figure 2.1 a une application qui induit une stratégie valide.

2.5 Stratégies équilibrées et définissabilité pour MLL (sans MIX)

2.5.1 Parties et stratégies équilibrées

Avant d'introduire la notion de stratégie équilibrée il nous faut quelques nouvelles définitions. Elles sont adaptées de l'article [HO93].

Définition 2.22 *Une partie d'un jeu A est une* partie OP *(resp. une partie PO) si elle est vide ou si elle commence par un coup O (resp. P) et termine par un coup P (resp. O).*

Noter que comme les parties sont alternées, toute partie de longueur paire est OP ou PO.

Définition 2.23 *On dit qu'un jeu A est un* jeu de Hyland-Ong *s'il vérifie les conditions suivantes :*

- *l'ensemble P_A est fini ; on note alors $lg(P_A)$ la longueur maximale des parties de P_A ;*
- *$lg(P_A)$ est non nul et pair,*
- *P_A contient au moins une partie OP et une partie PO de longueur $lg(P_A)$.*

On dit que les parties de P_A de longueur $lg(P_A)$ sont achevées *et on note P_A^{ach} leur ensemble (ces parties sont appelées* maximal fair positions *dans [HO93]).*

L'ensemble des jeux de Hyland-Ong est stable par les constructions $(.)^\perp$, $\otimes$, $\parr$ de 2.2.1. On a de plus :

- $P_{A^\perp}^{ach} = P_A^{ach}$,
- $P_{A\otimes B}^{ach} = \{s \in P_{A\otimes B}$ t.q. $s_A \in P_A^{ach}$ et $s_B \in P_B^{ach}\}$ (idem pour $P_{A\parr B}^{ach}$).

Les jeux que nous avons choisis dans 2.3 pour interpréter les formules atomiques étant des jeux de Hyland-Ong, tout jeu associé à une formule de MLL est un jeu de Hyland-Ong.

Définition 2.24 *Une partie s est* équilibrée *s'il existe une partie t de P_A^{ach} dont s est préfixe.*

Dans [HO93] les seules parties considérées sont les parties équilibrées ; nous distinguons ici les parties équilibrées des parties simplement valides afin de pouvoir sur un même jeu considérer des stratégies valides (au sens déjà défini) et des stratégies équilibrées (que nous allons définir). Nous avons alors :

Lemme 2.25 *Si s appartient à $P_{A\otimes B}^{ach}$ alors l'une au moins des deux projections s_A et s_B est OP. Si s_A et s_B sont OP alors s est OP. Si s_A ou s_B est PO alors s est PO.*

Le même résultat est valide pour une partie s de $P_{A\parr B}^{ach}$ en intervertissant OP et PO.

Preuve : Si s appartient à $P_{A\otimes B}^{ach}$ alors ses deux projections sont achevées, par conséquent non vides et OP ou PO. Considérons le sous-jeu A ou B visité en second (c'est-à-dire que le premier coup dans ce sous-jeu n'est pas le premier coup de s), mettons par exemple que ce soit B. Alors du fait de la condition de switching le premier coup de s_B est O ; comme s_B est achevée elle est donc OP. Inversement si l'une des deux projections est PO, alors le sous-jeu correspondant n'a pu être visité en second et donc s commence par un coup P ; ceci entraîne alors que s est PO. □

Nous reviendrons sur ces propriétés de polarités au chapitre 5.

Lemme 2.26 (Hyland-Ong) *Une partie s d'un jeu $A \otimes B$ (resp. $A \parr B$) est équilibrée ssi :*

- *s_A et s_B sont équilibrées,*
- *si l'une des deux projections est PO (resp. OP) et achevée, alors l'autre est achevée.*

Remarquons que dans le cas où s est équilibrée sur $A \otimes B$ (resp. $A \parr B$) et où la deuxième condition est satisfaite, le lemme 2.25 impose alors que la deuxième projection est OP (resp. PO).

Une preuve de ce lemme se trouve dans [HO93].

Définition 2.27 *Une stratégie σ sur un jeu (de Hyland-Ong) A est* équilibrée *si pour toute partie sab de σ, où a est un coup Opposant on a : si sa est équilibrée alors sab est équilibrée.*

Théorème 2.28 (Hyland-Ong) *Un préréseau R (sans coupure) est un réseau de MLL sans MIX ssi f_R induit une stratégie équilibrée.*

L'énoncé général de ce théorème fait comme celui du théorème d'Abramsky-Jagadeesan intervenir des stratégies uniformes.

Nous donnons une nouvelle preuve de la condition suffisante utilisant le *critère des longs voyages* afin d'étudier le lien entre voyages et parties. Une des motivations de cette étude est la comparaison faite dans [AJ94] entre les conditions de switching pour $\otimes$ et $\parr$ et la définition des voyages.

2.5.2 Voyages

Nous rappelons brièvement le critère de correction des longs voyages de Girard ([Gir87]) pour les préréseaux multiplicatifs. Dans ce qui suit les préréseaux seront toujours sans coupure.

Définition 2.29 *Une* position d'interrupteurs *pour le préréseau R est le choix pour chaque nœud $\otimes$ et $\parr$ d'un élément de $\{G, D\}$ (*position *du nœud).*

On considère chaque arête du réseau munie de deux orientations. Si l'arête est étiquetée par A on représentera les deux arêtes orientées par $A^\wedge$ et $A^\vee$. Une position d'interrupteurs induit une permutation sur les arêtes orientées envoyant chaque arête orientée sur une arête orientée adjacente suivant les règles propres à chaque noeud et position décrites sur la figure 2.7.

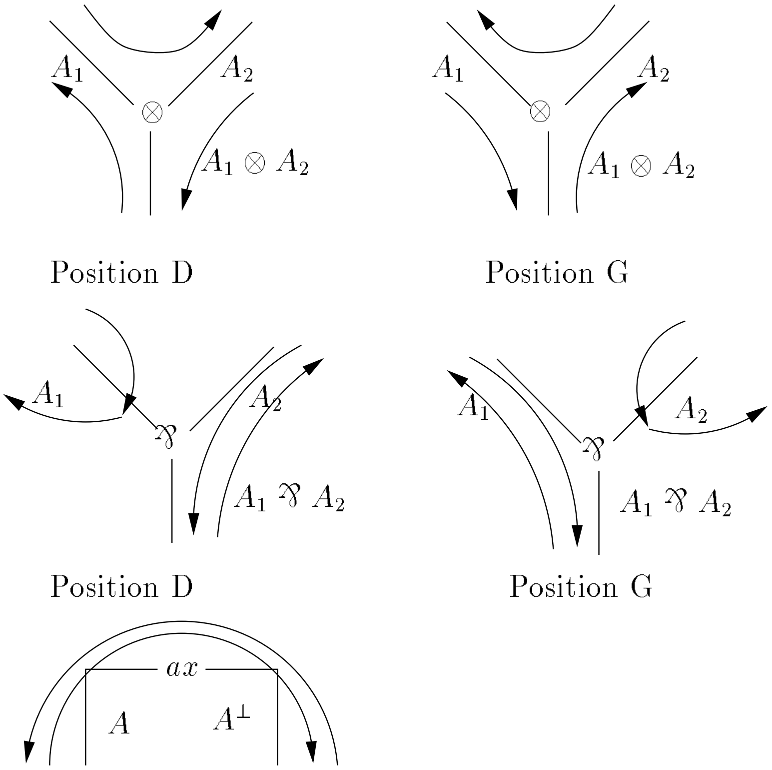


Fig. 2.7: *Passages dans les noeuds*

Définition 2.30 *Un* voyage *d'une position d'interrupteurs (on dira aussi simplement voyage de R) est une orbite de la permutation associée, autrement dit un cycle décrit par les arêtes* *orientées en suivant la permutation. C'est un* long voyage *si l'orbite contient toute les arêtes orientées (le cycle passe une fois par chaque arête dans chaque sens).*

Rappelons maintenant le critère de correction de Girard : un préréseau est un réseau ssi pour toute position d'interrupteur tous les voyages sont longs ; c'est-à-dire que pour toute position d'interrupteurs il y a un seul voyage.

2.5.3 Voyages et parties

Définition 2.31 *Étant donné un voyage V d'un préréseau R, on appelle* arête réfléchie *de V une arête montante dont l'arête précédente dans V est descendante.*

On dit qu'un chemin c est un chemin du voyage V *si :*

- *c est un sous-chemin du cycle V ne passant pas deux fois dans le même sens dans la même arête,*
- *c commence en montant (resp. termine en descendant) dans une arête réfléchie (resp. avant une arête réfléchie).*

La suite $\alpha_1\alpha_1^\perp\alpha_2\cdots\alpha_{2n}^\perp$ étant la suite des littéraux des conclusions d'axiomes visitées par le chemin de voyage c, on dit que la suite $s(c) = \alpha_1^O\alpha_1^{\perp P}\alpha_2^O\cdots\alpha_{2n}^{\perp P}$ est la suite de coups associée *à c. On dira aussi que c'est* une *suite de coups associée au voyage V.*

Un sous-chemin d'un chemin de voyage c est *unidirectionnel* s'il ne change pas de sens.

Remarquons qu'il y a une bijection entre les sous-chemins unidirectionnels maximaux de c et les coups de $s(c)$. A un chemin montant (descendant) maximal correspond un coup O (resp. P). Par extension, le *coup correspondant à une arête orientée* de voyage sera le coup donné par le sous-chemin unidirectionnel maximal auquel elle appartient. A un sous-chemin montant maximal (resp. descendant maximal) commençant (resp. terminant) par une arête étiquetée par A correspond un coup dans un littéral de A.

Commençons par établir un lemme dont nous aurons besoin par la suite :

Lemme 2.32 *Soit R un préréseau de conclusion Γ et $A\otimes B$ une sous-formule de Γ. Supposons que c est un chemin de voyage de R tel que $(s(c))_{A\otimes B}$ appartient à $P_{A\otimes B}$. Alors à chaque coup de $(s(c))_{A\otimes B}$ changeant de composante correspond un passage de c dans le tenseur de $A\otimes B$.*

Preuve : Considérons un changement de composante dans $(s(c))_{A\otimes B}$, c'est-à-dire un coup de cette suite (mettons b dans M_B) précédé d'un coup qui ne soit pas dans la même composante (a dans M_A). Alors par la condition de switching, comme $(s(c))_{A\otimes B}$ est une partie valide, b est un coup O. Supposons en vue d'obtenir une contradiction que le sous-chemin montant maximal correspondant à b commence par une arête étiquetée par une sous-formule stricte D de B (c'est-à-dire strictement au-dessus de B dans R). Alors soit b' le coup correspondant à l'arête descendante de c précédant $D^\wedge$. La suite $s(c)$ comporte alors le coup b' entre les coups a et b. De plus b' est joué dans un littéral de la formule B et appartient donc à M_B. Ceci contredit donc le fait que a soit prédécesseur de b dans $(s(c))_{A\otimes B}$.

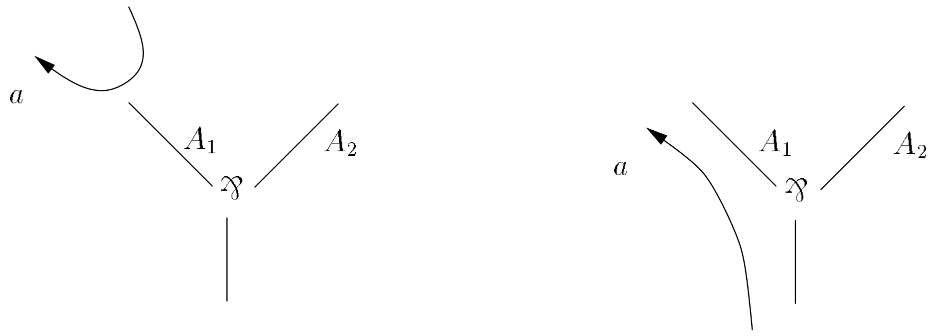
Par conséquent le sous-chemin montant maximal correspondant à b commence dans une arête étiquetée par une formule dont B est sous-formule. Il s'ensuit que soit ce sous-chemin commence dans B, soit il traverse l'arête $A\otimes B$: dans les deux cas le chemin c est passé par le $\otimes$ de $A\otimes B$. □

Proposition 2.33 *Dans toute suite de coups s associée à un voyage V l'Opposant "joue bien", c'est-à-dire : si $ta \sqsubseteq s$ et a est un coup O, alors $(t\in P_\Gamma \Rightarrow ta\in P_\Gamma)$.*

Preuve:

Supposons que t est une partie sur Γ et montrons qu'alors ta satisfait les conditions de switching ; on pourra alors conclure par le lemme 2.19. Celles-ci ne peuvent être contredites par le coup Opposant a que pour un connecteur $\parr$. Supposons que c'est le cas et considérons une sous-formule $A = A_1 \parr A_2$ de F telle que dans s_A la condition de switching pour le connecteur principal est contredite par a. Convenons que a est joué dans A_1. Alors on a $t_{A_2} \neq \epsilon$, appelons b son dernier coup. Montrons tout d'abord que b est un coup Opposant.

Le coup a étant joué dans A_1 on a deux possibilités pour V : figure 2.8.



(1) (2)

FIG. 2.8: *(preuve de la Prop. 2.33)*

Le cas (1) est exclu puisque a switche dans $A_1 \parr A_2$. Par conséquent pour la position d'interrupteurs de V, le $\parr$ de $A_1 \parr A_2$ est sur A_1 (position d'interrupteur G). Donc V est de la forme de la figure 2.9. Donc b est un coup Opposant. Le sous-chemin de V correspondant

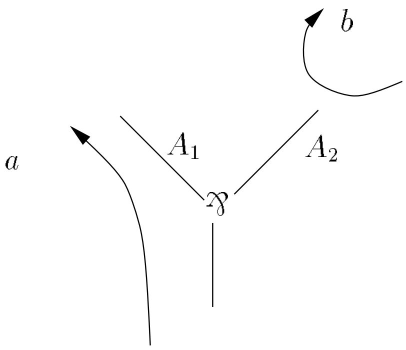


FIG. 2.9: *(preuve de la Prop. 2.33)*

au coup a étant montant, il monte soit depuis un nœud $\otimes$ (figure 2.10), soit depuis un nœud $\parr$ (ou une conclusion) (figure 2.11).

Dans ce dernier cas on considère le nœud où ces chemins descendant et montant se séparent ; c'est un nœud $\otimes$.

Appelons donc $\otimes_0$ le nœud tenseur spécifié dans chacun des cas précédents et c le coup P précédant a dans s. Prenons maintenant le premier nœud $\otimes$ (désigné par $\otimes_1$) rencontré en descendant le préréseau à partir de l'arête $A_1 \parr A_2$ qui vérifie la propriété suivante : la partie t comporte un switching pour le connecteur $\otimes_1$ après le coup b. Un tel nœud existe puisque $\otimes_0$ satisfait ces conditions.

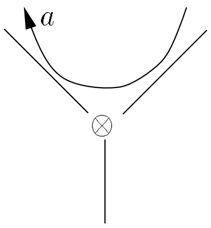


FIG. 2.10: *(preuve de la Prop. 2.33)*

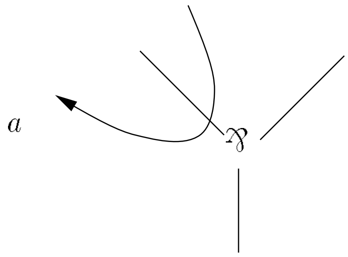


FIG. 2.11: *(preuve de la Prop. 2.33)*

Désignons alors par B_1 et B_2 les prémisses de $\otimes_1$ et par d le coup réalisant le switching en question dans t (mettons de B_1 à B_2). On va montrer que d est un coup P, ce qui contredira ($t_{B_1 \otimes B_2} \in P_{B_1 \otimes B_2}$) et donc ($t \in P_F$).

Supposons donc en vue d'obtenir une contradiction que d est un coup Opposant. Le coup d étant le premier coup dans B_2 après b le voyage V est de l'une des deux formes décrites sur la figure 2.12.

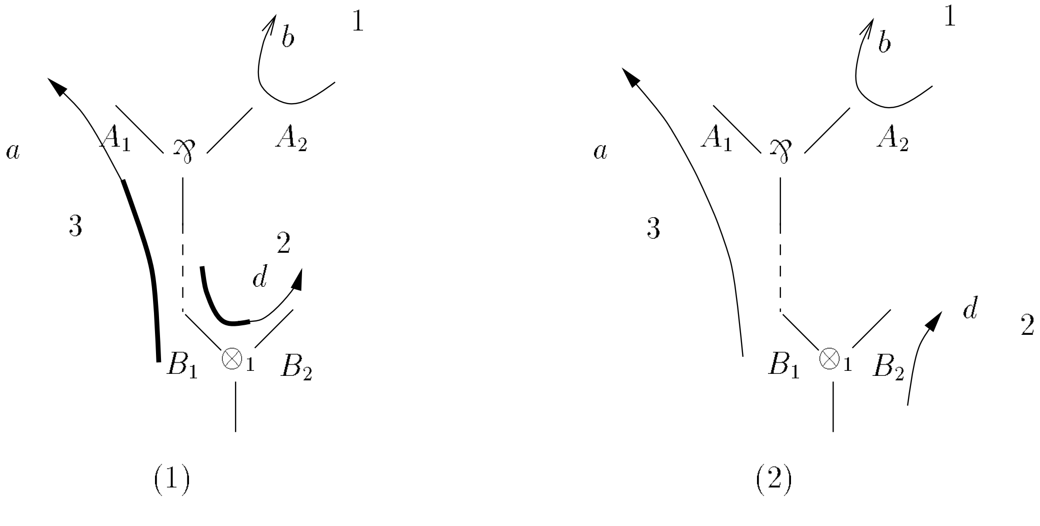


FIG. 2.12: *(preuve de la Prop. 2.33)*

- Cas (1) : les deux sous-chemins descendant et montant en gras sur la figure bifurquent en dessous du nœud ⅋ et dans un $\otimes$, ce qui contredit l'hypothèse sur $\otimes_1$. Ce cas est donc exclu.

- Cas (2) : considérons le dernier coup e dans B_1 avant d (e existe car b précède d et est dans B_1). Par la condition de switching pour le connecteur $\otimes_1$ c'est un coup P. Par conséquent V remonte après e en dessous de $B_1 \otimes B_2$ (sinon e serait suivi par un coup Opposant dans B_1).

Comme V est un voyage, les conditions de passage dans $\otimes_1$ montrent qu'on est dans la situation de la figure 2.13. Les sous-chemins de V correspondant aux coups a et e ne peuvent

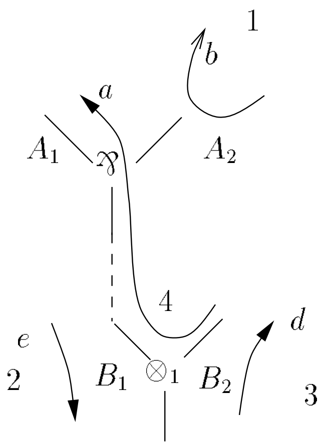


FIG. 2.13: *(preuve de la Prop. 2.33)*

bifurquer que dans un nœud $\otimes$ puisque V est un voyage. Ce nœud $\otimes$ doit être au-dessus de $\otimes_1$ et au-dessous de A_1, car t n'a pas de coup dans A_1. Ceci contredit alors la définition de $\otimes_1$. Absurde.

Par conséquent d est un coup P. Or d switche de B_1 à B_2 (la partie t contient un coup dans B_1 avant d), donc ceci contredit la validité de $t_{B_1 \otimes B_2}$. Absurde. □

On cherche maintenant à montrer que dans une suite de coups associée à un voyage l'Opposant joue de manière équilibrée. Pour cela nous aurons besoin d'un lemme intermédiaire.

Lemme 2.34 *Soit c un chemin de voyage d'un préréseau R et s la partie associée. Soit A une sous-formule d'une conclusion de R.*

- *si s_A est achevée, alors l'arête étiquetée par A a été parcourue deux fois par c (dans les deux sens).*
- *si s_A est équilibrée et c passe deux fois par A en montant puis en descendant (c.a.d. que c comporte une sous-séquence $A^\wedge \cdots A^\vee$) alors s_A est achevée.*

Preuve du lemme 2.34 :
Prouvons la première affirmation ; on procède par induction sur A :

- Si A est atomique, alors s_A achevée signifie que s_A est une partie à deux coups ; d'après la définition d'une suite de coups associée à un voyage ceci implique que c parcourt une fois dans chaque sens l'arête étiquetée par A (conclusion d'axiome).
- Si $A = A_1 \otimes A_2$ ou $A = A_1 \parr A_2$: comme s_A est achevée, les suites s_{A_1} et s_{A_2} sont des parties achevées des jeux associés respectivement à A_1 et A_2. Par h.i. on en déduit que c parcourt une fois dans chaque sens les arêtes étiquetées par A_1 et A_2. Dans les deux cas $\otimes$ et $\parr$, quelle que soit la position d'interrupteur ceci implique que c a parcouru l'arête A une fois dans chaque sens (voir figure 2.14).

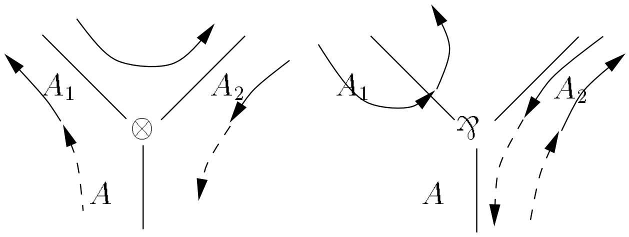


FIG. 2.14: *(preuve du lemme 2.34)*

Montrons maintenant la deuxième assertion, à nouveau par induction sur A.

- Si A est atomique c'est clair.
- $A = A_1 \otimes A_2$:

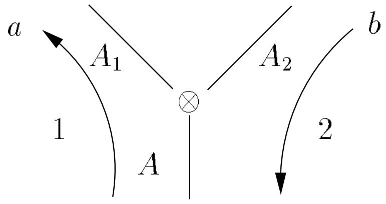


FIG. 2.15: *(preuve du lemme 2.34)*

Si c contient $A^\wedge \dots A^\vee$, alors les passages dans A sont comme sur la figure 2.15. Par conséquent $(s(c))_{A_1 \otimes A_2}$ change de composante et par le lemme 2.32 ce changement de composante correspond à un passage de c dans le nœud $\otimes$. Par définition des positions d'interrupteurs du tenseur ce passage est comme sur la figure 2.16.

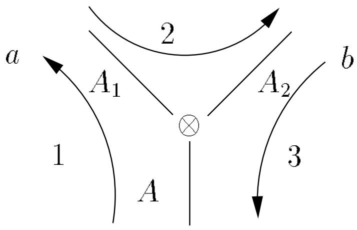


FIG. 2.16: *(preuve du lemme 2.34)*

Alors par hypothèse d'induction on sait que s_{A_1} et s_{A_2} sont achevées, donc s_A est achevée.

- $A = A_1 \parr A_2$:

Prenons s' le préfixe de s tronqué après le coup correspondant au chemin 2 descendant sur la figure 2.17. Alors s'_A est équilibrée car par hypothèse s_A est équilibrée. Par hypothèse d'induction sur A_1, la partie s'_{A_1} est achevée. De plus s'_{A_1} termine par un coup P, par conséquent d'après le lemme 2.26 la partie s'_{A_2} est achevée. On en déduit que s'_A est achevée et donc que s_A est achevée. □

Proposition 2.35 *L'Opposant joue dans les parties associées aux voyages de manière équilibrée : c'est-à-dire que s étant une suite de coups associée à un voyage V d'un préréseau R,*

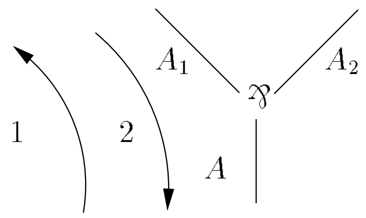


Fig. 2.17: *(preuve du lemme 2.34)*

pour tout préfixe $s'm$ de s terminant par un coup Opposant, si s' est une partie équilibrée alors $s'm$ est une partie équilibrée.

Preuve de la proposition :

On a déjà montré que l'Opposant joue de manière valide, c'est-à-dire que si s' est une partie alors $s'm$ est une partie. Il nous reste donc à prouver que si s' est équilibrée alors $s'm$ est équilibrée.

On procède en raisonnant par l'absurde : supposons qu'on a un préfixe $s'm$ de s contredisant l'affirmation précédente. Toute partie réduite à un coup O est équilibrée donc $s' \neq \epsilon$, s' est OP. Soit alors A la plus petite sous-formule de Γ pour l'inclusion telle que $(s'm)_A$ soit non équilibrée. Remarquons que m est dans A car sinon $(s'm)_A = s'_A$ qui est équilibrée. Il y a trois cas : A est atomique, A est de la forme $A_1 \otimes A_2$ ou A est de la forme $A_1 ⅋ A_2$.

- Si A est atomique : toute partie valide sur le jeu étant équilibrée on a une contradiction.

- Si $A = A_1 ⅋ A_2$: la partie $(s'm)_A$ termine par m qui est O ; mettons que m soit dans A_2. Comme $(s'm)_{A_1}$ et $(s'm)_{A_2}$ sont équilibrées la deuxième condition du lemme 2.26 n'est pas satisfaite. Donc comme $(s'm)_{A_2}$ termine par un coup O, $(s'm)_{A_1}$ est OP achevée et $(s'm)_{A_2}$ n'est pas PO achevée. Or $s'_{A_1} = (s'm)_{A_1}$, donc elle est OP achevée et comme s'_A est équilibrée ceci implique que s'_{A_2} est PO achevée. Or s'_{A_2} est un préfixe strict de $(s'm)_{A_2}$, ce qui donne une contradiction.

- Si $A = A_1 \otimes A_2$: mettons par exemple que m est dans A_2 ; d'après le lemme 2.26 la seule possibilité pour que s'_A soit équilibrée et pas $s'm_A$ est que $(s'm)_{A_2}$ soit PO achevée et que $(s'm)_{A_1}$ ne soit pas OP achevée. Or comme $(s'm)_{A_2}$ est PO, $(s'm)_{A_1 \otimes A_2}$ commence par P dans A_2 et termine par O dans A_2. Donc si $s'm_{A_1} \neq \epsilon$, les conditions de switching imposent que $(s'm)_{A_1}$ commence par O et termine par P.

  Montrons que $(s'm)_{A_1} \neq \epsilon$. Comme $(s'm)_{A_2}$ est achevée, d'après le lemme 2.34 si c est le sous-chemin de V associé à $s'm$ alors c passe deux fois par A_2 (figure 2.18).

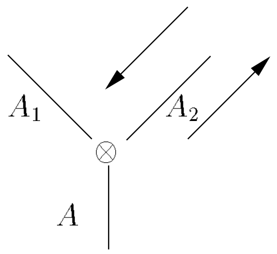


Fig. 2.18: *(preuve de la Prop. 2.35)*

Comme $(s'm)_{A_2}$ est PO, ${A_2}^{\wedge}$ n'est pas la première arête de c et ${A_2}^{\vee}$ n'est pas la dernière arête de c ; par conséquent par définition des voyages une des deux flèches vient de A_1. Donc $(s'm)_{A_1} \neq \epsilon$.

Examinons maintenant le premier coup dans A_1. Il vient d'un sous-chemin de c qui contient $(A_1 \otimes A_2)^\wedge$. Donc c passe par A_1 et son premier passage est ascendant. De la même façon le dernier coup de $(s'm)_A$ dans A_1 correspond à un sous-chemin descendant qui contient $(A_1 \otimes A_2)^\vee$. Donc c passe deux fois par A_1, en montant puis en descendant. De plus par hypothèse sur A on sait que $(s'm)_{A_1}$ est équilibrée. Donc d'après la deuxième assertion du lemme 2.34, $(s'm)_{A_1}$ est achevée. Ceci contredit ce qui précède.

Chaque cas conduisant à une contradiction, l'hypothèse de départ est absurde. Donc si s' est équilibrée, alors $s'm$ l'est aussi. □

2.5.4 Preuve de la définissabilité pour MLL (sans MIX)

Soit R un préréseau multiplicatif sans coupure de conclusion Γ et tel que f_R induit une stratégie équilibrée. Montrons que R est alors un réseau de MLL (sans la règle MIX). Considérons une position d'interrupteurs et A une conclusion de R. Soit alors V le voyage visitant la conclusion A ; comme A est une conclusion on sait que V passe deux fois par A. Montrons qu'alors V est un long voyage. Soit c le chemin du voyage V commençant en montant dans A et terminant en descendant dans A et s la suite de coups du jeu Γ associée à c.

D'après l'hypothèse sur R et la proposition 2.35 on sait que s est une partie OP équilibrée de P_Γ. Par conséquent s_A est équilibrée. Or c traverse A en montant puis en descendant, donc d'après le lemme 2.34 la partie s_A est achevée. Par conséquent s ne peut être prolongée par un coup O dans A. De plus à cause des conditions de switching, la partie s ne peut être non plus prolongée par un coup O dans une autre conclusion. La partie s étant équilibrée et ne pouvant être étendue on en déduit donc que c'est une partie achevée de Γ.

On sait alors que pour toute sous-formule B d'une conclusion de R, la partie s_B est achevée. D'après la première assertion du lemme 2.34, le chemin c visite donc deux fois chaque arête de R et par conséquent V est un long voyage. On en déduit donc que toute position d'interrupteurs de R donne un long voyage et ainsi R est un réseau. □

Chapitre 3

Géométrie de l'interaction et modèle de jeux AJM du fragment IMELL

L'objet de ce chapitre est l'extension de l'interprétation des preuves par des stratégies du chapitre 2 à la logique linéaire multiplicative avec exponentielles (MELL). Comme dans le cas multiplicatif il s'agit de stratégies induites par des applications. La description de l'application associée à un préréseau est faite dans la section 3.1.

Cependant l'interprétation des règles exponentielles nécessite des choix arbitraires de codages (entiers et applications sur les entiers pour les nœuds déréliction, contraction, portes auxilliaires de boîtes) et le prix payé est lourd : l'interprétation d'un réseau de MELL par une stratégie n'est pas invariante par élimination des coupures ... Toutefois on n'est pas si loin d'une sémantique dénotationnelle car les stratégies interprétant un réseau R et un réduit R' de R ne diffèrent en fait que par les choix de codages pour les règles exponentielles.

Une solution à ce problème a été donnée dans le cas intuitionniste (fragment IMELL) par Abramsky, Jagadeesan et Malacaria ([AJM94, AJM95]). Elle consiste à introduire une relation d'équivalence (partielle) entre stratégies qui caractérise le fait de jouer les mêmes parties à des codages près. En associant à une preuve non plus simplement une seule stratégie mais une classe d'équivalence de stratégies, Abramsky *et al* décrivent un modèle dénotationnel $\mathcal{IG}$ de IMELL. Cette construction est faite de manière catégorique et nous la rappelons dans la section 3.3. Dans le chapitre suivant nous serons amenés à reconsidérer l'équivalence entre stratégies afin de traiter le cas de MELL classique.

Nous montrons dans la section 3.4 que l'application sur les coups associée à un réseau R (venant d'une preuve π de IMELL) permet de donner l'interprétation $\langle\sigma_\pi\rangle$ de π dans la catégorie $\mathcal{IG}$. On a ainsi une manière pratique de calculer l'interprétation d'une preuve. Cette situation peut être comparée à celle de la sémantique cohérente où les *expériences* (cf [Gir87]) permettent de calculer directement la clique interprétant un réseau sans passer par une séquentialisation du réseau ; de même l'interprétation $\langle\sigma_\pi\rangle$ d'une preuve π de IMELL dans $\mathcal{IG}$ peut être obtenue en calculant d'abord l'application sur les coups définie par le réseau associé à π avant de prendre la classe d'équivalence de la stratégie induite par cette application.

3.1 Application associée à un préréseau de MELL

3.1.1 Littéraux indexés

Dans le but d'étendre l'interprétation des preuves par des stratégies au fragment multiplicatif exponentiel de la logique linéaire (MELL) nous voulons associer à un réseau de MELL une application, à la manière de ce qui a été fait dans le chapitre 2. Mais comme les conclusions comportent maintenant des modalités !, ? l'application f_R n'agira plus comme dans le cas purement multiplicatif simplement sur des littéraux mais sur des *copies* de littéraux. Définissons donc tout d'abord ce domaine de l'application.

Définition 3.1 *On appelle profondeur $pr_A(B)$ d'une sous-formule B d'une formule A de MELL le nombre de modalités $!, ?$ dans le champ desquelles B se trouve dans A ; plus précisément $pr_A(B)$ est définie par induction sur les formules A contenant B :*

- $pr_B(B) = 0$,
- $pr_{A_1 m A_2}(B) = pr_{A_i}(B)$ *où* $m = \otimes, \parr$ *et* A_i *est la composante contenant* B,
- $pr_{\Box A}(B) = pr_A(B) + 1$, *pour* $\Box = !, ?$.

Définition 3.2 *Étant donnée une formule A de MELL, une* sous-formule indexée *de A est la donnée d'une sous-formule B de A et d'une suite d'entiers $\vec{\imath}$ de longueur $|\vec{\imath}| = pr_A(B)$. On la notera $\vec{\imath}B$.*

Définition 3.3 *L'espace de* copies de littéraux *(ou* littéraux indexés*) associé à une formule A est l'ensemble :*

$$LI(A) = \{\vec{\imath}\alpha \textit{ sous-formule indexée de } A \textit{ avec } \alpha \textit{ littéral de } A\}.$$

Si Γ est un séquent $\vdash A_1, \ldots, A_n$, alors $LI(\Gamma) = LI(A_1 \parr \ldots \parr A_n)$.

Si $\vec{\imath}\alpha$ est un littéral indexé et $\vec{\jmath}$ une suite finie d'entiers, on notera : $\vec{\jmath}.(\vec{\imath}\alpha) = (\vec{\jmath}.\vec{\imath})\alpha$, où $\vec{\jmath}.\vec{\imath}$ est la concaténation des deux suites finies.

3.1.2 Machine associée à un préréseau

À un préréseau R de MELL de conclusion Γ nous allons associer une application partielle f_R sur l'ensemble $LI(\Gamma)$ des littéraux indexés de Γ. Nous utiliserons pour définir f_R la présentation faite dans [DHR96] d'un préréseau comme une machine déterministe.

On notera $L(\Gamma)$ l'ensemble des littéraux de Γ et $\mathbb{N}^\star$ l'ensemble des suites finies d'entiers (on les appellera aussi des *piles* d'entiers).

Les caractéristiques de la machine $\mathcal{M}_R$ associée à R sont les suivantes :

- un *état* est la donnée d'une occurrence de formule du préréseau (i.e. une formule étiquetant une arête) et d'un *sens* $\mu = \wedge$ (montée) ou $\mu = \vee$ (descente) ; si $\mu \neq \eta$ on note $\mu = \overline{\eta}$; un couple d'états $(A\mu, B\eta)$ est un couple d'*états adjacents* si :
  - $\mu = \eta = \wedge$ (resp. $\mu = \eta = \vee$) et A et B sont respectivement conclusion et prémisse (resp. prémisse et conclusion) d'un même nœud de R ;
  - ou : $\mu = \wedge$ et $\eta = \vee$ (resp.$\mu = \vee$ et $\eta = \wedge$) et les deux formules sont les deux conclusions (resp. prémisses) d'un même nœud axiome (resp. coupure) ;

  les formules de deux états adjacents sont donc les formules étiquetant deux arêtes adjacentes de R. Remarquons que si $(A\mu, B\eta)$ est un couple d'états adjacents alors il en est de même de $(B\overline{\eta}, A\overline{\mu})$.

- les *configurations* sont la donnée d'un état $A\mu$, d'un littéral α de $L(\Gamma)$ et de deux piles p_e (*pile d'équilibrage*) et p_b (*pile de boîtes*). On représentera une telle configuration par : $C = (A\mu, \alpha, p_e, p_b)$.

– les *transitions* : pour chaque couple d'états adjacents $(A\mu, B\eta)$ on donne une application partielle injective $T_{A\mu,B\eta} : L(\Gamma) \times \mathbb{N}^\star \times \mathbb{N}^\star \rightharpoonup L(\Gamma) \times \mathbb{N}^\star \times \mathbb{N}^\star$. Ces transitions sont *réversibles*, c'est-à-dire que pour tout couple d'états adjacents $(A\mu, B\eta)$, l'application $T_{B\overline{\eta},A\overline{\mu}}$ est l'application réciproque de l'application partielle injective $T_{A\mu,B\eta}$. Elles sont déterminées par le type de nœud associé dans le réseau au couple d'états adjacents ; nous les définirons ci-après.

On commettra l'abus d'appliquer les transitions à des configurations :

$$T_{A\mu,B\eta}(A\mu, \alpha, p_e, p_b) = (B\eta, \alpha', p'_e, p'_b), \text{ si } T_{A\mu,B\eta}(\alpha, p_e, p_b) = (\alpha', p'_e, p'_b).$$

Définissons deux types d'états particuliers :

– *états d'entrée* : $A\wedge$, où A est une conclusion de R ;

– *états de sortie* : $A\vee$, où A est une conclusion de R.

Une configuration dont l'état est un état d'entrée (resp. état de sortie) sera appelée *configuration d'entrée* (resp. *configuration de sortie*).

Nous représenterons les piles comme nous avons déjà représenté les suites finies d'entiers pour les littéraux indexés : $\vec{\imath}$, de longueur notée $|\vec{\imath}|$. L'ajout d'un entier k au sommet de la pile est noté : $k.\vec{\imath}$. La pile vide sera notée ϵ. Les éléments de $L(\Gamma) \times \mathbb{N}^\star \times \mathbb{N}^\star$ seront appelés *jetons*.

Un *run* de la machine est une suite de configurations (C_i) telle que pour deux configurations consécutives C_i et C_{i+1} d'états respectifs $A\mu$ et $B\eta$ on a : $C_{i+1} = T_{A\mu,B\eta}(C_i)$. La configuration C_0 est la *configuration initiale* du run. Un run est dit *maximal* s'il est infini ou fini avec une dernière configuration C qui n'est dans le domaine d'aucune transition.

Énonçons dès à présent deux propriétés importantes des configurations $(A\mu, \alpha, p_e, p_b)$ rencontrées dans les runs que nous considérerons ; ces propriétés seront appelées **hypothèses de bonne configuration** :

> – α est un littéral de la formule A ;
>
> – p_e a pour longueur $pr_A(\alpha)$ (donc $p_e.\alpha \in LI(A)$) et p_b a pour longueur la profondeur dans R de l'arête étiquetée par la formule A.

Donnons maintenant les transitions. Elles sont définies au moyen d'un *choix de codages* :

– un entier n_0,

– deux injections $l, r : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ de codomaines disjoints,

– une bijection $\langle ., . \rangle : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$.

Comme les transitions sont réversibles, pour tout couple d'états adjacents $(A\mu, B\eta)$ l'application $T_{B\overline{\eta},A\overline{\mu}}$ se déduit de $T_{A\mu,B\eta}$ et nous nous contentons donc d'en donner une des deux.

– **Axiome et coupure** :

Si A et $A^\perp$ sont les deux conclusions (resp. prémisses) d'un nœud axiome (resp. coupure) :

$$T_{A\wedge,A^\perp\vee} : (\alpha, \vec{\imath}, \vec{\jmath}) \mapsto (\alpha^\perp, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$$

où α appartient à $L(A)$ et $\alpha^\perp$ est le littéral dual dans $A^\perp$

(resp. $T_{A\vee,A^\perp\wedge} : (\alpha, \vec{\imath}, \vec{\jmath}) \mapsto (\alpha^\perp, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ avec les mêmes conditions).

- **Nœuds multiplicatifs** :

  Si A_1 et A_2 sont les deux prémisses d'un nœud multiplicatif $m = \otimes$ ou $\parr$ on a :

  $$T_{A_i\vee,(A_1mA_2)\vee} : (\alpha, \vec{\imath}, \vec{\jmath}) \mapsto (\alpha, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$$

  si l'occurrence α dans (A_1mA_2) est dans la composante A_i $(i = 1$ ou $2)$.

- **Nœuds exponentiels** :

  - **Déréliction** : on considère un nœud déréliction de conclusion $?A$,

    $$T_{A\vee,?A\vee} : (\alpha, \vec{\imath}, \vec{\jmath}) \mapsto (\alpha, n_0.\vec{\imath}, \vec{\jmath})$$

  - **Contraction** : on considère un nœud contraction de conclusion $?A$ dont on note les prémisses $?A^{(1)}$, $?A^{(2)}$,

    $$T_{?A^{(1)}\vee,?A\vee} : (\alpha, k.\vec{\imath}, \vec{\jmath}) \mapsto (\alpha, l(k).\vec{\imath}, \vec{\jmath}),$$
    $$T_{?A^{(2)}\vee,?A\vee} : (\alpha, k.\vec{\imath}, \vec{\jmath}) \mapsto (\alpha, r(k).\vec{\imath}, \vec{\jmath}).$$

  - **Porte principale** de boîte, de conclusion $!A$:

    $$T_{A\vee,!A\vee} : (\alpha, \vec{\imath}, n.\vec{\jmath}) \mapsto (\alpha, n.\vec{\imath}, \vec{\jmath}).$$

  - **Porte auxilliaire** de boîte, de conclusion $?A^{concl}$:

    $$T_{?A\vee,?A^{concl}\vee} : (\alpha, k.\vec{\imath}, n.\vec{\jmath}) \mapsto (\alpha, \langle n, k\rangle.\vec{\imath}, \vec{\jmath}).$$

On peut vérifier que ces transitions préservent l'hypothèse de bonne configuration énoncée précédemment. Par ailleurs une configuration dans une conclusion vérifie cette hypothèse si $|p_e| = pr_A(\alpha)$ et p_b est vide ; on appellera littéral indexé de Γ associé à une telle configuration le littéral indexé $p_e.\alpha$.

Considérons un run où l'hypothèse de bonne configuration est vérifiée au départ. Le nom choisi pour les deux piles est justifié par les transitions décrites :

- on ajoute un entier à la pile de boîtes p_b à l'entrée d'une boîte, c'est-à-dire en montant par une porte principale ou auxilliaire ; on lui retire un entier à la sortie d'une boîte ;
- la pile d'équilibrage diminue de longueur au cours de la montée dans le préréseau (jusqu'à devenir vide au moment du passage dans les conclusions d'un axiome atomique) et augmente de longueur au cours de la descente.

Lemme 3.4 (déterminisme) *Si $(A\mu, B_1\eta)$ et $(A\mu, B_2\eta)$ sont deux couples d'états adjacents distincts de $\mathcal{M}_R$ alors on a :*

$$\mathrm{dom}\, T_{A\mu,B_1\eta} \cap \mathrm{dom}\, T_{A\mu,B_2\eta} = \emptyset.$$

Cette propriété est appelée "splitness" dans [DR93].
Preuve : Étant donnée la définition des transitions et des préréseaux, cette situation ne peut se produire que pour $\mu = \eta = \wedge$ et B_1, B_2 prémisses d'un lien multiplicatif ou contraction dans R.

- dans le cas d'un nœud multiplicatif, $T_{(B_1mB_2)\wedge,B_1\wedge}$ et $T_{(B_1mB_2)\wedge,B_2\wedge}$ sont bien de domaines disjoints car une occurrence de littéral α dans B_1mB_2 est soit dans B_1 soit dans B_2.

- dans le cas d'un nœud contraction $T_{?A\wedge,?A^{(1)}\wedge}$ et $T_{?A\wedge,?A^{(2)}\wedge}$ vérifient cette propriété car l et r sont de codomaines disjoints. □

Par conséquent, étant donnée une configuration $C = (A\mu, \alpha, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, il existe au plus une transition $T_{A\mu,B\eta}$ telle que C appartienne à son domaine. Par réversibilité il existe aussi au plus une transition telle que C appartienne à son codomaine. On peut donc définir une application générale T sur les configurations par :

$$T(A\mu, \alpha, \vec{\imath}, \vec{\jmath}) = (B\eta, \alpha', \vec{\imath}', \vec{\jmath}'),$$

si $(A\mu, B\eta)$ est un couple d'états adjacents et $T_{A\mu,B\eta}(\alpha, \vec{\imath}, \vec{\jmath}) = (\alpha', \vec{\imath}', \vec{\jmath}')$.

Cette application T vérifie alors :

Lemme 3.5 (Réversibilité) *Si $T(A\mu, \alpha, \vec{\imath}, \vec{\jmath}) = (B\eta, \alpha', \vec{\imath}', \vec{\jmath}')$, alors :*

$$T(B\overline{\eta}, \alpha', \vec{\imath}', \vec{\jmath}') = (A\overline{\mu}, \alpha, \vec{\imath}, \vec{\jmath}).$$

Preuve : C'est une conséquence directe de la réversibilité des transitions. □

Cette application T est donc une application partielle injective sur les configurations. On remarque qu'un run de $\mathcal{M}_R$ est une suite de configurations obtenues par itérations de T ; par conséquent, étant donnée une configuration C il existe un unique run maximal de configuration initiale C. Noter aussi que T n'est pas définie sur les configurations de sorties, donc un run terminant par une configuration de sortie est un run maximal.

À tout run de $\mathcal{M}_R$ on peut associer un chemin dans le graphe R décrit par les états de ses configurations : en effet par définition des transitions deux états de configurations successives dans le run ont des formules associées à des arêtes adjacentes. Le chemin monte et descend dans R en changeant de sens dans les noeuds axiomes et coupures.

3.1.3 Application sur les littéraux indexés

Nous pouvons maintenant expliciter l'application f_R donnée par R sur les littéraux indexés de Γ. L'application $f_R : LI(\Gamma) \rightharpoonup LI(\Gamma)$ est définie de la manière suivante :

pour $\vec{\imath}\alpha$ appartenant à $LI(\Gamma)$ soit $C_0 = (A\wedge, \alpha, \vec{\imath}, \epsilon)$ la configuration d'entrée associée, alors

- si le run maximal $(T^n(C_0))_n$ de configuration initiale C_0 est infini ou fini et de dernier terme une configuration C qui n'est pas une configuration de sortie, alors $f_R(\vec{\imath}\alpha)$ n'est pas définie,
- sinon $f_R(\vec{\imath}\alpha) = \vec{\jmath}\beta$, où $\vec{\jmath}\beta$ est le littéral indexé associé au dernier terme du run (configuration de sortie).

On vérifie facilement que si $f_R(\vec{\imath}\alpha) = \vec{\jmath}\beta$ alors β est une occurrence duale $\alpha^\perp$ de α dans Γ.

Proposition 3.6 *L'application $f_R : LI(\Gamma) \rightharpoonup LI(\Gamma)$ associée à un préréseau R est une application partielle injective et involutive.*

Preuve : Supposons $f_R(\vec{\imath}\alpha) = \vec{\jmath}\beta$; alors il existe un run maximal fini $(T^i(C_0))_{0\leq i\leq n}$ de configuration initiale une configuration d'entrée $C_0 = (A\wedge, \alpha, \vec{\imath}, \epsilon)$ et de dernière configuration une configuration de sortie $C_n = T^n(C_0) = (B\vee, \beta, \vec{\jmath}, \epsilon)$. Soit $\overline{C_n}$ la configuration $(B\wedge, \beta, \vec{\jmath}, \epsilon)$ et $\overline{C_0}$ la configuration $(A\vee, \alpha, \vec{\imath}, \epsilon)$. Du lemme 3.5 on déduit par induction sur le nombre d'itérations que $T^n(\overline{C_n}) = (A\vee, \alpha, \vec{\imath}, \epsilon) = \overline{C_0}$. Comme $\overline{C_n}$ est une configuration d'entrée et $\overline{C_0}$ une configuration de sortie on a par conséquent $f_R(\vec{\jmath}\beta) = \vec{\imath}\alpha$. Donc f_R est une application partielle injective et involutive. □

Dans le cas où R n'a pas de noeud exponentiel (préréseau de MLL) tous les littéraux indexés de Γ sont de pile vide et leur ensemble est donc en bijection avec l'ensemble des littéraux. Par ailleurs $\mathcal{M}_R$ n'a dans ce cas que des transitions axiome, coupure et multiplicative ; par l'hypothèse de bonne configuration toutes les configurations visitées pour le calcul de f_R ont donc deux piles vides. La nouvelle application f_R coïncide alors dans ce cas avec l'application du premier chapitre définie au moyen de f_R^{ax} et f_R^{cut}.

3.1.4 Définition inductive de l'application associée à un réseau

Nous avons défini l'application sur les littéraux indexés associée à un préréseau R. Dans le cas particulier où R est un réseau, on peut déterminer l'application f_R par induction sur une construction du réseau au moyen d'opérations sur les applications partielles :

- Si R est réduit à un axiome $A^\perp, A$ alors f_R est la fonction de copie, définie par les deux conditions suivantes :

  $f_R(\vec{\imath}\alpha) = \vec{\imath}\alpha^\perp$ si $\vec{\imath}\alpha \in LI(A)$ et $\alpha^\perp$ est le littéral dual de α dans $A^\perp$,

  f_R est involutive.

- Si R de conclusion $\Gamma_1, A_1 \otimes A_2, \Gamma_2$ est obtenu par une règle $\otimes$ sur $R_i : \Gamma_i, A_i$ $(i = 1, 2)$, alors on a :
$$f_R(\vec{\imath}\alpha) = \begin{cases} f_{R_1}(\vec{\imath}\alpha) \text{ si } \vec{\imath}\alpha \in LI(\Gamma_1, A_1) \\ f_{R_2}(\vec{\imath}\alpha) \text{ si } \vec{\imath}\alpha \in LI(\Gamma_2, A_2) \end{cases} .$$
  On note $f_{R_1} \otimes f_{R_2}$ cette opération sur les applications.

- Si R de conclusion $\Gamma, A \parr B$ est obtenu par une règle $\parr$ sur $R' : \Gamma, A, B$, alors : $f_R = f_{R'}$, au domaine des littéraux près (les deux domaines sont en bijection évidente). On note $f_R = \parr (f_{R'})$.

- Si R de conclusion $\Gamma, ?A$ est obtenu par une règle déréliction sur $R' : \Gamma, A$, alors f_R est déterminée par :
$$\begin{array}{ll} f_R(\vec{\imath}\alpha) = f_{R'}(\vec{\imath}\alpha) & \text{si } \vec{\imath}\alpha \in LI(\Gamma) \text{ et } f_{R'}(\vec{\imath}\alpha) \in LI(\Gamma), \\ f_R(\vec{\imath}\alpha) = n_0.f_{R'}(\vec{\imath}\alpha) & \text{si } \vec{\imath}\alpha \in LI(\Gamma) \text{ et } f_{R'}(\vec{\imath}\alpha) \in LI(A), \\ f_R(n_0.\vec{\imath}\alpha) = n_0.f_{R'}(\vec{\imath}\alpha) & \text{si } \vec{\imath}\alpha \in LI(A) \text{ et } f_{R'}(\vec{\imath}\alpha) \in LI(A), \\ f_R \text{ est involutive.} & \end{array}$$
  On note $f_R = DE(f_{R'})$.

- Si R de conclusion $\Gamma, ?A$ est obtenu par une contraction à partir de $R' : \Gamma, ?A^{(1)}, ?A^{(2)}$ alors f_R est déterminée par :
$$\begin{array}{ll} f_R(\vec{\imath}\alpha) = f_{R'}(\vec{\imath}\alpha) & \text{si } \vec{\imath}\alpha \in LI(\Gamma) \text{ et } f_{R'}(\vec{\imath}\alpha) \in LI(\Gamma), \\ f_R(\vec{\imath}\alpha) = l(k).\vec{\jmath}\alpha^\perp & \text{si } \vec{\imath}\alpha \in LI(\Gamma) \text{ et} \\ & \qquad f_{R'}(\vec{\imath}\alpha) = k.\vec{\jmath}\alpha^\perp \in LI(?A^{(1)}), \\ f_R(\vec{\imath}\alpha) = r(k).\vec{\jmath}\alpha^\perp & \text{si } \vec{\imath}\alpha \in LI(\Gamma) \text{ et} \\ & \qquad f_{R'}(\vec{\imath}\alpha) = k.\vec{\jmath}\alpha^\perp \in LI(?A^{(2)}), \end{array}$$
$$f_R(l(k).\vec{\imath}\alpha) = \begin{cases} l(k').\vec{\jmath}\alpha^\perp & \text{si } f_{R'}(k.\vec{\imath}\alpha) = k'\vec{\jmath}\alpha^\perp \\ & \text{où } k.\vec{\imath}\alpha \in LI(?A^{(1)}), k'.\vec{\jmath}\alpha^\perp \in LI(?A^{(1)}), \\ r(k').\vec{\jmath}\alpha^\perp & \text{si } f_{R'}(k.\vec{\imath}\alpha) = k'\vec{\jmath}\alpha^\perp \\ & \text{où } k.\vec{\imath}\alpha \in LI(?A^{(1)}), k'.\vec{\jmath}\alpha^\perp \in LI(?A^{(2)}), \end{cases}$$
  $f_R(r(k).\vec{\imath}\alpha)$ déterminée de façon analogue.

  f_R est involutive.

  On note : $f_R = CO(f_{R'})$.

– Si R de conclusion $\Gamma, ?A$ est obtenu par une règle affaiblissement à partir de $R' : \Gamma$ alors : $f_R = f_{R'}$, au domaine près.

On note $f_R = WE(f_{R'})$.

– Si R de conclusion $?\Gamma, !A$ est obtenu par une promotion à partir de $R' : ?\Gamma, A$ alors f_R est déterminé par :

$$\begin{array}{ll} f_R(k.\vec{\imath}\alpha) = k.f_{R'}(\vec{\imath}\alpha) & \text{si } \vec{\imath}\alpha \in LI(A) \text{ et } f_{R'}(\vec{\imath}\alpha) \in LI(A), \\ f_R(k.\vec{\imath}\alpha) = \langle k, k'\rangle.\vec{\jmath}\alpha^\perp & \text{si } \vec{\imath}\alpha \in LI(A) \text{ et} \\ & \qquad f_{R'}(\vec{\imath}\alpha) = k'.\vec{\jmath}\alpha^\perp \in LI(?\Gamma), \\ f_R(\langle k, k'\rangle.\vec{\imath}\alpha) = \langle k, k''\rangle.\vec{\jmath}\alpha^\perp & \text{si } k'.\vec{\imath}\alpha \in LI(?\Gamma) \text{ et} \\ & \qquad f_{R'}(k'.\vec{\imath}\alpha) = k''.\vec{\jmath}\alpha^\perp \in LI(?\Gamma), \end{array}$$

f_R est involutive.

On note $f_R = PRO(f_{R'})$.

– Si R de conclusion Γ_1, Γ_2 est obtenu par une coupure sur $R_1 : \Gamma_1, A$ et $R_2 : A^\perp, \Gamma_2$, alors f_R est défini par :

$$f_R(\vec{\imath}\alpha) = \begin{cases} (f_{R_2} \circ f_{R_1})^n(\vec{\imath}\alpha) & \text{si } \vec{\imath}\alpha \in LI(\Gamma_1) \text{ et} \\ & \qquad (f_{R_2} \circ f_{R_1})^n(\vec{\imath}\alpha) \in LI(\Gamma_2), \\ f_{R_1} \circ (f_{R_2} \circ f_{R_1})^n(\vec{\imath}\alpha) & \text{si } \vec{\imath}\alpha \in LI(\Gamma_1) \text{ et} \\ & \qquad f_{R_1} \circ (f_{R_2} \circ f_{R_1})^n(\vec{\imath}\alpha) \in LI(\Gamma_1), \end{cases}$$

$f_R(\vec{\imath}\alpha)$ définie de façon analogue si $\vec{\imath}\alpha \in LI(\Gamma_2)$.

On note : $f_R = EX(f_{R_1}, f_{R_2})$. On va justifier cette notation dans la section suivante.

Lemme 3.7 *Pour un réseau R, l'application ainsi définie coïncide avec celle obtenue par la machine $\mathcal{M}_R$.*

Preuve :

Contentons-nous de le montrer pour le cas de la contraction. Les autres cas sont similaires.

Soit T (resp. T') l'application sur les configurations donnée par $\mathcal{M}_R$ (resp. $\mathcal{M}_{R'}$). Alors on a :

$$T(B\mu, \alpha, \vec{k}, \vec{l}) = T'(B\mu, \alpha, \vec{k}, \vec{l}) \qquad \text{si } B \neq ?A^{(1)}, ?A^{(2)}, ?A.$$

Par conséquent :

– Si $\vec{\imath}\alpha \in LI(\Gamma)$ et $f_{R'}(\vec{\imath}\alpha) = \vec{\jmath}\alpha^\perp \in LI(\Gamma)$, alors notons B_1 et B_2 les formules respectives de α et $\alpha^\perp$. Par définition de $f_{R'}$ on a pour un certain entier n :

$$T'^n(B_1\wedge, \alpha, \vec{\imath}, \epsilon) = (B_2\vee, \alpha^\perp, \vec{\jmath}, \epsilon).$$

On en déduit donc :

$$T^n(B_1\wedge, \alpha, \vec{\imath}, \epsilon) = (B_2\vee, \alpha^\perp, \vec{\jmath}, \epsilon),$$

d'où $f_R(\vec{\imath}\alpha) = \vec{\jmath}\alpha^\perp$.

– Si $\vec{\imath}\alpha \in LI(\Gamma)$ et $f_{R'}(\vec{\imath}\alpha) = k.\vec{\jmath}\alpha^\perp \in LI(?A^{(1)})$, notons B_1 la formule de α. On a :

$$T'^n(B_1\wedge, \alpha, \vec{\imath}, \epsilon) = (?A^{(1)}\vee, \alpha^\perp, k.\vec{\jmath}, \epsilon),$$

donc

$$\begin{array}{rrcl} & T^n(B_1\wedge, \alpha, \vec{\imath}, \epsilon) & = & (?A^{(1)}\vee, \alpha^\perp, k.\vec{\jmath}, \epsilon) \\ \text{d'où} & T^{n+1}(B_1\wedge, \alpha, \vec{\imath}, \epsilon) & = & T(?A^{(1)}\vee, \alpha^\perp, k.\vec{\jmath}, \epsilon) = (?A\vee, \alpha^\perp, l(k).\vec{\jmath}, \epsilon), \end{array}$$

donc $f_R(\vec{\imath}\alpha) = l(k).\vec{\jmath}\alpha^\perp$.

– Si $f_{R'}(k.\vec{\imath}\alpha) = k'.\vec{\jmath}\alpha^\perp$ avec $\alpha, \alpha^\perp \in L(?A^{(1)})$, alors

$$T'^n(?A^{(1)}\wedge, \alpha, k.\vec{\imath}, \epsilon) = (?A^{(1)}\vee, \alpha^\perp, k'.\vec{\jmath}, \epsilon),$$

donc

$$T^n(?A^{(1)}\wedge, \alpha, k.\vec{\imath}, \epsilon) = (?A^{(1)}\vee, \alpha^\perp, k'.\vec{\jmath}, \epsilon).$$

Or

$$\begin{array}{rrcl} & T(?A\wedge, \alpha, l(k).\vec{\imath}, \epsilon) & = & (?A^{(1)}\wedge, \alpha, k.\vec{\imath}, \epsilon), \\ \text{et} & T(?A^{(1)}\vee, \alpha^\perp, k'.\vec{\jmath}, \epsilon) & = & (?A\vee, \alpha^\perp, l(k').\vec{\jmath}, \epsilon), \end{array}$$

donc

$$T^{n+2}(?A\wedge, \alpha, l(k).\vec{\imath}, \epsilon) = (?A\vee, \alpha^\perp, l(k').\vec{\jmath}, \epsilon),$$

soit $f_R(l(k).\vec{\imath}\alpha) = l(k').\vec{\jmath}\alpha^\perp$.

– Idem pour les autres cas. □

3.1.5 L'application f_R et la géométrie de l'interaction

La définition de l'application f_R est en fait une adaptation aux préréseaux typés dans MELL du *modèle des applications partielles* de la géométrie de l'interaction (*petit modèle*). Dans ce modèle une application partielle de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ est associée à chaque chemin de R. Des *réseaux purs* peuvent aussi être interprétés (voir [Dan90, Reg92, DR95]). Le typage du réseau permet ici de remplacer les applications $\mathbb{N} \rightharpoondown \mathbb{N}$ par des applications partielles sur les jetons, c'est-à-dire que l'information multiplicative et exponentielle n'est pas codée dans un seul entier mais reste séparée dans la donnée d'un littéral et de deux piles.

Le calcul de f_R est le calcul de l'*exécution* du préréseau dans le modèle ; dans le cas où R est un réseau le théorème de terminaison de Girard ([Gir88]) implique que le calcul de f_R est fini, autrement dit tous les runs de la machine $\mathcal{M}_R$ sont de longueur finie.

Rappelons que Danos et Regnier ont donné dans [DR95] une interprétation géométrique des chemins dans le réseau R associés au calcul de f_R : ce sont les *chemins persistants* du réseau, c'est-à-dire les chemins préservés par n'importe quelle succession d'étapes de réduction.

Dans le chapitre 7 nous nous intéresserons à un modèle de géométrie de l'interaction où les indices entiers sont remplacés par des termes sur un language de fonctions unaires et la composition des applications par l'opération de résolution sur des clauses. Nous nous intéresserons en fait au cas où l'information reste cloisonnée à chaque profondeur, ce qui reviendrait ici à dire que T laisse invariante la somme $(|p_e| + |p_b|)$. Ce modèle permet d'interpréter la *logique linéaire élémentaire*. Nous aborderons alors le problème de la longueur du calcul d'exécution dans ce modèle, soit dans le language que nous venons d'utiliser, de la longueur des runs de la machine.

Enfin, pour terminer ces remarques sur l'application f_R soulignons que dans le cas général d'un réseau R de MELL et contrairement au cas simplement multiplicatif, l'interprétation f_R n'est pas un invariant de la normalisation. Les étapes de réduction multiplicative laissent f_R inchangée mais ce n'est pas le cas des réductions exponentielles. Considérer l'exemple de la figure 3.1 : le réseau R se réduit en R' mais les deux applications f_R et $f_{R'}$ ne sont pas identiques ; en effet pour tout entier i on a :

$$f_R(< i, n_0 > \alpha_1^\perp) =< i, n_0 > \alpha_1,$$

alors que le seul littéral indexé de la forme $j\,\alpha_1^\perp$ sur lequel $f_{R'}$ est définie est $n_0\,\alpha_1^\perp$:

$$f_R(n_0\,\alpha_1^\perp) = n_0\,\alpha_1.$$

C'est tout l'objet du passage de l'interprétation par une application à l'interprétation par une stratégie que de passer d'une sémantique "calculatoire" à une sémantique dénotationnelle.

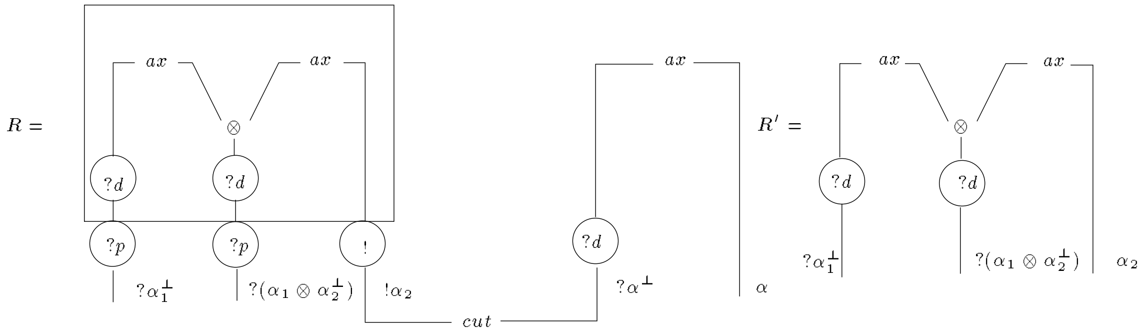


FIG. 3.1: *Contre-exemple à la préservation de f_R par réduction*

3.2 Interprétation d'un réseau par une stratégie

3.2.1 Définitions, constructions exponentielles

Afin d'interpréter un réseau de MELL par une stratégie il nous faut des jeux interprétant les formules exponentielles. Nous introduisons donc une construction ! sur les jeux (due à Abramsky *et al.*, voir [AJM95]).

Définition 3.8 *Un jeu A étant donné, le jeu $!A$ est défini par :*

- *$M_{!A} = \mathbb{N} \times M_A$; les éléments de $M_{!A}$ sont notés $i.m$ et i est l'*indice *du coup ; si s est une suite sur $M_{!A}$ et i est un entier, s_i désignera la suite de M_A obtenue à partir de s en ne gardant que les coups de la forme $i.m$ remplacés chacun par le coup m de M_A correspondant ;*
- *$\lambda_{!A}(i.m) = \lambda_A(m)$;*
- *$s \in P_{!A}$ si s est alternée, pour tout i on a $(s_i \in P_A)$ (condition de projection) et seul l'Opposant peut changer d'indice (condition de switching) : si $i.m$ et $j.m'$ sont deux coups consécutifs de s et $j \neq i$ alors $\lambda_{!A}(j.m') = O$;*
- *$\equiv_{!A}$ est donnée par : $s \equiv s'$ si $|s| = |s'|$ et s'il existe une permutation θ de $\mathbb{N}$ telle que : pour tout $n \leq |s|$, le n-ième coup de s' a pour indice $\theta(i)$ ssi le n-ième coup de s a pour indice i, et pour tout i on a : $s_i \equiv_A s'_{\theta(i)}$.*

Notons qu'il s'agit de la première opération sur les jeux que nous rencontrons qui définit une relation d'équivalence non triviale. La construction ? est obtenue dualement : $?A = (!A^\perp)^\perp$.

Nous pouvons maintenant faire le lien entre coups et littéraux indexés : pour une formule A de MELL il suit des définitions précédentes que l'ensemble de coups M_A est en bijection avec l'ensemble $\{(\vec{\imath}.\alpha, m_\alpha),\ \ \vec{\imath}.\alpha \in LI(A), m_\alpha \in M_{\alpha^*}\}$. Cette représentation des coups va nous permettre d'adapter la notion de projection suivant une sous-formule du chapitre 2 en projection suivant une sous-formule indexée.

Définition 3.9 *Étant donnés une formule A de MELL, une sous-formule indexée $\vec{\imath}B$ de A et $m = (\vec{\jmath}\alpha, m_\alpha)$ un coup de M_A, la* projection de m suivant $\vec{\imath}B$ *est :*

- *indéfinie si α n'est pas un littéral de B ou s'il n'existe pas de suite $\vec{k}$ telle que $\vec{\jmath} = \vec{\imath}.\vec{k}$,*
- *$(\vec{k}.\alpha, m_\alpha) \in M_B$, si α est un littéral de B et $\vec{\jmath} = \vec{\imath}.\vec{k}$.*

On notera $(m)_{\vec{\imath}B}$ la projection de m suivant $\vec{\imath}B$ et on conviendra que $(m)_{\vec{\imath}B} = \epsilon$ (le mot vide) si cette projection n'est pas définie.

Définition 3.10 *Si $\vec{\imath}B$ est une sous-formule indexée de A et s est une suite sur M_A, la* projection de s suivant $\vec{\imath}B$ *(notée $s_{\vec{\imath}B}$) est la suite sur M_B obtenue par concaténation des projections des coups de s.*

On obtient alors naturellement le lemme suivant :

Lemme 3.11 *Si s appartient à P_A et $\vec{\imath}B$ est une sous-formule indexée de A, alors $s_{\vec{\imath}B}$ appartient à P_B.*

3.2.2 Une présentation alternative de l'équivalence entre parties

Dans la suite nous considérerons comme jeux de base interprétant les formules atomiques des jeux munis d'une relation d'équivalence triviale (réduite à l'identité) sur les parties. Dans ce cas l'équivalence sur les parties d'un jeu A associé à une formule de MELL peut être exprimée au moyen d'*automorphismes* sur l'ensemble de coups M_A. Cette présentation de l'équivalence, introduite dans [AJM94], nous sera utile dans les chapitres suivants.

Définition 3.12 *L'ensemble* $\mathrm{Aut}(A)$ *des* automorphismes de coups *d'un jeu associé à une formule A de MELL est un sous-groupe du groupe des permutations de M_A défini par induction sur A de la manière suivante :*

- *si A est une formule atomique,* $\mathrm{Aut}(A) = \{id_{M_A}\}$,
- *si $A = A_1 m A_2$ où $m = \otimes$ ou $⅋$:*

$$\mathrm{Aut}(A) = \{\phi = [\phi_1, \phi_2],\ \phi_i \in \mathrm{Aut}(A_i)\ i = 1, 2\},\ \textit{où}$$

$$[\phi_1, \phi_2](m) = \phi_i(m)\ \textit{si}\ m \in M_{A_i},$$

- *si $A = \Box B$ où $\Box = !$ ou $?$, l'ensemble* $\mathrm{Aut}(A)$ *est défini par :*

$$\begin{array}{rl} \phi \in \mathrm{Aut}(A)\ \textit{ssi} & \exists \theta \in S(\mathbb{N})\ (\textit{ensemble des permutations de}\ \mathbb{N}) \\ & \exists (\phi_i)_{i \in \mathbb{N}} \in \mathrm{Aut}(B)^{\mathbb{N}} \\ \textit{tels que} & \forall i.m \in M_A,\ \phi(i.m) = \theta(i).\phi_i(m). \end{array}$$

Définition 3.13 *Étant donnée une application $f : M_A \to M_A$, on note $f^\star$ l'application sur l'ensemble ${M_A}^\star$ des suites finies de M_A définie par :*

$$f(m_1 m_2 \ldots m_n) = f(m_1) f(m_2) \ldots f(m_n).$$

Remarque 3.14 Si f appartient à $\mathrm{Aut}(A)$, alors $f^\star$ laisse invariant le sous-ensemble P_A de ${M_A}^\star$.

Lemme 3.15 *Supposons la relation d'équivalence sur les jeux interprétant les formules atomiques réduite à l'identité ; alors étant donné un jeu A associé à une formule de MELL, l'équivalence $\equiv_A$ sur P_A est donnée par :*

$$s \equiv_A t\ \textit{ssi}\ \exists \phi \in \mathrm{Aut}(A)\ \textit{tel que}\ t = \phi^\star(s).$$

Preuve : on le vérifie facilement par induction sur A. $\Box$

3.2.3 Application d'un réseau et stratégie induite

On considère maintenant le cas où R est un réseau. Comme dans le cas multiplicatif l'application f_R sur les littéraux indexés de Γ donne naturellement une application g_R sur les coups ; pour définir g_R nous utilisons la représentation des coups de M_Γ introduite dans 3.2.1 : si $m \in M_\Gamma$ est donné par $(\vec{\imath}\alpha, m_\alpha)$, alors $g_R(m) = m'$, où m' est donné par $(\vec{\jmath}\alpha^\perp, m_\alpha)$ avec $\vec{\jmath}\alpha^\perp = f_R(\vec{\imath}\alpha)$.

Dans la suite tant qu'il n'y aura pas d'ambiguïté nous noterons par commodité f_R aussi bien l'application sur les littéraux indexés que l'application sur les coups associée.

Proposition 3.16 *Si R est un réseau de MELL de conclusion Γ, alors l'application associée f_R induit une stratégie valide sur le jeu (classique) Γ.*

Preuve:

Montrer que l'application f_R induit une stratégie revient à montrer que pour toute suite sab alternée du jeu Γ commençant par un coup O et vérifiant les conditions suivantes :

- $\lambda_\Gamma(b) = P$ et $sa \in P_\Gamma$,
- pour tout préfixe tcd de sab tel que $\lambda_\Gamma(d) = P$ on a : $d = f_R(c)$ (le Joueur joue dans s suivant f_R) ; en particulier $b = f_R(a)$,

on a : $sab \in P_\Gamma$.

On le montre par induction sur une construction de R. Les cas des règles multiplicatives (axiome, coupure, règles $\otimes$ et $⅋$) ont déjà été traités au chapitre 2 et il ne nous reste donc que les cas des règles exponentielles.

- **Déréliction** : supposons l'hypothèse vraie pour un réseau R de conclusions A, Γ et R' obtenu à partir de R par une déréliction sur A.

  On veut montrer que pour $s'a'b'$ une suite de $M_{?A,\Gamma}$ alternée vérifiant les conditions ci-dessus (pour $f_{R'}$) on a : $s'a'b' \in P_{?A,\Gamma}$. Commençons par montrer que tous les coups de $s'a'b'$ dans $M_{?A}$ sont de la forme $n_0.m$. Comme la suite est de longueur paire, commence par l'Opposant et comme le Joueur suit la fonction $f_{R'}$, tout coup de $s'a'b'$ est soit dans le codomaine de $f_{R'}$ (si c'est un coup Joueur), soit dans le domaine de $f_{R'}$ (si c'est un coup Opposant). Or les éléments de $M_{?A}$ dans le domaine ou codomaine de $f_{R'}$ sont de premier indice n_0. On en déduit alors que pour $i \neq n_0$, $(s'a'b')_{A,i} = \epsilon$.

  On définit alors à partir de $s'a'b'$ une suite sab de $M_{A,\Gamma}$ de même longueur en remplaçant chaque coup $n_0.m$ dans $M_{?A}$ par m dans M_A. On a donc $(s'a'b')_{A,n_0} = (sab)_A$. Montrons que $sa \in P_{A,\Gamma}$. Ceci revient à montrer que la suite donne une partie valide du jeu $A ⅋ \Gamma$. Étant donné que $s'a'$ donnait une partie valide du jeu $(?A) ⅋ \Gamma$, on sait que la condition de switching et la condition de projection sur la composante Γ sont satisfaites par sa. De plus on a vu que $(sa)_A = (s'a')_{A,n_0}$, donc $((s'a')_{?A} \in P_{?A})$ nous donne $((sa)_A \in P_A)$. Par conséquent sa est une partie valide de $A ⅋ \Gamma$. Par ailleurs, vue la définition de $f_{R'}$ à partir de f_R et comme le Joueur suit $f_{R'}$ dans $s'a'b'$, le Joueur suit f_R dans sab. Les deux conditions nous permettent d'appliquer l'hypothèse d'induction à R et sab ; on a donc $sab \in P_{A⅋\Gamma}$.

  Revenant maintenant à $s'a'b'$, le fait que sab appartienne à $P_{A⅋\Gamma}$, que $(s'a'b')_{A,i}$ soit ϵ pour $i \neq n_0$ et $(sab)_A$ pour $i = n_0$ nous donne par les arguments déjà employés que $s'a'b'$ appartient à $P_{(?A)⅋\Gamma}$.

- **Contraction** : supposons l'hypothèse vraie pour un réseau R de conclusion $?A^{(1)}, ?A^{(2)}, \Gamma$ et R' obtenu à partir de R par une contraction sur $?A^{(1)}, ?A^{(2)}$.

On veut montrer que pour $s'a'b'$ une suite de $M_{?A,\Gamma}$ alternée vérifiant les conditions ci-dessus (pour $f_{R'}$) on a : $s'a'b' \in P_{?A,\Gamma}$. Tout d'abord on sait que tous les coups de $s'a'b'$ dans $M_{?A}$ sont de la forme $l(i).m$ ou $r(i).m$ pour un certain entier i : il suffit en effet d'appliquer le même argument que dans le cas de la déréliction en remarquant que les éléments de $M_{?A}$ du domaine ou codomaine de $f_{R'}$ sont de la forme $l(i).m$ ou $r(i).m$.

On définit alors à partir de $s'a'b'$ une suite sab de $M_{?A^{(1)},?A^{(2)},\Gamma}$ de même longueur en remplaçant chaque coup $l(i).m$ (resp. $r(i).m$) dans $M_{?A}$ par $i.m$ dans $M_{?A^{(1)}}$ (resp. $M_{?A^{(2)}}$).Pour montrer que la suite sa appartient alors à $P_{?A^{(1)},?A^{(2)},\Gamma}$ il suffit de montrer qu'elle donne une partie valide du jeu $(?A^{(1)} \parr ?A^{(2)}) \parr \Gamma$:

- la condition de projection suivant Γ est satisfaite car $(sa)_\Gamma = (s'a')_\Gamma$,
- la condition de switching pour le premier connecteur $\parr$ est valide car à chaque passage d'une composante $(?A^{(1)} \parr ?A^{(2)})$ à Γ (ou inversement) correspond un passage dans $s'a'$ d'une composante $?A$ à une composante Γ (ou inversement).
- la condition de projection suivant $(?A^{(1)} \parr ?A^{(2)})$ (ie $(sa)_{?A^{(1)}\parr ?A^{(2)}} \in P_{?A^{(1)}\parr ?A^{(2)}}$) est assurée par le fait que $(s'a')_{?A}$ satisfait la condition de switching dans le jeu exponentiel $?A$.

Alors sa appartient à $P_{?A^{(1)},?A^{(2)},\Gamma}$ et le Joueur suit dans sab l'application f_R, donc par h.i. on déduit que sab appartient à $P_{?A^{(1)},?A^{(2)},\Gamma}$. Comme précédemment ceci nous donne que $s'a'b'$ appartient finalement bien à $P_{?A,\Gamma}$.

- **Affaiblissement** : On suppose l'hypothèse vraie pour un réseau R de conclusion Γ et R' obtenu à partir de R par un affaiblissement, de conclusion $?A, \Gamma$.

  Si sab vérifie les conditions précédentes relativement à $f_{R'}$, alors aucun coup de sab n'est dans $?A$, donc $sa \in P_\Gamma$. De plus $f_{R'}(a) = b$ nous donne $f_R(a) = b$ et donc par h.i. sur R on a : $sab \in P_\Gamma$. Par conséquent sab appartient bien à $P_{?A,\Gamma}$.

- **Promotion** : Supposons l'hypothèse vraie pour un réseau R de conclusion $?\Gamma, B$ et R' obtenu à partir de R par une promotion, de conclusion $?\Gamma, !B$.

  Supposons que $s'a'b'$ vérifie les conditions précédentes relativement à $f_{R'}$. On introduit une nouvelle notation : pour une suite t de $M_{?\Gamma,!B}$ et i un entier, t^i désigne la suite de $M_{?\Gamma,B}$ (éventuellement vide) obtenue par la transformation suivante : seuls les coups de la forme $< i, j > .m$ dans $M_{?A_k}$ ou $i.m$ dans $M_{!B}$ sont gardés et remplacés respectivement par le coup $j.m$ dans $M_{?A_k}$ ou m dans M_B. L'entier i sera appelé *indice d'exemplaire* de ces coups.

  Appelons i_0 l'indice d'exemplaire du coup a' et a le coup associé, alors $(s'a')^{i_0}$ appartient à $P_{?\Gamma,B}$ et vérifie les conditions relativement à f_R. De plus l'interprétation de la promotion par les applications nous donne : b' est d'indice d'exemplaire i_0 et si b désigne le coup associé on a $b = f_R(a)$. Donc par h.i., $(s'a')^{i_0}b$ appartient à $P_{?\Gamma,B}$, soit $(s'a'b')^{i_0}$ appartient à $P_{?\Gamma,B}$. Montrons que ceci nous donne que $s'a'b'$ est une partie de $?\Gamma, !B$.

  Comme $(s'a'b')^{i_0} = (s')^{i_0}ab$ appartient à $P_{?\Gamma,B}$, on sait que le coup b' dans $s'a'b'$ respecte la condition de switching pour les connecteurs $\parr$ extérieurs. Il reste à vérifier qu'il satisfait les conditions de projection, c'est-à-dire que $(s'a'b')_{?A_k} \in P_{?A_k}$ et $(s'a'b')_{!B} \in P_{!B}$.

  Pour la première de ces conditions, comme b' est un coup Joueur il nous suffit de vérifier que pour tout entier l, $(s'a'b')_{A_k,l} \in P_{A_k}$. Or il existe i, j tels que $l =< i, j >$ et

  - si $i \neq i_0$ on a $(s'a'b')_{A_k,<i,j>} = (s')_{A_k,<i,j>} \in P_{A_k}$,
  - si $i = i_0$, $(s'a'b')_{A_k,<i_0,j>} = ((s'a'b')^{i_0})_{A_k,j} \in P_{A_k}$.

Pour la seconde condition, commençons par montrer que $(s'a'b')_{!B}$ vérifie la condition de switching pour !. On utilise le résultat intermédiaire suivant :

Lemme 3.17 *R' étant un réseau obtenu par promotion, de conclusion $?\Gamma, !B$, et t une partie du jeu associé où le Joueur suit $f_{R'}$, alors dans t les changements d'indice d'exemplaire sont faits par l'Opposant et dans la composante $!B$ (par changement d'indice d'exemplaire on entend la succession de deux coups d'indices d'exemplaires différents).*

Preuve du lemme :

Considérons deux coups successifs a et b dans t. Si b est un coup Joueur alors $b = f_{R'}(a)$ et comme R' est obtenu par une promotion, ceci nous donne que a et b ont même indice d'exemplaire.

Maintenant si b est un coup Opposant, alors comme t est une partie de $?\Gamma, !B$ par la condition de switching pour les connecteurs $\parr$ extérieurs on sait que a et b sont dans la même composante $?A_k$ ou $!B$. Si a et b sont dans la même composante $?A_k$, alors par la condition de switching pour $(t)_{?A_k}$ on sait que a et b ont même premier indice, et par conséquent même indice d'exemplaire.

Finalement le seul cas où les deux coups successifs a et b peuvent être d'indices d'exemplaire différents est celui où b est un coup Opposant et où a et b sont joués dans la composante $!B$. □

Comme a' est d'indice d'exemplaire i_0 :

- soit il n'y a pas eu dans $s'a'$ de changement d'indice d'exemplaire, auquel cas il n'y a pas de changement d'indice dans $(s'a'b')_{!B}$ et la condition de switching est vérifiée,
- soit le dernier changement d'indice d'exemplaire a été fait par l'Opposant dans $!B$ et par conséquent $(s'a')_{!B}$ termine par un coup d'indice i_0 ; alors b' satisfait la condition de switching dans $(s'a'b')_{!B}$.

Quant à la condition de projection pour $(s'a'b')_{!B}$, si $i \neq i_0$ on a $(s'a'b')_{!B,i} = s'_{!B,i} \in P_B$, si $i = i_0$ on a $(s'a'b')_{!B,i_0} = ((s'a'b')^{i_0})_B \in P_B$.

On a donc finalement $((s'a'b')_{!B} \in P_{!B})$ et par conséquent : $(s'a'b') \in P_{?\Gamma,!B}$.

Ce cas achève la preuve par induction. □

3.2.4 Opérations logiques sur les applications et sur les stratégies

Rappelons qu'on a fixé un choix de codages, c'est-à-dire une constante n_0, deux injections $l, r : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ de codomaines disjoints et une bijection $< .,. >: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$.

Les opérations sur les fonctions de stratégie de 3.1.4 correspondent à des opérations sur les stratégies. Pour le mettre en évidence, commençons par introduire les stratégies exponentielles de base :

- Sur $?A^\perp, A$, l'application d est donnée par :

  $d(m) = n_0.m$ pour $m \in M_A^O$, et
  $d(n_0.m) = m$ pour $m \in M_A^P$ (l'application d n'est pas définie sur les autres coups).

  Cette application induit une stratégie sur le jeu $?A^\perp, A$ qu'on désignera par der_A.

- Sur $?A^\perp, !A^{(1)} \otimes !A^{(2)}$ l'application c est donnée par :
  $c(i.m) = l(i).m \in M_{?A^\perp}$ pour $i.m \in M^O_{!A^{(1)}}$, (resp. remplacer l par r et $!A^{(1)}$ par $!A^{(2)}$), inversement $c(l(i).m) = i.m \in M_{!A^{(1)}}$ (resp. remplacer l par r et $!A^{(1)}$ par $!A^{(2)}$).

  Cette application induit une stratégie notée co_A sur $?A^\perp, !A \otimes !A$.
- Sur $?A^\perp, I$ l'application nulle part définie induit la stratégie $weak_A = \{\epsilon\}$.
- Sur $?A^\perp, !!A$ l'application aux est donnée par :
  $aux(i.j.m) =< i,j > .m \in M_{?A^\perp}$ pour $i.j.m \in M^O_{!!A}$
  et inversement : $aux(< i,j > .m) = i.j.m \in M_{!!A}$ pour $< i,j > .m \in M^O_{?A^\perp}$.

  Cette application induit une stratégie notée δ_A sur $?A^\perp, !!A$.

On convient de prendre $n_0 = 0$ et l, r définies par: $l(i) = 2i, r(i) = 2i + 1$ pour $i \in \mathbb{N}$. Cependant les propriétés énoncées sur ces stratégies ne dépendront pas de ces choix de codage.

On définit maintenant une construction ! "multifonctorielle" sur les stratégies qui est un analogue infini de la construction $\otimes$ précédente :

Définition 3.18 *Soit σ une stratégie sur $B_1^\perp, \ldots, B_n^\perp, A$. Étant donnée une partie s du jeu $?B_1^\perp, \ldots, ?B_n^\perp, !A$ et un entier i, on désignera ici par s_i la suite de coups sur $B_1^\perp, \ldots, B_n^\perp, A$ obtenue en ne gardant que les coups de la forme $i.m$ (avec m dans un $B_k^\perp$ ou dans A) remplacés par le coup m correspondant. Alors on définit :*

$$!\sigma \quad = \quad \{s \in P_{?B_1^\perp,\ldots,?B_n^\perp,!A} / \quad \forall i \in \mathbb{N}, s_i \in \sigma\}$$

L'ensemble $!\sigma$ est alors bien une stratégie. Comme pour la construction $\otimes$, on remarque que dans une partie de $!\sigma$ les changements d'indice ne peuvent être faits que par l'Opposant dans $!A$, à cause des conditions de switching.

Définition 3.19 *Soit σ une stratégie sur $?B_1^\perp, \ldots, ?B_n^\perp, A$. On pose : $\sigma^! = (\delta_{B_1} \otimes \ldots \otimes \delta_{B_n}); !\sigma$. $\sigma^!$ est une stratégie sur $?B_1^\perp, \ldots, ?B_n^\perp, !A$.*

Définissons maintenant les opérations logiques exponentielles sur les stratégies :

Définition 3.20 *Pour σ une stratégie sur le jeu spécifié on introduit la stratégie suivante :*

$$\begin{array}{llcll}
\sigma : A^\perp, \Gamma & DE(\sigma) & = & der_A; \sigma & \textit{soit} \quad DE(\sigma) : ?A^\perp, \Gamma, \\
\sigma : ?A^\perp, ?A^\perp, \Gamma & CO(\sigma) & = & co_A; \sigma & \textit{soit} \quad CO(\sigma) : ?A^\perp, \Gamma, \\
\sigma : \Gamma & WE(\sigma) & = & weak_A \otimes \sigma & \textit{soit} \quad WE(\sigma) : ?A^\perp, \Gamma, \\
\sigma : ?\Gamma, A & PR(\sigma) & = & \sigma^! & \textit{soit} \quad PR(\sigma) : ?\Gamma, !A
\end{array}$$

Pour la définition de $WE(\sigma)$ on a utilisé implicitement l'isomorphisme de jeux entre $B \otimes I$ et B.

Proposition 3.21 *Pour toute opération logique unaire Σ (resp. binaire Σ') on a :*

$$\begin{array}{rcl}
\sigma_{\Sigma(f)} & = & \Sigma(\sigma_f) \\
(\textit{resp.} \ \sigma_{\Sigma'(f_1,f_2)} & = & \Sigma'(\sigma_{f_1}, \sigma_{f_2})\,).
\end{array}$$

Soit plus précisément si f, f_1, f_2 sont des fonctions de stratégie sur les jeux adéquats :

$$\begin{array}{rclrcl}
\sigma_{f_1 \otimes f_2} & = & \sigma_{f_1} \otimes \sigma_{f_2}, & \sigma_{EX(f_1,f_2)} & = & \sigma_{f_1}; \sigma_{f_2}, \\
\sigma_{⅋(f)} & = & ⅋\,(\sigma_f), & & & \\
\sigma_{DE(f)} & = & DE(\sigma_f), & \sigma_{CO(f)} & = & CO(\sigma_f), \\
\sigma_{WE(f)} & = & WE(\sigma_f), & \sigma_{PR(f)} & = & PR(\sigma_f).
\end{array}$$

Preuve :

C'est une conséquence des définitions des opérations logiques sur les applications et les stratégies et de la composition de stratégies. Justifions le par exemple pour le cas de la contraction. Soit f une fonction de stratégie sur $?A, ?A, \Gamma$. D'après la proposition 2.14 on sait que la stratégie $CO(\sigma_f) = co_A; \sigma_f$ est sans-mémoire et induite par la fonction $g = EX(c, f)$, où :

$$\begin{array}{rlcl} c: & M^O_{?A^\perp,!A^{(1)}\otimes !A^{(2)}} & \rightharpoonup & M^P_{?A^\perp,!A^{(1)}\otimes !A^{(2)}} \\ f: & M^O_{?A^{(1)},?A^{(2)},\Gamma} & \rightharpoonup & M^P_{?A^{(1)},?A^{(2)},\Gamma} \end{array}$$

Prenons m dans Γ et mettons par exemple que $f(m) = k.m' \in M_{?A^{(1)}}$. Alors $c(k.m') = l(k).m' \in M_{?A^\perp}$ et par conséquent on a $g(m) = l(k).m' = CO(f)(m)$. Dans les autres cas on obtient de la même manière $g(m) = CO(f)(m)$; par conséquent $EX(c, f) = CO(f)$. □

3.3 La catégorie $\mathcal{IG}$ d'Abramsky-Jagadeesan-Malacaria

Cette section est consacrée à la description de la catégorie introduite dans [AJM94, AJM95] et que nous désignerons par $\mathcal{IG}$.

3.3.1 Jeux intuitionnistes

Définition 3.22 *Un* jeu intuitionniste *est un jeu $A = (M_A, \lambda_A, P_A, \equiv_A)$ tel que :*

$$as \in P_A \Rightarrow \lambda_A(a) = O.$$

Les constructions $\otimes$ et ! appliquées à des jeux intuitionnistes donnent bien des jeux intuitionnistes. De plus, ainsi qu'il est noté dans [AJM95] la condition de switching est dans ces cas une conséquence de la condition de projection. Par contre, l'orthogonal n'étant pas défini sur ces objets il nous faut donner la construction $\multimap$ directement :

Définition 3.23 *Deux jeux intuitionnistes A et B étant donnés, le jeu intuitionniste $A \multimap B$ est défini par :*

- $M_A + M_B$;
- $[\bar{\lambda}_A, \lambda_B]$;
- $s \in P_{A \multimap B}$ *si s est alternée, commence par un coup O et $s_A \in P_A$, $s_B \in P_B$,*
- $\equiv_{A\multimap B}$ *est donnée par : ($s \equiv_{A\multimap B} s'$) si s et s' sont de même longueur, si pour $n \leq |s|$ les nèmes coups respectifs de s et s' sont dans la même composante et si on a : $s_A \equiv_A s'_A$ et $s_B \equiv_B s'_B$.*

Soulignons que cette construction n'est pas la même que celle du 2.2.1 à cause de la condition demandant que les parties commencent par un coup O. Une *stratégie intuitionniste* est une stratégie d'un jeu intuitionniste.

On veut associer à toute formule du fragment $\multimap, \otimes, !$ de LL un jeu intuitionniste. Pour cela on choisit pour interpréter les formules atomiques positives des jeux de base (intuitionnistes) de la forme :

$$M_\alpha = \{\alpha^O, \alpha^P\} \quad P_\alpha = \{\epsilon, \alpha^O, \alpha^O\alpha^P\},$$

avec $\lambda_\alpha(\alpha^O) = O$, $\lambda_\alpha(\alpha^P) = P$.

À partir de maintenant et pour le reste de ce chapitre, en l'absence de précision contraire l'interprétation des formules sera celle par les jeux intuitionnistes que nous avons définis dans cette section (qui ne coïncide pas en général avec l'interprétation des formules faite dans le chapitre 2). Un séquent intuitionniste $A_1, \ldots, A_n \vdash B$ sera interprété par le jeu intuitionniste associé à la formule $(A_1 \multimap (A_2 \multimap \ldots (A_n \multimap B) \ldots))$.

3.3.2 Composition

La composition de stratégies intuitionnistes $\sigma : A \multimap B$ et $\tau : B \multimap C$ est définie de manière analogue à celle des stratégies classiques (voir 2.2.3) : on obtient une stratégie intuitionniste $\sigma;\tau : A \multimap C$. La stratégie identité intuitionniste $id_A : A \multimap A$ est la stratégie induite par la fonction de copie sur le jeu intuitionniste $A \multimap A$. Noter qu'elle est différente de la stratégie identité du jeu classique $A^\perp, A$ car toutes ses parties non vides commencent par un coup dans la composante de droite.

Nous introduisons maintenant la relation d'équivalence partielle sur les stratégies intuitionnistes sans-mémoire évoquée dans l'introduction :

Définition 3.24 *Étant donné un jeu intuitionniste A, deux stratégies sans-mémoire σ et σ' sont dites* équivalentes *($\sigma \sim_A \sigma'$) si :*

($sab \in \sigma$, $\lambda_A(a) = O$, $s'a' \in \sigma'$, $sa \equiv s'a'$) implique qu'il existe b' tel que ($s'a'b' \in \sigma'$ et $s'a'b' \equiv sab$) ; et la condition symétrique (intervertir les rôles de σ et σ').

Ceci définit une relation d'équivalence partielle sur l'ensemble des stratégies sans-mémoire de A.

Nous dirons que $\sigma : A$ est auto-équivalente *si $\sigma \sim_A \sigma$ et nous désignerons alors par $\langle\sigma\rangle$ sa classe d'équivalence.*

En particulier les stratégies identités $id_A : A \multimap A$ sont auto-équivalentes.

Remarque 3.25 Nous aurions pu définir plus généralement la relation d'équivalence partielle sur les stratégies au lieu des stratégies sans-mémoire, mais notons que dans ce cas une stratégie équivalente à une stratégie sans-mémoire n'est pas nécessairement sans-mémoire : par exemple si $\sigma : !A \multimap !A$ est la stratégie de copie avec A un jeu de base, considérons la stratégie τ définie comme la clôture par préfixes de l'ensemble de parties suivant :

$$
\begin{array}{ccc}
!A & \multimap & !A \\
 & & i_0.a \\
0.a & & \\
0.b & & \\
 & & i_0.b \\
 & & i_1.a \\
1.a & & \\
1.b & & \\
 & & i_1.b \\
 & \vdots & \\
n.b & & \\
 & & i_n.b
\end{array}
$$

où $ab \in P_A$ et les i_k sont deux à deux distincts.

On peut vérifier que $\sigma \sim \tau$ et que τ n'est pas sans-mémoire.

L'ensemble des stratégies sans-mémoire est stable par composition et la composition est compatible avec la relation d'équivalence partielle donnée ci-dessus :

Proposition 3.26 *([AJM95])*
Si σ et σ' (resp. τ et τ') sont deux stratégies de $A \multimap B$ (resp. $B \multimap C$) vérifiant $\sigma \sim_{A\multimap B} \sigma'$ (resp. $\tau \sim_{B\multimap C} \tau'$) alors on a : $\sigma;\tau \sim_{A\multimap C} \sigma';\tau'$.

Cette propriété permet de définir la composition des classes d'équivalence de stratégies (qui sera aussi notée ";") : pour σ et τ des stratégies auto-équivalentes sur des jeux appropriés on pose : $\langle\sigma\rangle;\langle\tau\rangle = \langle\sigma;\tau\rangle$.

La catégorie $\mathcal{IG}$ est la catégorie admettant pour objets les jeux intuitionnistes et pour morphismes de A vers B les classes d'équivalence de stratégies sans-mémoire auto-équivalentes de $A \multimap B$.

3.3.3 $\mathcal{IG}$ est un modèle de IMELL

Structure monoïdale et clôture

L'action du bifoncteur $\otimes$ sur les stratégies intuitionnistes est définie comme dans le 2.2.4 : étant données deux stratégies $\sigma_i : A_i \multimap B_i$ $i = 1,2$ la stratégie $\sigma_1 \otimes \sigma_2 : (A_1 \otimes A_2) \multimap (B_1 \otimes B_2)$ est

$$\sigma_1 \otimes \sigma_2 = \{s \in P_{(A_1\otimes A_2)\multimap(B_1\otimes B_2)} / s_{A_i,B_i} \in \sigma_i \text{ pour } i = 1,2\}.$$

Si les deux stratégies sont sans-mémoire le résultat est sans-mémoire, d'application f donnée par :

$$f(m) \text{ est définie si } f_i(m) \text{ est définie et dans ce cas } f(m) = f_i(m),$$
$$\text{où } i \text{ est tel que } m \in M_{A_i} \cup M_{B_i} \text{ et } f_i \text{ est l'application de } \sigma_i.$$

Cette construction est compatible avec la relation $\sim$, ce qui permet de définir le tenseur sur les morphismes de $\mathcal{IG}$.

En prenant pour objet unité du tenseur le jeu trivial I d'ensemble de coups vide on obtient sur $\mathcal{IG}$ une structure de catégorie monoïdale symétrique.

L'adjonction est obtenue à partir de la construction $\multimap$ par la bijection :

$$\alpha : \mathcal{IG}[A \otimes B, C] \to \mathcal{IG}[A, B \multimap C]$$

induite par la bijection "naturelle" entre les espaces de coups $M_{(A\otimes B)\multimap C}$ et $M_{A\multimap(B\multimap C)}$.

$\mathcal{IG}$ est une catégorie monoïdale close.

Structure exponentielle

Rappelons qu'une application partielle $f : M_A^O \rightharpoonup M_A^P$ induit une stratégie sur le jeu A si l'ensemble σ_f suivant (défini inductivement) est une stratégie : $\sigma_f = \{\epsilon\} \cup \{sab/s \in \sigma_f, sa \in P_A \text{ et } f(a) = b\}$. Par conséquent la stratégie induite par une application dépend à la fois de l'application et du jeu sur laquelle elle est donnée.

Soit A un jeu intuitionniste. On reprend les applications données au 3.2.4 mais en considérant maintenant les jeux *intuitionnistes* $!A \multimap A$, $!A \multimap !A \otimes !A$, $!A \multimap I$ et $!A \multimap !!A$. Elles induisent des stratégies sur ces jeux qu'on note (aussi) respectivement der_A, co_A, $weak_A$ et δ_A. Soulignons qu'elles sont différentes des stratégies définies dans le 3.2.4. En effet la stratégie déréliction intuitionniste par exemple ne contient pas de partie de la forme : $\begin{array}{lll} !A \multimap & A & ; \\ 0\alpha^O & & \\ & \alpha^P & \end{array}$

ces parties sont par contre jouées par la stratégie déréliction classique.

Enfin, ces stratégies sont auto-équivalentes et on peut donc considérer leurs classes d'équivalence qui seront les morphismes exponentiels pour $\mathcal{IG}$:

$$\langle der_A \rangle \in \mathcal{IG}[!A, A], \quad \langle co_A \rangle \in \mathcal{IG}[!A, !A \otimes !A],$$
$$\langle weak_A \rangle \in \mathcal{IG}[!A, I], \quad \langle \delta_A \rangle \in \mathcal{IG}[!A, !!A].$$

On définit maintenant dans $\mathcal{IG}$ l'analogue de la construction ! sur les stratégies de la catégorie $\mathcal{G}$ (faite dans 3.2.4). Soit σ une stratégie sans-mémoire sur un jeu de la forme $(A_1 \otimes A_2 \otimes \ldots \otimes A_n) \multimap B$, alors on définit $!\sigma : (!A_1 \otimes !A_2 \otimes \ldots \otimes !A_n) \multimap !B$ de la manière suivante :

pour i entier et $s \in P_{(!A_1 \otimes !A_2 \otimes \ldots \otimes !A_n) \multimap !B}$, s_i est la restriction de s aux coups de la forme $i.m$ remplacés chacun par le coup correspondant m ; alors

$$!\sigma = \{s \in P_{(!A_1 \otimes !A_2 \otimes \ldots \otimes !A_n) \multimap !B} / \quad \forall i \quad s_i \in \sigma\}.$$

La stratégie $!\sigma$ est alors sans-mémoire et est induite par la fonction f suivante sur l'ensemble $M_{(!A_1 \otimes !A_2 \otimes \ldots \otimes !A_n) \multimap !B}$:

$$f(i.m) = i.m' \text{ ssi } f_\sigma(m) = m'$$

où f_σ est la fonction de la stratégie sans-mémoire σ.

Maintenant, étant donnée $\langle \sigma \rangle$ dans $\mathcal{IG}[!A_1 \otimes \ldots \otimes !A_n, B]$, sa promotion est définie comme $\langle \sigma^! \rangle$, où :

$$\sigma^! = (\delta_{A_1} \otimes \ldots \otimes \delta_{A_n}); (!\sigma).$$

Cette construction ne dépend pas du représentant σ choisi dans $\langle \sigma \rangle$: $(\sigma \sim \tau) \Rightarrow (!\sigma \sim !\tau)$ et $(\sigma^! \sim \tau^!)$.

Validité du modèle

La structure de catégorie monoïdale close fait de $\mathcal{IG}$ un modèle de la logique linéaire intuitionniste multiplicative exponentielle. Les morphismes introduits dans le paragraphe précédent ainsi que la construction promotion permettent d'interpréter les règles exponentielles ; la validité des étapes de réduction exponentielle des réseaux de IMELL est assurée par les égalités suivantes :

$$\begin{array}{rcl} \langle \sigma^! \rangle; \langle der_B \rangle & = & \langle \sigma \rangle \\ \langle \sigma^! \rangle; \langle co_B \rangle & = & \langle co_\Gamma \rangle; (\langle \sigma^! \rangle \otimes \langle \sigma^! \rangle) \\ \langle \sigma^! \rangle; \langle weak_B \rangle & = & \langle weak_{A_1} \otimes \ldots \otimes weak_{A_n} \rangle \\ \langle \sigma^! \rangle; \langle \tau^! \rangle & = & \langle (\sigma^!; \tau)^! \rangle \end{array}$$

pour σ, τ définis sur les jeux adéquats.

3.4 Les deux interprétations des preuves intuitionnistes coïncident

On a maintenant deux manières d'associer une classe d'équivalence de stratégies à une preuve de IMELL :

- une manière "catégorique" : les propriétés de la catégorie $\mathcal{IG}$ nous permettent d'associer à toute preuve de IMELL un morphisme.

– une manière “dynamique” : prendre l'application f_R donnée par le réseau associé à la preuve, et dans le cas où cette application induirait une stratégie (intuitionniste) et où cette stratégie serait auto-équivalente, prendre la classe d'équivalence de σ_{f_R}.

On va montrer que la deuxième interprétation est possible et que ces deux interprétations sont les mêmes (pour une extension de ce résultat à PCF sans opérateurs de point fixe on peut voir [Bai96]).

Théorème 3.27 *Étant donnée π une preuve de IMELL de conclusion $\Gamma \vdash B$, on considère d'une part son interprétation $\langle \sigma_\pi \rangle$ dans $\mathcal{IG}$, d'autre part R le réseau donné par π et f_R l'application associée.*

Alors l'application f_R induit bien une stratégie σ_{f_R} sur le jeu intuitionniste associé à $\Gamma \vdash B$ et on a : $\sigma_{f_R} \in \langle \sigma_\pi \rangle$.

Preuve :

On le montre par induction sur π :

– Axiome :

La fonction f_R induit la stratégie intuitionniste de copie qui bien sûr appartient à $\langle \sigma_\pi \rangle$.

– Coupure :

La preuve π de conclusion $\Gamma_1, \Gamma_2 \vdash B_2$ est obtenue par une règle de coupure à partir de π_1 et π_2 de conclusions respectives $\Gamma_1 \vdash B_1$ et $B_1, \Gamma_2 \vdash B_2$.

$$\langle \sigma_\pi \rangle = (\langle \sigma_{\pi_1} \rangle \otimes \langle id_{\Gamma_2} \rangle); \langle \sigma_{\pi_2} \rangle$$

$$\text{où si } \Gamma_2 = A_1, \ldots, A_k,\ id_{\Gamma_2} = id_{A_1 \otimes \ldots \otimes A_k}.$$

Soit R_i le réseau associé à π_i et f_i son application. Par h.i., $\sigma_{f_i} \in \langle \sigma_{\pi_i} \rangle$ $(i = 1, 2)$. Soit f'_1 l'application de $(\Gamma_1 \otimes \Gamma_2) \multimap (B_1 \otimes \Gamma_2)$ donnée par : $f'_1(m) = f_1(m)$ si $m \in M_{\Gamma_1} \cup M_{B_1}$, $f'_1(m) = m'$ pour $m \in M_{\Gamma_2}$ où m et m' sont les mêmes coups de Γ_2 dans chacune des deux composantes Γ_2 du jeu. Alors on sait que f'_1 induit la stratégie $\sigma_{f'_1} = \sigma_{f_1} \otimes id_{\Gamma_2}$.

Soit maintenant f_R l'application donnée par le réseau associé à π ; c'est l'application définie à partir de f'_1 et f_2 comme dans la proposition 2.14. Par cette proposition on a alors : $\sigma_{f_R} = \sigma_{f'_1}; \sigma_{f_2}$, et par conséquent : $\sigma_{f_R} \in \langle \sigma_\pi \rangle$.

– Règle $\otimes$ à droite :

π est obtenue par un $\otimes$ à droite à partir de π_i de conclusions $\Gamma_i \vdash B_i$, $i = 1, 2$. Soit R_i le réseau associé à π_i et f_i son application. Par h.i., $\sigma_{f_i} \in \langle \sigma_{\pi_i} \rangle$ $(i = 1, 2)$. L'application f_R est donnée par : $f_R(m) = f_i(m)$ où i est tel que $m \in M_{\Gamma_i} \cup M_{B_i}$. Par conséquent d'après le 3.3.3, f_R induit la stratégie $\sigma_{f_1} \otimes \sigma_{f_2}$ qui appartient bien à $\langle \sigma_{\pi_1} \rangle \otimes \langle \sigma_{\pi_2} \rangle$.

– Règle $\otimes$ à gauche :

L'application $f_{R'}$ du nouveau réseau R' est égale à l'application f_R, à la bijection entre $M_{(A_1 \otimes A_2), \Delta \vdash B}$ et $M_{A_1, A_2, \Delta \vdash B}$ près. Les stratégies de $\langle \sigma_{\pi'} \rangle$ se déduisant des stratégies de $\langle \sigma_\pi \rangle$ en appliquant cette bijection aux coups des parties, on en déduit que $f_{R'}$ induit bien une stratégie intuitionniste et qu'elle appartient à $\langle \sigma_{\pi'} \rangle$.

– Règle $\multimap$ à gauche :

La preuve π' de conclusion $\Gamma_1, \Gamma_2, (B_1 \multimap A_2) \vdash B_2$ est obtenue par une règle $\multimap$ à gauche à partir de π_1 et π_2 de conclusions respectives $\Gamma_1 \vdash B_1$ et $\Gamma_2, A_2 \vdash B_2$. Soit f_1

et f_2 les applications des réseaux associés à ces deux preuves et $f_{R'}$ l'application donnée par le réseau R' de π'. Encore une fois, $f_{R'}$ est obtenue par : $f_{R'}(m) = f_i(m)$ où $i = 1$ si $m \in M_{\Gamma_1} \cup M_{B_1}$, $i = 2$ si $m \in M_{\Gamma_2} \cup M_{A_2} \cup M_{B_2}$.

D'autre part l'interprétation de π' dans $\mathcal{IG}$ est donnée par :

$$\langle \sigma_{\pi'} \rangle = (\langle id_{\Gamma_2} \rangle \otimes ((\langle id_{B_1 \multimap A_2} \rangle \otimes \langle \sigma_{\pi_1} \rangle); \langle ev_{B_1,A_2} \rangle)); \langle \sigma_{\pi_2} \rangle$$

où $\langle ev_{B_1,A_2} \rangle = \alpha^{-1}(\langle id_{B_1 \multimap A_2} \rangle) \in \mathcal{IG}[(B_1 \multimap A_2) \otimes B_1, A_2]$,
$\langle \sigma_{\pi_1} \rangle \in \mathcal{IG}[\Gamma_1, B_1]$,
$\langle \sigma_{\pi_2} \rangle \in \mathcal{IG}[\Gamma_2 \otimes A_2, B_2]$,
$\langle \sigma_{\pi'} \rangle \in \mathcal{IG}[\Gamma_2 \otimes (B_1 \multimap A_2) \otimes \Gamma_1, B_2]$.

Il nous faut montrer que $f_{R'}$ induit une stratégie de la classe $\langle \sigma_{\pi'} \rangle$.

La stratégie $ev_{B_1,A_2} : ((B_1 \multimap A_2) \otimes B_1) \multimap A_2$ est induite par la fonction g qui copie un coup d'une composante A_2 (resp. B_1) dans l'autre composante A_2 (resp. B_1).

Par h.i. on sait que pour $i = 1, 2$, f_i induit une stratégie de $\langle \sigma_{\pi_i} \rangle$. Alors la stratégie $(id_{B_1 \multimap A_2} \otimes \sigma_{f_1}); ev_{B_1,A_2}$ sur $((B_1 \multimap A_2) \otimes \Gamma_1) \multimap A_2$ appartient à

$$((\langle id_{B_1 \multimap A_2} \rangle \otimes \langle \sigma_{\pi_1} \rangle); \langle ev_{B_1,A_2} \rangle)),$$

et elle est induite par la fonction suivante :

$h(m) = f_1(m)$ si $m \in M_{B_1} \cup M_{\Gamma_1}, h(m) = m'$ si $m \in M_{A_2}$ où m et m' sont les mêmes coups de A_2 dans chacune des deux composantes A_2 du jeu.

La stratégie $(id_{\Gamma_2} \otimes \sigma_h); \sigma_{f_2}$ appartient à $\langle \sigma_{\pi'} \rangle$ et est induite par la fonction :

$k(m) = f_2(m)$ si $m \in M_{\Gamma_2} \cup M_{A_2} \cup M_{B_2}$

et $k(m) = f_1(m)$ si $m \in M_{\Gamma_1} \cup M_{B_1}$.

Donc $k = f_{R'}$ et par conséquent $f_{R'}$ induit bien une stratégie intuitionniste qui appartient à $\langle \sigma_{\pi'} \rangle$.

- Règle $\multimap$ à droite :

  Raisonnement similaire à celui du cas de $\otimes$ à droite.

- Règle contraction :

  Supposons π' de conclusion $!A, \Gamma \vdash B$ obtenue par une contraction à partir de π de conclusion $!A, !A, \Gamma \vdash B$. Notons f_R (resp. $f_{R'}$) l'application associée au réseau de π (resp. π').

  Par h.i. f_R induit une stratégie de $\langle \sigma_\pi \rangle$, et on sait que :

  $\langle \sigma_{\pi'} \rangle = \langle co_A \rangle; \langle \sigma_\pi \rangle = \langle co_A; \sigma_{f_R} \rangle$

  Or l'application obtenue par composition des deux applications c et f_R est $f_{R'}$, donc d'après la proposition 2.14 on a : $co_A; \sigma_{f_R} = \sigma_{f_{R'}}$, ce qui permet de conclure.

- Règle déréliction : similaire au cas de la contraction.

- Règle affaiblissement : Supposons π' de conclusion $!A, \Gamma \vdash B$ obtenue par un affaiblissement à partir de π de conclusion $\Gamma \vdash B$. Notons f_R (resp. $f_{R'}$) l'application associée au réseau de π (resp. π').

  On a : $\langle \sigma_{\pi'} \rangle = (\langle weak_A \rangle \otimes \langle \sigma_\pi \rangle); \langle \lambda_B \rangle$ où λ_B est la stratégie attendue sur $(I \otimes B) \multimap B$.

  Alors $(weak_A \otimes \sigma_{f_R}; \lambda_B)$ est bien induite par $\sigma_{f_{R'}}$.

– Règle promotion : Supposons π' de conclusion $!\Gamma \vdash !B$ obtenue par une règle de promotion à partir de π de conclusion $!\Gamma \vdash B$. Notons f_R (resp. $f_{R'}$) l'application associée au réseau de π (resp. π').

  On a : $\langle \sigma_{\pi'} \rangle = \langle \sigma_\pi^! \rangle$.

  Par h.i., f_R induit une stratégie σ_{f_R} de $\langle \sigma_\pi \rangle$. Alors $\langle \sigma_\pi^! \rangle = \langle \sigma_{f_R}^! \rangle$.

  De plus : $\sigma_{f_R}^! = (\delta_{A_1} \otimes \ldots \otimes \delta_{A_n}); (!\sigma_{f_R})$ où $A_1, \ldots, A_n = \Gamma$. Vue la définition de $!\sigma_{f_R}$, la stratégie $(\delta_{A_1} \otimes \ldots \otimes \delta_{A_n}); (!\sigma_{f_R})$ est induite par l'application $f_{R'}$.

  Donc $\sigma_{f_{R'}} \in \langle \sigma_{\pi'} \rangle$.

Ce dernier cas terminait l'étape d'induction et par conséquent la preuve. $\square$

Chapitre 4

Modèle de jeux pour MELL

Au point où nous en sommes la situation est la suivante : nous avons décrit une façon d'associer à un réseau une stratégie donnée par une application (stratégie sans-mémoire) et pour les réseaux intuitionnistes nous avons montré que ce calcul de stratégie avait une justification "sémantique" puisqu'il nous permettait de trouver l'interprétation de la preuve dans le modèle $\mathcal{IG}$. Maintenant est-ce qu'il existe un tel modèle pour MELL (classique) ? Le calcul de stratégie sans-mémoire décrit au chapitre 3 nous donne-t-il l'interprétation du réseau dans une sémantique dénotationnelle ?

Notons qu'on ne peut se contenter d'étendre le modèle $\mathcal{IG}$ à MELL car l'interprétation σ_{f_R} d'un réseau R n'est pas en général une stratégie auto-équivalente : considérer pour cela l'exemple d'un réseau de conclusion $?\alpha^\perp, \alpha$ obtenu par un axiome et une déréliction ; l'application f_R que nous lui avons associée étend la partie $0.{\alpha^\perp}^O$ (en $0.{\alpha^\perp}^O\alpha^P$) mais n'étend pas la partie équivalente $1.{\alpha^\perp}^O$. La stratégie induite sur ce jeu classique par f_R ne vérifie donc pas la condition d'auto-équivalence de la définition 3.24.

Pour résoudre ce problème nous introduisons une nouvelle catégorie, la catégorie des *stratégies saturées* (notée $\mathbb{G}$). L'idée sous-jacente est la suivante : au lieu de définir comme morphismes des classes d'équivalence de stratégies déterministes (chaque stratégie correspondant moralement à un codage possible des branches exponentielles du réseau) nous considérons un ensemble de stratégies plus grand et une catégorie où les morphismes sont ces stratégies généralisées. La stratégie interprétant un réseau inclura les parties obtenues par n'importe quel codage du réseau. Une conséquence est que ces stratégies ne seront plus déterministes. Cependant nous verrons que cet indéterminisme dans le cas des stratégies de réseaux restera limité ; ce sera l'objet du chapitre suivant de relier ce modèle à des modèles relationnels afin de borner l'indéterminisme.

Pour des raisons de symétrie Opposant/Joueur et de généralité nous souhaitons aussi écarter l'hypothèse que toutes les parties d'une stratégie commencent par un coup Opposant. Ceci nous amène à étendre la définition de la composition de stratégies.

Comme pour la catégorie $\mathcal{IG}$ nous allons adopter un double point de vue : d'abord présenter le modèle catégoriquement et établir les propriétés qui permettent d'en faire une sémantique dénotationelle de MELL (ici ce sera pour la réduction stricte), puis décrire comment la stratégie d'un réseau est obtenue "syntaxiquement" en associant au réseau des applications sur les coups.

La section 4.1 est issue d'un travail en collaboration avec V. Danos, T. Ehrhard et L. Regnier ([BDER97a]).

4.1 Modèle des stratégies saturées

4.1.1 Stratégies et composition de stratégies

Définition 4.1 *Une* stratégie Joueur *sur le jeu A est un ensemble non vide de parties de A clos par préfixes et par coups Opposant valides (c.a.d. que si $(s \in \sigma)$, $(sa \in P_A)$ et $(\lambda_A(a) = O)$ alors : $sa \in \sigma$).*

Symétriquement une stratégie Opposant est close par coups Joueur valides.

Notons que le fait que la stratégie soit close par préfixes implique en particulier qu'elle contient la partie vide.

Pour définir la composition de ces stratégies nous commençons par définir une composition des parties. Rappelons que la notation $A_1, \ldots, A_n$ désigne le jeu $A_1 \parr \ldots \parr A_n$. La composition des parties est définie au moyen d'un lemme du à V. Danos :

Lemme 4.2 (Zipping) *Supposons que s_1 et s_2 sont deux parties respectivement sur les jeux $A^\perp, B$ et $B^\perp, C$ et telles que $s_{1B} = s_{2B^\perp} \neq \epsilon$. Alors il existe une unique partie s sur le jeu $A^\perp, B \otimes B^\perp, C$ telle que :*

- *$s_{A^\perp,B} = s_1$, $s_{B^\perp,C} = s_2$,*
- *dans s le Joueur ne switche pas entre $A^\perp$ et C,*
- *$s_{B\otimes B^\perp}$ est jouée par la stratégie Opposant d'identité (l'Opposant suit la fonction de copie).*

On définit alors $s_1; s_2$ (composition active *de s_1 et s_2) par $s_1; s_2 = s_{A^\perp,C}$.*

Preuve : Montrons d'abord qu'il existe une telle partie s. On va procéder par induction sur $|s_1| + |s_2|$. Comme $s_{1B} = s_{2B^\perp} \neq \epsilon$, l'une des deux projections commence par un coup P dans son jeu (B ou $B^\perp$). Mettons par exemple que c'est $s_{2B^\perp}$.

Considérons dans s_1 (resp. s_2) les sous-suites maximales de coups consécutifs dans la même composante $A^\perp$ ou B (resp. $B^\perp$ ou C) ; on les notes $s_1^1, \ldots, s_1^n$ (resp.$s_2^1, \ldots, s_2^m$). On appelle *interfaces* de s_1 (resp. s_2) les s_1^j (resp. s_2^j) constituées de coups dans B (resp. $B^\perp$) : la suite s_1 (resp. s_2) est donc la concaténation alternée d'interfaces et de suites de coups dans $A^\perp$ (resp. C). Comme le premier coup de s_{1B} est O, la première interface de s_1 est s_1^1. Quitte à poser $s_2^1 = \epsilon_C$ si s_2 commence dans $B^\perp$ et à renuméroter les s_2^i on peut supposer que la première interface de s_2 est s_2^2. Nous allons construire s en "cousant" s_1 et s_2 par leurs interfaces, c'est-à-dire en choisissant un entrelacement de s_1 et s_2 dont la restriction à $B \otimes B^\perp$ est une partie de la stratégie Opposant d'identité (voir figure 4.1). Comme $s_{1B} = s_{2B^\perp}$, l'une des premières interfaces de s_1 et s_2 est préfixe de l'autre : $s_1^1 \sqsubseteq s_2^2$ ou $s_2^2 \sqsubseteq s_1^1$. Supposons par exemple que $s_1^1 \sqsubseteq s_2^2$ (l'autre cas est traité de façon identique) et notons $s_1^1 = b_1 \ldots b_k$. Appelons alors s'_1 le suffixe de s_1 donné par $s_1 = s_1^1 s'_1$ et s'_2 le suffixe de s_2 tronquée après s_1^1 (i.e. $s_1^1 s'_2 = s_2^2 s_2^3 \ldots s_2^m$). On a deux cas :

- Le dernier coup b_k de s_1^1 est le dernier coup de s_{1B}, alors c'est aussi le dernier coup de $s_{2B^\perp}$ et on a par conséquent $s_1^1 = s_2^2$. Si $\lambda_B(b_k) = P$, alors par la condition de switching on a $s'_1 = \epsilon$ et $s'_2 = s_2^3$. On pose alors $s = s_2^1 b'_1 b_1 b_2 b'_2 \ldots b_k b'_k s_3^2$ où b'_i est le coup b_i joué dans $B^\perp$. Alors s est alternée, vérifie les conditions de switching sur $(A^\perp, B \otimes B^\perp, C)$, ses projections sur $A^\perp$, sur $B \otimes B^\perp$ et sur C sont des parties valides. Donc s est une partie de $(A^\perp, B \otimes B^\perp, C)$, sa restriction à $B \otimes B^\perp$ est jouée par la stratégie Opposant d'identité et s vérifie les conditions requises. Maintenant si $\lambda_B(b_k) = O$ alors de la même manière $s'_1 = s_1^2$, $s'_2 = \epsilon$ et $s = s_2^1 b'_1 b_1 b_2 b'_2 \ldots b'_k b_k s_1^2$ convient.

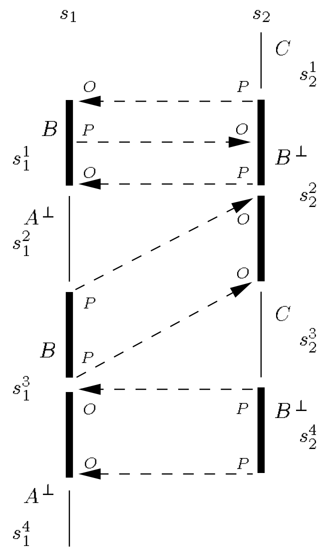


FIG. 4.1: *"Couture" des parties s_1 et s_2*

– Si b_k n'est pas le dernier coup de s_{1B}, alors s'_1 et s'_2 sont des parties de $A^\perp, B$ et $B^\perp, C$ vérifiant $s'_{1B} = s'_{2B^\perp} \neq \epsilon$ donc par hypothèse d'induction il existe une partie s' de $(A^\perp, B \otimes B^\perp, C)$ satisfaisant les hypothèses pour s'_1 et s'_2. Comme b_k n'est pas le dernier coup de s_{1B} il est suivi dans s_1 d'un coup dans $A^\perp$. Par conséquent s'_1 commence par un coup dans $A^\perp$. On prend alors $s = s_2^1 b'_1 b_1 b_2 b'_2 \ldots b'_k b_k s'$ qui vérifie les conditions.

Passons à l'unicité de s. On l'établit par une nouvelle induction sur $|s_1| + |s_2|$. Supposons que s et t sont deux parties de $(A^\perp, B \otimes B^\perp, C)$ satisfaisant les conditions pour s_1 et s_2. Mettons par exemple que $s_{B \otimes B^\perp}$ commence dans B, alors son premier coup b est un coup P dans B et est suivi du même coup b' joué dans $B^\perp$. Comme $t_B = s_B$, le premier coup de $t_{B \otimes B^\perp}$ est b dans B. Comme dans s et t le Joueur ne switche pas entre C et $A^\perp$ et que $s_{A^\perp, B} = t_{A^\perp, B} = s_1$ on a $s = s_1^1 b b' s'$ avec s_1^1 entièrement jouée dans $A^\perp$ et $t = s_1^1 b b' t'$. On sait que $s_1^1 b$ est préfixe de s_1 et que b' est préfixe de s_2 (par la condition de switching) : posons $s_1 = s_1^1 b s'_1$ et $s_2 = b' s'_2$. Alors $s'_{1B} = s'_{2B^\perp}$. Maintenant, si $s'_{1B} \neq \epsilon$ alors s' et t' vérifient les conditions pour s'_1 et s'_2, d'où par h.i. on déduit que $s' = t'$ et donc $s = t$. Si au contraire $s'_{1B} = \epsilon$ alors comme dans s et t aucun joueur ne switche entre $A^\perp$ et C on en déduit que s' et t' sont toutes deux entièrement jouées dans C. On a alors $s' = s'_2$ et $t' = s'_2$ d'où $s = t$. □

Prenons s_1 et s_2 des parties sur $A^\perp, B$ et $B^\perp, C$, nous étendons la notation introduite dans le lemme au cas dit de *composition passive* :
$s_1; \epsilon = s_1$ si $s_{1B} = \epsilon$
et $\epsilon; s_2 = s_2$ si $s_{2B^\perp} = \epsilon$.

Définition 4.3 *Si σ est une stratégie sur $A^\perp, B$ et τ une stratégie sur $B^\perp, C$ nous définissons :*

$$\sigma; \tau = \{s_1; s_2, \quad s_1 \in \sigma, \ s_2 \in \tau, \ \text{et } s_1; s_2 \text{ est définie } \}$$

On peut vérifier que cet ensemble vérifie bien les conditions pour être une stratégie. Les jeux B et $B^\perp$ sont appelés *jeux interfaces* de la composition. Dans le cas de stratégies déterministes (donc en particulier dont toutes les parties non vides commencent par un coup O) cette composition correspond bien à la composition définie au 2.2.3 (définition 2.13), ce qui justifie notre choix de conserver la même notation. On a de plus toujours pour $\sigma : A^\perp, B$:

$$\sigma; id_B = id_A; \sigma.$$

Enfin on a le lemme suivant :

Lemme 4.4 *Pour σ,σ' (resp. τ, τ') deux stratégies sur $A^\perp, B$ (resp. $B^\perp, C$) telles que $\sigma \subseteq \sigma'$ (resp. $\tau \subseteq \tau'$) on a :*

$$\sigma;\tau \subseteq \sigma';\tau'.$$

Preuve: On a :

$$\sigma;\tau = \{s_1;s_2, \quad s_1 \in \sigma,\ s_2 \in \tau,\ \text{et } s_1;s_2 \text{ est définie } \} \subseteq \sigma';\tau'.$$

□

Associativité de la composition

Pour montrer l'associativité de cette composition il nous faut établir une version ternaire du lemme de zipping :

Lemme 4.5 (Zipping ternaire) *Considérons trois parties s_1 dans $P_{A^\perp,B}$, s_2 dans $P_{B^\perp,C,D}$ et s_3 dans $P_{D^\perp,E}$ telles que $s_{1B} = s_{2B^\perp} \neq \epsilon$ et $s_{2D} = s_{3D^\perp} \neq \epsilon$. Alors il existe une unique partie s sur le jeu $(A^\perp, (B \otimes B^\perp), C, (D \otimes D^\perp), E)$ telle que :*

- *$s_{A^\perp,B} = s_1$, $s_{B^\perp,C,D} = s_2$ et $s_{D^\perp,E} = s_3$;*
- *dans s le Joueur ne switche pas entre $A^\perp$ et C, entre $A^\perp$ et E ou entre C et E ;*
- *$s_{B\otimes B^\perp}$ et $s_{D^\perp \otimes D}$ sont jouées respectivement par les stratégies Opposant d'identité sur $B \otimes B^\perp$ et $D^\perp \otimes D$.*

Preuve: L'existence d'un tel s est conséquence du lemme de zipping : s_1 et s_2 nous donnent une partie t de $A^\perp, (B \otimes B^\perp), C$ qui composée avec s_3 nous donne une partie s satisfaisante.

Passons à l'unicité. On procède par induction sur $(|s_1| + |s_2| + |s_3|)$. Désignons par b le dernier coup de s_{1B} et par d le dernier coup de s_{2D}. Comme $s_{1B} = s_{2B^\perp}$ le dernier coup de $s_{B^\perp}$ est b joué dans $B^\perp$; nous le noterons b'.

Remarquons tout d'abord que $\lambda_{B^\perp}(b') = O$ ou $\lambda_D(d) = O$. En effet si $\lambda_{B^\perp}(b') = P$ alors comme b' est le dernier coup de $s_{2B^\perp}$, par la condition de switching sur le jeu $B^\perp, C, D$ on en déduit que b' est le dernier coup de s_2. De même si $\lambda_D(d) = P$, le coup d est le dernier coup de s_2. Par conséquent l'hypothèse ($\lambda_{B^\perp}(b') = P$ et $\lambda_D(d) = P$) conduit à une contradiction. On distingue maintenant plusieurs cas :

- **1er cas**: $\lambda_{B^\perp}(b') = O$ et $\lambda_D(d) = P$.

  On a dit que d est alors le dernier coup de s_2. Par conséquent b' est joué avant d dans s. De plus $\lambda_B(b) = P$ donc par la condition de switching sur $A^\perp, B$ on sait que b est le dernier coup de s_1. Posons alors $s'_1 = s_1$, $s_2 = s'_2 d$ et $s_3 = s'_3 d' s''_3$, où d' est le coup d joué dans $D^\perp$. Dans s le coup b est suivi de b' puis d est suivi de d'. Par conséquent dans s après le coup d' aucun coup n'est joué dans $A^\perp$, $B \otimes B^\perp$, C ou $D^\perp \otimes D$; le reste de la partie se déroule dans E et est donc égal à s''_3 : $s = s' d d' s''_3$.

  On a $s'_{2D} = s'_{3D^\perp}$; si cette projection est non vide alors par h.i. on a une unique solution pour s'_1, s'_2, s'_3 et s' est donc égale à cette solution. Par conséquent s est dans ce cas définie de manière unique.

  Si $s'_{2D} = s'_{3D^\perp} = \epsilon$, alors par la condition de switching le coup d' étant un coup O il est le premier coup de s_3, donc $s'_3 = \epsilon$. La suite $s'd$ est alors déterminée de manière unique par le lemme de zipping binaire appliqué à s_1 et s_2 et s est fixée par $s = s' d d' s''_3 = s' d s_3$.

- **2ème cas** : $\lambda_{B^\perp}(b') = P$ et $\lambda_D(d) = O$.

  Ce cas est traité comme le précédent.

- **3ème cas** : $\lambda_{B^\perp}(b') = O$ et $\lambda_D(d) = O$.

  Supposons par exemple que b' est joué avant d dans s_2 (l'autre cas est symétrique). Alors dans s le coup b est suivi de b' puis d' est suivi de d.

$$
\begin{array}{ccccccccc}
A^\perp, & (B & \otimes & B^\perp), & C, & (D & \otimes & D^\perp), & E \\
 & & & & \vdots & & & & \\
 & b^P & & & & & & & \\
 & & & b'^O & & & & & \\
 & & & & \vdots & & & & \\
 & & & & & & & d'^P & \\
 & & & & & d^O & & & \\
 & & & & s''_2 & & & &
\end{array}
$$

  Comme $\lambda_{D^\perp}(d') = P$ par les arguments déjà utilisés la partie s a un suffixe de la forme $d'ds''_2$ où s''_2 se déroule entièrement dans C. On pose alors $s'_1 = s_1$, $s_2 = s'_2ds''_2$, $s_3 = s'_3d'$ et $s = s'd'ds''_2$. Comme b' est joué dans s_2 avant d et comme $\lambda_D(d) = O$, par la condition de switching on sait que d est précédé dans s_2 par un coup P dans D. Donc $s'_{2D} \neq \epsilon$.

  On a donc $s'_{2D} = s'_{3D^\perp} \neq \epsilon$. Par conséquent s' est l'unique solution donnée par h.i. pour s'_1, s'_2, s'_3 et s est fixée par $s = s'd'ds''_2$, ce qui termine ce cas et la preuve. □

Proposition 4.6 *Étant données trois stratégies σ_1, σ_2, σ_3 respectivement sur les jeux $(A^\perp, B)$, $(B^\perp, C, D)$ et $(D^\perp, E)$ on a :*

$$(\sigma_1; \sigma_2); \sigma_3 = \sigma_1; (\sigma_2; \sigma_3).$$

Preuve : Prenons une partie s de $(\sigma_1; \sigma_2); \sigma_3$. Il existe des parties s_i des σ_i $(i = 1, 2, 3)$ telles que : $s_1; s_2$ est définie et égale à une partie s_{12}, et $s_{12}; s_3$ est définie et égale à s. On distingue trois cas :

- **1er cas** : Les deux compositions sont actives, c'est-à-dire que $s_{1B} = s_{2B^\perp} \neq \epsilon$ et $s_{2D} = s_{3D^\perp} \neq \epsilon$. Alors la composition $s_1; (s_2; s_3)$ est définie et d'après le lemme de zipping ternaire le résultat est égal à s. Par conséquent s appartient à $\sigma_1; (\sigma_2; \sigma_3)$.

- **2ème cas** : La composition sur D est passive : $s_{12D} = s_{3D^\perp} = \epsilon$. Alors s_{12} ou s_3 est la partie vide.

  Si $s_3 = \epsilon$ alors $s = s_{12}$. Par ailleurs on a : $s_2; s_3 = s_2; \epsilon = s_2$, donc s_2 appartient à $\sigma_2; \sigma_3$. Par conséquent $s_{12} = s$ appartient à $\sigma_1; (\sigma_2; \sigma_3)$.

  Si $s_{12} = \epsilon$ alors $s = s_3$. Or $\epsilon; s_3 = s_3$ appartient à $\sigma_2; \sigma_3$ car ϵ appartient à σ_2, et par conséquent $\epsilon; s_3$ appartient à $\sigma_1; (\sigma_2; \sigma_3)$. Donc s appartient à $\sigma_1; (\sigma_2; \sigma_3)$.

- **3ème cas** : La composition sur D est active et la composition sur B passive. Alors $s_{2D} = s_{12D} \neq \epsilon$. Par conséquent $s_2 \neq \epsilon$ et donc $s_1 = \epsilon$. Alors $s_{12} = \epsilon; s_2 = s_2$, donc $s = s_{12}; s_3 = s_2; s_3$. Or $s_2; s_3$ appartient à $\sigma_2; \sigma_3$, donc $s = \epsilon; (s_2; s_3)$ qui appartient à $\sigma_1; (\sigma_2; \sigma_3)$.

Ainsi on a $(\sigma_1; \sigma_2); \sigma_3 \subseteq \sigma_1; (\sigma_2; \sigma_3)$. Le raisonnement symétrique nous donne l'inclusion inverse et par conséquent l'égalité. □

Remarquons que la composition des parties elles-mêmes n'est pas associative : prenons par exemple $s_1 = b$ réduite à un coup O dans B, $s_2 = b'$ et s_3 jouée entièrement dans E. Alors $s_1; s_2$ est définie est égale à la partie vide. Par conséquent $(s_1; s_2); s_3$ est définie. Par contre $s_1; (s_2; s_3)$ n'est pas définie car $s_2; s_3$ n'est pas définie. Cette situation qui relève du deuxième cas est résolue au niveau des stratégies par le fait que toute stratégie contient la partie vide et que par conséquent $\epsilon; (\epsilon; s_3)$ appartient à $\sigma_1; (\sigma_2; \sigma_3)$.

On obtient donc une catégorie de jeux et de stratégies (non déterministes), d'identités les stratégies id_A.

4.1.2 Stratégies saturées

Définition 4.7 *Posons :*

$$[\sigma] = \{s : \exists s' \in \sigma, s \equiv s'\}.$$

$[\sigma]$ *est une stratégie appelée* saturation *de* σ*. La stratégie* σ *est dite* saturée *si* $[\sigma] = \sigma$*.*

Les propriétés d'extensibilité et de clôture par préfixes de la relation d'équivalence sur les parties (voir la définition 2.2) sont nécessaires pour garantir que la saturation $[\sigma]$ est toujours close par préfixes et par coups Opposant valides (resp. coups Joueur valides si σ est une stratégie Opposant).

Notons qu'une stratégie saturée n'est en général pas déterministe. Remarquons aussi que $[[\sigma]] = [\sigma]$.

Proposition 4.8 *Si* σ *et* τ *sont saturées alors* $\sigma; \tau$ *est saturée.*

Preuve : Notons $A^\perp, B$ et $B^\perp, C$ leurs jeux respectifs. Soit s une partie de $[\sigma; \tau]$, montrons qu'elle appartient à $\sigma; \tau$. Soit s' une partie de $\sigma; \tau$ telle que $s \equiv_{A^\perp, C} s'$. Il existe des parties s'_1 et s'_2 respectivement dans σ et τ telles que $s'_1; s'_2 = s'$. On a $(s'_1)_{A^\perp} = s'_{A^\perp} \equiv_{A^\perp} s_{A^\perp}$. Soit alors s_1 la partie de $A^\perp, B$ obtenue à partir de s'_1 en remplaçant chaque coup dans $A^\perp$, c'est-à-dire chaque coup de $(s'_1)_{A^\perp}$ par le coup correspondant de $s_{A^\perp}$. Alors $s_1 \equiv_{A^\perp, B} s'_1$, donc comme σ est saturée s_1 appartient à σ. On définit de la même manière à partir de s'_2 une partie s_2 satisfaisant : $(s_2)_{B^\perp} = (s'_2)_{B^\perp}$, $(s_2)_C = s_C$ et $s_2 \equiv s'_2$. Cette partie appartient à τ. Alors si $s'_1; s'_2$ est une composition active, la composition $s'_1; s'_2$ est définie et active ; si $s'_1; s'_2$ est une composition passive, la composition $s'_1; s'_2$ est définie et passive. Dans les deux cas on obtient $s_1; s_2 = s$ et donc s appartient bien à $\sigma; \tau$. □

Corollaire 4.9 *Étant données deux stratégies* $\sigma : A^\perp, B$ *et* $\tau : B^\perp, C$ *on a :*

$$[\sigma; \tau] \subseteq [\sigma]; [\tau].$$

Preuve : Par le lemme 4.4 comme une stratégie est incluse dans sa saturée on a : $\sigma; \tau \subseteq [\sigma]; [\tau]$. La proposition précédente nous dit que $[\sigma]; [\tau]$ est saturée, par conséquent $[\sigma; \tau] \subseteq [\sigma]; [\tau]$. □

Remarque 4.10 L'inclusion inverse n'est pas vraie en général. Considérons par exemple un jeu A à un seul coup O a et σ et τ deux stratégies sur $?A^\perp, !A$ définies respectivement comme les clôtures par préfixes et par coup O valides de $\{0.a\ 0.a'\}$ et $\{1.a\ 1.a'\}$, où $i.a'$ est le coup $i.a$ joué dans la composante $?A^\perp$. On a donc:

$$\begin{aligned} \sigma &= \{\epsilon\} \cup \{i.a,\ i \in \mathbb{N}\} \cup \{0.a\ 0.a'\} \\ \tau &= \{\epsilon\} \cup \{i.a,\ i \in \mathbb{N}\} \cup \{1.a\ 1.a'\} \end{aligned}$$

Alors :

$$[\sigma] = [\tau] = \{\epsilon\} \cup \{i.a,\ i \in \mathbb{N}\} \cup \{i.a\ j.a',\ i,j \in \mathbb{N}\}$$

On obtient par conséquent :

$$\begin{array}{rcl} \sigma;\tau & = & \{\epsilon\} \cup \{i.a,\ i \in \mathbb{N}\} \\ [\sigma];[\tau] & = & \{\epsilon\} \cup \{i.a,\ i \in \mathbb{N}\} \cup \{i.a\ j.a',\ i,j \in \mathbb{N}\} \neq \sigma;\tau \end{array}$$

La saturation n'est donc pas une opération fonctorielle sur la catégorie décrite dans la section précédente. Nous verrons dans le 4.4 ce qu'il en est si on considère des jeux et stratégies intuitionnistes.

Lemme 4.11 *La saturation $[id_A]$ de la stratégie $id_A : A^\perp, A$ est :*

$$\{\epsilon\} \cup \{s \in P^O_{A^\perp,A}\ t.q.\ \forall t\ (t \sqsubseteq s, t\ \mathit{partie}\ OP\ ) \implies t_{A^\perp} \equiv t_A\}.$$

Lemme 4.12 *Soit $\sigma : A^\perp, B$ une stratégie ; on a :*

$$[id_A];\sigma \subseteq [\sigma]\ \ et\ \ \sigma;[id_B] \subseteq [\sigma].$$

Preuve : Soit s une partie de $[id_A];\sigma$. Il existe s_1 dans $[id_A]$ et s_2 dans σ telles que $s_1;s_2 = s$. Si la composition est passive alors $s_1 = \epsilon$ ou $s_2 = \epsilon$. Dans le premier cas on obtient $s = s_2 \in \sigma \subseteq [\sigma]$. Dans le deuxième cas $s_{1A} = \epsilon$ donc soit s_1 est la partie vide et le résultat $s = \epsilon$ appartient bien à $[\sigma]$, soit s_1 est une partie à un seul coup O dans $A^\perp$, auquel cas $s = s_1$ et on conclut par clôture des stratégies (Joueur) par coups Opposant valides.

Si la composition $s_1;s_2$ est active alors $s_{1A} = s_{2A^\perp} \neq \epsilon$. Si s_{1A} termine par un coup P, alors par la condition de switching c'est le dernier coup de s_1. Par conséquent, s_1 étant une partie de $[id_A]$ terminant par un coup P elle vérifie $s_{1A} \equiv s_{1A^\perp}$. Par conséquent $s_{A^\perp} = s_{1A^\perp} \equiv s_{1A} = s_{2A^\perp}$. On obtient ainsi que s et s_2 ont même entrelacement entre $A^\perp$ et C, même projection sur C et vérifient $s_{A^\perp} \equiv s_{2A^\perp}$. Donc $s \equiv s_2$ et s appartient à $[\sigma]$.

Maintenant si s_{1A} termine par un coup O, alors $s_{2A^\perp}$ termine par un coup P qui est donc le dernier coup de s_2 (à cause de la condition de switching toujours). Notons a ce dernier coup et $s_2 = s_2'a$. Comme s_1 est une partie de $[id_A]$ et s_{1A} termine par a on a trois cas :

- **1er cas** : le coup a est le dernier coup de s_1 : $s_1 = s_1'a$. Alors s est obtenue aussi par la composition $s_1';s_2' = s$ et on peut conclure par un des cas précédents (composition passive ou active avec $s'_{1A^\perp}$ de dernier coup P).

- **2ème cas** : la partie s_1 est de la forme $s_1 = s_1'aa'$ où a' est le même coup que a joué dans $A^\perp$. Alors s_1 termine par un coup P et on a $s_{1A} \equiv s_{1A^\perp}$. On conclue par l'argument déjà employé.

- **3ème cas** : la partie s_1 est de la forme $s_1 = s_1'aa'a''$ où a'' est un coup O dans $A^\perp$. Alors on pose $s' = s_1';s_2'$. On sait que s' appartient à $[\sigma]$ et on a : $s = s'a''$. Par clôture de $[\sigma]$ par coups Opposant valides on en déduit alors que s appartient à $[\sigma]$.

La deuxième inclusion est obtenue de la même manière. □

Lemme 4.13 *Si $\sigma : A^\perp, B$ est une stratégie saturée on a :*

$$[id_A];\sigma = \sigma\ \ et\ \ \sigma;[id_B] = \sigma.$$

Preuve: En effet par le lemme précédent on a tout d'abord : $[id_A];\sigma \subseteq [\sigma] = \sigma$. La proposition 4.8 nous dit que $[id_A];\sigma$ est saturée. De plus comme $[id_A] \supseteq id_A$, par le lemme 4.4 on sait que $[id_A];\sigma$ contient σ. Par conséquent $[id_A];\sigma = \sigma$. Idem pour l'autre égalité. □

On obtient ainsi une nouvelle catégorie:

$\mathbb{G}$: **Objets** : jeux
Morphismes : $\mathbb{G}[A, B]$ est l'ensemble des stratégies saturées sur $A^\perp \parr B$.

Le morphisme identité de A est $[id_A]$. Cette catégorie n'est pas une sous-catégorie de la catégorie précédente car elles n'ont pas les mêmes identités.

Lemme 4.14 (Brouillage) *Étant donnée une stratégie $\sigma : A^\perp, B$, sa saturation est donnée par :*

$$[\sigma] = [id_A];\sigma;[id_B].$$

Preuve: Pour établir l'inclusion de gauche à droite prenons s une partie de $A^\perp, B$ telle qu'il existe s' dans σ vérifiant: $s' \equiv s$. Soit alors t_1 la partie de $[id_A]$ donnée par: $t_{1A^\perp} = s_{A^\perp}$ et $t_{1A} = s'_A$. De même soit t_2 la partie de $[id_B]$ satisfaisant: $t_{2B^\perp} = s'_B$ et $t_{2B} = s_B$. Alors la composition $t_1;s';t_2$ est bien définie car d'une part si $t_{1A} = \epsilon$ alors $t_{1A^\perp} = \epsilon$, d'autre part si $t_{2B^\perp} = \epsilon$ alors $t_{2B} = \epsilon$. Comme $t_1;s';t_2 = s$ la partie s appartient à $[id_A];\sigma;[id_B]$.

Quant à l'autre inclusion, par le lemme 4.12 appliqué successivement dans sa version gauche à σ, puis dans sa version droite à $[\sigma]$ et par le lemme 4.4 on a:

$$\begin{aligned}[id_A];\sigma;[id_B] = ([id_A];\sigma);[id_B] &\subseteq [\sigma];[id_B] \\ &\subseteq [[\sigma]] \\ &= [\sigma]\end{aligned}$$

□

La composition dans $\mathbb{G}$ peut être vue comme la composition dans la catégorie précédente *brouillée* par l'équivalence entre parties:

Corollaire 4.15 (Composition brouillée) *Si σ et τ sont des stratégies respectivement sur $A^\perp \parr B$ et $B^\perp \parr C$ on a:*

$$[\sigma];[\tau] = [id_A];\sigma;[id_B];\tau;[id_C]$$

Preuve:

C'est une conséquence du lemme précédent, de l'associativité et du fait que $[id_B];[id_B] = [id_B]$. □

Composer $[\sigma]$ et $[\tau]$ consiste donc intuitivement à composer σ et τ en se permettant sur le jeu interface B des permutations des numéros d'indices, puis en prenant toutes les parties équivalentes aux parties obtenues. Le $[id_B]$ du milieu est nécessaire (penser à l'exemple de la remarque 4.10). Comme conséquence on a le lemme suivant :

Lemme 4.16 (Synchronisation) *Si σ et τ sont des stratégies composables alors on a :*

$$[\sigma];[\tau] = [[\sigma];\tau] = [\sigma;[\tau]]$$

Preuve: directe en utilisant le corollaire 4.15. □

Énonçons encore un petit résultat intermédiaire qui nous servira plus tard à établir des égalités entre stratégies saturées:

Lemme 4.17 *Notons $\sigma \leq \tau$ si pour tout $s \in \sigma$ il existe $s' \in \tau$ telle que $s \equiv s'$.*
Si $\sigma \leq \tau$, alors $[\sigma] \subseteq [\tau]$, et réciproquement.

Notons que σ peut être en tant qu'ensemble plus grand que τ (par exemple $[\sigma] \leq \sigma$).

4.1.3 Propriétés de la catégorie $\mathbb{G}$

Structure monoïdale et $\star$-autonome Le tenseur sur les morphismes est défini par : étant donnés σ_i dans $A_i^\perp \parr B_i$, $i = 1, 2$,

$$\begin{aligned}\sigma_1 \otimes \sigma_2 \quad = \quad & \{s \in (A_1 \otimes A_2)^\perp, (B_1 \otimes B_2) : s_{A_i^\perp, B_i} \in \sigma_i, \\ & \text{et seul O switche entre les } A_i^\perp, B_i\}.\end{aligned}$$

Par la condition "seul O switche entre les $A_i^\perp, B_i$" on entend : si m et m' sont deux coups successifs dans s tels que m et m' ne sont pas dans la même composante i (m est dans la composante i si ($m \in A_i$ ou $m \in B_i$)), alors $\lambda_{(A_1 \otimes A_2)^\perp, (B_1 \otimes B_2)}(m') = O$.

Comme on a un isomorphisme entre $(A_1 \otimes A_2)^\perp$ et $A_1^\perp \parr A_2^\perp$ induit par une bijection entre ensembles de coups préservant la structure du jeu, on se permettra de considérer $\sigma_1 \otimes \sigma_2$ comme une stratégie sur le jeu $A_1^\perp, A_2^\perp, (B_1 \otimes B_2)$.

Remarque 4.18 Notons que les éventuels changements de composante 1 ou 2 dans $\sigma_1 \otimes \sigma_2$: $A_1^\perp, A_2^\perp, (B_1 \otimes B_2)$ ne peuvent être faits que par l'Opposant dans $(B_1 \otimes B_2)$ et ceci à cause des conditions de switching.

En effet mettons que dans une partie s de $\sigma_1 \otimes \sigma_2$ on ait un changement de composante, par exemple de 1 à 2, fait par un coup m' de prédécesseur m ; alors par définition du $\otimes$ on a : $\lambda_{(A_1 \otimes A_2)^\perp, (B_1 \otimes B_2)}(m') = O$. Par conséquent si m est joué dans $A_i^\perp$, la condition de switching pour les $\parr$ extérieurs impose que m' appartienne aussi à $A_i^\perp$, ce qui contredit l'hypothèse. Maintenant si m est joué dans B_i, mettons $i = 1$ par exemple, alors par la condition de switching à nouveau on sait que m' est joué dans $(B_1 \otimes B_2)$, par conséquent comme m' change de composante m' est joué dans B_2.

Dans les catégories $\mathcal{G}$ et $\mathcal{IG}$ cette propriété était conséquence du fait que les stratégies commencent par un coup O.

Le fait que le bifoncteur $\otimes$ donne une structure monoïdale sur $\mathbb{G}$ ne pose pas de problème. L'adjonction est définie comme pour $\mathcal{G}$ et $\mathcal{IG}$ et donne une structure de catégorie monoïdale close. Enfin le jeu D d'ensemble de coups vide est un objet dualisant et $\mathbb{G}$ est bien $\star$-autonome.

Structure exponentielle: définitions. Pour la structure exponentielle on reprend les stratégies exponentielles du 3.2.4 (définies sur des jeux classiques) et on considère leur saturation :

$$[der_A] \in \mathbb{G}[!A, A], \quad [co_A] \in \mathbb{G}[!A, !A \otimes !A],$$

$$[weak_A] \in \mathbb{G}[!A, I], \quad [\delta_A] \in \mathbb{G}[!A, !!A].$$

Rappelons qu'on a convenu du choix de $n_0 = 0$ et des injections l, r définies par $l(i) = 2i, r(i) = 2i + 1$. Remarquons que toutes les parties non vides de ces stratégies commencent par un coup O.

On adapte maintenant la construction ! "multifonctorielle" sur les stratégies donnée dans $\mathcal{G}$ (voir 3.2.4) à la catégorie des stratégies non déterministes.

Soit σ une stratégie sur $B_1^\perp, \ldots, B_n^\perp, A$. Étant donnée une partie s de $?B_1^\perp, \ldots, ?B_n^\perp, !A$ et un entier i, rappelons que s_i désigne la suite de coups sur $B_1^\perp, \ldots, B_n^\perp, A$ obtenue en ne gardant que les coups de la forme $i.m$ (avec m dans un $B_k^\perp$ ou dans A) remplacés par le coup m correspondant. On pose :

$$\begin{aligned}!\sigma \quad = \quad & \{s \in ?B_1^\perp, \ldots, ?B_n^\perp, !A / \quad \forall i \in \mathbb{N}, s_i \in \sigma \\ & \text{et seul O change d'indice dans } s\}.\end{aligned}$$

Par la condition "seul O change d'indice dans s" on entend : si m et m' sont deux coups successifs dans s tels que m et m' n'ont pas le même premier indice, alors $\lambda_{?B_1^\perp,\ldots,?B_n^\perp,!A}(m') = O$. Cette condition était automatiquement vérifiée dans le cas d'une stratégie déterministe à cause des conditions de switching et du fait que toutes les parties de la stratégie commencent par un coup O.

L'ensemble $!\sigma$ est alors bien une stratégie. Notons que l'action de ! sur σ est comparable à celle d'un $\otimes$ infini appliqué à σ. Dans $!\sigma$ les changements d'indice ne peuvent être faits que par l'Opposant dans $!A$, à cause des conditions de switching.

Pour σ une stratégie de $?A_1^\perp, \ldots, ?A_n^\perp, A$ on pose :

$\sigma^! = ([\delta_{A_1}] \otimes \ldots \otimes [\delta_{A_n}]); !\sigma$.

$\sigma^!$ est une stratégie sur $?A_1^\perp, \ldots, ?A_n^\perp, !A$. La règle de promotion sera interprétée dans $\mathbb{G}$ par la construction $[\sigma^!]$.

On veut montrer les égalités (informelles) suivantes pour des stratégies σ et τ saturées respectivement sur les jeux $?\Gamma, A$ et $?A^\perp, ?\Delta, B$:

$$\begin{array}{rcl} [\sigma^!];[der_A] & = & \sigma \\ [\sigma^!];[co_A] & = & [co_\Gamma];([\sigma^!]\otimes[\sigma^!]) \\ [\sigma^!];[\tau^!] & = & [([\sigma^!];\tau)^!] \\ [\sigma^!];[weak_A] & \supseteq & [weak_\Gamma] \end{array}$$

Ces égalités seront établies dans la section suivante. Énonçons dès maintenant le résultat qui en découle :

Théorème 4.19 *La catégorie $\mathbb{G}$ est un modèle de MELL pour la réduction stricte, c'est-à-dire : si le réseau R se réduit en R' par une suite d'étapes non affaiblissement et si σ_R et $\sigma_{R'}$ désignent les stratégies saturées de $\mathbb{G}$ interprétant les deux réseaux alors on a : $\sigma_R = \sigma_{R'}$.*

Dans le cas où R se réduit en R' par une suite d'étapes quelconques (incluant éventuellement des étapes affaiblissement) on a : $\sigma_R \subseteq \sigma_{R'}$.

4.1.4 Structure exponentielle : preuve des égalités

Lemme 4.20 (Nivellement des codages) *On a les égalités suivantes :*

1. $der_A : ?A^\perp, A \quad [der_A] = [id_{!A}]; der_A$
2. $co_A : ?A^\perp, !A \otimes !A \quad [co_A] = [id_{!A}]; co_A$
3. $\delta_A : ?A^\perp, !!A \quad [\delta_A] = [id_{!A}]; \delta_A$
4. *Si $\sigma : \Gamma^\perp, A$ est saturée alors :* $[!\sigma] = [id_{!\Gamma}]; (!\sigma)$
5. *Si $\sigma : ?\Gamma^\perp, A$ est saturée alors :* $[\sigma^!] = [id_{!\Gamma}]; \sigma^!$

Une remarque sur la notation : si $\Gamma = B_1, \ldots, B_n$, $!\Gamma$ désigne $!B_1, \ldots, !B_n$ et $\Gamma^\perp$ désigne $B_1^\perp, \ldots, B_n^\perp$. La stratégie $id_{!\Gamma}$ est $id_{!B_1 \otimes \ldots \otimes !B_n}$.

Intuitivement, ce lemme signifie que les saturées des constantes peuvent être obtenues en brouillant la stratégie simplement du côté où il y a eu codage ...

Preuve du lemme 4.20:

Notons d'abord que pour montrer l'égalité de deux stratégies Joueur dont on sait que toutes les parties non vides commencent par un coup Opposant (ce qui est le cas ici), il suffit du fait de la propriété de clôture par coups Opposant valides, de montrer qu'elles ont les mêmes parties de longueur paire.

Ensuite remarquons qu'il nous suffit d'établir l'inclusion de gauche à droite puisque pour $\sigma : A^\perp, B$ on a par le lemme 4.4 et le fait que $id_B \subseteq [id_B]$:

$$\begin{aligned} [\sigma] &= [id_A]; \sigma; [id_B] \\ &\supseteq [id_A]; \sigma; id_B \\ &= [id_A]; \sigma \end{aligned}$$

1. Soit s une partie de $[der_A]$ de longueur paire : il existe une partie s' de der_A telle que sur le jeu $?A^\perp, A$ on ait $s' \equiv s$. Par conséquent il existe un entier i_0 tel que tous les coups de $s_{?A^\perp}$ sont de premier indice i_0 et $s_{?A^\perp, i_0} \equiv_A s_A$.

Désignons alors par t_2 la partie de der_A telle que : $(t_2)_A = s_A$. Alors t_2 et s commence par un coup O dans la même composante de $?A^\perp, A$, ont même entrelacement et deux projections équivalentes, donc $t_2 \equiv_{?A^\perp, A} s$. Par ailleurs appelons t_1 la partie de $?A^\perp, !A$ obtenue à partir de s' en remplaçant chaque coup m dans A par le coup $0.m$ de $!A$. Alors on a : $t_1 \in [id_{!A}]$ et $t_{1!A} = t_{2?A^\perp}$. Donc finalement : $s = t_1; t_2$, d'où : $[der_A] \subseteq [id_{!A}]; der_A$.

Les inclusions de gauche à droite dans les cas 2 et 3 sont prouvées de manière similaire ; on ne détaille donc que le cas de 3 :

3. Considérons s une partie de $[\delta_A]$ de longueur paire. Soit t_2 la partie de δ_A telle que $(t_2)_{!!A} = s_{!!A}$ et $t_2 \equiv_{?A^\perp, !!A} s$. Soit t_1 la partie de $?A^\perp, !A$ obtenue à partir de s en remplaçant chaque coup $i.j.m$ dans $!!A$ par $< i, j > .m$ dans A. Cette partie t_1 appartient alors à $[id_{!A}]$ et on a : $s = t_1; t_2$.

Les preuves de 4 et 5 ne présentent pas de surprise. □

En conséquence on a :

Lemme 4.21 (Distribution de la saturation) *La saturation commute aux opérations logiques, c'est-à-dire que :*

– *Étant données deux stratégies $\sigma : \Gamma, A$ et $\tau : \Delta, B$ on a :*

$$[\sigma \otimes \tau] = [\sigma] \otimes [\tau]. \tag{4.1}$$

– *Étant donnée une stratégie $\sigma : ?\Gamma^\perp, A$ on a :*

$$[\sigma^!] = [[\sigma]^!] \tag{4.2}$$

– *Étant données deux stratégies saturées $\sigma : ?\Gamma^\perp, A$ et $\tau : ?A^\perp, ?\Delta^\perp, B$ on a :*

$$\begin{aligned} [\sigma^!; der_A] &= [\sigma^!]; [der_A] && (4.3) \\ [\sigma^!; co_A] &= [\sigma^!]; [co_A] && (4.4) \\ [co_A; (\tau^! \otimes \tau^!)] &= [co_A]; [(\tau^! \otimes \tau^!)] && (4.5) \\ [\sigma^!; \tau^!] &= [\sigma^!]; [\tau^!] && (4.6) \\ [(\sigma^!; \tau)^!] &= [([\sigma^!]; \tau)^!]. && (4.7) \end{aligned}$$

Preuve du lemme 4.21 :

L'égalité 4.1 est une conséquence directe des définitions du tenseur de deux stratégies et de la relation d'équivalence. De même on vérifie facilement que $[!\sigma] = [![\sigma]]$. On en déduit alors l'égalité 4.2 par :

$$\begin{aligned} [\sigma^!] &= [([\delta_{A_1}] \otimes \cdots \otimes [\delta_{A_n}]); !\sigma] \\ &= ([\delta_{A_1}] \otimes \cdots \otimes [\delta_{A_n}]); [!\sigma] \quad \text{(d'après le lemme de synchronisation 4.16)} \\ &= ([\delta_{A_1}] \otimes \cdots \otimes [\delta_{A_n}]); [![\sigma]] \\ &= [[\sigma]^!] \end{aligned}$$

Montrons maintenant 4.3 :

$$\begin{array}{rcl} [\sigma^!; der_A] & = & [id_{!\Gamma}]; (\sigma^!; der_A); [id_A] \\ & = & ([id_{!\Gamma}]; \sigma^!); der_A; [id_A] \\ & = & [\sigma^!]; der_A; [id_A] \quad \text{(d'après le lemme 4.20)} \\ & = & [\sigma^!]; [id_{!A}]; der_A; [id_A] \\ & = & [\sigma^!]; [der_A] \end{array}$$

Les égalités 4.4 et 4.5 se démontrent de la même façon, en utilisant de plus pour 4.4 l'égalité 4.1.

Détaillons le calcul pour 4.6 :

$$\begin{array}{rcl} [\sigma^!; \tau^!] & = & [id_{!\Gamma,!\Delta}]; (\sigma^!; \tau^!); [id_{!B}] \\ & = & [id_{!\Gamma}] \otimes [id_{!\Delta}]; (\sigma^!; \tau^!); [id_{!B}] \\ & = & (([id_{!\Gamma}]; \sigma^!) \otimes [id_{!\Delta}]); \tau^!; [id_{!B}] \\ & = & [\sigma^!] \otimes [id_{!\Delta}]; \tau^!; [id_{!B}] \quad \text{(lemme 4.20)} \\ & = & [\sigma^!] \otimes [id_{!\Delta}]; [id_{!A,!\Delta}]; \tau^!; [id_{!B}] \\ & = & [\sigma^!]; [\tau^!] \end{array}$$

Quant à 4.7 elle est obtenue en appliquant 4.2 et le lemme de synchronisation. □

Il nous suffit donc maintenant de montrer pour des stratégies saturées :

$$[\sigma^!; der_A] = \sigma \tag{4.8}$$
$$[\sigma^!; co_A] = [co_\Gamma; (\sigma^! \otimes \sigma^!)] \tag{4.9}$$
$$[\sigma^!; \tau^!] = [(\sigma^!; \tau)^!] \tag{4.10}$$

– **Preuve de l'égalité (4.8) (déréliction) :** on va utiliser le lemme 4.17. Soit s une partie de $\sigma^!; der_A$: il existe s_1, s_2 des parties de $\sigma^!$ et der_A telles que $s = s_1; s_2$.

  Si la composition est active alors tous les coups de $(s_1)_{!A}$ et $(s_2)_{?A^\perp}$ ont pour premier indice 0 et tous les coups de $(s_1)_{?\Gamma^\perp}$ ont un premier indice de la forme $< 0, j >$. Soit alors s'_1 la partie de $?\Gamma^\perp, A$ obtenue en remplaçant dans s_1 les coups $0.m$ dans $!A$ par m dans A et les coups $< 0, j > .m$ dans $?\Gamma^\perp$ par $j.m$. De la même façon s'_2 désignera la partie de $A^\perp, A$ obtenue en remplaçant dans s_2 les $0.m$ dans $?A^\perp$ par m dans $A^\perp$. Les deux parties s'_1 et s'_2 appartiennent alors respectivement à σ et id_A et on a : $s' = s'_1; s'_2 \in \sigma; id_A = \sigma$. On a de plus $s' \equiv s$: il suffit pour le vérifier de considérer pour chaque formule $?B^\perp$ de $?\Gamma^\perp$ une permutation θ telle que pour tous les indices j de ${s'}_{?B^\perp}$ (ils sont en nombre fini) on ait $\theta(j) = < 0, j >$.

  Si la composition est passive et $s_1 = \epsilon$ alors $s = s_2$ a au plus un coup (Opposant) et s_2 appartient à σ à cause de la clôture de σ par coups Opposant valides.

  Si la composition est passive et $s_2 = \epsilon$ alors $s = s_1$: tous les coups de s sont dans $?\Gamma^\perp$ et par définition de $\sigma^!$ il existe un entier i_0 tel que tous les premiers indices des coups de s sont de la forme $< i_0, j >$. Soit alors s' la partie de $?\Gamma^\perp, A$ obtenue en remplaçant chaque coup $< i_0, j > .m$ par $j.m$. Cette partie s' appartient à σ et comme précédemment on a : $s' \equiv s$.

  D'où finalement : $\sigma^!; der_A \leq \sigma$.

  Soit s une partie de σ : on désigne par s' (resp. s'_1) la partie de $?\Gamma^\perp, A$ (resp. $?\Gamma^\perp, !A$) obtenue à partir de s en remplaçant les coups $j.m$ de $?\Gamma^\perp$ par $< 0, j > .m$ (resp. en remplaçant les coups $j.m$ de $?\Gamma^\perp$ par $< 0, j > .m$ et les coups m dans A par $0.m$ dans $!A$). La suite s'_1 est une partie de $\sigma^!$.

Maintenant, si s commence dans $?\Gamma^\perp$, s'_2 désignera la partie de der_A commençant dans $?A^\perp$ et telle que $(s'_2)_{?A^\perp} = (s'_1)_{!A}$ et $(s'_2)_A = s_A$. Si s commence dans A, s'_2 sera la partie de der_A commençant dans A et vérifiant les propriétés précédentes.

On a alors: $s' = s'_1; s'_2$, donc s' appartient à $\sigma^!; der_A$ et comme précédemment $s' \equiv s$. Donc on a bien $\sigma \leq \sigma^!; der_A$, ce qui nous donne en fin de compte grâce au lemme 4.17: $\sigma = [\sigma^!; der_A]$.

- **Preuve de l'égalité (4.9) (contraction) :** on l'établit dans le cas où Γ est réduit à une formule C pour simplifier l' écriture. L'égalité (4.10) se démontrerait de la même manière.

  On commence par la première inclusion : $[\sigma^!; co_A] \subseteq [co_C; \sigma^! \otimes_{!A} \sigma^!]$. Pour cela, grâce au lemme 4.17 il nous suffit de montrer: $(\sigma^!; co_A) \leq (co_C; \sigma^! \otimes_{!A} \sigma^!)$.

  Soit s dans $(\sigma^!; co_A)$; on construit à partir de s une suite s' de coups dans $?C^\perp, !A \otimes !A$ de la manière suivante:

  chaque coup dans $?C^\perp$ de la forme $< 2i, j > .m$ (resp. $< 2i+1, j > .m$) est remplacé par $(2 < i, j >).m$ (resp. $(2 < i, j > +1).m$).

  Montrons que s' appartient à $co_C; (\sigma^! \otimes_{!A} \sigma^!)$. Pour cela, désignons (abusivement) par $co_C \otimes (\sigma^! \otimes \sigma^!)$ la stratégie sur le jeu

  $$?C^\perp, (!C_1 \otimes !C_2) \otimes (?C_1^\perp \wp ?C_2^\perp), !A_1 \otimes !A_2$$

  donnée par le tenseur appliqué à co_C et à la stratégie de $(!A_1 \otimes !A_2), (?C_1^\perp \wp ?C_2^\perp)$ obtenue de façon naturelle à partir de $(\sigma^! \otimes \sigma^!)$. On construit t' une partie de $co_C \otimes (\sigma^! \otimes \sigma^!)$ telle que:

  - $t'_{?C^\perp, (!A \otimes !A)} = s'$,
  - $t'_{(!C_1 \otimes !C_2) \otimes (?C_1^\perp \wp ?C_2^\perp)}$ est joué par la stratégie Opposant d'identité,
  - dans t' le Joueur ne switche pas entre $?C^\perp$ et $!A_1 \otimes !A_2$.

  On obtient t' à partir de s' de la manière suivante :

  notons $?C^\perp, (!C_1 \otimes !C_2) \otimes (?C_1^\perp \wp ?C_2^\perp), !A_1 \otimes !A_2$ le jeu en question ; on remplace dans s' :

  - $\begin{array}{cc} (2 < i, j >).m & i.m' \\ ?C^\perp & !A_1 \\ O & P \end{array}$ par

    $\begin{array}{cccc} (2 < i, j >).m & < i, j > .m & < i, j > .m & i.m' \\ ?C^\perp & !C_1 & ?C_1^\perp & !A_1 \\ O & P & O & P \end{array}$

  - $\begin{array}{cc} (2 < i, j > +1).m & i.m' \\ ?C^\perp & !A_2 \\ O & P \end{array}$ par

    $\begin{array}{cccc} (2 < i, j > +1).m & < i, j > .m & < i, j > .m & i.m' \\ ?C^\perp & !C_2 & ?C_2^\perp & !A_2 \\ O & P & O & P \end{array}$

– même chose pour l'autre sens, c'est-à-dire

$$\text{pour}\quad\begin{array}{cc} i.m' & (2<i,j>).m \\ !A_1 & ?C^\perp \\ O & P \end{array}$$

$$\text{ou}\quad\begin{array}{cc} i.m' & (2<i,j>+1).m\ \ \ldots \\ !A_2 & ?C^\perp \\ O & P \end{array}$$

– $\begin{array}{cc} (2<i,j>).m & (2<i,j'>).m' \\ ?C^\perp & ?C^\perp \\ O & P \end{array}$ par

$$\begin{array}{cccccc} (2<i,j>).m & <i,j>.m & <i,j>.m & <i,j'>.m' & <i,j'>.m' & (2<i,j'>).m' \\ ?C^\perp & !C_1 & ?C_1^\perp & ?C_1^\perp & !C_1 & ?C^\perp \\ O & P & O & P & O & P \end{array}$$

– $\begin{array}{cc} (2<i,j>+1).m & (2<i,j'>+1).m' \\ ?C^\perp & ?C^\perp \\ O & P \end{array}$ par

$$\begin{array}{ccccc} (2<i,j>+1).m & <i,j>.m & <i,j>.m & <i,j'>.m' & \\ ?C^\perp & !C_2 & ?C_2^\perp & ?C_2^\perp & \\ O & P & O & P & \\ & & & <i,j'>.m' & (2<i,j'>+1).m' \\ & & & !C_2 & ?C^\perp \\ & & & O & P \end{array}$$

Il est facile de vérifier que t' satisfait bien les conditions requises (on utilise la définition de $\sigma^!$) donc par définition de la composition on a : s' appartient à $co_C;(\sigma^! \otimes_{!A} \sigma^!)$.

Il reste à montrer que $s \equiv s'$. Tout d'abord : $s_{(!A\otimes !A)} = s'_{(!A\otimes !A)}$. On peut définir Φ dans $S(\mathbb{N})$ telle que $\Phi(<2i,j>) = 2<i,j>$ et $\Phi(<2i+1,j>) = 2<i,j>+1$ pour tous les i,j rencontrés dans le premier indice des coups dans $s_{?C^\perp}$. Alors l'automorphisme $\Phi \times id_{M_{C^\perp}}$ nous donne : $s_{?C^\perp} \equiv s'_{?C^\perp}$. Enfin, un coup de s est dans $?C^\perp$ (resp. $!A\otimes !A$) ssi le coup correspondant de s' est dans $?C^\perp$ (resp. $!A\otimes !A$). Donc $s \equiv s'$.

Finalement pour tout s dans $\sigma^!;co_A$ il existe s' dans $co_C;(\sigma^! \otimes_{!A} \sigma^!)$ telle que $s \equiv s'$. Donc $[\sigma^!;co_A] \subseteq [co_C;(\sigma^! \otimes_{!A} \sigma^!)]$.

Montrons maintenant l'autre inclusion. Soit s' dans $co_C;(\sigma^! \otimes_{!A} \sigma^!)$; on construit à partir de s' une suite s de coups dans $?C^\perp, !A\otimes !A$ de la manière suivante :

chaque coup dans $?C^\perp$ de la forme $(2<i,j>).m$ (resp. $(2<i,j>+1).m$) est remplacé par $<2i,j>.m$ (resp. $<2i+1,j>.m$).

On obtient la partie t sur $?C^\perp, (!A\otimes ?A^\perp), !A_1\otimes !A_2$ à partir de s en remplaçant :

– $\begin{array}{cc} i.m & (<2i,j>).m' \\ !A_1 & ?C^\perp \\ O & P \end{array}$ par

$$\begin{array}{cccc} i.m & (2i).m & (2i).m & (<2i,j>).m' \\ !A_1 & ?A^\perp & !A & ?C^\perp \\ O & P & O & P \end{array}$$

– $\begin{array}{cc} i.m & (<2i+1,j>).m' \\ !A_2 & ?C^\perp \\ O & P \end{array}$ par

$$\begin{array}{cccc} i.m & (2i+1).m & (2i+1).m & (<2i+1,j>).m' \\ !A_2 & ?A^\perp & !A & ?C^\perp \\ O & P & O & P \end{array}$$

– même chose pour l'autre sens ...

– $\begin{array}{cc} i.m & i.m' \\ !A_1 & !A_1 \\ O & P \end{array}$ par

$$\begin{array}{cccccc} i.m & (2i).m & (2i).m & (2i).m' & (2i).m' & i.m' \\ !A_1 & ?A^\perp & !A & !A & ?A^\perp & !A_1 \\ O & P & O & P & O & P \end{array}$$

– $\begin{array}{cc} i.m & i.m' \\ !A_2 & !A_2 \\ O & P \end{array}$ par

$$\begin{array}{cccccc} i.m & (2i+1).m & (2i+1).m & (2i+1).m' & (2i+1).m' & i.m' \\ !A_2 & ?A^\perp & !A & !A & ?A^\perp & !A_2 \\ O & P & O & P & O & P \end{array}$$

Alors on peut montrer que t appartient à $\sigma^! \otimes co_A : ?C^\perp, (!A \otimes ?A^\perp), (!A \otimes !A)$ et :

comme t vérifie les conditions de la définition de la composition des parties (lemme 4.1) et $s = t_{?C^\perp, !A_1 \otimes !A_2}$, on a $s \in \sigma^!; co_A$.

Comme précédemment on a $s \equiv s'$, d'où on tire la deuxième inclusion. □

4.2 Calcul de l'interprétation d'un réseau dans le modèle $\mathbb{G}$ via son application f_R

Nous nous trouvons dans une situation identique à celle du début de la section 3.4 du chapitre précédent avec MELL au lieu de IMELL :

- d'un côté nous avons un modèle de MELL pour la réduction stricte ($\mathbb{G}$) dans lequel une preuve (de réseau associé R) est interprétée par une stratégie saturée σ_R,
- de l'autre nous avons une manière d'associer à un réseau R de MELL une stratégie sans-mémoire σ_{f_R} (cf chap. 3 section 3.1).

Il nous reste à établir le résultat en vue duquel a été introduite la catégorie $\mathbb{G}$ et que nous annoncions dans l'introduction du chapitre : la stratégie σ_{f_R} associée au réseau R permet de calculer l'interprétation σ_R de celui-ci dans le modèle $\mathbb{G}$, simplement en appliquant l'opération de saturation.

Proposition 4.22 *R étant un réseau de MELL normal pour la réduction stricte et σ_R et σ_{f_R} étant respectivement son interprétation dans le modèle des stratégies saturées et la stratégie sans mémoire obtenue par l'application f_R de R on a :*

$$\sigma_R = [\sigma_{f_R}]$$

Preuve de la Proposition 4.22 :

C'est une conséquence du fait que les opérations logiques sur les applications de stratégie correspondent aux opérations logiques sur les stratégies (proposition 3.2.4) et de la distribution de la saturation sur les opérations logiques (lemmes 4.20 et 4.21). Il suffit donc de faire une induction sur une construction du réseau (normal pour la réduction stricte). Contentons-nous pour l'exemple de traiter les cas d'une contraction et d'une coupure affaiblissement (seul cas de coupure à considérer) :

- Supposons R' obtenu à partir de R de conclusions $?A^\perp, ?A^\perp, \Gamma$ par une contraction sur $?A^\perp$. On a :

$$\begin{array}{rcll} [\sigma_{f_{R'}}] & = & [\sigma_{CO(f_R)}] & \\ & = & [CO(\sigma_{f_R})] & \text{(d'après la proposition 3.2.4)} \\ & = & [co_A; \sigma_{f_R}] & \\ & = & [id_{!A}]; co_A; \sigma_{f_R}; [id_\Gamma] & \\ & = & [co_A]; \sigma_{f_R}; [id_\Gamma] & \text{(d'après le lemme 4.20)} \\ & = & [co_A]; [\sigma_{f_R}] & \\ & = & [co_A]; \sigma_R & \text{(d'après l'hypothèse d'induction sur } R) \\ & = & \sigma_{R'} & \end{array}$$

- Supposons R' obtenu à partir de R de conclusions $?\Gamma, !A$ par une coupure affaiblissement sur $!A$. On a :

$$\begin{array}{rcl} [\sigma_{f_{R'}}] & = & [\sigma_{f_R}; weak_A] \\ & = & [\sigma_{f_R}; [weak_A]] \\ & = & \sigma_R; [weak_A] \\ & = & \sigma_{R'} \end{array}$$

□

Remarque 4.23 Le résultat de la proposition 4.22 est en fait valable pour tout réseau de MELL. Une méthode pour l'établir est de montrer que pour une certaine stratégie de réduction stricte on a : si R se réduit en R' suivant cette stratégie alors $\sigma_{f_R} \leq \sigma_{f_{R'}}$ et $\sigma_{f_{R'}} \leq \sigma_{f_R}$, soit $[\sigma_{f_R}] = [\sigma_{f_{R'}}]$. Par confluence de la réduction stricte (cf [Dan90]) on sait que R a une unique forme normale R_0 pour cette réduction et donc $[\sigma_{f_R}] = [\sigma_{f_{R_0}}]$. On peut alors conclure en utilisant la proposition 4.22 et le fait que $\mathbb{G}$ est un modèle de la réduction stricte.

4.3 Stratégie saturée interprétant un réseau et paramétrages généralisés

Nous venons de montrer que l'interprétation d'un réseau R dans le modèle $\mathbb{G}$ pouvait être faite en deux étapes : calcul de la stratégie induite par l'application f_R associée à R et saturation du résultat.

La question que nous nous posons maintenant est la suivante : est-il possible de comprendre cette opération de saturation de σ_{f_R} en termes de choix de codages pour les noeuds exponentiels de R?

4.3.1 Paramétrage généralisé de préréseau

Nous nous plaçons dans le cas où la relation d'équivalence sur les jeux de base est simplement l'identité. Pour répondre à la question précédente nous allons décrire une nouvelle manière d'interpréter un réseau R par une application, plus générale que celle donnée au chapitre 3, au moyen de *paramétrages généralisés*. Afin de motiver cette nouvelle définition énonçons déjà le résultat qu'elle nous permettra d'établir (dans la section 4.3.4):

Théorème 4.24 (Recouvrement) *Étant donné un réseau R (dont les axiomes ne portent que sur des formules atomiques) de conclusion Γ, on a :*

$$\sigma_R \subseteq \bigcup_p \sigma_{f_R^p}$$

où l'union est prise sur l'ensemble des paramétrages généralisés de R et $f_R^p : LI(\Gamma) \rightharpoonup LI(\Gamma)$ désigne l'application obtenue avec le paramétrage p.

Si R est normal pour la réduction stricte on a :

$$\sigma_R = \bigcup_p \sigma_{f_R^p}.$$

Remarque 4.25 L'égalité peut être étendue à tout réseau R en utilisant le résultat mentionné en remarque 4.23.

Une *occurrence de formule d'un préréseau R* est une occurence de formule étiquetant une arête de R ; sa profondeur dans R est la profondeur dans R de l'arête associée.

Définition 4.26 (Paramétrage généralisé) *Un* paramétrage généralisé *p d'un préréseau R est la donnée d'une famille d'applications $(p_{?A})$ indexée par les occurrences de formules $?A$ dans le préréseau R non conclusion d'un noeud affaiblissement. L'application $p_{?A}$ est définie sur les suites $\vec{\imath}$ de longueur la profondeur de $?A$ dans R et à valeurs :*

- *dans $\mathbb{N}$, si $?A$ est conclusion d'un nœud déréliction ;*
- *dans l'ensemble des couples (l, r) d'injections $\mathbb{N} \hookrightarrow \mathbb{N}$ de codomaines disjoints, si $?A$ est conclusion d'un nœud contraction ;*
- *dans l'ensemble des bijections $\mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ si $?A$ est conlusion d'un nœud $?p$;*

On peut de façon équivalente définir un paramétrage généralisé de préréseau par induction sur la profondeur maximale de ses nœuds ; un paramétrage généralisé est la donnée :

- d'un entier pour chaque nœud déréliction à profondeur 0,
- de deux injections $\mathbb{N} \hookrightarrow \mathbb{N}$ de codomaines disjoints pour chaque nœud contraction à profondeur 0 ;
- pour chaque boîte de R de profondeur 0 et de contenu R' : d'une famille $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de paramétrages de R' et pour chaque porte auxilliaire $?B_j$ de la boîte d'une bijection $\langle ., . \rangle_j : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$.

Par la suite on dira simplement "paramétrage" au lieu de "paramétrage généralisé".

4.3.2 Machine associée à un préréseau muni d'un paramétrage

On va définir une application f_R^p sur les littéraux indexés de Γ obtenue au moyen de R et du paramétrage p . Celle-ci est définie comme au chapitre 3 par une machine $\mathcal{M}_R^p$. L'ensemble de transitions est plus grand car l'action d'un noeud sur un jeton va dépendre maintenant des indices de la pile de boîtes p_b du jeton.

La machine $\mathcal{M}_R^p$ a le même ensemble d'états et de configurations que la machine $\mathcal{M}_R$. Il nous faut définir les transitions (applications partielles injectives sur les jetons) ; elles seront notées

$T^p_{A\mu,B\eta}$. Elles sont réversibles donc comme pour $\mathcal{M}_R$ pour chaque couple d'états adjacents $(A\mu, B\eta)$ nous ne donnons qu'une des deux applications $T^p_{A\mu,B\eta}$, $T^p_{B\overline{\eta},A\overline{\mu}}$:

- **Axiome, coupure, nœuds multiplicatifs** : il n'y a pas de changement par rapport à la machine $\mathcal{M}_R$:
$$T^p_{A\mu,B\eta} = T_{A\mu,B\eta}.$$
- **Nœuds exponentiels** :
  - **Déréliction** : on considère un noeud déréliction de conclusion $?A$,
$$\begin{array}{l} T^p_{A\vee,?A\vee} : (\alpha, \vec{\imath}, \vec{\jmath}) \mapsto (\alpha, p_{?A}(\vec{\jmath}).\vec{\imath}, \vec{\jmath}) \\ \text{si } |\vec{\jmath}| \text{ est la profondeur dans } R \text{ de l'arête étiquetée par } ?A. \end{array}$$
  - **Contraction** : on considère un nœud contraction de conclusion $?A$ dont on note les prémisses $?A^{(1)}, ?A^{(2)}$,
$$\begin{array}{l} T^p_{?A^{(1)}\vee,?A\vee} : (\alpha, k.\vec{\imath}, \vec{\jmath}) \mapsto (\alpha, l(k).\vec{\imath}, \vec{\jmath}) \\ \text{si } |\vec{\jmath}| \text{ est la profondeur dans } R \text{ de l'arête étiquetée par } ?A \\ \text{et } (l, r) = p_{?A}(\vec{\jmath}), \\ T^p_{?A^{(2)}\vee,?A\vee} : (\alpha, k.\vec{\imath}, \vec{\jmath}) \mapsto (\alpha, r(k).\vec{\imath}, \vec{\jmath}) \\ \text{si } |\vec{\jmath}| \text{ est la profondeur dans } R \text{ de l'arête étiquetée par } ?A \\ \text{et } (l, r) = p_{?A}(\vec{\jmath}). \end{array}$$
  - **Porte principale** de boîte, de conclusion $!A$: il n'y a pas de changement par rapport à la machine $\mathcal{M}_R$:
$$T^p_{A\vee,!A\vee} = T_{A\vee,!A\vee} : (\alpha, \vec{\imath}, n.\vec{\jmath}) \mapsto (\alpha, n.\vec{\imath}, \vec{\jmath}).$$
  - **Porte auxilliaire** de boîte, de conclusion $?A^{concl}$:
$$\begin{array}{l} T^p_{?A\vee,?A^{concl}\vee} : (\alpha, k.\vec{\imath}, n.\vec{\jmath}) \mapsto (\alpha, \langle n, k\rangle.\vec{\imath}, \vec{\jmath}) \\ \text{si } |\vec{\jmath}| \text{ est la profondeur dans } R \text{ de l'arête étiquetée par } ?A \\ \text{et } \langle ., . \rangle = p_{?A}(\vec{\jmath}). \end{array}$$

Ces transitions préservent l'hypothèse de bonne configuration.

Lemme 4.27 (déterminisme de $\mathcal{M}^p_R$) *Si $(A\mu, B_1\eta)$ et $(A\mu, B_2\eta)$ sont deux couples d'états adjacents distincts de $\mathcal{M}^p_R$ alors on a :*
$$\operatorname{dom} T^p_{A\mu,B_1\eta} \cap \operatorname{dom} T^p_{A\mu,B_2\eta} = \emptyset.$$

Comme pour la machine $\mathcal{M}^p_R$ on peut donc ici définir une application générale sur les configurations :
$$T^p(A\mu, \alpha, \vec{\imath}, \vec{\jmath}) = (B\eta, \alpha', \vec{\imath'}, \vec{\jmath'}),$$
si $(A\mu, B\eta)$ est un couple d'états adjacents et $T^p_{A\mu,B\eta}(\alpha, \vec{\imath}, \vec{\jmath}) = (\alpha', \vec{\imath'}, \vec{\jmath'})$. Cette application T^p vérifie alors :

Lemme 4.28 (Réversibilité) *Si $T^p(A\mu, \alpha, \vec{\imath}, \vec{\jmath}) = (B\eta, \alpha', \vec{\imath'}, \vec{\jmath'})$, alors :*
$$T^p(B\overline{\eta}, \alpha', \vec{\imath'}, \vec{\jmath'}) = (A\overline{\mu}, \alpha, \vec{\imath}, \vec{\jmath}).$$

Cette application T^p est une application partielle injective sur les configurations.

4.3.3 Application donnée par un paramétrage

L'application f_R^p est définie au moyen de T^p comme f_R. On a alors :

Lemme 4.29 *L'application partielle $f_R^p : LI(\Gamma) \rightharpoonup LI(\Gamma)$ est injective et involutive.*

Prenons l'exemple d'un réseau R' obtenu par une promotion sur un réseau R de conclusions $A, ?B_1, \ldots, ?B_n$ et muni d'un paramétrage p. On a donc une famille de paramétrages $(p_i)_{i \in \mathbb{N}}$ de R et pour chaque porte auxilliaire $?B_j$ une bijection $\langle ., . \rangle_j : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$. Regardons comment agit $f_{R'}^p$ sur un coup $i.m$ de $!A$:

l'image $f_{R'}^p(i.m)$ est définie si et seulement si $f_R^{p_i}(m)$ est définie et dans ce cas,

$$f_{R'}^p(i.m) = \left| \begin{array}{lll} i.f_R^{p_i}(m) & si & f_R^{p_i}(m) \in M_A \\ \langle i, k \rangle_j.m' & si & f_R^{p_i}(m) = k.m' \quad \in M_{?B_j} \end{array} \right.$$

Lemme 4.30 *Si R est un réseau et p est un paramétrage de R, alors l'application f_R^p induit une stratégie $\sigma_{f_R^p}$.*

Preuve : La preuve déjà donnée pour l'application f_R (proposition 3.16, section 3.2.3) marche aussi pour f_R^p. Considérons en effet la deuxième caractérisation d'un paramétrage de réseau donnée dans 4.3.1. On veut montrer par induction sur une construction de R que pour tout paramétrage p de R, l'application f_R^p induit une stratégie valide. Il nous faut considérer les cas des règles déreliction, contraction, affaiblissement et promotion.

Supposons donc R' de conclusion $?A, \Gamma$ obtenu à partir de R de conclusion A, Γ par une règle déreliction. Un paramétrage p' de R' est donné par un paramétrage p de R et un entier n_0 pour le nœud déreliction. Par h.i. on sait que $f_{R'}^{p'}$ induit une stratégie valide sur A, Γ ; la preuve de la proposition 3.16 nous permet alors d'en déduire que f_R^p induit une stratégie valide sur $?A, \Gamma$ car elle n'utilise pas d'hypothèse sur n_0. Les cas des autres règles exponentielles sont dérivés de façon identique. □

Lemme 4.31 *Si R est un réseau normal pour la réduction stricte et p est un paramétrage de R on a :*

$$\sigma_{f_R^p} \subseteq [\sigma_{f_R}],$$

c'est-à-dire :

$$\forall s \in \sigma_{f_R^p}, \exists s' \in \sigma_{f_R} \quad s \equiv_\Gamma s'.$$

Preuve : On montre par induction sur une construction de R que la propriété est vraie pour tout paramétrage p de R. Le seul cas de règle coupure à considérer est celui d'une coupure affaiblissement.

Le cas où R est réduit à un axiome est trivial puisqu'alors $f_R^p = f_R$. Supposons R obtenu à partir de deux réseaux R_i de conlusion Γ_i, A_i $(i = 1, 2)$ par un tenseur sur A_1, A_2. Un paramétrage p de R donne deux paramétrages p_1, p_2 respectivement de R_1 et R_2. On a $f_R^p = f_{R_1}^{p_1} \otimes f_{R_2}^{p_2}$, d'où d'après la proposition 3.21 : $\sigma_{f_R^p} = \sigma_{f_{R_1}^{p_1}} \otimes \sigma_{f_{R_2}^{p_2}}$. L'hypothèse d'induction sur les R_i nous donne alors : $\sigma_{f_R^p} \subseteq [\sigma_{f_{R_1}}] \otimes [\sigma_{f_{R_2}}]$. Par le lemme 4.21 de distribution de la saturation, la proposition 3.21 et le résultat de 3.1.4 on obtient :

$$[\sigma_{f_{R_1}}] \otimes [\sigma_{f_{R_2}}] = [\sigma_{f_{R_1}} \otimes \sigma_{f_{R_2}}] = [\sigma_{f_{R_1} \otimes f_{R_2}}] = [\sigma_{f_R}].$$

On a donc finalement : $\sigma_{f_R^p} \subseteq [\sigma_{f_R}]$.

Contentons-nous maintenant d'esquisser pour l'exemple le cas de la promotion ; les autres cas sont traités de façon similaire et ne réservent pas de surprise. Supposons R' obtenu par une promotion sur un réseau R de conclusion $A, ?\Gamma = A, ?B_1, \ldots, ?B_n$ et muni d'un paramétrage p. On a donc une famille de paramétrages $(p_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de R et pour chaque porte auxilliaire $?B_j$ une bijection $\langle ., . \rangle_j : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$.

Soit s une partie de $\sigma_{f_R^p}$; montrons qu'elle appartient à $[\sigma_{f_R}]$. On procède comme dans la preuve de la proposition 3.16, c'est-à-dire qu' étant donné un entier i on désigne par s^i la suite obtenue à partir de s par la transformation suivante : seuls les coups de la forme $< i, j >_k .m$ dans $M_{?B_k}$ ou $i.m$ dans $M_{!A}$ sont gardés et remplacés respectivement par le coup $j.m$ dans $M_{?B_k}$ ou m dans M_A ; l'entier i est appelé *indice d'exemplaire* de ces coups. Appelons $\{i_1, \ldots, i_n\}$ l'ensemble des indices d'exemplaires de s. Alors pour tout i de cet ensemble on a :

$$s^i \in \sigma_{f_R^{p_i}},$$

donc par h.i. sur R on en déduit pour tout i:

$$\exists \phi_i \in \mathrm{Aut}\,(A, ?\Gamma), \exists t_i \in \sigma_{f_R} \text{ t.q. } s^i = \phi_i^*(t_i).$$

On construit alors une suite s' de $M_{!A,?\Gamma}$ à partir de s de la façon suivante :

- un coup $i.a$ de s dans $!A$ est remplacé par $i.a'$, où a' est le coup de t_i correspondant au coup a de la suite s^i (c.a.d. le coup de même place dans la suite),
- un coup $< i, j >_k .b$ de s dans $?B_k$ est remplacé par $< i, j' > .b'$, où $j.b'$ est le coup de t_i correspondant au coup $j.b$ de s^i et $< ., . >$ est la bijection fixée pour l'interprétation standard.

On obtient ainsi pour s' une partie de σ_{f_R} de même longueur que s. Montrons maintenant que $s \equiv_{!A,?\Gamma} s'$. Pour cela il nous faut définir un automorphisme approprié. On considère une application ϕ sur $M_{!A,?\Gamma}$ satisfaisant les conditions suivantes pour les coups de s :

$$\begin{aligned} \phi(i.a) &= i.\phi_i(a), \text{ pour } a \in M_A, \\ \phi(< i, j >_k .b) &= < i, j' > .b', \text{ pour } b \in M_{B_k} \text{ et } \phi_i(j.b) = j'.b'. \end{aligned}$$

On vérifie facilement qu'il existe un automorphisme de $!A, ?\Gamma$ satisfaisant ces conditions et qu'on a alors :

$$\phi^*(s) = s', \text{ d'où } s \equiv_{!A,?\Gamma} s'.$$

On a donc bien finalement : $\sigma_{f_R^p} \subseteq [\sigma_{f_R}]$. □

4.3.4 Preuve du théorème de recouvrement

Étant donné un réseau R, montrons que pour tout s dans σ_R il existe un paramétrage p tel que : $s \in \sigma_{f_R^p}$. On peut supposer que s est de longueur supérieure ou égale à 2. On va le prouver encore une fois par induction sur une construction du réseau :

- pour R' réduit à un axiome atomique ou obtenu par une règle Par à partir d'un réseau vérifiant la propriété il n'y a pas de problème.
- supposons R' obtenu par une règle Tenseur à partir de R_1, R_2 vérifiant l'hypothèse. Notons Γ_i, A_i la conclusion de R_i $(i = 1, 2)$ et $\Gamma_1, \Gamma_2, A_1 \otimes A_2$ la conclusion de R.

  Soit s dans σ_R ; comme $\sigma_R = \sigma_{R_1} \otimes \sigma_{R_2}$, il existe pour $i = 1, 2$ une partie s_i dans σ_{R_i} telle que $s_{\Gamma_i, A_i} = s_i$. Par h.i. il existe pour $i = 1, 2$ un paramétrage p_i de R_i tel que s_i appartienne à $\sigma_{f_{R_i}^{p_i}}$. Soit alors p le paramétrage de R obtenu par les paramétrages p_1 et p_2 de R_1 et R_2. On a : $f_R^p = f_{R_1}^{p_1} \otimes f_{R_2}^{p_2}$ et le Joueur suit f_R dans s.

– supposons R' de conclusion $?A, \Gamma$ obtenu par une déréliction à partir de $R : A, \Gamma$ vérifiant l'hypothèse.

Soit s dans $\sigma_{R'}$. On a vu au chapitre 3 que $\sigma_{R'} = [der_A; \sigma_R]$, donc il existe Φ dans $\mathrm{Aut}_{?A,\Gamma}$ et une partie s' de $der_A; \sigma_R$ tels que $s = \Phi^*(s')$.

Il existe un entier k et Ψ dans $\mathrm{Aut}_{A,\Gamma}$ tels que :

$$\begin{array}{ll} \Phi(0.m) & = k. \quad \Psi(m) \\ \quad ?A & \qquad\quad ?A \\ \Phi|_\Gamma & = \Psi \end{array}$$

Appelons t' la suite de coups obtenue à partir de s' en remplaçant chaque coup $0.m$ dans $?A$ par m. Alors t' appartient à σ_R et par conséquent $\Psi^*(t')$ appartient à σ_R. L'hypothèse d'induction sur R nous donne un paramétrage p_0 de R tel que $\Psi^*(t')$ appartient à $\sigma_{f_R^{p_0}}$.

La suite $\Phi^*(s')$ est obtenue à partir de $\Psi^*(t')$ en remplaçant chaque coup m dans A par $k.m$ dans $?A$. Donc en prenant p_1 le paramétrage de R' obtenu avec le paramétrage p_0 de R et la constante k pour la dernière déréliction on a : $s = \Phi^*(s') \in \sigma_{f_{R'}^{p_1}}$.

– Supposons R' obtenu à partir de R de conclusions $?A^1, ?A^2, \Gamma$ par une contraction sur $?A$.

Soit s dans $\sigma_{R'}$. On a $\sigma_{R'} = [co_A; \sigma_R]$. Il existe s' dans $co_A; \sigma_R$ et Φ dans $\mathrm{Aut}_{?A,\Gamma}$ telles que $s = \Phi^*(s')$. Soit t' la suite sur $?A^1, ?A^2, \Gamma$ obtenue à partir de s' en remplacant dans s' tout coup $(2i).m$ dans $?A$ (resp. $(2i+1).m$ dans $?A$) par $i.m$ dans $?A^1$ (resp. $i.m$ dans $?A^2$). La suite t' est une partie de σ_R.

Convenons de dire que t' *visite l'indice i dans* $?A^1$ s'il existe un coup de t' dans $?A^1$ de premier indice i. Soit maintenant Ψ un automorphisme de $?A^1, ?A^2, \Gamma$ vérifiant :

- $\Psi|_\Gamma = \Phi|_\Gamma$,
- pour $i.m$ un coup de $?A^1$ avec i un indice visité par t' dans $?A^1$, $\Psi(i.m) = k.m' \in M_{?A^1}$ où $k.m'$ est l'image par Φ de $(2i).m \in M_{?A}$,
- pour $i.m$ un coup de $?A^2$ avec i un indice visité par t' dans $?A^2$, $\Psi(i.m) = k.m' \in M_{?A^2}$ où $k.m'$ est l'image par Φ de $(2i+1).m \in M_{?A}$.

Il existe bien un tel Ψ. On a alors : $\Psi^*(t')$ appartient à σ_R. Par h.i. sur R il existe par conséquent un paramétrage p_0 de R tel que $\Psi^*(t') \in \sigma_{f_R^{p_0}}$.

On sait que dans $\Psi^*(t')$ les ensembles de premiers indices de $\Psi^*(t')_{?A^1}$ et $\Psi^*(t')_{?A^2}$ sont disjoints (par définition de Ψ). Soient l et r deux injections de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ de codomaines donnant une partition de $\mathbb{N}$ et telles que :

- $l(i) = i$ pour tout i visité par $\Psi^*(t')$ dans $?A^1$,
- $r(i) = i$ pour tout i visité par $\Psi^*(t')$ dans $?A^2$.

Alors le paramétrage p_1 de R' obtenu par :

- le paramétrage p_0 de R,
- les injections l et r pour la contraction sur $?A$,

donne $s = \phi^*(s') \quad \in \sigma_{f_R^{p_1}}$.

- Supposons $R' :!A, ?\Gamma$ obtenu par une promotion sur $R : A, ?\Gamma$. On note $?B_j$ $(1 \leq j \leq n)$ les formules de $?\Gamma$.

  Soit s une partie de $\sigma_{R'}$. On a : $\sigma_{R'} = [\sigma_R{}^!]$. On peut donc trouver s' une partie de $\sigma_R{}^!$, ϕ un élément de $\mathrm{Aut}_{!A,?\Gamma}$ tels que $s = \phi^*(s')$. Notons I l'ensemble des entiers i tels que s' a un coup dans $M_{!A}$ de premier indice i ou un coup dans $M_{?\Gamma}$ de premier indice de la forme $< i, j >$ pour un certain entier j.

  Soit α la permutation de $\mathbb{N}$ donnant l'indice de l'image d'un coup de $!A$ par ϕ. Pour tout entier i de I, désignons par s'_i la restriction de s' aux coups de $!A$ de la forme $i.m$ et aux coups de $?\Gamma$ de la forme $< i, j > .m$. Désignons par s''_i la suite obtenue à partir de s'_i en remplaçant les $i.m$ de $!A$ par m et les $< i, j > .m$ de $?\Gamma$ par $j.m$. Comme s' appartient à $\sigma_R{}^!$ on sait alors que s'_i appartient à $\sigma_R{}^!$ et s''_i à σ_R.

  Maintenant soit $t_i = \phi^*(s'_i)$ et t'_i la suite de coups de $A, ?\Gamma$ obtenue à partir de t_i en remplaçant les coups de $!A$ de la forme $\alpha(i).m$ par m.

  La suite t'_i est alors une partie de $A, ?\Gamma$ et on peut vérifier que : $t'_i \equiv_{A,?\Gamma} s''_i$. Ceci vient du fait que $t_i \equiv_{!A,?\Gamma} s'_i$, que $(s''_i)_{?\Gamma} \equiv (s'_i)_{?\Gamma}$ et que $(t'_i)_{?\Gamma} = (t_i)_{?\Gamma}$. Par conséquent t'_i appartient à σ_R et par h.i. sur R on sait qu'il existe un paramétrage q_i de R tel que $t'_i \in \sigma_{f_R^{q_i}}$.

  Prenons alors pour R' le paramétrage q donné par :

  - la famille $(q_{\alpha^{-1}(i)})_{i \in \mathbb{N}}$ de paramétrages de R,
  - comme bijection $< ., . >_j$ pour la porte auxilliaire $?B_j$ une bijection satisfaisant la condition : $< \alpha(i), k >_j = k$ pour chaque couple (i, k) tel que i appartient à I et k est visité par $(t_i)_{?B_j}$. Noter qu'une telle bijection existe parce que
    - premièrement les $\alpha(i)$ sont deux à deux distincts,
    - deuxièmement pour chaque i l'ensemble des k pour lesquels la condition doit être vérifiée est fini,
    - et troisièmement les ensembles d'indices visités par $(t_i)_{?B_j}$ et $(t_{i'})_{?B_j}$ pour $i \neq i'$ sont disjoints.

  Montrons maintenant que s appartient à $\sigma^q_{f_{R'}}$. La suite s' est un entrelacement des suites s'_i pour i dans I et s se déduit de s' par $s = \phi^*(s')$. Par conséquent la suite s est un entrelacement des suites $t_i = \phi^*(s'_i)$ et comme s' appartient à $\sigma_R{}^!$ seul l'Opposant peut dans s passer d'un t_i à un autre. On en déduit que si m est un coup Opposant dans s appartenant à t_i, alors son successeur m' dans s est son successeur dans t_i. Par conséquent, en utilisant le fait que t'_i appartient à $\sigma_{f_R^{q_i}}$ et le lien entre t_i et t'_i on obtient :

  - si m est dans $!A$ et donc de la forme $\alpha(i).a$, alors
    - m' est $\alpha(i).a'$ si $f_R^{q_i}(a) = a'$ appartient à A,
    - m' est $f_R^{q_i}(a)$ si $f_R^{q_i}(a)$ appartient à $?\Gamma$,
  - si m est dans $?\Gamma$ alors :
    - m' est $\alpha(i).a'$ si $f_R^{q_i}(m) = a'$ appartient à A,
    - m' est $f_R^{q_i}(m)$ si $f_R^{q_i}(m)$ appartient à $?\Gamma$.

  Vu le choix fait pour les bijections $< ., . >_j$, ce successeur m' est donc bien le résultat de $f^q_{R'}(m)$.
- Si R' est obtenu à partir de R par un affaiblissement : c'est immédiat.

– Supposons $R' : \Gamma, \Delta$ obtenu à partir de $R_1 : \Gamma, A$ et $R_2 : A^\perp, \Delta$ par une coupure. Soit s une partie de σ_R, alors il existe s_1 dans σ_{R_1} et s_2 dans σ_{R_2} telles que $s = s_1; s_2$.

  Par h.i. sur R_1 et R_2 on sait qu'il existe deux paramétrages p_1 et p_2 de ces réseaux tels que s_i appartient à $\sigma_{f_{R_i}^{p_i}}$ pour $i = 1, 2$. Prenons alors comme paramétrage p' de R le paramétrage utilisant p_1 pour les noeuds de R_1 et p_2 pour les noeuds de R_2. On a :

$$s = s_1; s_2 \in \sigma_{f_{R_1}^{p_1}}; \sigma_{f_{R_2}^{p_2}} = \sigma_{f_{R'}^{p'}}.$$

  Ce dernier cas termine la preuve par induction. On a donc montré :

$$\sigma_R \subseteq \bigcup_p \sigma_{f_R^p}.$$

  Dans le cas où R est normal pour la réduction stricte on déduit du lemme 4.31 et de la proposition 4.22:

$$\bigcup_p \sigma_{f_R^p} \subseteq [\sigma_{f_R}] = \sigma_R\,,$$

  d'où :

$$\sigma_R = \bigcup_p \sigma_{f_R^p}.$$

□

4.4 Lien entre le modèle des stratégies saturées et le modèle AJM

Nous souhaitons dans cette section expliciter le rapport entre la catégorie $\mathcal{IG}$ du chapitre 3 dont les morphismes sont des classes d'équivalence de stratégies et la catégorie des stratégies saturées. Pour cela il nous faut nous restreindre aux jeux intuitionnistes puisque ce sont les objets de $\mathcal{IG}$.

En considérant comme objets les jeux intuitionnistes et comme morphismes de A vers B les stratégies saturées sur le jeu intuitionniste $A \multimap B$ on peut vérifier qu'on obtient bien une catégorie, que nous désignerons par $\mathbb{IG}$.

Notons la différence entre les identités de $\mathbb{IG}$ et $\mathbb{G}$: les parties non-vides du morphisme $[id_A] : A \multimap A$ (on fait l'abus de garder la même notation) de $\mathbb{IG}$ commencent toutes par un coup Opposant dans la composante de droite.

Proposition 4.32 ([AJM94]) *Si σ et τ sont deux stratégies sur un jeu intuitionniste auto-équivalentes on a :*

$$\sigma \sim \tau \iff [\sigma] = [\tau].$$

Proposition 4.33 *Étant donnés des jeux intuitionnistes A, B, C et σ, τ deux stratégies auto-équivalentes respectivement sur $A \multimap B$ et $B \multimap C$, on a :*

$$[\sigma; \tau] = [\sigma]; [\tau].$$

Preuve: L'inclusion de gauche à droite ne pose pas de problème (comme dans $\mathbb{G}$) : $[\sigma; \tau] \subseteq [\sigma]; [\tau]$. Il nous faut établir l'autre inclusion. Montrons par induction sur n la propriété suivante :

pour toutes parties s_1, s_2 de $[\sigma]$ et $[\tau]$ vérifiant : $(s_1)_B = (s_2)_B$ (de longueur n), on a :
il existe t_1 et t_2 respectivement dans σ et τ telles que $t_i \equiv s_i$ $(i = 1, 2)$ et $(t_1)_B = (t_2)_B$.

Si $n = 0$, $s = s_2$ et $(s_2)_B = \epsilon$. Il existe par conséquent une partie t_2 de τ telle que $s_2 \equiv t_2$ et on a : $\epsilon; t_2$ appartient à $\sigma; \tau$ et est une partie équivalente à s.

Supposons l'hypothèse vraie au rang k et prouvons la au rang $(k+1)$. On suppose donc que s_1 et s_2 vérifient les hypothèses avec $|(s_1)_B| = k+1$. Mettons par exemple que le dernier coup de $(s_1)_B$ est O. Alors le dernier coup de $(s_2)_B$ est O, donc par la condition de switching le dernier coup de s_2 est dans B. Soit s'_1 le préfixe de s_1 terminant avant le dernier coup de s_1 dans B et s'_2 le préfixe immédiat de s_2 : $s_2 = s'_2 m$. Noter que s'_2 termine par un coup O dans $B \multimap C$ et que s'_1 termine par un coup P dans B. Le dernier coup de s_1 dans B est m : $s'_1 m \sqsubseteq s_1$.

Les parties s'_1 et s'_2 vérifient alors l'hypothèse au rang k et on en déduit l'existence de t'_1, t'_2 respectivement dans σ et τ telles que $t'_i \equiv s'_i$ $(i = 1, 2)$ et $(t'_1)_B = (t'_2)_B$. Comme $t'_2 \equiv s'_2$ et $\tau \sim \tau$ il existe m' dans $M_{B \multimap C}$ tel que : $t'_2 m' \equiv s'_2 m$ et $t'_2 m' \in \tau$. On prend $t_2 = t'_2 m'$ et on a bien $t_2 \equiv s_2$ et $(t_2 \in \tau)$. Comme $(t'_2 m' \in P_{B \multimap C})$ on a $((t'_2)_B m' \in P_B)$ et donc $((t'_1)_B m' \in P_B)$. Par conséquent comme t'_1 termine par un coup P dans B on a : $(t'_1 m' \in P_{A \multimap B})$. On a alors $t'_1 m' \equiv s'_1 m$, donc comme $s'_1 m \sqsubseteq s_1$ et $\sigma \sim \sigma$ on en déduit qu'il existe t_1 dans σ telle que : $t'_1 m' \sqsubseteq t_1$ et $t_1 \equiv s_1$. Les parties t_1 et t_2 vérifient bien les conditions recherchées, donc la preuve est achevée. $\square$

Corollaire 4.34 *On a un foncteur F de $\mathcal{IG}$ vers $\mathbb{IG}$ donné par :*

$$\begin{aligned} F(A) &= A, \text{ pour } A \text{ un jeu intuitionniste} \\ F(\langle\sigma\rangle) &= [\sigma], \text{ pour } \langle\sigma\rangle \in \mathcal{IG}[A, B] \end{aligned}$$

Remarquons que F n'est pas surjectif car $\mathbb{IG}$ contient les saturations de stratégies qui ne sont pas sans-mémoire et de stratégies sans-mémoire mais non auto-équivalentes.

Corollaire 4.35 *La catégorie $\mathbb{IG}$ est un modèle de IMELL.*

On vérifie facilement ce corollaire en utilisant le fait que $\mathcal{IG}$ est un modèle et que le foncteur F commute aux opérations logiques de IMELL. Il s'ensuit en effet que l'interprétation d'une preuve Π dans $\mathbb{IG}$ est obtenue par $F(\langle\sigma_\Pi\rangle)$, où $\langle\sigma_\Pi\rangle$ est l'interprétation de Π dans $\mathcal{IG}$.

Remarquons notamment qu'au contraire de $\mathbb{G}$, le modèle intuitionniste $\mathbb{IG}$ modélise la réduction affaiblissement.

Enfin, dans le cas où on prend des jeux de base avec une relation d'équivalence triviale on peut expliciter l'action de F :

Proposition 4.36 *Soit $A \multimap B$ le jeu obtenu par l'interprétation d'une formule de IMELL avec des jeux de base d'équivalence réduite à l'identité. Si σ est une stratégie sans-mémoire auto-équivalente sur $A \multimap B$ on a :*

$$F(\langle\sigma\rangle) = [\sigma] = \bigcup\langle\sigma\rangle.$$

Preuve :

L'inclusion de gauche à droite est conséquence de la proposition 4.32. Pour établir l'autre inclusion prenons s dans $[\sigma]$: $\exists t \in \sigma /\ s \equiv t$. Soit ϕ un automorphisme de A tel que $t = \phi^*(s)$. Alors on peut vérifier que l'application partielle $f = \phi \circ f_\sigma \circ \phi^{-1}$ induit une stratégie sans-mémoire σ' et que $\sigma' \sim \sigma$. Comme t appartient à σ' on en déduit : $t \in \bigcup\langle\sigma\rangle$. $\square$

Chapitre 5

Sémantique de jeux et sémantiques sans temporalité

Notre but est maintenant de relier le modèle de jeux décrit au chapitre précédent à une sémantique plus "traditionnelle", sans temps explicite, du type des espaces cohérents ou du modèle relationnel.

L'intuition de départ est que cet oubli du temps est obtenu simplement au niveau des parties par l'oubli de l'entrelacement ; nous voulons passer d'un espace de *parties* à un espace de *positions*. Si nous disposons d'une telle opération d'écrasement des parties en positions (que nous noterons $\widehat{.}$) sur les jeux A et B, l'écrasement d'une partie s de $A \otimes B$ ou $A \parr B$ sera donné par : $\hat{s} = (\widehat{s_A}, \widehat{s_B})$. Une stratégie sera alors envoyée sur un ensemble de positions par l'écrasement de ses parties.

Il reste à définir une structure d'arrivée pour cette opération qui soit elle-même un modèle. Le candidat le moins contraignant semble a priori être le modèle relationnel. Cependant l'existence d'une position particulière (la position vide venant des parties vides) oblige à des modifications de cette sémantique, en particulier à une restriction de la composition relationnelle concernant le cas des compositions dégénérées (celles dont la communication est vide). La catégorie qu'on obtiendra est la *catégorie des relations pointées* $\mathbb{PR}$. De façon inattendue ce modèle se révèle être moins dégénéré que le modèle relationnel : les bifoncteurs $\otimes$ et $\parr$ ont bien la même action sur les objets mais au niveau des morphismes $f \otimes g$ et $f \parr g$ ne sont plus identifiés.

Une deuxième étape consiste à raffiner ce modèle d'arrivée de façon à ce qu'il comporte une vraie dualité. Le modèle des *relations pointées bipolarisées* $\mathbb{BPR}$ est obtenu en ajoutant aux positions deux polarités : dans le cas d'une position venant d'une partie il s'agit des auteurs respectifs du premier et du dernier coup. Cette modification nous rapproche du modèle de jeux car on montre alors que toute position bipolarisée peut être relevée en une partie du jeu correspondant et que l'interprétation de la syntaxe dans $\mathbb{G}$ et $\mathbb{BPR}$ commute à l'opération $\widehat{.}$.

Les sections 5.1 à 5.3 sont issues d'un travail en collaboration avec V. Danos, T. Ehrhard et L. Regnier ([BDER97b]).

5.1 Modèle des positions et des relations pointées

Nous allons considérer des *ensembles pointés*, c'est-à-dire des ensembles A munis d'un élément distingué $\bot_A$. Quand il n'y aura pas d'ambiguïté nous noterons simplement $\bot$ au lieu de $\bot_A$. Nous désignerons les éléments d'un ensemble pointé par le terme de *position* ; l'élément $\bot$ correspond à la position vide, le résultat d'une partie vide.

Une *relation pointée* $f : A \to B$ est un sous-ensemble de $A \times B$ contenant $(\bot_A, \bot_B)$.

Composition des positions étant donnés des éléments de $A_1 \times A_2$ et $A_2 \times A_3$ leur composition en un élément de $A_1 \times A_3$ est définie dans les cas suivants :

$$\begin{array}{rcll}(x_1, x_2);(x_2, x_3) & = & (x_1, x_3) & \text{si } x_2 \neq \perp \\ (x_1, \perp_{A_2});(\perp_{A_2}, \perp_{A_3}) & = & (x_1, \perp_{A_3}) & \\ (\perp_{A_1}, \perp_{A_2});(\perp_{A_2}, x_3) & = & (\perp_{A_1}, x_3) & \end{array}$$

où x_i est un élément de A_i.

Les deux dernières compositions sont appelées *passives* et la première *active*, comme pour la composition de parties du chap. 3.

Composition de relations pointées f et g étant respectivements des relations pointées de $A_1 \to A_2$ et $A_2 \to A_3$, on pose :

$$f;g = \{(x,y);(y,z), \text{ t.q. } (x,y) \in f,\ (y,z) \in g \text{ et cette composition est définie}\}.$$

Cette composition est associative et admet comme morphismes identités :

$$id_A = \{(x,x), x \in A\}.$$

Le seul cas délicat de la vérification de l'associativité est le suivant :

$$(x_1, \perp);((\perp, x_2);(x_2, \perp)) \in f;(g;h)$$

où $x_1, x_2 \neq \perp$.

Cette composition a pour résultat $(x_1, \perp)$. Comme $x_2 \neq \perp$ le deuxième parenthésage donne la composition $((x_1, \perp);(\perp, x_2));(x_2, \perp)$ qui n'est pas définie (la compositions des positions n'est donc pas associative). Cependant la définition des relations pointées nous donne que g et h contiennent chacune un élément $(\perp, \perp)$ et par conséquent :

$$(x_1, \perp) = ((x_1, \perp);(\perp, \perp));(\perp, \perp) \in (f;g);h.$$

ce qui nous permet de conclure.

Nous avons donc une catégorie $\mathbb{PR}$ d'ensembles pointés et de relations pointées.

5.1.1 Structure monoïdale

Le bifoncteur tenseur Soient A et B des ensembles pointés. Alors $A \otimes B$ est $A \times B$ et $\perp_{A\otimes B} = (\perp_A, \perp_B)$. Pour $i = 1, 2$, si $f_i : A_i \to B_i$, alors $f_1 \otimes f_2 : A_1 \otimes A_2 \to B_1 \otimes B_2$ est défini par :

$$\begin{array}{rcl}f_1 \otimes f_2 & = & \{((x_1, x_2), (y_1, y_2)), \text{ t.q. } (x_i, y_i) \in f_i \text{ et } y_1, y_2 \neq \perp\} \\ & & \cup \{((x_1, \perp), (y_1, \perp)), \text{ t.q. } (x_1, y_1) \in f_1\} \\ & & \cup \{((\perp, x_2), (\perp, y_2)), \text{ t.q. } (x_2, y_2) \in f_2\}.\end{array}$$

Remarque 5.1 Une caractérisation équivalente de $f_1 \otimes f_2$ est donnée par : $((x_1, x_2), (y_1, y_2))$ appartient à $f_1 \otimes f_2$ ssi (x_i, y_i) appartient à f_i et dans le cas où $y_i = \perp$, alors soit $x_i = \perp$, soit x_{i+1} et y_{i+1} sont toutes deux $\perp$ ($i + 1$ est ici considéré modulo 2). On se référera par la suite à cette condition comme à la *condition de connexion*.

Pour comprendre cette condition il faut se rappeler de l'action du bifoncteur $\otimes$ sur les morphismes dans le modèle de jeu $\mathbb{G}$: dans 4.1.3 la stratégie $\sigma_1 \otimes \sigma_2$ a été définie avec la condition que seul l'Opposant change dans ses parties de composante $i = 1$ ou 2 ; on a vu dans la remarque 4.18 que ceci impliquait que les changements de composante étaient faits dans $B_1 \otimes B_2$. Par conséquent si s est une partie de $\sigma_1 \otimes \sigma_2$ telle que $s_{B_i} = \epsilon$, alors il n'y a pas eu dans s de changement de composante 1 ou 2 et on a $s_{A_i} = \epsilon$ ou $s_{A_{i+1}} = \epsilon, s_{B_{i+1}} = \epsilon$.

Lemme 5.2 *Le tenseur est un bifoncteur d'unité : $I = \{\perp_I\}$.*

Vérifions seulement que pour $f_i : A_i \to B_i$ et $g_i : B_i \to C_i$ nous avons bien :

$$(f_1; g_1) \otimes (f_2; g_2) \subseteq (f_1 \otimes f_2); (g_1 \otimes g_2).$$

Prenons $((a_1, a_2), (c_1, c_2))$ dans $(f_1; g_1) \otimes (f_2; g_2)$. Il existe pour $i = 1, 2$ un b_i tel que :

$$(a_i, b_i); (b_i, c_i) = (a_i, c_i) \in f_i; g_i.$$

- Supposons $c_1 \neq \perp$ et $c_2 \neq \perp$. Alors nous savons que $((b_1, b_2), (c_1, c_2))$ appartient à $(g_1 \otimes g_2)$. A-t-on : $((a_1, a_2), (b_1, b_2)) \in (f_1 \otimes f_2)$? Supposons $b_i = \perp$, alors par définition de la composition comme $(a_i, c_i) \in (f_i; g_i)$ et $c_i \neq \perp$ nous avons $a_i = \perp$.

  Donc si $((a_1, a_2), (b_1, b_2)) \in (f_1 \otimes f_2)$ et $(b_1, b_2) = (\perp, \perp)$ alors $(a_1, a_2) = (\perp, \perp)$. On a bien : $((a_1, a_2), (c_1, c_2)) \in (f_1 \otimes f_2); (g_1 \otimes g_2)$.

- Supposons c_1 égal à $\perp$. Alors par définition du tenseur de deux morphismes (condition de connexion) : $a_1 = \perp$ ou ($a_2 = \perp$ et $c_2 = \perp$). Supposons par exemple que $a_1 = \perp$. Comme les relations contiennent $(\perp, \perp)$ on a : $((\perp, b_2), (\perp, c_2)) \in (g_1 \otimes g_2)$ et $((\perp, a_2), (\perp, b_2)) \in (f_1 \otimes f_2)$. De plus cette composition est bien valide puisque si $b_2 = \perp$ alors on doit avoir : $a_2 = \perp$ ou $c_2 = \perp$. Donc finalement : $((a_1, a_2), (c_1, c_2)) \in (f_1 \otimes f_2); (g_1 \otimes g_2)$.

Proposition 5.3 *La catégorie $\mathbb{PR}$ est $*$-autonome.*

La structure monoïdale symétrique est vérifiée facilement. Pour établir la clôture on considère tout d'abord pour chaque couple d'objets B, A l'objet $B \multimap A$ donné par l'ensemble $B \times A$ et $\perp_{B \multimap A} = (\perp_B, \perp_A)$. Soit alors $ev_{B,A}$ le morphisme d'évaluation de $\mathbb{PR}[(B \multimap A) \otimes B, A]$ défini par :

$$ev_{B,A} = \{(((b, a), b), a), \, a \in A, b \in B\}.$$

Maintenant soit T_B le foncteur donné par :

- $T_B(A) = A \otimes B$;
- pour $f \in \mathbb{PR}[A, A']$, $T_B(f) = f \otimes id_B$.

Pour montrer que $\mathbb{PR}$ est monoïdale close il nous suffit d'établir la propriété universelle suivante (cf [Mac71], ch. IV, théorème 2-(iv)) :

$$\text{pour tout } f : C \otimes B \to A, \ \text{ il existe un unique } f' : C \to (B \multimap A) \text{ tel que :}$$

$$T_B(f'); ev_{B,A} = f.$$

Pour la partie existentielle de l'assertion considérons l'application $\alpha : \mathbb{PR}[T_B(C), A] \longrightarrow \mathbb{PR}[C, (B \multimap A)]$ donnée par :

$$\alpha(f) = \{(c, (b, a)), \text{ t.q. } ((c, b), a) \in f\}.$$

On vérifie facilement que $T_B(\alpha(f)); ev_{B,A} = f$.

Réciproquement supposons que $f' : C \to (B \multimap A)$ satisfait $T_B(f'); ev_{B,A} = f$. Soit $((c, b), a)$ un élément de f, alors $((c, b), ((b, a), b))$ appartient à $T_B(f')$. Par conséquent $(c, (b, a))$ appartient à f' et on en déduit $\alpha(f) \subseteq f'$.

Inversement soit $(c, (b, a))$ un élément de f' ; alors $((c, b), ((b, a), b))$ appartient à $T_B(f')$ et $((c, b), a)$ appartient à $T_B(f'); ev_{B,A} = f$. Par conséquent on a $f' \subseteq \alpha(f)$. Donc finalement $f' = \alpha(f)$.

En prenant comme objet dualisant l'ensemble pointé à un seul élément : $D = \{\perp\}$ on obtient $A \simeq ((A \multimap D) \multimap D)$ et la catégorie obtenue est $*$-autonome.

Le bifoncteur $\parr$ peut alors être défini par :

- $A \parr B = (A^\perp \otimes B^\perp)^\perp$

– si $f_1 : A_1 \to B_1$ et $f_2 : A_2 \to B_2$ alors $f_1 \parr f_2 : A_1 \parr A_2 \to B_1 \parr B_2$ est :

$$f_1 \parr f_2 = {}^t({}^t f_1 \otimes {}^t f_2),$$

où ${}^t f_i : B_i^\perp \to A_i^\perp$ est obtenu à partir de f_i de la manière habituelle.

Notons qu'on a à isomorphisme près $A \parr B = A \otimes B$ mais que par contre :

$$\begin{array}{rcl} f_1 \parr f_2 & = & \{((x_1, x_2), (y_1, y_2)), \text{ t.q. } (x_i, y_i) \in f_i \text{ et } x_1, x_2 \neq \perp\} \\ & & \cup \{((x_1, \perp), (y_1, \perp)), \text{ t.q. } (x_1, y_1) \in f_1\} \\ & & \cup \{((\perp, x_2), (\perp, y_2)), \text{ t.q. } (x_2, y_2) \in f_2\} \\ & \neq & f_1 \otimes f_2. \end{array}$$

L'isomorphisme entre $A \parr B$ et $A \otimes B$ n'est donc pas naturel.

5.1.2 Structure exponentielle

Étant donné un ensemble pointé A, l'ensemble pointé $!A$ est donné par l'ensemble des multiensembles d'éléments de $A \backslash \{\perp_A\}$ et $\perp_{!A}$ est le multiensemble vide noté $[\,]$.

Nous interprétons alors les règles exponentielles de la manière suivante :

– *promotion* : si $f : !\Gamma \to A$ alors $f^! : !\Gamma \to !A$ est définie par :

$$\begin{array}{rcl} f^! & = & \{(u_1 + \cdots + u_n, [x_1, \ldots, x_n]), \text{ t.q. } (u_i, x_i) \in f \text{ et } x_i \neq \perp_A\} \\ & & \cup \{(u, [\,]), \text{ t.q. } (u, \perp_A) \in f\}. \end{array}$$

Ainsi $f^!$ est une sorte d'union de tenseurs n-aires $f \otimes f \ldots \otimes f$, avec des contractions (voir ci-dessous) opérées sur le contexte.

– *déréliction* : $der_A : !A \to A$ est défini par

$$der_A = \{([x], x), \text{ t.q. } x \neq \perp_A\} \cup \{([\,], \perp_A)\}.$$

– *contraction* : $co_A : !A \to (!A \otimes !A)$ est défini par :

$$co_A = \{(u + v, (u, v)), \text{ t.q. } u, v \in !A\}.$$

– *affaiblissement* : $weak_A : !A \to I$ est défini par :

$$weak_A = \{([\,], \perp_I)\}.$$

Proposition 5.4 *La catégorie $\mathbb{PR}$ est un modèle de MELL pour la réduction stricte.*

Preuve :

La catégorie $*$-autonome $\mathbb{PR}$ doit vérifier les équations suivantes :

$$\begin{array}{rcl} f^!; der_A & = & f \\ f^!; co_A & = & co_\Gamma; (f^! \otimes f^!) \\ f^!; g^! & = & (f^!; g)^! \end{array}$$

pour tout $f : !\Gamma \to A$ et $g : !A, !\Delta \to B$.

Traitons à titre d'exemple le cas de la réduction contraction (les autres cas sont similaires). Pour faciliter l'écriture on se place dans le cas $f : !A \to B$. Tout d'abord vérifions l'inclusion gauche-droite : $f^!; co_B \subseteq co_A; (f^! \otimes f^!)$.

Soit $(u,(v,w))$ un élément de $f^!; co_B$; alors : $(u, v+w) \in f^!$. Ceci implique que u peut être partagé en $u = u' + u''$ de telle façon que : $(u', v) \in f^!$, $(u'', w) \in f^!$. De plus : si v et w sont non tous deux $[\,]$ alors si v (resp. w) est $[\,]$ alors u'(resp. u'') peut être pris $[\,]$; si u et v sont tous deux $[\,]$ alors u' ou u'' peut être pris $[\,]$. Ceci garantit que $((u', u''), (v, w)) \in (f^! \otimes f^!)$ et donc $((u' + u''), (v, w)) \in co_A; (f^! \otimes f^!)$.

Le seul problème pour établir l'inclusion inverse apparaît dans le cas où on considère $((u, u'), (v, v'))$ dans $(f^! \otimes f^!)$ tel qu'on ait par exemple $v = [\,]$. Cependant par la condition de connexion nous savons qu'alors $u = [\,]$ ou $u' = v' = [\,]$, ce qui implique $(u + u', v + v') \in f^!$. $\square$

Remarque 5.5 À cause de la manière dont nous interprétons la promotion (plus précisément à cause du sous-ensemble $\{(u, [\,]), \text{t.q. } (u, \perp_A) \in f\}$ de $f^!$), la réduction affaiblissement n'est pas valide dans cette sémantique. Ceci fait partie du prix à payer pour obtenir la proposition 5.25 et le théorème 5.26 reliant l'interprétation de la syntaxe par des stratégies aux interprétations dans $\mathbb{PR}$ et $\mathbb{BPR}$. En fait ces résultats reposent en particulier sur le fait qu'on a l'inclusion suivante : $\widehat{[\sigma^!]} \subseteq \widehat{[\sigma]}^!$.

5.2 Positions bipolarisées

Nous voudrions maintenant raffiner ce modèle de relations pointées de façon à obtenir une vraie dualité. Un moyen pour cela est d'ajouter aux points (positions) une information supplémentaire (*polarité*) correspondant dans le langage des parties à l'auteur (O ou P) du premier coup de la partie. Cette notion de *position polarisée* se marie bien avec la composition et les constructions définies pour le modèle des relations pointées et donne le modèle $\mathbb{PPR}$ des relations pointées polarisées, décrit dans [BDER97b]. Nous choisissons ici de munir les positions de deux polarités (*positions bipolarisées*), correspondant aux auteurs des premier et dernier coup de la partie, ce qui donne un modèle ($\mathbb{BPR}$) plus proche du modèle de jeux $\mathbb{G}$.

Soient $Pol = \{O, P, N\}$ l'ensemble des *polarités* et $Bpol = \{OO,\ OP,\ PO,\ PP,\ NN\}$ l'ensemble des *bipolarités*. La bipolarité NN sera aussi simplement notée N. Un *ensemble bipolarisé pointé* (abrégé en *e.b.p.*) est un ensemble pointé A muni d'une fonction de bipolarité Λ_A de A vers $Bpol$, telle que seul $\perp_A$ a la bipolarité N. Nous définissons la polarité initiale $\lambda^i_A(x)$ et la polarité finale $\lambda^f_A(x)$ d'une position x par : $\Lambda_A(x) = \lambda^i_A(x)\,\lambda^f_A(x)$.

Morphismes Une *relation bipolarisée pointée* est un sous-ensemble f de $A_1 \times A_2$ contenant $(\perp_{A_1}, \perp_{A_2})$ et tel que tous ses éléments (x_1, x_2) satisfont :

- $\lambda^i_{A_1}(x_1) = P$ implique $\lambda^i_{A_2}(x_2) = P$ ou N.
- $\lambda^f_{A_2}(x_2) = P$ implique $\lambda^f_{A_1}(x_1) = P$ ou N.

La composition de positions et de relations bipolarisées pointées sont définies comme dans $\mathbb{PR}$. Vérifions que la condition sur les bipolarités est préservée par cette composition. Supposons que (x_1, x_3) appartient à $f; g$ où f et g sont des éléments respectivement de $\mathbb{BPR}[A_1, A_2]$ et $\mathbb{BPR}[A_2, A_3]$. Il existe x_2 tel que : $(x_1, x_3) = (x_1, x_2); (x_2, x_3)$. Supposons $\lambda^i_{A_1}(x_1) = P$, alors :

- soit $\lambda^i_{A_2}(x_2) = N$, ce qui signifie que $x_2 = \perp_{A_2}$ et par la restriction sur la composition passive ceci implique $x_3 = \perp_{A_3}$
- soit $\lambda_{A_2}(x_2) = P$, auquel cas $\lambda_{A_3}(x_3) = P$ ou $\lambda_{A_3}(x_3) = N$.

Symétriquement on obtient de la même manière : si $\lambda^f_{A_3}(x_3) = P$ alors $\lambda^f_{A_1}(x_1) = P$ ou N.

L'associativité et l'existence d'identités sont montrées comme pour $\mathbb{PR}$ et $\mathbb{BPR}$ est une catégorie.

5.2.1 Structure monoïdale

Le bifoncteur tenseur $A_1 \otimes A_2$ est l'ensemble des (x_1, x_2) tels que $(\lambda^i_{A_1}(x_1), \lambda^i_{A_2}(x_2)) \neq (P, P)$ et $(\lambda^f_{A_1}(x_1), \lambda^f_{A_2}(x_2)) \neq (O, O)$. La bipolarité de (x_1, x_2) dans $A_1 \otimes A_2$ est alors donnée par les tableaux suivants :

$x_1 \backslash x_2$	O	P	N
O	O	P	O
P	P		P
N	O	P	N

Polarité initiale de (x_1, x_2).

$x_1 \backslash x_2$	O	P	N
O		O	O
P	O	P	P
N	O	P	N

Polarité finale de (x_1, x_2).

Les règles d'attribution de polarité finale pour une position du jeu $\otimes$ sont celles données par F. Lamarche dans [Lam92]. Appelons $\lambda^i_\otimes$ et $\lambda^f_\otimes$ les applications partielles $Pol^2 \to Pol$ définies par ces tableaux.

Lemme 5.6 *Si p_1, p_2, p_3 sont des polarités on a :*
$\lambda^i_\otimes(p_1, \lambda^i_\otimes(p_2, p_3))$ *est définie si et seulement si* $\lambda^i_\otimes(\lambda^i_\otimes(p_1, p_2), p_3)$ *est définie, et dans ce cas :* $\lambda^i_\otimes(p_1, \lambda^i_\otimes(p_2, p_3)) = \lambda^i_\otimes(\lambda^i_\otimes(p_1, p_2), p_3)$*. La même propriété est vraie pour* $\lambda^f_\otimes$*.*

On notera $\lambda^i_\otimes(p_1, \ldots, p_n) = \lambda^i_\otimes(\ldots \lambda^i_\otimes(p_1, p_2), \ldots, p_n)$; même chose pour $\lambda^f_\otimes(p_1, \ldots, p_n)$.

Pour $i = 1, 2$, soit $f_i : A_i \to B_i$. Nous définissons $f_1 \otimes f_2 : A_1 \otimes A_2 \to B_1 \otimes B_2$ par :

$$\begin{aligned} f_1 \otimes f_2 \quad = \quad & \{((x_1, x_2), (y_1, y_2)), \text{ t.q. } (x_i, y_i) \in f_i, \quad y_1, y_2 \neq \perp \\ & \quad \text{et } (y_1, y_2) \in B_1 \otimes B_2\} \\ & \cup \{((x_1, \perp), (y_1, \perp)), \text{ t.q. } (x_1, y_1) \in f_1\} \\ & \cup \{((\perp, x_2), (\perp, y_2)), \text{ t.q. } (x_2, y_2) \in f_2\}. \end{aligned}$$

Remarquons que la seule différence avec le cas de $\mathbb{PR}$ est la condition que (y_1, y_2) appartient à $B_1 \otimes B_2$ dans le cas où y_1 et y_2 sont tous deux différents de $\perp$.

Vérifions que $f_1 \otimes f_2$ est bien défini. Seul le premier sous-ensemble de $f_1 \otimes f_2$ peut poser problème. Il nous faut montrer que (x_1, x_2) appartient à $A_1 \otimes A_2$ et que $((x_1, x_2), (y_1, y_2))$ vérifie les conditions de polarités. Supposons $(\lambda^i_{A_1}(x_1), \lambda^i_{A_2}(x_2)) = (P, P)$, alors comme (x_i, y_i) appartient à f_i et comme on est dans le cas $y_i \neq \perp$ on sait que $\lambda^i_{B_i}(y_i) = P$ pour $i = 1, 2$, ce qui contredit le fait que (y_1, y_2) appartient à $B_1 \otimes B_2$. Si $(\lambda^f_{A_1}(x_1), \lambda^f_{A_2}(x_2)) = (O, O)$ alors pour les mêmes raisons et en utilisants la contraposée de la condition sur les polarités finales des morphismes on a $(\lambda^f_{B_1}(y_1), \lambda^f_{B_2}(y_2)) = (O, O)$, d'où à nouveau une contradiction. Par conséquent : $(x_1, x_2) \in A_1 \otimes A_2$.

En ce qui concerne les conditions de polarités pour $((x_1, x_2), (y_1, y_2))$:

- Si $\lambda^i_{A_1 \otimes A_2}(x_1, x_2) = P$ alors on a pour $i = 1$ ou 2, $\lambda^i_{A_i}(x_i) = P$ et par conséquent comme (x_i, y_i) appartient à $\mathbb{BPR}[A_i, B_i]$ on en déduit : $\lambda^i_{B_i}(y_i) = P$, ce qui implique $\lambda^i_{B_1 \otimes B_2}(y_1, y_2) = P$.

- Si $\lambda^f_{B_1\otimes B_2}(y_1,y_2)=P$ alors comme de plus y_1 et y_2 sont non $\perp$ on a : $\lambda^f_{B_i}(y_i)=P$ pour $i=1,2$. On utilise alors la condition de polarités finales de f_1 et f_2 pour arriver à : $\lambda^f_{A_i}(x_i)=P$ pour $i=1,2$, d'où $\lambda^f_{A_1\otimes A_2}(x_1,x_2)=P$.

Proposition 5.7 *$\otimes$ est un bifoncteur de la catégorie $\mathbb{BPR}$.*

La preuve de $(f\otimes g);(f'\otimes g')=(f;g)\otimes(f';g')$ est similaire à celle faite pour $\mathbb{PR}$ et utilise les définitions de la composition et du tenseur de deux morphismes. L'égalité $(id_A\otimes id_B)=id_{A\otimes B}$ est claire.

Clôture et dualité Définissons l'opération $\bar{\cdot}$ sur les polarités par : $\bar{O}=P$, $\bar{P}=O$, $\bar{N}=N$.

Étant donné un objet A de $\mathbb{BPR}$, son dual $A^\perp$ est donné par le même ensemble pointé muni de la fonction de bipolarité $\Lambda_{A^\perp}=\bar{\lambda}^i_A\,\bar{\lambda}^f_A$.

On définit alors $A\multimap B$ comme $(A\otimes B^\perp)^\perp$, ce rend la catégorie monoïdale close, et l'objet dualisant $D=\{\perp\}$ nous donne :

Proposition 5.8 *La catégorie $\mathbb{BPR}$ est $*$-autonome.*

Remarque 5.9 Une conséquence de l'adjonction est qu'on a : un sous-ensemble f de $A_1\times A_2$ contenant $(\perp_{A_1},\perp_{A_2})$ est une relation bipolarisée ssi pour tout (x_1,x_2) de f, (x_1,x_2) est une position de $A_1\multimap A_2$.

5.2.2 Structure exponentielle

En première approche l'e.b.p. $!A$ est un tenseur généralisé symétrique sur A. Plus précisément, étant donné en ensemble pointé bipolarisé A, l'e.b.p. $!A$ a pour éléments les multiensembles $[x_1,\ldots,x_n]$ d'éléments de $A\backslash\{\perp_A\}$ tels que :

- au plus un x_i vérifie : $\lambda^i_A(x_i)=P$,
- au plus un x_i vérifie : $\lambda^f_A(x_i)=O$.

On pose $\perp_{!A}=[\,]$ et pour $n\geq 1$:

- $\lambda^i_{!A}([x_1,\cdots,x_n])=\lambda^i_\otimes(\lambda^i_A(x_1),\cdots,\lambda^i_A(x_n))$,
- $\lambda^f_{!A}([x_1,\cdots,x_n])=\lambda^f_\otimes(\lambda^f_A(x_1),\cdots,\lambda^f_A(x_n))$.

Ainsi $\lambda^i_{!A}([x_1,\cdots,x_n])=O$ (resp. $\lambda^f_{!A}([x_1,\cdots,x_n])=P$) ssi pour tout $1\leq j\leq n$ $\lambda^i_A(x_j)=O$ (resp. pour tout $1\leq j\leq n$ $\lambda^f_A(x_j)=P$).

Comme conséquence de cette définition on a le lemme suivant :

Lemme 5.10 *Si $u_1,\cdots,u_n$ appartiennent à $!A$ alors $(u_1+\cdots+u_n)$ appartient à $!A$ ssi au plus un u_i est de polarité initiale P et au plus un u_i est de polarité finale O.*

On a alors :

- *$\Lambda(u_1+\cdots+u_n)=N$ ssi pour tout $1\leq i\leq n$ $\Lambda(u_i)=N$,*
- *si on n'est pas dans le cas précédent alors :*
  - *$\lambda^i(u_1+\cdots+u_n)=P$ ssi il existe i tel que $\lambda^i(u_i)=P$,*
  - *$\lambda^f(u_1+\cdots+u_n)=O$ ssi il existe i tel que $\lambda^f(u_i)=O$.*

L'interprétation des exponentielles est alors faite de la même manière que pour le modèle des relations pointées sauf :

- pour la promotion, comme pour le tenseur on demande que $[x_1, \cdots, x_n]$ appartienne à $!A$:

  étant donné $f : \ !\Gamma \to A$, le morphisme $f^! : \ !\Gamma \to !A$ est défini par

  $$\begin{array}{rcl} f^! & = & \{(u_1 + \cdots + u_n, [x_1, \ldots, x_n]), \text{ t.q. } (u_i, x_i) \in f \text{ et } [x_1, \cdots, x_n] \in !A\} \\ & & \cup \{(u, [\,]), \text{ t.q. } (u, \bot_A) \in f\}. \end{array}$$

- pour la contraction (u, v) doit appartenir à $(!A \otimes !A)$,

  $co_A : !A \to (!A \otimes !A)$ est défini par :

  $$co_A = \{(u + v, (u, v)), \text{ t.q. } (u, v) \in (!A \otimes !A)\}.$$

Est-ce que ces définitions sont valides ? Vérifions-le par exemple pour le cas de la promotion : a-t-on $(u_1 + \cdots + u_n) \in !\Gamma$ et ensuite $f^! \in \mathbb{BPR}[!\Gamma, !A]$? Pour plus de simplicité vérifions-le dans le cas où Γ est réduit à une formule B.

Considérons le cas où (u_i, x_i) appartient à f et $[x_1, \cdots, x_n]$ appartient à $!A$. Supposons alors $\lambda^i(u_i) = P$ et $\lambda^i(u_j) = P$. La condition sur les relations bipolarisées pointées impose alors que $\lambda^i(x_i) = P$ et $\lambda^i(x_j) = P$. Par conséquent comme $[x_1, \cdots, x_n]$ appartient à $!A$ on en déduit que $i = j$. Ainsi au plus un u_i est de polarité initiale P.

Supposons maintenant $\lambda^f(u_i) = O$ et $\lambda^f(u_j) = O$. Alors la deuxième condition sur les relations bipolarisées entraine : $\lambda^f(x_i) = O$ et $\lambda^f(x_j) = O$. D'où $i = j$. Ainsi d'après le lemme 5.10, $(u_1 + \cdots u_n)$ appartient bien à $!B$.

Pour la vérification que $f^!$ est bien une relation bipolarisée : supposons $\lambda^i(u_1 + \cdots + u_n) = P$; alors il existe un i tel que $\lambda^i(u_i) = P$ et par conséquent comme f appartient à $\mathbb{BPR}[!B, A]$ on a $\lambda^i(x_i) = P$. On en déduit donc $\lambda^i([x_1, \cdots, x_n]) = P$. Maintenant si $\lambda^f([x_1, \cdots, x_n]) = P$ alors pour tout i on a $\lambda^f(x_i) = P$, et donc pour tout i, $\lambda^f(u_i) = P$ ou N. Par conséquent $\lambda^f(u_1 + \cdots u_n) = P$ ou N.

Proposition 5.11 *La catégorie* $\mathbb{BPR}$ *est un modèle de MELL pour la réduction stricte.*

Preuve :

On utilise le lemme suivant (dont on laisse la preuve au lecteur) :

Lemme 5.12 *Soit* $f^! : \ !\Gamma \to !A$ *et pour* $i = 1, \ldots, n$, *soit* (u_i, v_i) *dans* $f^!$. *Si aucun* v_i *n'est* $\bot$ *et si pour au plus un* i *on a* $\lambda^i(v_i) = P$, *pour au plus un* j *on a* $\lambda^f(v_j) = P$, *alors:*
$(u_1 + \cdots + u_n, v_1 + \cdots + v_n) \in \ f^!$.

La preuve de la proposition 5.11 se fait de la même manière que pour $\mathbb{PR}$ avec les vérifications supplémentaires sur les conditions de polarités.

5.3 Application d'oubli du temps

5.3.1 Oubli du temps dans les parties

Nous voulons définir un foncteur (qui ne sera en fait qu'un foncteur "lax") du modèle de jeux et de stratégies saturées $\mathbb{G}$ vers le modèle de positions $\mathbb{BPR}$.

Supposons donnée pour toute formule atomique A une application $\widehat{\ }$ de l'ensemble de parties P_A du jeu A vers l'ensemble de positions de l'objet A de $\mathbb{BPR}$ satisfaisant les conditions suivantes :

- $s \equiv_A s' \Rightarrow \widehat{s} = \widehat{s'}$

- $\lambda^i(\widehat{s}) = p$ ssi
  - $s = \epsilon$ et $p = N$, ou
  - s commence par un coup P (resp. un coup O) et $p = P$ (resp. $p = O$).
- $\lambda^f(\widehat{s}) = p$ ssi
  - $s = \epsilon$ et $p = N$, ou
  - s termine par un coup P (resp. un coup O) et $p = P$ (resp. $p = O$).

Alors $F[A_1, \cdots, A_n]$ étant une formule contenant comme formules atomiques $A_1, \ldots, A_n$, on définit par induction une application $\widehat{.}: P_F \to F$ par :

$$\begin{array}{ccccc} P_{A_1 m A_2} & \to & A_1 m A_2 & & \text{pour } m = \otimes \text{ ou } \parr \\ s & \to & (\widehat{s_{A_1}}, \widehat{s_{A_2}}) & & \\ P_{\Box A} & \to & \Box A & & \text{pour } \Box = \,!\, \text{ ou } ? \\ s & \to & [\widehat{s_{i_1}}, \ldots, \widehat{s_{i_n}}] & & \end{array}$$

où $i_1, \ldots, i_n$ sont les indices tels que $s_{i_j} \neq \epsilon$
(rappelons que s_i est la projection de la partie s de $P_{!A}$ sur l'indice i définie dans la définition 3.8).

Lemme 5.13 *Étant données s et t dans P_A telles que $s \equiv t$ on a : $\widehat{s} = \widehat{t}$.*

Preuve : On le vérifie facilement par induction sur A en utilisant l'hypothèse faite dans le cas des formules atomiques. □

Proposition 5.14 *Si s est une partie de P_A alors $\widehat{s}$ est bien définie et $\lambda^i_A(\widehat{s})$ (resp. $\lambda^f_A(\widehat{s})$) est l'auteur du premier (resp. dernier) coup de s. En particulier $\Lambda(\widehat{s}) = N$ ssi s est la partie vide.*

Preuve :

On le montre par induction sur A. Dans le cas d'un jeu atomique c'est vrai par hypothèse.

Soit s une partie de $P_{A_1 \otimes A_2}$. Montrer que $\widehat{s}$ est bien définie revient à montrer que le couple de positions bipolarisées $(\widehat{s_{A_1}}, \widehat{s_{A_2}})$ est une position bipolarisée de $A_1 \otimes A_2$. Nous affirmons que les polarités de ses premiers et derniers coups peuvent alors être déduites des polarités des premiers et derniers coups de s_{A_1} et s_{A_2} en utilisant respectivement les fonctions $\lambda^i_\otimes$ et $\lambda^f_\otimes$; en effet :

- si l'une des deux projections est vide (mettons s_{A_1}) alors s a comme polarités de premier et dernier coup les polarités de premier et dernier coup de l'autre projection ; par ailleurs les applications $\lambda^i_\otimes(N, .)$ et $\lambda^f_\otimes(N, .)$ sont égales à l'application identité sur les polarités.
- Si les deux projections commencent par un coup O, alors s commence par un coup O ; par ailleurs on a $\lambda^i_\otimes(O, O) = O$.
- Si l'une des deux projections (mettons s_{A_1}) commence par un coup P et l'autre est non vide ; alors comme la condition de switching impose que seul l'Opposant peut changer de composante, on sait que s_{A_2} commence par un coup O. En effet si s_{A_2} commençait par un coup P, alors aucune des deux composantes ne pourrait être la composante visitée en second puisque la projection suivant cette composante commence par un coup satisfaisant la condition de switching. Pour cette raison encore, A_1 ne peut être la composante visitée en second et donc le premier coup de s est le premier coup de s_{A_1}, donc de polarité P. Par ailleurs on a bien $\lambda^i_\otimes(P, O) = P$.

- Si les deux projections sont non vides et terminent par un coup P alors s termine par un coup P et on a $\lambda^f_\otimes(P,P) = P$.
- Si une des deux projections (mettons s_{A_1}) termine par un coup O, alors comme précédemment, en considérant cette fois le dernier changement de composante dans la partie, on voit que compte tenu de la condition de switching il ne peut être fait de A_1 vers A_2. Par conséquent s_{A_2} termine par un coup P et le dernier coup de s est le dernier coup de s_{A_1}. Par ailleurs on a bien $\lambda^f_\otimes(O,P) = O$.

Par conséquent, comme par h.i. les polarités des premier et dernier coup de s_{A_i} sont données respectivement par $\lambda^i(\widehat{s_{A_i}})$ et $\lambda^f(\widehat{s_{A_i}})$ on en déduit que le même résultat est vrai pour $A_1 \otimes A_2$.

Les autres cas ($\parr$, !, ?) sont traités de la même manière.

$\square$

Proposition 5.15 *Si pour les jeux atomiques A l'application $\widehat{\cdot} : P_A \to A$ est surjective, alors on a : pour toute formule A, l'application $\widehat{\cdot} : P_A \to A$ est surjective :*

$$x \in A \Rightarrow \exists s \in P_A / \ \widehat{s} = x.$$

Remarque 5.16 On peut aussi définir une application d'oubli du temps $\widehat{\cdot}$ vers $\mathbb{PR}$. Toutefois cette propriété de surjectivité n'est alors pas vraie (elle utilise en effet les contraintes de polarités de $\mathbb{BPR}$).

Preuve de la Proposition :

On le montre par induction sur le nombre de connecteurs et modalités de A.

- Commençons par le cas de $A_1 \otimes A_2$. Soit (x_1, x_2) une position bipolarisée de $A = A_1 \otimes A_2$; alors par h.i. il existe des parties s_i de P_{A_i} $(i = 1,2)$ telles que $\widehat{s_i} = x_i$. Montrons qu'on peut construire une partie s de P_A telle que $\widehat{s} = (x_1, x_2)$; pour cela il suffit de trouver un entrelacement de s_1 et s_2 satisfaisant les conditions d'alternance et de switching sur $A_1 \otimes A_2$.
  - si un x_i (mettons x_1) est $\perp_{A_i}$ il suffit de prendre $s = s_{A_2}$.
  - si $x_1, x_2 \neq \perp$, par la condition de polarités finales pour le tenseur on sait que l'un des deux vérifie $\lambda^f_{A_i}(x_i) = P$. Mettons par exemple que c'est le cas de x_1. Alors :
    - si $\lambda^i_{A_2}(x_2) = O$, par la proposition 5.14 on sait que s_1 termine par un coup P et s_2 commence par un coup O. La suite $s = s_1 s_2$ est alternée et vérifie la condition de switching. C'est donc une partie satisfaisant $\widehat{s} = (x_1, x_2)$.
    - Si $\lambda^i_{A_2}(x_2) = P$, alors par les conditions de polarités initiales pour le tenseur on sait que $\lambda^i_{A_1}(x_1) = O$.
      Si $\lambda^f_{A_2}(x_2) = P$, on fait comme dans le cas précédent en intervertissant s_1 et s_2 : $s = s_2 s_1$ convient.
      Sinon $\lambda^f_{A_2}(x_2) = O$. D'après la proposition 5.14, comme $\lambda^i_{A_2}(x_2) = P$ on sait que s_2 s'écrit $s_2 = m_2 s'_2$ avec m_2 un coup Joueur dans A_2. La suite $s = m_2 s_1 s'_2$ est alors une partie valide satisfaisant la condition requise.
- Pour le $\parr$: soit (x_1, x_2) une position bipolarisée de $A_1 \parr A_2$ et comme précédemment s_i dans P_{A_i} $(i = 1,2)$ une partie telle que $\widehat{s_i} = x_i$. Alors (x_1, x_2) appartient à $A_1^\perp \otimes A_2^\perp$. On a montré qu'il existe s dans $P_{A_1^\perp \otimes A_2^\perp}$ telle que $\widehat{s} = (x_1, x_2)$. Alors s appartient à $P_{A_1 \parr A_2}$ et convient.

- Pour $!A$: c'est une application au cas n-aire de la méthode employée pour $\otimes$.

  Pour l'élément $[]$ de l'ensemble de positions bipolarisées A, la partie vide convient. Les autres éléments sont de la forme $[x_1, \cdots, x_n]$; par h.i. il existe une partie s_i de P_A, $s_i \neq \epsilon$ telle que $\widehat{s_i} = x_i$. De plus on sait que :

  $$\begin{array}{l} \text{au plus un } i \text{ vérifie } \lambda^f_A(x_i) = O, \\ \text{au plus un } i \text{ vérifie } \lambda^i_A(x_i) = P. \end{array}$$

  Pour chaque i on choisit alors un indice distinct (mettons justement i) et on désigne par t_i la suite de coups de $M_{!A}$ obtenue à partir de s_i en attribuant à chaque coup de s_i cet indice. Alors t_i appartient à $P_{!A}$. Distinguons maintenant plusieurs cas :

  - si pour tout i, $\lambda^f_A(x_i) = P$, alors :
    - s'il existe j_0 tel que $\lambda^i_A(x_{j_0}) = P$, on peut supposer (quitte à renommer les éléments du multiensemble) que $j_0 = 1$. La suite $s = t_1 t_2 \ldots t_n$ vérifie les conditions d'alternance, de switching et de projection donc : $s \in P_{!A}$. Elle satisfait bien $\widehat{s} = [x_1, \cdots, x_n]$.
    - si pour tout i $\lambda^i_A(x_{j_0}) = O$, la partie précédente s convient encore.
  - s'il existe i_0 tel que $\lambda^f_A(x_i) = O$, alors sans perdre de généralité on peut supposer $i_0 = n$.
    - s'il existe $j_0 \neq i_0$ tel que $\lambda^i_A(x_{j_0}) = P$ on peut supposer $j_0 = 1$. Alors la suite $s = t_1 t_2 \ldots t_n$ appartient à $P_{!A}$ et convient.
    - si pour tout i $\lambda^i_A(x_i) = O$ alors la même partie convient.
    - si $\lambda^i_A(x_{i_0}) = P$ (i.e. $\lambda^i_A(x_n) = P$ car on a pris $i_0 = n$), alors comme $\lambda^f_A(x_n) = O$ on sait que s_n s'écrit $s_n = m s'_n$, où m est un coup Joueur dans M_A et $s'_n \neq \epsilon$. Par conséquent $t_n = (n.m)t'_n$. On considère alors la suite $s = (n.m)t_1 t_2 \ldots t_{n-1} t'_n$: elle vérifie bien les conditions d'alternance et de switching ; c'est une partie de $P_{!A}$ telle que $\widehat{s} = [x_1, \cdots, x_n]$

- Le cas de $?A$ est dérivé de celui de $!A$ par dualité.

Ainsi on a bien montré le résultat pour toute formule de MELL. □

Remarque 5.17 Noter que dans le cas du tenseur par exemple, le relèvement d'une position (x_1, x_2) en une partie s de $A_1 \otimes A_2$ a été fait pour un choix quelconque de parties s_i satisfaisant $\widehat{s_i} = x_i$. On a donc en fait montré: si pour des parties s_i de P_{A_i} $(i = 1, 2)$ le couple $(\widehat{s_1}, \widehat{s_2})$ est une position bipolarisée de $A_1 \otimes A_2$, alors il existe s dans $P_{A_1 \otimes A_2}$ telle que $s_{A_i} = s_i$ pour $i = 1, 2$. Cette remarque vaut aussi pour les autres connecteurs.

Nous supposerons par la suite que les espaces de positions bipolarisées choisis pour interpréter les formules atomiques et les applications $\widehat{.}$ associées satisfont cette condition de surjectivité.

5.3.2 Parties OP et projections

Rappelons qu'une partie est dite OP (resp. PO) si elle commence par un coup O (resp. P) et termine par un coup P (resp. O), ou est vide. Comme les parties sont alternées, une partie est OP ou PO ssi elle est de longueur paire.

Nous avons alors les lemmes suivants (les preuves ne présentent pas de nouveauté particulière) :

Lemme 5.18 *Étant données des stratégies $\sigma : \Gamma, A$ et $\tau : \Delta, B$ soit $s : \Gamma, \Delta, A \otimes B$ une partie de $\sigma \otimes \tau$ et $s_0 = s_{\Gamma,A}$ et $s_1 = s_{B,\Delta}$. Alors $s_0 \in \sigma$ et $s_1 \in \tau$, et si s est OP alors s_0 et s_1 sont aussi OP.*

Lemme 5.19 *Soit $s : ?\Gamma, !A$ une partie de $\sigma^!$ et soit s^i la projection de s suivant i (voir 3.2.3). Alors $s_i \in \sigma$ et si s est OP alors les s_i sont OP aussi.*

5.3.3 Action sur les stratégies

Nous pouvons maintenant définir l'application envoyant les stratégies sur les relations bipolarisées :

Définition 5.20 *Étant donnée une stratégie σ, on pose $\widehat{\sigma} = \{\widehat{s},\ s$ est OP et $s \in \sigma\}$.*

À partir de $\sigma : A \multimap B$ on obtient bien pour $\widehat{\sigma}$ une relation bipolarisée pointée. En effet elle contient $(\perp_A, \perp_B)$, elle est incluse dans l'ensemble des positions de $A \multimap B$ (d'après la proposition 5.14) et la remarque 5.9 permet d'en déduire $\widehat{\sigma} \in \mathbb{BPR}[A, B]$.

Lemme 5.21 *Étant donnée une stratégie σ sur un jeu A on a : $\widehat{[\sigma]} = \widehat{\sigma}$.*

C'est une conséquence directe du lemme 5.13.

5.3.4 Fonctorialité lax

Proposition 5.22 *L'application $\widehat{\cdot}$ est un* foncteur lax *de la catégorie $\mathbb{G}$ vers la catégorie $\mathbb{BPR}$; plus précisément, étant données σ et τ deux stratégies composables nous avons :*

- $\widehat{\sigma;\tau} \subseteq \widehat{\sigma};\widehat{\tau}$.
- $\widehat{[id]} = id^{(BPR)}$

Remarque 5.23 Pour $\widehat{\cdot} : \mathbb{G} \to \mathbb{PR}$ la première propriété est aussi vraie ; par contre, on a seulement une inclusion $\widehat{[id]} \subseteq id^{(PR)}$. Ceci est du à la non-surjectivité de l'application des parties vers les positions non polarisées.

L'égalité entre $\widehat{\sigma;\tau}$ et $\widehat{\sigma};\widehat{\tau}$ est fausse en général. Considérons par exemple le cas de deux stratégies $\sigma : A^\perp, (D \otimes E)$ et $\tau : (D^\perp \parr E^\perp), C$ obtenues respectivement à partir des deux parties suivantes par clôtures par préfixes et par coups Opposant valides :

$$
\begin{array}{cccc}
A^\perp, & (D & \otimes & E) \\
 & d_1^O & & \\
 & d_2^P & & \\
 & & & e_1^O \\
 & & & e_2^P \\
 & d_3^O & & \\
a_1^P & & &
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{cccc}
(D^\perp & \parr & E^\perp), & C \\
 & & & c_1^O \\
 & & e_1^P & \\
 & & e_2^O & \\
d_1^P & & & \\
d_2^O & & & \\
d_3^P & & &
\end{array}
$$

La stratégie $\sigma;\tau$ ne contient pas de partie de longueur strictement supérieure à 1. Par contre on vérifie facilement que $\widehat{\sigma};\widehat{\tau}$ contient la position $(\widehat{a_1}, \widehat{c_1})$ qui vient d'une partie de longueur strictement supérieure à 1. On a donc dans ce cas : $\widehat{\sigma;\tau} \neq \widehat{\sigma};\widehat{\tau}$.

Preuve de la Proposition :

Commençons par montrer $\widehat{[id_A]} = id_A^{(BPR)}$. D'après le lemme 5.21 ceci revient à montrer $\widehat{id_A} = id_A^{(BPR)}$. Soit s une partie de $id_A : A^{(1)} \multimap A^{(2)}$ de longueur paire. On a $s_{A^{(1)}} = s_{A^{(2)}}$, d'où $\widehat{s} = (x, x)$ où $x = \widehat{s_{A^{(1)}}}$. Donc $\widehat{s} \subseteq id_A^{BPR}$.

Inversement, considérons un élément de id_A^{BPR} : il est de la forme (x, x). Si $x = \bot_A$ alors $(\bot_A, \bot_A) = \widehat{\epsilon_{A \multimap A}}$. Sinon par surjectivité de l'application $\widehat{\ }$ (proposition 5.15) il existe une partie t de P_A, $t \neq \epsilon$ telle que $\widehat{t} = x$. Si $\lambda_A^i(x) = O$ on prend pour s la partie de id_A commençant dans $A^{(2)}$ et telle que $s_{A^{(2)}} = s_{A^{(1)}} = t$. Si $\lambda_A^i(x) = P$ on prend pour s la partie de id_A commençant dans $A^{(1)}$ et vérifiant la même condition. On obtient donc dans tous les cas une partie s de id_A telle que $\widehat{s} = (x, x)$, d'où le résultat.

Montrons maintenant la première propriété pour deux stratégies $\sigma : A^\bot, B$, $\tau : B^\bot, C$.

Soit (a, c) une position de $\widehat{\sigma;\tau}$: il existe deux parties s_1 et s_2 respectivement de σ et τ telles que $s_1; s_2 = s$ avec s une partie OP telle que $\widehat{s} = (a, c)$. Alors si $s_1; s_2$ est une composition passive on a $(s_1)_B = (s_2)_{B^\bot} = \epsilon$ et $((s_1)_{A^\bot} = \epsilon$ ou $(s_2)_C = \epsilon)$. Supposons par exemple $(s_2)_C = \epsilon$ (l'autre cas est symétrique) ; alors $s = s_1$, donc s_1 est OP. Par ailleurs $\widehat{s} = (a, c)$, donc $c = \bot$, donc comme s_1 est OP on a : $(a, \bot) \in \widehat{\sigma}$. Finalement par composition passive des positions et comme $(\bot, \bot)$ est élément de $\widehat{\tau}$ on a : $(a, \bot); (\bot, \bot) = (a, \bot) \in \widehat{\sigma}; \widehat{\tau}$.

Si $s_1; s_2$ est une composition active, notons toujours s la partie obtenue. Par définition de la composition il existe une partie s' sur le jeu $A^\bot, (B \otimes B^\bot), C$ appartenant à $\sigma \otimes \tau$ et telle que $(s')_{A^\bot, B} = s_1$, $(s')_{B^\bot, C} = s_2$. Montrons que s' est OP. On sait que s est OP, appelons m son premier coup et montrons que m est aussi le premier coup de s'. Convenons par exemple que m appartient à M_C (le raisonnement est identique si m appartient à $M_{A^\bot}$). Si m n'est pas le premier coup de s', il est précédé dans s' par un coup dans B ou dans $B^\bot$. Or par la condition de switching, comme m est O et est joué dans C il ne peut être précédé par un coup dans $(B \otimes B^\bot)$. Par conséquent m est aussi le premier coup de s' et s' commence donc par un coup O. De la même manière on obtient que le dernier coup de s est aussi le dernier coup de s', et s' termine donc par un coup P. Ainsi s' est une partie OP. Le lemme 5.18 nous donne alors que s_1 et s_2 sont des parties OP.

Notons $(a_1, b_1) = \widehat{s_1}$ et $(b_2, c_2) = \widehat{s_2}$. Comme $(s_1)_{A^\bot} = s_{A^\bot}$ et $(s_2)_C = s_C$ on a $a_1 = a$ et $c_2 = c$. De plus comme $(s_1)_B = (s_2)_{B^\bot} \neq \epsilon$ on a $b_1 = b_2 = b \neq \epsilon$. Ainsi par composition active de positions on obtient : $(a, c) = (a, b); (b, c) \in \widehat{\sigma}; \widehat{\tau}$. Ceci termine la preuve. □

Proposition 5.24 *Étant données $\sigma_i : A_i \multimap B_i$ $(i = 1, 2)$ deux stratégies, on a :*

$$\widehat{\sigma_1 \otimes \sigma_2} = \widehat{\sigma_1} \otimes \widehat{\sigma_2}.$$

Preuve:

Commençons par montrer $\widehat{\sigma_1 \otimes \sigma_2} \subseteq \widehat{\sigma_1} \otimes \widehat{\sigma_2}$. Soit s une partie OP de $\sigma_1 \otimes \sigma_2$: la restriction $s_{A_i^\bot, B_i}$ appartient à σ_i pour $i = 1, 2$. De plus par le lemme 5.18 on sait que $s_{A_i^\bot, B_i}$ est OP. La proposition 5.14 nous donne que $\widehat{s}$ est une position bipolarisée de $(A_1 \otimes A_2) \multimap (B_1 \otimes B_2)$. Notons-la $((a_1, a_2), (b_1, b_2))$. Alors $(a_i, b_i) = \widehat{s_{A_i^\bot, B_i}}$.

- si $b_1 \neq \bot$ et $b_2 \neq \bot$, alors de $((b_1, b_2) \in B_1 \otimes B_2)$ et $((a_i, b_i) \in \widehat{[\sigma_i]})$ pour $i = 1, 2$ on déduit : $((a_1, a_2), (b_1, b_2)) \in \widehat{\sigma_1} \otimes \widehat{\sigma_2}$.
- Sinon mettons par exemple que $b_1 = \bot$. Alors $s_{B_1} = \epsilon$. Comme dans une stratégie tenseur les changements de composante 1 ou 2 sont faits dans $B_1 \otimes B_2$ (cf remarque 4.18) on en déduit : $s_{A_1^\bot} = \epsilon$ ou $s_{A_2^\bot, B_2} = \epsilon$. Donc $a_1 = \bot$ ou $(a_2 = \bot$ et $b_2 = \bot)$. Par conséquent on a bien : $((a_1, a_2), (b_1, b_2)) \in \widehat{\sigma_1} \otimes \widehat{\sigma_2}$.

Montrons maintenant $\widehat{\sigma_1} \otimes \widehat{\sigma_2} \subseteq \widehat{\sigma_1 \otimes \sigma_2}$. Soit $((a_1, a_2), (b_1, b_2))$ un élément de $\widehat{\sigma_1} \otimes \widehat{\sigma_2}$. Il existe pour $i = 1, 2$ une partie OP s_i de σ_i telle que $\widehat{s_i} = (a_i, b_i)$. Il nous faut maintenant trouver une manière d'entrelacer s_1 et s_2 de façon à obtenir une partie de $\sigma_1 \otimes \sigma_2$.

Si l'un des b_i est $\bot$ alors par la condition de connexion on sait que $(a_1, b_1) = (\bot, \bot)$ ou $(a_2, b_2) = (\bot, \bot)$. Il suffit suivant le cas de prendre la partie $s = s_1$ ou $s = s_2$.

Si $b_1 \neq \perp$ et $b_2 \neq \perp$: comme (b_1, b_2) appartient à $B_1 \otimes B_2$ on a $\lambda^f_{B_1}(b_1) = P$ ou $\lambda^f_{B_2}(b_2) = P$. Or si $\lambda^f_{B_i}(b_i) = P$ la partie $(s_i)_{B_i}$ termine par un coup P, donc par la condition de switching sur le jeu $A_i^\perp \parr B_i$ on sait que s_i termine dans B_i. De plus comme la partie est OP ce dernier coup est P. On a donc finalement :

une au moins des deux parties s_i termine dans B_i (et son dernier coup est alors P).

Par ailleurs le fait que (b_1, b_2) appartienne à (B_1, B_2) implique : $\lambda^i_{B_1}(b_1) = O$ ou $\lambda^i_{B_2}(b_2) = O$. De plus ($(s_i)_{B_i}$ commence par un coup O) implique par la condition de switching (s_i commence dans B_i). Par conséquent :

une au moins des deux parties s_i commence dans B_i (et son premier coup est alors O).

Mettons donc par exemple que s_1 commence dans B_1, par un coup O.

- supposons que s_1 termine dans B_1 (par un coup P). Alors :
  - **1er cas :** s_2 commence dans B_2. Alors s_2 commence dans B_2 par un coup O (puisque s_2 est OP) et la suite $s = s_1 s_2$ appartient à $P_{(A_1 \otimes A_2) \multimap (B_1 \otimes B_2)}$ puisqu'elle satisfait les conditions d'alternance et de switching. De plus elle appartient bien à $\sigma_1 \otimes \sigma_2$ puisque les changements de composante 1 ou 2 sont faits par l'Opposant. On a donc bien dans ce cas trouvé une partie s de $\sigma_1 \otimes \sigma_2$ telle que $\widehat{s} = ((a_1, a_2), (b_1, b_2))$.
  - **2ème cas :** s_2 commence dans A_2. Alors comme $(s_2)_{B_2} \neq \epsilon$, par la condition de switching on sait que s_2 admet un premier coup m dans B_2 qui est un coup P. Elle s'écrit donc $s_2 = s'_2 m s''_2$, où s''_2 est vide ou commence par un coup O dans B_2. On prend alors la suite $s = s'_2 m s_1 s''_2$. Elle vérifie les conditions pour être dans $P_{(A_1 \otimes A_2) \multimap (B_1 \otimes B_2)}$ et dans $\sigma_1 \otimes \sigma_2$.
- considérons le cas où s_1 termine dans A_1. Alors comme on a vu qu'au moins un s_i termine dans B_i on sait que s_2 termine dans B_2, par un coup P. La suite $s = s_2 s_1$ convient alors dans ce cas. □

Proposition 5.25 *Étant donnés une stratégie σ sur $!\Gamma \multimap B$, une formule A, on a :*

$$\begin{array}{rcl} \widehat{[\sigma]^!} & = & \widehat{\sigma}^{!(BPR)} \\ \widehat{der_A} & = & der_A^{(BPR)} \\ \widehat{co_A} & = & co_A^{(BPR)} \\ \widehat{weak_A} & = & weak_A^{(BPR)} \end{array}$$

Preuve :
Commençons par les égalités pour la déréliction, la contraction et l'affaiblissement.

Montrons $\widehat{der_A} = der_A^{(BPR)}$. La méthode est similaire à celle utilisée pour montrer $\widehat{id} = id^{(BPR)}$ (proposition 5.22). Pour l'inclusion gauche-droite il suffit de remarquer qu'une partie OP s de la stratégie $der_A : !A^{(1)} \multimap A^{(2)}$ satisfait : tous les coups de $s_{!A^{(1)}}$ sont de premier indice 0 et $s_{!A^{(1)},0} = s_{A^{(2)}}$. Par conséquent $\widehat{s}$ est de la forme $([x], x)$ et appartient à $der_A^{(BPR)}$.

Pour l'inclusion droite-gauche : considérons un élément $([x], x)$ de $der_A^{(BPR)}$; alors par surjectivité il existe t dans P_A telle que $\widehat{t} = x$. Le cas $t = \epsilon$ ne pose pas de problème. Sinon, si t commence par un coup O dans A on prend pour s la partie de der_A commençant dans $A^{(2)}$ et telle que $s_{A^{(2)}} = t$. Si t commence par un coup P dans A on prend pour s la partie de der_A commençant dans $!A^{(1)}$ avec le choix d'indice 0 et telle que $s_{A^{(2)}} = t$.

Pour la contraction on a facilement l'inclusion gauche-droite. Pour l'autre inclusion considérons un élément $(u_1 + u_2, (u_1, u_2))$ de $co_A^{(BPR)}$ avec $u_1 + u_2 \neq []$. Par surjectivité encore il existe pour $i = 1, 2$ une partie t_i dans $P_{!A}$ telle que $\widehat{t_i} = u_i$. Soit t_1' (resp. t_2') la partie de $P_{!A}$ obtenue à partir de t_1 (resp. t_2) en remplaçant chaque coup $j.m$ par le coup $(2j).m$ (resp.$(2j+1).m$). Si l'un des t_i est la partie vide, par exemple t_2, alors il existe une partie s de $co_A : !A^{(3)} \multimap (!A^{(1)} \otimes !A^{(2)})$ telle que $s_{!A^{(3)}} = t_1'$, $s_{!A^{(1)}} = t_1$ et $s_{!A^{(2)}} = \epsilon$ (s commence dans $!A^{(1)}$ si $\lambda^i_{!A}(u_1) = O$, dans $!A^{(3)}$ si $\lambda^i_{!A}(u_1) = P$).

Si les deux parties t_i sont non vides il nous faut entrelacer à droite t_1 et t_2 dans le jeu $!A^{(1)} \otimes !A^{(2)}$ et à gauche dans $!A_3$ les restrictions de t_1' et t_2', de manière à obtenir une partie de co_A. D'après la proposition 5.15 et la remarque 5.17 il existe une partie t de $P_{!A^{(1)} \otimes !A^{(2)}}$ telle que $t_{!A^{(i)}} = t_i$ pour $i = 1, 2$. Maintenant si t commence par un coup O on prend pour s la partie de co_A commençant à droite et telle que $s_{!A^{(1)} \otimes !A^{(2)}} = t$: elle existe et vérifie $s_{!A^{(3)}, 2j} = (t_1')_{2j}$, $s_{!A^{(3)}, (2j+1)} = (t_1')_{(2j+1)}$ pour tout j. Si par contre t commence par un coup P, par exemple dans $!A^{(1)}$, on prend pour s la partie de co_A commençant à gauche par le premier coup de t_1' et telle que $s_{!A^{(1)} \otimes !A^{(2)}} = t$.

Pour l'égalité dans le cas de l'affaiblissement il n'y a pas de problème.

Passons à l'égalité pour la promotion.

Montrons d'abord $\widehat{[\sigma]^!} \subseteq \widehat{\sigma}^{!(BPR)}$. Soit s une partie de $[\sigma]^!$. Notons $!\Gamma = !A_1 \otimes \ldots \otimes !A_n$. Pour i un entier désignons par s_i (resp. s_i') la restriction de s :

- aux coups de $M_{!B}$ de la forme $i.m$, qu'on remplace par m,
- et aux coups de $M_{!A_k}$ $(1 \leq k \leq n)$ de la forme $< i, j > .m$, qu'on laisse tels quels (resp. qu'on remplace par $j.m$).

Alors s_i et s_i' appartiennent à $P_{!\Gamma \multimap B}$ et s_i' appartient à la stratégie $[\sigma]$. De plus on a : $s_i \equiv s_i'$. D'après le lemme 5.19 on sait que s_i et s_i' sont OP.

D'après la remarque de 4.1.3 sur les parties de $[\sigma]^!$ on sait que : si dans s deux coups successifs appartiennent à des s_i et s_j différents, alors le changement de i à j a été fait par l'Opposant dans $!B$. Par conséquent, si pour un i on a $((s_i)_{!B} = \epsilon)$ et $((s_i)_{!\Gamma} \neq \epsilon)$, alors la partie s est réduite à s_i.

Notons $\widehat{s_i'} = (u_i, x_i)$. On a : $(u_i, x_i) \in \widehat{[\sigma]}$. Comme $s_i \equiv s_i'$ on a aussi : $\widehat{s_i} = (u_i, x_i)$. Notons $i_1, \ldots, i_m$ les entiers i tels que $(u_i, x_i) \neq ([], \perp)$. On a vu que pour une partie non vide on avait deux cas :

- soit pour tout i_j on a $x_{i_j} \neq \perp$. On sait que pour i et j distincts et k fixé : les ensembles d'indices de copies visités respectivement par $(s_i)_{!A_k}$ et $(s_j)_{!A_k}$ sont disjoints (par injectivité de l'application $< ., . >$). On en déduit $\widehat{s} = (u_{i_1} + \cdots + u_{i_m}, [x_{i_1}, \ldots, x_{i_m}]$. Alors on a : $[x_{i_1}, \ldots, x_{i_m}]$ est une position de $!B$. Par conséquent, comme pour tout i_j la position (u_{i_j}, x_{i_j}) appartient à $\widehat{[\sigma]}$ on en déduit : $(u_{i_1} + \ldots u_{i_m}, [x_{i_1}, \ldots, x_{i_m}]$ appartient à $\widehat{[\sigma]}^{!(BPR)}$. D'où finalement dans ce cas : $\widehat{s}$ appartient à $\widehat{[\sigma]}^{!(BPR)}$.
- soit il existe un i_j tel que $x_{i_j} = \perp$, auquel cas $m = 1$ d'après la remarque précédente. Comme $(u_{i_1}, \perp)$ appartient à $\widehat{[\sigma]}$, $(u_{i_1}, [])$ appartient à $\widehat{[\sigma]}^{!(BPR)}$. Or $\widehat{s} = (u_{i_1}, [])$, donc dans ce cas aussi $\widehat{s}$ appartient à $\widehat{[\sigma]}^{!(BPR)}$.

Passons à l'autre inclusion : $\widehat{\sigma}^{!(BPR)} \subseteq \widehat{[\sigma]^!}$. Un élément de $\widehat{\sigma}^{!(BPR)}$ est :

- 1er cas : soit de la forme $(u_1, [])$, où $(u_1, \perp)$ est un élément de $\widehat{\sigma}$;

- 2ème cas : soit de la forme $(u_1 + \dots u_m, [x_1, \dots, x_m])$, où pour tout i la position (u_i, x_i) est un élément de $\widehat{\sigma}$ tel que $x_i \neq \perp$, et $[x_1, \dots, x_m]$ est une position de $!B$.

Dans le premier cas, il existe une partie OP s' de σ telle que $\widehat{s'} = (u_1, \perp)$. On construit alors une partie de $[\sigma]^!$ en choisissant un indice, par exemple 0 : on prend s la suite de coups obtenue en remplaçant dans s' chaque coup $j.m$ dans $M_{!B_k}$ par $< 0, j > .m$ dans $M_{!B_k}$. C'est bien une partie OP de $[\sigma]^!$ vérifiant : $\widehat{s} = (u_1, \perp)$.

Dans le deuxième cas, pour tout $1 \leq i \leq m$ il existe une partie OP s'_i de σ telle que $\widehat{s'_i} = (u_i, x_i)$. Pour chaque i on considère alors la suite s_i obtenue à partir de s'_i en remplaçant chaque coup m dans M_B par $i.m$ dans $M_{!B}$, chaque coup $j.m$ dans $M_{!A_k}$ par $< i, j > .m$ dans $M_{!A_k}$. On a alors : $s_i \in [\sigma]^!$.

Il nous faut maintenant construire un entrelacement des s_i telle que la suite obtenue soit une partie de $[\sigma]^!$. Comme $[x_1, \dots, x_m]$ est une position de $!B$, d'après la remarque 5.17 il existe une partie t de $P_{!B}$ telle que : pour $1 \leq i \leq m$, $(t)_{!B,i} = (s'_i)_B$ et pour les autres valeurs de i, $(t)_{!B,i} = \epsilon$. Nous construisons alors un entrelacement des s_i à partir de cet entrelacement de leurs restrictions respectives à $!B$. Concrètement on définit une suite s de coups de $!\Gamma \multimap !B$ de la manière suivante :

- si t commence par un coup O, alors ce premier coup est le premier coup de s.

- Si t commence par un coup P, alors on peut supposer par exemple que ce coup est un coup de s_1, c'est-à-dire qu'il est de la forme $1.m$. La partie s_1 est donc de la forme $s_1 = s_1^{(1)} 1.m\, s_1^{(2)}$. On prend alors comme début de suite pour s la suite $s_1^{(1)} 1.m$.

- Ensuite pour chaque couple de coups consécutifs O et P dans t on sait par la condition de switching sur ! que ces deux coups sont de même premier indice i. On complète alors s en insérant, pour chaque tel couple $i.m\, i.m'$, entre $i.m$ et $i.m'$ une sous-suite de s_i choisie de la manière suivante : s_i étant de la forme $s_i = s_i^{(1)} i.m\, s_i^{(2)} i.m' s_i^{(3)}$, s est complétée par $i.m\, s_i^{(2)} i.m'$.

- Si t termine par un coup P on a par cette méthode achevé notre construction de s. Si t termine par un coup O, on note celui-ci $i.m$; la partie s_i s'écrit alors sous la forme $s_i = s_i^{(1)} i.m\, s_i^{(2)}$ (remarquons qu'alors $(s_i^{(2)})_{!B} = \epsilon$) et on complète s par $i.m\, s_i^{(2)}$.

Pour chaque i, tous les coups de s_i sont joués dans s : ceci est une conséquence du fait qu'à cause des contraintes de polarités sur $(u_1 + \cdots + u_m, [x_1, \dots x_m])$, au plus une partie s_i commence par un coup dans $!\Gamma$ (un de ses préfixes est alors préfixe de s) et au plus une partie s_j termine par un coup dans $!\Gamma$ (un de ses suffixes est alors suffixe de s).

Nous affirmons alors que s est une partie de $[\sigma]^!$. En effet par construction de s on a : la suite obtenue à partir de s en ne gardant que les coups de $M_{!B}$ de la forme $i.m$ et les coups de $M_{!A_k}$ de la forme $< i, j > .m$ (pour $1 \leq k \leq n$) est la suite s_i ; par ailleurs on sait que la suite s_i appartient à $[\sigma]^!$ et dans s le passage d'un s_i à un autre est fait par l'Opposant. Enfin la partie s est une partie OP et on a bien : $\widehat{s} = (u_1 + \dots u_m, [x_1, \dots, x_m])$.

Ceci termine la preuve de la deuxième inclusion, et par conséquent de l'égalité. □

Théorème 5.26 *Pour tout réseau R de MELL, l'application $\widehat{.}$ vers $\mathbb{BPR}$ satisfait :*

$$\widehat{\sigma_R} = R^*$$

où R^* est l'interprétation de R dans $\mathbb{BPR}$, σ_R est l'interprétation de R dans $\mathbb{G}$.

On va avoir besoin pour la preuve du théorème du lemme suivant :

Lemme 5.27 *Étant données des stratégies $\sigma : A \multimap B$, $\tau : !A \otimes !A \multimap B$, $\gamma : !A \multimap B$ on a :*

$$\begin{array}{rcl} \widehat{der_A; \sigma} & = & der_A^{(BPR)}; \widehat{\sigma}, \\ \widehat{co_A; \tau} & = & co_A^{(BPR)}; \widehat{\tau}, \\ \widehat{weak_A; \gamma} & = & weak_A^{(BPR)}; \widehat{\gamma}. \end{array}$$

Remarque 5.28 On sait par la proposition précédente que $\widehat{der_A} = der_A^{(BPR)}$, $\widehat{co_A} = co_A^{(BPR)}$ etc.., mais comme $\widehat{.}$ n'est pas un foncteur on n'avait a priori jusqu'à présent qu'une inclusion, de gauche à droite. Ce lemme précise donc en quelque sorte des cas particuliers où $\widehat{.}$ se comporte comme un foncteur.

Preuve:

On le montre pour le cas de la contraction. Les deux autres sont similaires.

Il nous faut établir : $co_A^{(BPR)}; \widehat{\tau} \subseteq \widehat{co_A; \tau}$. Soit (u, x) un élément de la relation $co_A^{(BPR)}; \widehat{\tau}$ de $\mathbb{BPR}[!A, B]$. Il existe alors (u_1, u_2) dans $!A \otimes !A$ tel que $(u, (u_1, u_2))$ appartient à $co_A^{(BPR)}$ et $((u_1, u_2), x)$ appartient à $\widehat{\tau}$. Par conséquent on a $u = u_1 + u_2$, et il existe une partie OP t de τ telle que : $\widehat{t} = (u_1 + u_2, x)$. La restriction $(t)_{!A \otimes !A}$ est une partie de $P_{!A \otimes !A}$ et il existe une partie s OP de la stratégie co_A telle que $(s)_{!A \otimes !A} = t_{!A \otimes !A}$ (s commençant à gauche ou à droite de $\multimap$ suivant la polarité du premier coup de $(t)_{!A \otimes !A}$). Comme de plus si $(s)_{!A \otimes !A} = \epsilon$ on a $(s)_{!A} = \epsilon$ (c'est une propriété des parties OP de co_A), la composition $s; t$ est bien valide et donne une partie de position associée $(u_1 + u_2, x)$, soit (u, x). Ainsi (u, x) appartient bien à $\widehat{co_A; \tau}$. □

Preuve du théorème 5.26 :

On commence par montrer le résultat pour un réseau R normal pour la réduction stricte, en procédant par induction sur une construction de ces réseaux.

- Si R est réduit à un axiome, de conclusion $A^\perp, A$: on a $\sigma_R = [id_A]$ et $R^* = id_A^{(BPR)}$, donc l'égalité est conséquence de la proposition 5.22.

- Si R est de conclusion $\Gamma_1, (A_1 \otimes A_2), \Gamma_2$ et obtenu par une règle tenseur à partir de deux réseaux $R_i : \Gamma_i, A_i$: par h.i. les stratégies[1] $\sigma_{R_i} : \Gamma_i^\perp \multimap A_i$ satisfont $\widehat{\sigma_{R_i}} = R_i^*$. On a par ailleurs : $R^* = R_1^* \otimes R_2^*$, où R_i^* est dans $\mathbb{BPR}[\Gamma_i^\perp, A_i]$. D'où d'après la proposition 5.24, $\widehat{\sigma_R} = R^*$.

- Si $R : \Gamma, A \parr B$ est obtenu par une règle $\parr$ partir d'un réseau $R' : \Gamma, A, B$: dans $\mathbb{G}$ et $\mathbb{BPR}$ on a respectivement :

  - une bijection F entre les stratégies de Γ, A, B et celles de $\Gamma, A \parr B$ (induite par l'isomorphisme naturel entre les deux jeux)
  - une bijection F' entre les relations de Γ, A, B et celles de $\Gamma, A \parr B$ (induite par l'isomorphisme naturel entre les deux espaces de positions),

  et pour une stratégie σ de Γ, A, B on a $\widehat{F(\sigma)} = F'(\widehat{\sigma})$. Le résultat pour R est donc conséquence de l'h.i. sur R'.

1. Γ désigne ici un séquent $B_1, \ldots, B_k$, soit par abus $B_1 \parr \ldots \parr B_k$, et $\Gamma^\perp = B_1^\perp \otimes \ldots \otimes B_k^\perp$.

- Si R : $?A^\perp, \Gamma$ est obtenu à partir de R' : $A^\perp, \Gamma$ par une règle déréliction, alors : $\sigma_R = [der_A]; \sigma_{R'}$ et $R^* = der_A^{(BPR)}; R'^*$. Le lemme précédent nous permet alors de déduire le résultat pour R.

- Cas d'une règle contraction ou affaiblissement : ils sont traités comme celui de la déréliction, au moyen du lemme.

- Si R : $?\Gamma^\perp, !A$ est obtenu par une règle de promotion à partir de R' : $?\Gamma^\perp, A$ on a : $\sigma_R = [[\sigma^!_{R'}]]$ et $R^* = (R'^*)^!$. Le résultat est alors dérivé de la proposition 5.25.

- Si R : $\Delta, ?\Gamma^\perp$ est obtenu partir de R_1 : $\Delta, ?A^\perp$ et R_2 : $!A, ?\Gamma^\perp$ par une coupure affaiblissement : alors R_1 est de la forme $R'_1 \otimes weak_A$. On a alors: $\sigma_{R_1} = \sigma_{R'_1}$. Puis $\sigma_R = \sigma_{R'_1} \cup \tau$, où $\tau = \{s \in \sigma_{R_2}$ t.q. $(s)_{!A} = \epsilon\}$. Par ailleurs on a : $R^* = R'^*_1 \cup S$, où $S = \{(u,v) \in R_2^*$ t.q. $u = [\,]\}$. Par conséquent on a : $\widehat{\sigma_R} = \widehat{\sigma_{R'_1}} \cup \widehat{\tau} = R'^*_1 \cup S$ en utilisant l'h.i. sur R'_1 et R_2.

Ceci termine la première partie de la preuve.

Soit maintenant R un réseau quelconque. La réduction stricte est confluente et fortement normalisante; désignons donc par R_0 la forme normale de R pour cette réduction. Comme $\mathbb{G}$ et $\mathbb{BPR}$ sont tous deux des modèles de la réduction stricte on a : $\sigma_R = \sigma_{R_0}$ et $R^* = R_0^*$. On sait par ce qui précède que $\widehat{\sigma_{R_0}} = R_0^*$, donc on a finalement : $\widehat{\sigma_R} = R^*$. □

5.4 Ordre d'accessibilité sur les positions bipolarisées

5.4.1 Ordre sur les positions et ordre préfixe des parties

Jusqu'à présent les espaces de positions bipolarisées n'étaient munis d'aucune structure. La propriété de relèvement (proposition 5.15) des positions bipolarisées en parties semble cependant indiquer qu'ils ne sont pas très éloignés des jeux. Nous allons montrer que les espaces de positions associés à des formules (avec un choix d'espaces de positions atomiques adéquat) peuvent être munis d'un ordre partiel ayant une signification concrète : une position x est inférieure à y si une partie de position associée x peut être prolongée en une partie de position associée y. Précisons tout d'abord un point de vocabulaire :

Définition 5.29 *Étant donné un mutiensemble fini u d'éléments d'un ensemble E, une* indexation *de u est une suite finie $(x_i)_{1\leq i\leq n}$ telle que $u = [x_1, \ldots, x_n]$.*

Supposons les espaces de positions bipolarisées α associés aux formules atomiques munis d'un ordre vérifiant la condition suivante : $\perp_\alpha$ est minimum de $(\alpha, \leq_\alpha)$. On définit alors de manière inductive pour toute formule A de MELL une relation $\leq_A$ sur l'e.b.p. associé à A :

Définition 5.30 *Étant données deux formules A_1 et A_2 de MELL et $\leq_{A_i}$ $(i = 1, 2)$ la relation associée à leurs espaces de positions respectifs, on définit pour $A = A_1 \otimes A_2$ (resp. $A = A_1 \parr A_2$) la relation $\leq_A$ par : $(x_1, x_2) \leq_A (y_1, y_2)$ si :*

- *$x_i \leq_{A_i} y_i$ pour $i = 1, 2$.*

- *$\lambda^i_A((x_1, x_2)) = \lambda^i_A((y_1, y_2))$ ou $(x_1, x_2) = (\perp, \perp)$.*

- *si pour $i = 1$ ou 2, $x_i = y_i$ et $\lambda^f_{A_i}(x_i) = O$ (resp. $\lambda^f_{A_i}(x_i) = P$) alors $(x_1, x_2) = (y_1, y_2)$.*

Étant donnée A une formule de MELL et $\leq_A$ la relation associée à son espace de positions bipolarisées, on définit sur $B = !A$ (resp. $B = ?A$) la relation $\leq_B$ par : $u \leq_B v$ s'il existe des indexations $(x_i)_{1\leq i\leq n}$ et $(y_j)_{1\leq j\leq m}$ de u et v et une application $\phi : \{1, \cdots, n\} \to \{1, \cdots m\}$ injective telles que :

- *pour tout i de $\{1, \cdots n\}$ on a $x_i \leq_A y_{\phi(i)}$;*
- *$\lambda^i_B(u) = \lambda^i_B(v)$ ou $u = [\,]$;*
- *si pour un i_0 de $\{1, \cdots n\}$ on a $x_{i_0} = y_{\phi(i_0)}$ et $\lambda^f_A(x_{i_0}) = O$ (resp. P) alors $u = v$.*

En particulier si $[x_1, \ldots, x_n] \leq_B [y_1, \ldots, y_m]$ alors on a $n \leq m$ (puisque ϕ est injective).

Remarque 5.31 Dans le cas $B = !A$ ou $?A$ la relation $u \leq_B v$ a été définie au moyen d'indexations $(x_i)_{1\leq i\leq n}$ et $(y_i)_{1\leq i\leq m}$ de u et v. Remarquons cependant que les conditions ne dépendent pas de ces choix d'indexations, c'est-à-dire qu'on a en fait :

$u \leq_B v$ ssi pour toutes indexations $(x_i)_{1\leq i\leq n}$ et $(y_j)_{1\leq j\leq m}$ de u et v, il existe une application $\phi : \{1, \cdots, n\} \to \{1, \cdots m\}$ injective telle que les trois conditions soient satisfaites.

On le vérifie par exemple dans le cas $B = !A$. Supposons que $(x_i)_{1\leq i\leq n}$ et $(y_i)_{1\leq i\leq m}$ vérifient les conditions avec une injection ϕ et prenons deux indexations $(x'_i)_{1\leq i\leq n}$ et $(y'_i)_{1\leq i\leq m}$ respectivement de u et v. Alors il existe deux permutations f et g respectivement de $\{1, \ldots, n\}$ et $\{1, \ldots, m\}$ telles que : $\forall i \in \{1, \ldots, n\}$ $x'_i = x_{f(i)}$ et $\forall i \in \{1, \ldots, m\}$ $y'_i = y_{g(i)}$. Par conséquent $(x'_i)_{1\leq i\leq n}$ et $(y'_i)_{1\leq i\leq m}$ vérifient les conditions avec l'injection $\phi' = g \circ \phi \circ f^{-1}$.

Lemme 5.32 *Étant donnée A une formule de MELL, la relation $\leq_A$ ainsi définie sur l'espace de positions bipolarisées associé à A est un ordre partiel, de minimum $\perp_A$.*

Preuve:

On le montre par induction sur A. La propriété est vraie pour une formule atomique par hypothèse. Considérons le cas de $A = A_1 \otimes A_2$.

La réflexivité est vérifiée puisque pour $x_i = y_i$ $(i = 1, 2)$ les trois conditions sont satisfaites. L'antisymétrie est conséquence de la première condition. Montrons la propriété de transitivité : supposons $(x_1, x_2) \leq_A (y_1, y_2)$ et $(y_1, y_2) \leq_A (z_1, z_2)$; alors par la première condition on a pour $i = 1, 2$, $x_i \leq_{A_i} y_i \leq_{A_i} z_i$, donc par transitivité de $\leq_{A_i}$ on en déduit $x_i \leq z_i$. Pour montrer $(x_1, y_1) \leq_A (z_1, z_2)$ il nous reste à vérifier que les conditions 2 et 3 sont satisfaites. Supposons $(x_1, x_2) \neq (\perp_{A_1}, \perp_{A_2})$, alors $x_1 \neq \perp_{A_1}$ ou $x_2 \neq \perp_{A_2}$; mettons par exemple $x_1 \neq \perp_{A_1}$. Par minimalité de $\perp_{A_1}$ dans A_1 on en déduit $y_1 \neq \perp_{A_1}$. Par conséquent $(y_1, y_2) \neq (\perp_{A_1}, \perp_{A_2})$ et nos deux inégalités de départ impliquent par la deuxième condition : $\lambda^i_A(y_1, y_2) = \lambda^i_A(z_1, z_2)$ et $\lambda^i_A(x_1, x_2) = \lambda^i_A(y_1, y_2)$. Donc finalement : $((x_1, x_2) \neq (\perp_{A_1}, \perp_{A_2}))$ implique $(\lambda^i_A(x_1, x_2) = \lambda^i_A(z_1, z_2))$ et la deuxième condition est donc bien satisfaite. Passons à la troisième condition : supposons par exemple $x_1 = z_1$ et $\lambda^f_{A_1}(x_1) = O$. Alors comme $x_1 \leq_{A_1} y_1 \leq_{A_1} z_1$ on a $x_1 = y_1 = z_1$. Comme $(x_1, x_2) \leq_A (y_1, y_2)$ et $\lambda^f_{A_1}(x_1) = O$ ceci impose $x_2 = y_2$. De la même manière on a $y_2 = z_2$ et donc finalement $(x_1, x_2) = (z_1, z_2)$. La troisième condition est par conséquent bien vérifiée et on a $(x_1, x_2) \leq_A (z_1, z_2)$, ce qui achève le cas de la transitivité. Enfin, on a bien $(\perp_{A_1}, \perp_{A_2}) \leq_A (x_1, x_2)$ pour tout (x_1, x_2) de A.

On procède de manière identique pour $A = A_1 \parr A_2$ (noter que dans la définition de $\leq_{A_1 \parr A_2}$, seule la troisième condition diffère de $\leq_{A_1\otimes A_2}$). Passons donc aux exponentiels ; il nous suffit ici aussi de traiter le cas de $B = !A$.

La réflexivité est claire. Montrons la propriété d'antisymétrie : supposons $u \leq_B v$ et $v \leq_B u$. Si l'un des deux éléments est $[\,]$, alors l'autre est aussi $[\,]$. Sinon $u = [x_1, \ldots, x_n]$ et $v = [y_1, \ldots y_m]$ avec $n, m \geq 1$; les deux inégalités impliquent alors par la première condition :

$n = m$. Soient alors ϕ et ψ deux applications données par la première condition respectivement pour $u \leq v$ et $v \leq u$. Ce sont donc deux permutations de $\{1, \ldots, n\}$ telles que : pour $1 \leq i \leq n$, $x_i \leq_A y_{\phi(i)}$ et $y_i \leq_A x_{\psi(i)}$. Notons f la permutation $\psi \circ \phi$: pour $1 \leq i \leq n$ on a $x_i \leq_A y_{\phi(i)} \leq_A x_{f(i)}$. En utilisant la transitivité de $\leq_A$ on obtient par récurrence sur $k \geq 1$: pour tout k, $x_{f(i)} \leq_A x_{f^k(i)}$. Or f étant une permutation de $\{1, \ldots, n\}$ il existe un N (par exemple $n!$) tel que $f^N = id_{\{1,\ldots,n\}}$. On obtient alors pour i quelconque :

$$x_i \leq_A y_{\phi(i)} \leq_A x_{f^N(i)} = x_i,$$

d'où $x_i = y_{\phi(i)}$. On a donc $u = v$.

Pour la transitivité supposons $u \leq_B v \leq_B w$. Si $u = [\,]$ alors on a bien $u \leq_B w$. Si $u \neq [\,]$ alors $v, w \neq [\,]$. On garde les mêmes notations que précédemment pour u et v et on note $w = [z_1, \ldots, z_l]$. Soient ϕ et ψ deux applications données par la première condition respectivement pour $u \leq_B v$ et $v \leq w$. Notons $f = \psi \circ \phi : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, l\}$. Alors on a : pour $1 \leq i \leq n \quad x_i \leq_A z_{f(i)}$, ce qui nous donne la première condition. De plus les deux inégalités de départ impliquent : $\lambda^i_B(u) = \lambda^i_B(v)$ et $\lambda^i_B(v) = \lambda^i_B(w)$, d'où $\lambda^i_B(u) = \lambda^i_B(w)$. Pour vérifier la dernière condition supposons qu'il existe i_0 tel que $x_{i_0} = z_{f(i_0)}$ et $\lambda^f_A(x_{i_0}) = O$. Alors comme $x_{i_0} \leq_A y_{\phi(i_0)} \leq z_{f(i_0)}$ on en déduit $x_{i_0} = y_{\phi(i_0)}$ et $y_{\phi(i_0)} = z_{f(i_0)}$. Comme $u \leq_B v$ la première égalité implique $u = v$. Comme $x_{i_0} = y_{\phi(i_0)}$ on a $\lambda^f_A(y_{\phi(i_0)}) = O$, ce qui combiné avec $v \leq_B w$ et $y_{\phi(i_0)} = z_{f(i_0)}$ nous donne $v = w$. Donc $u = w$ et on a bien montré que la troisième condition était vérifiée. Ceci termine la preuve de $u \leq_B w$ et par conséquent la transitivité est vérifiée. Il est clair par ailleurs que $[\,]$ est minimum de B pour cet ordre. □

Nous avons besoin maintenant de préciser nos choix pour les espaces de positions de base et l'application $\widehat{.}$ sur les jeux de base. Nous avons déjà mentionné que nous les prenions tels que $\widehat{.}$ soit surjective sur les espaces de positions de base (cf fin de 5.3). Nous voudrions maintenant que pour chaque jeu de base A l'ordre $\leq_A$ sur les positions associées soit tel que :

$x \leq y$ si pour toute partie s de P_A telle que $\widehat{s} = x$, s se prolonge en une partie t telle que $\widehat{t} = y$.

Définition 5.33 *Étant donné un jeu A, soit $\sqsubseteq_q$ la relation sur $P_A/{\equiv_A}$ définie par :*

$$S \text{ et } T \text{ étant deux éléments de } P_A/{\equiv_A},$$

$$S \sqsubseteq_q T \text{ si } \exists s \in S, \exists t \in T \text{ tels que } s \sqsubseteq t \quad (s \text{ préfixe de } t).$$

Lemme 5.34 *La relation $\sqsubseteq_q$ est une relation d'ordre sur $P_A/{\equiv_A}$.*

Preuve :

Il nous suffit de vérifier la transitivité et l'antisymétrie. Supposons $S_1 \sqsubseteq_q S_2 \sqsubseteq_q S_3$, alors il existe des parties s_1, s_2, s_2' et s_3' dans les classes correspondantes telles que : $s_1 \sqsubseteq s_2$, $s_2' \sqsubseteq s_3'$, et $s_2 \equiv_A s_2'$. Par la propriété d'extensibilité de $\equiv_A$ et par le fait que deux parties équivalentes ont même longueur (voir définition 2.2) on déduit des deux dernières conditions : $\exists s_3 \in S_3$ t.q. $s_2 \sqsubseteq s_3$. Par conséquent, par transitivité de $\sqsubseteq$ on a : $s_1 \sqsubseteq s_3$ et donc $S_1 \sqsubseteq_q S_3$.

Pour établir l'antisymétrie supposons $S_1 \sqsubseteq_q S_2 \sqsubseteq_q S_1$. On a des parties s_1, s_2, s_2' et s_1' satisfaisant $s_1 \sqsubseteq s_2$, $s_2' \sqsubseteq s_1'$ et $s_1 \equiv_A s_1'$, $s_2 \equiv_A s_2'$. Ainsi $|s_i| = |s_i'|$ pour $i = 1, 2$, et $|s_1| \leq |s_2|$, $|s_2'| \leq |s_1'|$. Par conséquent $|s_1| = |s_2|$ et $s_1 = s_2$, donc $S_1 = S_2$. □

Remarque 5.35 L'ordre $\sqsubseteq_q$ est est en fait l'ordre d'Egli-Milner induit par $(P_A, \sqsubseteq)$ sur le sous-ensemble $P_A/{\equiv_A}$ de $\mathcal{P}(P_A)$:

$$(S \sqsubseteq_q T) \iff (\begin{array}{ll} \forall s \in S & \exists t \in T, s \sqsubseteq t \\ \forall t \in T & \exists s \in S, s \sqsubseteq t). \end{array}$$

Prenons alors comme espace de positions associé au jeu de base A l'ensemble de classes d'équivalences $P_A/\equiv_A$ muni du quotient de l'ordre préfixe sur P_A (c'est possible grâce aux trois propriétés de $\equiv$ énoncées dans la définition 2.2). On a alors comme conséquence :

Lemme 5.36 *Si s, t sont des parties sur le jeu associé à une formule A telles que $\widehat{s} = \widehat{t}$, alors s et t ont même longueur.*

Preuve: immédiate par induction sur A. □

Remarque 5.37 Comme par ailleurs les applications $\widehat{\cdot}$ sont surjectives, toute position est l'image d'une partie et on peut donc définir la *longueur d'une position* comme la longueur commune des parties qui lui sont associées.

Proposition 5.38 *(1) Pour que $x \leq_A y$ il faut et il suffit qu'il existe s, t dans P_A tels que s soit un préfixe de t et $\widehat{s} = x$, $\widehat{t} = y$.*

(2) De plus si $x \leq_A y$ alors pour tout s de P_A : si $\widehat{s} = x$ alors s se prolonge en une partie t de P_A telle que $\widehat{t} = y$.

Preuve:

L'énoncé (2) implique la condition nécessaire de (1). Commençons par établir le sens condition suffisante de (1) : si s et t sont des parties de P_A telles que s est un préfixe de t alors $\widehat{s} \leq_A \widehat{t}$. On procède par induction sur A.

- Supposons $A = A_1 \otimes A_2$. Notons que par transitivité de $\leq_A$, il suffit de le montrer pour s préfixe immédiat de t : $t = sm$. Notons $(x_1, x_2) = \widehat{s}$ et $(y_1, y_2) = \widehat{t}$. On sait que s_{A_i} est préfixe de t_{A_i} pour $i = 1, 2$, donc par h.i. sur A_1 et A_2 on a $\widehat{s_{A_i}} \leq_{A_i} \widehat{t_{A_i}}$ pour $i = 1, 2$. La première condition est donc satisfaite. Maintenant, si $s = \epsilon$ alors $\widehat{s} = \perp$ et la deuxième condition est vraie ; sinon s et t ont même premier coup, donc d'après la proposition 5.14, les positions $\widehat{s}$ et $\widehat{t}$ ont même polarité initiale et par conséquent la deuxième condition est vérifiée. Supposons maintenant $x_i = y_i$ (choisissons $i = 1$ pour fixer les idées), alors d'après le lemme précédent comme $\widehat{s_{A_1}} = x_1$ et $\widehat{t_{A_1}} = y_1$ on sait que s_{A_1} et t_{A_1} ont même longueur. Donc m n'appartient pas à M_{A_1} et le dernier coup de $t = sm$ est donc joué dans A_2. La condition de switching pour $\otimes$ impose alors que le dernier coup de t_{A_1} est P. Par conséquent $\lambda^f_{A_1}(x_1) = P$ et la prémisse de l'implication étant fausse la troisième condition est satisfaite.
- Le cas de $A = A_1 \parr A_2$ est identique.
- Prenons $B = !A$ et deux parties s et t de P_B telles que $t = sm$. Pour la première condition il suffit de comparer la position $\widehat{s_i}$ de chaque restriction s_i de s à un indice de copie i, à la position $\widehat{t_i}$ de la restriction t_i de t correspondante et d'utiliser l'hypothèse d'induction sur A. La deuxième condition est comme précédemment trivialement satisfaite. Quant à la troisième condition, si $\widehat{s_i} = \widehat{t_i}$ alors s_i et t_i ont même longueur et par conséquent m n'est pas de la forme $i.m'$. Comme dans le cas de $\otimes$, la condition de switching pour ! impose alors que le dernier coup de t_i est P et la troisième condition est satisfaite.
- Le cas de $B = ?A$ est identique.

Montrons maintenant l'assertion (2). Elle est prouvée par une nouvelle induction sur A. Contentons-nous de traiter l'étape d'induction de $B = !A$ qui est la plus délicate et suffit pour comprendre les autres cas.

Supposons $u \leq_{!A} v$ avec $u \neq v$ et s une partie de $P_{!A}$ telle que $\widehat{s} = u$. Remarquons qu'il nous suffit de montrer que s peut être prolongée par un coup m de telle façon que : $sm \in P_{!A}$ et $\widehat{sm} \leq_{!A} v$; en effet on peut conclure par récurrence sur la différence de longueur de u et v.

Si $u = []$, comme (par surjectivité de $\widehat{.}$) il existe t telle que $\widehat{t} = v$ il suffit de prendre pour m le premier coup de t. Sinon notons $u = [x_1, \ldots, x_n]$, $v = [y_1, \ldots, y_m]$ et $\phi : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, m\}$ une application donnée par la première condition de l'inégalité. On peut supposer que le dernier coup de s est joué dans la composante s_1 (il suffit sinon de prendre une partie équivalente) et que $\widehat{s_1} = x_1$.

- **1er cas** : le dernier coup de s est O. Alors $\lambda_A^f(x_1) = O$ et d'après la troisième condition de la définition de l'ordre comme $u \neq v$ on a $x_1 \neq y_{\phi(1)}$. Comme de plus $x_1 \leq_A y_{\phi(1)}$ par h.i. sur A la partie s_1 de P_A peut être étendue par un coup a de façon que : $s_i a \in P_A$ et $\widehat{s_i a} \leq_A y_{\phi(1)}$. Alors la suite $s\,1.a$ est une partie valide de $P_{!A}$ et on a $\widehat{s\,1.a} \leq_{!A} v$ (pour la première condition il suffit de prendre le même ϕ).

- **2ème cas** : le dernier coup de s est P.

  - premier sous-cas : il existe un i tel que $x_i < y_{\phi(i)}$ et $\lambda_A^f(y_{\phi(i)}) = P$. Comme s termine par un coup P, $\lambda_{!A}^f(u) = P$ et par définition de $\lambda_{!A}^f$ ceci implique que $\lambda_A^f(x_i) = P$. On peut supposer $x_i = \widehat{s_i}$. Alors s_i termine par un coup P ; par h.i. sur A, s_i peut être étendue en une partie $s_i a$ telle que $\widehat{s_i a} \leq y_{\phi(i)}$. La suite $s\,i.a$ est alors une partie valide de $P_{!A}$ car d'une part les conditions d'alternance et de projections sont satisfaites, d'autre part comme $i.a$ est un coup O la condition de switching est vérifiée. De plus on a bien $\widehat{s\,i.a} \leq_{!A} v$.

  - deuxième sous-cas : $n < m$ et pour tout $1 \leq i \leq n$ tel que $\lambda_A^f(y_{\phi(i)}) = P$ on a $x_i = y_{\phi(i)}$. Quitte à renommer les deux multiensembles on peut supposer $\phi(i) = i$ pour $1 \leq i \leq n$. Comme $\lambda_{!A}^i(u) = \lambda_{!A}^i(v)$ on a pour $n+1 \leq i \leq m$, $\lambda_A^i(y_i) = O$. En effet s'il existait un $i \geq n+1$ tel que $\lambda_A^i(y_i) = P$, alors d'une part on aurait $\lambda_{!A}^i(v) = P$ et d'autre part pour tout $i \leq n$ on aurait $\lambda_A^i(y_i) = O$ (par définition des positions sur $!A$), donc $\lambda_{!A}^i(u) = O$; ceci contredirait donc $\lambda_{!A}^i(u) = \lambda_{!A}^i(v)$. Maintenant :

    - s'il existe i tel que $n+1 \leq i \leq m$ et $\lambda_A^f(y_i) = P$, soit par exemple $i = n+1$, alors par h.i. sur A (appliquée à $s_{n+1} = \epsilon$, $\widehat{s_{n+1}} = \perp$ et y_{n+1}) il existe a dans M_A tel que $\widehat{a} \leq_A y_{n+1}$. La suite $s\,(n+1).a$ est une partie valide de $P_{!A}$ et convient.
    - sinon, comme par définition de l'e.b.p. $!A$ au plus un y_j est de polarité finale O, on est dans le cas où $m = n+1$ et pour tout $1 \leq i \leq n \quad \lambda_A^f(y_i) = P$. Alors comme précédemment il existe a dans M_A tel que $\widehat{a} \leq y_{n+1}$. De plus $s\,(n+1).a$ appartient à $P_{!A}$. Il y a par contre un point délicat dans la vérification de $\widehat{s\,(n+1).a} \leq_{!A} v$: si $\widehat{a} = y_{n+1}$ comme par ailleurs $\lambda_A^f(y_{n+1}) = O$, la troisième condition est-elle vérifiée ? On a vu que pour $1 \leq i \leq n \quad \lambda_A^f(y_i) = P$. Or on est dans le cas où on a supposé : $\forall i \leq n$ tel que $\lambda^f(y_i) = P$ on a $x_i = y_i$. Donc comme $m = n+1$ on a $u = v$ et la dernière condition est bien satisfaite.

  - troisième sous-cas : $n = m$ et pour tout $1 \leq i \leq n$ tel que $\lambda_A^f(y_{\phi(i)}) = P$ on a $x_i = y_{\phi(i)}$. Alors comme $u \neq v$ il existe i tel que $\lambda_A^f(y_{\phi(i)}) = O$ et $x_i < y_{\phi(i)}$. On peut sans perte de généralité supposer $i = m = \phi(i)$. Alors par h.i. sur A, il existe a dans M_A tel que $s_m a$ appartient à P_A et $\widehat{s_m a} \leq_A y_m$. De plus comme s est de dernier coup P on a $\lambda_A^f(x_m) = P$, donc s_m est de dernier coup P et a est un coup O. Alors la suite $s\,m.a$ donne une partie de $P_{!A}$ qui convient.

Ce dernier cas termine l'étape d'induction sur $!A$. □

5.4.2 Relèvement d'une relation en stratégie

On a vu qu'en passant du modèle de jeux au modèle de positions $\mathbb{BPR}$ on n'oubliait que peu d'information au niveau des points (parties/positions). Une question naturelle est alors : qu'en est-il au niveau des morphismes? En particulier en ce qui concerne les relations interprétant des objets de la syntaxe, peut-on reconstruire à partir de la relation R^* interprétant un réseau R dans $\mathbb{BPR}$ la stratégie correspondante σ_R? Cette question est liée au problème de la comparaison de la finesse des deux modèles : le modèle $\mathbb{BPR}$ identifie-t'il plus de réseaux que le modèle de jeux $\mathbb{G}$? Nous répondrons à cette question dans un cadre limité, celui des réseaux multiplicatifs.

Définition 5.39 *Soit f une relation de $\mathbb{BPR}[A,B]$. On appelle* relèvement de la relation f *la stratégie :*

$$\widetilde{f} = \{s \in P^O_{A \multimap B} \text{ t.q. pour tout préfixe OP } t \text{ de } s,\ \widehat{t} \in f\}.$$

L'ensemble de parties $\widetilde{f}$ est bien une stratégie Joueur puisqu'il est clos par préfixes et par coup Opposant valides. Notons que c'est une stratégie saturée puisqu'on a vu que : si $s \equiv s'$, alors $\widehat{s} = \widehat{s'}$. Enfin on a : $\widehat{\widetilde{f}} \subseteq f$.

Pour montrer la proposition suivante nous allons avoir besoin d'un lemme intermédiaire sur le tenseur de $\mathbb{BPR}$:

Lemme 5.40 *Soit pour $i = 1,2$ une relation f_i de $\mathbb{BPR}[A_i, B_i]$ et $((a_1,a_2),(b_1,b_2))$ une position de la relation $f_1 \otimes f_2$ de polarité initiale O. Alors : $\lambda^i_{A_i \multimap B_i}(a_i, b_i) = O$ ou N pour $i = 1,2$.*

Preuve : Considérons d'abord le cas où l'un des b_i est $\perp$. Alors par la condition de connexion on a $(a_1,b_1) = (\perp,\perp)$ ou $(a_2,b_2) = (\perp,\perp)$. Mettons par exemple $(a_1,b_1) = (\perp,\perp)$. Alors (a_2,b_2) a même polarité initiale que $((a_1,a_2),(b_1,b_2))$ (c'est-à-dire O) et la condition est donc vérifiée pour les deux i.

Maintenant si $b_1 \neq \perp$ et $b_2 \neq \perp$, alors comme (b_1,b_2) appartient à $B_1 \otimes B_2$ on a $\lambda^i_{B_i}(b_i) = O$ pour $i = 1$ ou 2. Mettons par exemple $\lambda^i_{B_1}(b_1) = O$. On a par conséquent $\lambda^i_{A_1 \multimap B_1}(a_1,b_1) = O$. Si $\lambda^i_{B_2}(b_2) = O$ on termine par le même argument. Sinon $\lambda^i_{B_2}(b_2) = P$ et on a $\lambda^i_{B_1 \otimes B_2}(b_1,b_2) = P$; comme $((a_1,a_2),(b_1,b_2))$ est de polarité initiale O on en déduit $\lambda^i_{A_1^\perp \parr A_2^\perp}(a_1,a_2) = O$, soit $\lambda^i_{A_1^\perp}(a_1) = O$ ou $\lambda^i_{A_2^\perp}(a_2) = O$. Comme $\lambda^i_{B_1}(b_1) = O$ et (a_1,b_1) est une position de $A_1^\perp \parr B_1$ on a $\lambda^i_{A_1^\perp}(a_1) \neq O$. Donc $\lambda^i_{A_2^\perp}(a_2) = O$ et par conséquent $\lambda^i_{A_2 \multimap B_2}(a_2,b_2) = O$. □

Proposition 5.41 *Soit pour $i = 1,2$ une relation f_i de $\mathbb{BPR}[A_i, B_i]$; on a :*

$$\widetilde{f_1 \otimes f_2} = \widetilde{f_1} \otimes \widetilde{f_2}$$

où à gauche le $\otimes$ est celui de $\mathbb{BPR}$, à droite le $\otimes$ est celui de $\mathbb{G}$.

Preuve :

Nous devons comparer deux stratégies du jeu $A_1 \otimes A_2 \multimap B_1 \otimes B_2$. Commençons par l'inclusion de droite à gauche.

Soit s une partie de la stratégie $\widetilde{f_1} \otimes \widetilde{f_2}$. Si s est non vide il est clair qu'elle commence par un coup O. Afin de montrer que s appartient à $\widetilde{f_1 \otimes f_2}$ on considère un préfixe OP quelconque t de s. On a alors : $(t \in \widetilde{f_1} \otimes \widetilde{f_2})$ et donc $(\widehat{t} \in \widehat{\widetilde{f_1} \otimes \widetilde{f_2}})$. Or d'après la proposition 5.24 on a : $\widehat{\widetilde{f_1} \otimes \widetilde{f_2}} = \widehat{\widetilde{f_1}} \otimes \widehat{\widetilde{f_2}}$. Comme $\widehat{\widetilde{f_i}} \subseteq f_i$ et comme le $\otimes$ de $\mathbb{BPR}$ est compatible avec la relation $\subseteq$ on en déduit : $t \in f_1 \otimes f_2$. Par conséquent s appartient à $\widetilde{f_1 \otimes f_2}$ et la stratégie $\widetilde{f_1} \otimes \widetilde{f_2}$ est donc incluse dans $\widetilde{f_1 \otimes f_2}$.

Passons à l'autre sens. On considère une partie s de $\widetilde{f_1 \otimes f_2}$ et on note $s_i = s_{A_i^\perp, B_i}$ pour $i = 1, 2$. Soit $((a_1, a_2), (b_1, b_2)) = \widehat{s}$; on sait que $((a_1, a_2), (b_1, b_2))$ appartient à $f_1 \otimes f_2$ et est de polarité initiale O. Par le lemme 5.40 on en déduit que $\lambda^i_{A_i \multimap B_i}(a_i, b_i) = O$ ou N pour $i = 1, 2$ et par conséquent que chacune des deux parties s_i est vide ou commence par un coup O. Fixons i et prenons t_i un préfixe OP quelconque de la partie s_i. Alors il existe un préfixe t' de s tel que $(t')_{A_i^\perp, B_i} = t_i$. Si t' termine par un coup O, ce coup O n'est pas dans $A_i^\perp, B_i$, donc quitte à prendre le préfixe immédiat de t' on peut supposer que t' est OP. L'hypothèse sur s nous donne alors : $\widehat{t'} \in f_1 \otimes f_2$. Or $\widehat{t'}$ est de la forme $((a'_1, a'_2), (b'_1, b'_2))$ avec $(a'_i, b'_i) = \widehat{t_i}$. Par conséquent $\widehat{t_i}$ appartient à f_i. Comme s_i appartient à $P^O_{A_i \multimap B_i}$ et comme tous ses préfixes OP ont leur position dans f_i on en déduit que s_i appartient à $\widetilde{f_i}$. Comme s est une partie de $(A_1 \otimes A_2) \multimap (B_1 \otimes B_2)$ dont les projections sur 1,2 sont de premier coup O les changements de composante 1 ou 2 dans s sont faits par l'Opposant. Par conséquent s est une partie de $\widetilde{f_1} \otimes \widetilde{f_2}$. Finalement on a donc $\widetilde{f_1 \otimes f_2} \subseteq \widetilde{f_1} \otimes \widetilde{f_2}$, ce qui termine la preuve. □

Proposition 5.42 *Soit R un réseau de MLL et R^*, σ_R ses interprétations respectives dans $\mathbb{BPR}$ et $\mathbb{G}$. On a :*

$$\widetilde{R^*} = \sigma_R.$$

Remarque 5.43 Noter qu'avec le théorème 5.26 ceci nous donne :

$$\widetilde{\widehat{\sigma_R}} = \sigma_R.$$

Preuve:

Comme $\mathbb{BPR}$ et $\mathbb{G}$ sont des modèles de MLL il suffit de le montrer pour les réseaux multiplicatifs normaux. De plus comme l'interprétation d'un réseau R est égale à l'interprétation de la version η-expansée R' de R (c'est à dire le réseau associé à R où les axiomes ne portent que sur des formules atomiques), il suffit de le montrer pour R n'ayant que des axiomes atomiques. On procède par induction sur une construction de R.

- Si R est réduit à un axiome de conclusions $A^\perp, A$: comme on a déjà vu que $\widehat{[id_A]} = id_A^{(BPR)}$ il nous reste à montrer $\widetilde{id_A^{(BPR)}} = [id_A]$.

  Soit s une partie de $\widetilde{id_A^{BPR}} : A^\perp, A$. On montre par induction sur la longueur de s que s appartient à $[id_A]$. Si s termine par un coup O l'hypothèse de récurrence appliquée au préfixe immédiat de s permet de reconduire l'hypothèse pour s, puisque $[id_A]$ est close par coups Opposant valides. Maintenant si s termine par un coup P soit s' telle que $s = s'a^O b^P$: s' est OP. On sait que $\widehat{s}$ appartient à id_A^{BPR}, c'est-dire que $\widehat{s_{A^\perp}} = \widehat{s_A}$. Comme la formule A est atomique, l'ensemble de positions associé est $P_A/{\equiv_A}$ (voir 5.4.1), donc $s_{A^\perp} \equiv_A s_A$. Comme s appartient à $P_{A^\perp, A}$ cette dernière égalité nous donne : $s \in [id_A]$.

  L'inclusion inverse est une conséquence directe de $\widehat{[id_A]} = id_A^{(BPR)}$.

- Si R est obtenu à partir de deux réseaux $R_i : \Gamma_i, A_i$ $i = 1, 2$ par une règle $\otimes$ sur les A_i : alors en notant $\sigma_{R_i} : \Gamma_i^\perp \multimap A_i$, $R_i^* : \Gamma_i^\perp \multimap A_i$ on a

$$\begin{aligned} \sigma_R &= \sigma_{R_1} \otimes \sigma_{R_2} \\ R^* &= R_1^* \otimes R_2^*. \end{aligned}$$

Par la proposition 5.41 et l'hypothèse d'induction sur les R_i on obtient :

$$\begin{array}{rcl} \widetilde{R^*} & = & \widetilde{R_1^* \otimes R_2^*} \\ & = & \widetilde{R_1^*} \otimes \widetilde{R_2^*} \\ & = & \sigma_{R_1} \otimes \sigma_{R_2} \\ & = & \sigma_R \end{array}$$

– Si $R : \Gamma, (A \wp B)$ est obtenu à partir de $R' : \Gamma, A, B$ par une règle $\wp$: le résultat pour R est conséquence du résultat pour R' par le même argument que dans la preuve du théorème 5.26. □

Remarque 5.44 On a montré que le modèle $\mathbb{BPR}$ n'identifie pas plus de preuves multiplicatives que le modèle de jeux $\mathbb{G}$ et que toute l'information donnée par la stratégie interprétant une preuve est déjà présente dans la relation bipolarisée pointée associée. Toutefois il ne faudrait pas en conclure trop précipitamment que l'aspect temporel du modèle de jeux est inutile. En effet cette bijection entre stratégies et relations bipolarisées pointées n'a été établie que pour les morphismes venant de l'interprétation de preuves. Au crédit du modèle de jeux il reste le théorème de définissabilité (ou complétude forte) d'Abramsky et Jagadeesan (voir le chapitre 2) : l'aspect temporel du modèle permet de caractériser exactement les morphismes venant de preuves.

Chapitre 6

Des ordres polarisés aux jeux

Notre démarche dans le chapitre 5 a été de définir un modèle d'arrivée pour le foncteur lax d'oubli du temps dans les jeux, puis de le décrire et de mesurer sa proximité au modèle de jeux. La relation d'ordre dont sont munis les espaces de positions bipolarisées nous incite maintenant à essayer de faire le chemin inverse : reconstruire des jeux en partant d'ordres bipolarisés.

Remarquons d'abord que nous pouvons nous contenter d'ordres de positions munies d'une seule polarité. Par définition de la relation $\leq_A$ associée à un e.b.p. donné par une formule A (avec l'interprétation convenue pour les formules atomiques), on a $\lambda^i_A(y) = \lambda^i_A(x)$ pour toutes positions x, y telles que $\perp <_A x \leq_A y$. Par surjectivité de l'application $\widehat{\cdot}$ il existe une partie s de position x ; notons a le premier coup de s. Alors $\perp <_A \widehat{a} \leq_A x$, donc $\lambda^i_A(x) = \lambda^i_A(\widehat{a}) = \lambda^f_A(\widehat{a})$. Autrement dit $\lambda^i_A(x) = \lambda^f_A(y)$ où y est une position minimale telle que $\perp <_A y \leq x$. Par conséquent l'attribution de polarités initiales est dans ce cas redondante par rapport à celle des polarités finales et de la structure d'ordre.

Nous allons donc considérer des ordres de positions à une seule polarité correspondant à l'ancienne polarité finale. Par ailleurs nous allons définir des constructions sur les ordres de positions plus libérales qu'auparavant dans le sens où pour les multiplicatifs par exemple $A \otimes B$ et $A \parr B$ auront le même ensemble de positions (le produit cartésien des ensembles de positions de A et B), le même ordre (l'ordre produit) et ne différeront que par les fonctions de polarités (remarquons qu'on perd ainsi la propriété que toute position est le $\widehat{\cdot}$ d'une partie). Nous décrirons ensuite une manière générique d'associer un jeu $\widetilde{V}$ à un ordre polarisé V. Cette construction est l'adaptation au cas des ordres polarisés d'une construction donnée par T. Ehrhard ([Ehr97]) sur les ordres partiels et les hypercohérences.

6.1 Ordre pointé, ordre polarisé, ordre-jeu

Commençons par préciser le type d'ordres que nous voulons considérer ; les propriétés mises en évidence pour l'ordre d'accessibilité sur les positions d'une formule sont maintenant érigées en définition :

Définition 6.1 *Un* ordre pointé *V est la donnée d'un ensemble $|V|$ et d'une relation d'ordre partiel $\leq_V$ sur $|V|$ tels que :*

- *pour tout a de $|V|$, l'ensemble $\downarrow_V a = \{x \in |V| \text{ t.q. } x \leq_V a\}$ est fini,*

- *l'ordre $\leq_V$ sur $|V|$ a un minimum noté $\perp_V$.*

L'ensemble $|V|$ sera appelé la trame *de l'ordre pointé.*

Un ordre polarisé *est défini par un ordre pointé V et une fonction $\lambda_V : |V| \to \{O, P, N\}$ appelée fonction de polarité satisfaisant :*

$$\lambda_V(x) = N \Leftrightarrow x = \perp_V.$$

On commettra l'abus de désigner par V l'ordre polarisé et l'ordre pointé sous-jacent.

On dira que b est *successeur* de a dans un ordre si :

$$(a \leq b) \text{ et } (\forall z,\ a \leq z \leq b \implies z = a \text{ ou } z = b).$$

On notera par la suite simplement par $\downarrow_V a$ l'ordre induit par $\leq_V$ sur $\downarrow_V a$ et on se permettra parfois de désigner la trame $|V|$ par V quand il n'y aura pas d'ambiguïté.

Considérons le cas d'un ordre polarisé V tel que pour tout élément a de V, l'ordre $\downarrow_V a$ est un *ordre total alterné* (V est donc un arbre), c'est-à-dire que : $\downarrow_V a$ est un ordre total et si $x, y \in (\downarrow_V a)\backslash\{\perp_V\}$, y successeur de x alors $\lambda_V(y) = \bar{\lambda}_V(x)$.

Alors on peut associer à V un jeu A défini par :

- $M_A = |V|\backslash\{\perp\}$,
- $\lambda_A = \lambda_V$,
- $P_A = \{x_1 x_2 \ldots x_k,\ \forall i\, x_i \in M_A,$ et dans $\downarrow_V x_k$ on a : x_1 est successeur de $\perp$, x_{i+1} est successeur de $x_i\}$
- $\equiv_A$ est la relation identité sur P_A.

On appellera par conséquent *ordre-jeu* un tel ordre polarisé.

6.2 Ordres polarisés et espaces de positions bipolarisées

Précisons la différence entre les espaces de positions bipolarisées du chapitre précédent et les ordres polarisés que nous venons d'introduire. Un e.p.b. quelconque ne donne pas un ordre polarisé (simplement par oubli des polarités initiales) car nous n'avons défini d'ordre sur les e.p.b. que dans le cas où ils viennent de l'interprétation d'une formule et à la condition d'avoir des ordres sur les e.p.b. interprétant les formules atomiques. Réciproquement un ordre polarisé quelconque ne donne pas non plus un e.p.b. car on ne peut pas toujours définir de polarités initiales pour ses éléments ; penser par exemple à l'ordre polarisé donné par $\{\perp, a^O, b^P, c^O, d^P\}$ avec $\perp < a^O < d^P$ et $\perp < b^P < c^O < d^P$. Par contre les ordres polarisés sont des ensembles pointés, donc des objets de la catégorie $\mathbb{PR}$.

Maintenant nous allons interpréter les formules de MELL par des ordres polarisés (à partir d'une interprétation des formules atomiques). Ces ordres polarisés auront alors des trames plus grandes que les espaces de positions bipolarisées correspondantes (leurs trames contiendront des positions inaccessibles).

6.3 Constructions sur les ordres pointés

Nous introduisons maintenant les constructions sur les ordres pointés : le produit, qui interprétera les multiplicatifs, et un “multi-produit” symétrique pour les exponentiels. Noter que la distinction entre $\otimes$ et $⅋$ (! et ?) n'est pas encore faite dans cette section où les polarités ne sont pas prises en compte.

Signalons que par la suite beaucoup de résultats seront établis en deux temps : d'abord pour les constructions multiplicatives et ensuite pour les exponentiels. Par soucis de précision nous avons adopté le parti de détailler chaque cas mais les preuves sont cependant assez semblables.

Définition 6.2 *Étant donnés deux ordres pointés V_1, V_2 l'*ordre produit $V_1 \times V_2$ *est défini par :*

- $|V_1 \times V_2| = |V_1| \times |V_2|$,
- $(x_1, x_2) \leq_{V_1 \times V_2} (y_1, y_2)$ *si* $x_i \leq_{V_i} y_i$ *pour* $i = 1$ *et* 2.

L'ordre produit $V_1 \times V_2$ est alors un ordre pointé, avec $\bot_{V_1 \times V_2} = (\bot_{V_1}, \bot_{V_2})$.

Définition 6.3 *Étant donné un ordre pointé V et a un élément de $|V|$, on appelle* ordre total de $\downarrow_V a$ *tout sous-ensemble I de $\downarrow_V a$ tel que l'ordre induit par V sur I est total.*

Un tel ordre total sera dit maximal *s'il est maximal parmi les ordres totaux de $\downarrow_V a$ pour la relation d'inclusion. On notera $\mathcal{TM}(a, V)$ l'ensemble des ordres totaux maximaux de $\downarrow_V a$.*

On a comme conséquence de cette définition les deux lemmes suivants (les preuves sont immédiates) :

Lemme 6.4 *Si I appartient à $\mathcal{TM}(a, V)$, alors $\bot_V$ et a appartiennent à I et sont respectivement minimum et maximum de I.*

Lemme 6.5 *Si I appartient à $\mathcal{TM}(a, V)$ et J appartient à $\mathcal{TM}(b, V)$ alors :*

$$I \subseteq J \iff I = (J \cap (\downarrow_V a)).$$

Définition 6.6 *Soient deux ordres totaux finis I_1 et I_2 ; on note $n_i = \operatorname{card} I_i - 1$. Un* entrelacement de (I_1, I_2) *est une application $e : \{1, \ldots, n_1 + n_2\} \to \{1, 2\}$ telle que* $\operatorname{card} e^{-1}(i) = n_i$ *pour $i = 1, 2$.*

Un entier k de $\{2, \ldots, n_1 + n_2\}$ est un saut de l'entrelacement *à 1 (resp. à 2) si $e(k-1) = 2$ et $e(k) = 1$ (resp. $e(k-1) = 1$ et $e(k) = 2$).*

Décrivons maintenant les ordres totaux maximaux d'un ordre produit :

Proposition 6.7 *Soient V_1, V_2 des ordres pointés et (x^1, x^2) un élément de $V_1 \times V_2$. On a une bijection :*

$$\phi_{(x^1,x^2)} : \mathcal{TM}((x^1, x^2), V_1 \times V_2) \longrightarrow \{(I_1, I_2, e) / \quad \begin{array}{l} I_i \in \mathcal{TM}(x^i, V_i) \text{ pour } i = 1, 2 \\ \text{et } e \text{ entrelacement de } (I_1, I_2)\}. \end{array}$$

Preuve :

Soit I un élément de $\mathcal{TM}((x^1, x^2), V_1 \times V_2)$; notons $I = (x^1_k, x^2_k)_{0 \leq k \leq n}$. On désigne par p_1 et p_2 les projections respectivement de $V_1 \times V_2$ sur V_1 et sur V_2. On pose alors $I_i = p_i(I)$ pour $i = 1, 2$. Il est clair que I_i est un ordre total contenu dans V_i de maximum x^i. Montrons que c'est un ordre total maximal dans $(\downarrow_{V_i} x^i)$; prenons par exemple $i = 1$. Supposons qu'il existe un ordre total J_1 dans $(\downarrow_{V_1} x^1)$ tel que $I_1 \subseteq J_1$ et prenons y un élément de J_1. Soit $k_0 = \max\{k / \quad 0 \leq k \leq n, x^1_k \leq_{V_1} y\}$. Alors $J = I \cup \{(y, x^2_{k_0})\}$ étant un ordre total de $\downarrow_{V_1 \times V_2} (x^1, x^2)$ contenant I, par maximalité de I on a $I = J$, soit $(y, x^2_{k_0})$ appartient à I. Ainsi y appartient à I_1 et on en déduit donc $J_1 = I_1$. Par conséquent pour $i = 1, 2$, I_i appartient à $\mathcal{TM}(x^i, V_i)$.

Montrons maintenant que pour tout k de $\{1, \ldots, n\}$ on a : $x^1_{k-1} = x^1_k$ ou $x^2_{k-1} = x^2_k$. En effet dans le cas contraire on aurait :

$$(x^1_{k-1}, x^2_{k-1}) <_{V_1 \times V_2} (x^1_{k-1}, x^2_k) <_{V_1 \times V_2} (x^1_k, x^2_k),$$

et l'ensemble $I \cup \{(x^1_{k-1}, x^2_k)\}$ contredirait la maximalité de I.

On pose alors :

$$e_I(k) = \begin{cases} 1 \text{ si } x^2_{k-1} = x^2_k, \\ 2 \text{ si } x^1_{k-1} = x^1_k. \end{cases}$$

La propriété précédente nous assure que e_I est bien définie. On définit alors $\phi_{(x^1,x^2)}(I) = (I_1, I_2, e_I)$. Si on note $n_i = \operatorname{card} I_i - 1$ pour $i = 1, 2$ remarquons que $n = n_1 + n_2$.

On va décrire maintenant une application ψ de l'ensemble de droite vers l'ensemble de gauche. Soit (I_1, I_2, e) un élément de l'ensemble de droite et $n_i = \operatorname{card} I_i - 1$ $(i = 1, 2)$, $n = n_1 + n_2$. On définit une suite $(x^1_k, x^2_k)_{0 \leq k \leq n}$ dans $V_1 \times V_2$ par récurrence sur k :

- $(x^1_0, x^2_0) = (\perp_{V_1}, \perp_{V_2})$,
- pour $1 \leq k \leq n$,
  - si $e(k) = 1$: $x^2_k = x^2_{k-1}$ et pour x^1_k on prend le successeur de x^1_{k-1} dans I_1,
  - si $e(k) = 2$: $x^1_k = x^1_{k-1}$ et pour x^2_k on prend le successeur de x^2_{k-1} dans I_2.

On vérifie alors facilement que $I = (x^1_k, x^2_k)_{0 \leq k \leq n}$ est un ordre total maximal de $(\downarrow_{V_1 \times V_2}(x^1, x^2))$. On pose $\psi(I_1, I_2, e) = I$. Par construction de I on a pour $i = 1, 2$, $p_i(I) = I_i$ et l'entrelacement e_I est e ; donc $\phi_{(x^1,x^2)} \circ \psi(I) = I$. De même il est clair que pour (I_1, I_2, e) dans l'ensemble de droite on a : $\phi_{(x^1,x^2)} \circ \psi(I_1, I_2, e) = (I_1, I_2, e)$. Par conséquent l'application $\phi_{(x^1,x^2)}$ est bien une bijection. $\square$

Définition 6.8 *Étant donné un ordre pointé V, soit $\square V$ l'ensemble des multiensembles de $V \backslash \{\perp_V\}$ muni de l'ordre $\leq_V$ défini par : $u \leq_V v$ ssi l'une des conditions suivantes est satisfaite*

- $u = []$,
- *il existe des indexations $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$ et $(y_i)_{1 \leq i \leq m}$ de u et v et une injection $\Phi : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, m\}$ tels que $\forall i \in \{1, \ldots, n\}, \quad x_i \leq_V y_{\Phi(i)}$.*

On a : $\perp_{\square V} = []$.

Remarque 6.9 La même remarque que 5.31 vaut ici : si u et v sont deux éléments de $\square V$ et s'il existe des indexations et une injection telles que la condition soit vérifiée, alors pour toutes indexations de u et v il existe une injection telle que la condition soit vérifiée.

Définition 6.10 *Soit $(I_j)_{1 \leq j \leq N}$ une famille d'ordres totaux finis. Notons pour $1 \leq j \leq N$, $n_j = \operatorname{card} I_j - 1$ et $n = n_1 + \cdots + n_N$. Un entrelacement de cette famille est une application $e : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, N\}$ vérifiant pour $1 \leq j \leq N$, $\operatorname{card} e^{-1}(j) = n_j$.*

Un entier k de $\{2, \ldots, n\}$ est un saut de l'entrelacement à j $(j \in \{1, \ldots, N\})$ si $e(k-1) \neq j$ et $e(k) = j$.

Étant donné un multiensemble U d'ordres totaux finis, un entrelacement de U est donné par un entrelacement e d'une famille $(I_j)_{1 \leq j \leq N}$ obtenue par indexation de U. On associe naturellement à n'importe quelle indexation de U un entrelacement de mêmes sauts que e.

De la même manière que les odres totaux maximaux d'un ordre produit, les ordres totaux maximaux d'un ordre multi-produit symétrique $\Box V$ peuvent être décrits au moyen des ordres totaux maximaux de V :

Proposition 6.11 *Soit $u = [x^1, \ldots, x^N]$ un élément de $\Box V$. On a une bijection :*

$$\phi_u : \mathcal{TM}([x^1, \ldots, x^N], \Box V) \to \{([I_1, \ldots, I_N], e) \,/\, I_j \in \mathcal{TM}(x^j, V) \text{ pour } 1 \leq j \leq N \text{ et } e \text{ entrelacement de } [I_1, \ldots, I_N]\}.$$

Preuve:

Soit I un élément de $\mathcal{TM}([x^1, \ldots, x^N], \Box V)$. On note $(u_k)_{0 \leq k \leq n}$ la suite strictement croissante des éléments de l'ordre total I ; on a donc $u_0 = []$ et $u_n = [x^1, \ldots, x^N]$. Comme $u_0 <_{\Box V} u_1 <_{\Box V} \cdots <_{\Box V} u_n$ on choisit une indexation de chacun des u_k et une injection ϕ_k témoignant pour $0 \leq k \leq n-1$ de l'inégalité $u_k <_{\Box V} u_{k+1}$. Prenons alors deux éléments consécutifs u_{k-1} et u_k pour $k \geq 2$ et une indexation de chacun d'eux $(y^i)_{1 \leq i \leq N_{k-1}}$ et $(z^i)_{1 \leq i \leq N_k}$. Désignons ϕ_{k-1} simplement par ϕ pour simplifier l'écriture. On a : $N_{k-1} \leq N_k$ et pour i dans $\{1, \ldots, N_k\}$, $y^i \leq_V z^{\phi(i)}$. Alors nous affirmons que :

- soit $N_k = N_{k-1}$ et il existe j dans $\{1, \ldots, N_{k-1}\}$ tel que $(y^j <_V z^{\phi(j)})$ et $(\forall i \neq j, \quad y^i = z^{\phi(i)})$,
- soit $N_k = N_{k-1} + 1$, et $(\forall i \leq N_{k-1}, \quad y^i = z^{\phi(i)})$.

En effet dans chacun des cas où ces deux conditions sont niées on peut contredire la maximalité de I :

- Premièrement si on a $N_k > N_{k-1}$ et un $j \leq N_{k-1}$ tel que $(y^j <_V z^{\phi(j)})$, alors en prenant u le multiensemble obtenu à partir de u_{k-1} en remplaçant y^j par $z^{\phi(j)}$ on obtient les inégalités $u_{k-1} < u < u_k$. L'ensemble $I \cup \{u\}$ donne un ordre total de $(\downarrow_{\Box V}[x^1, \ldots, x^N])$ contenant strictement I, ce qui contredit notre hypothèse.
- Deuxièmement si $N_k > N_{k-1} + 1$, alors en prenant pour u le multiensemble obtenu en ajoutant à u_{k-1} un z^i tel que $(i \notin \operatorname{codom} \phi)$ on a de la même façon $u_{k-1} < u < u_k$.
- Enfin si $N_k = N_{k-1}$ et on a deux indices distincts j et j' tels que $(y^j <_V z^{\phi(j)})$ et $(y^{j'} <_V z^{\phi(j')})$ alors en prenant pour u le multiensemble obtenu à partir de u_{k-1} en remplaçant $y^{j'}$ par $z^{\phi(j')}$ on obtient $u_{k-1} < u < u_k$.

Alors quitte à réindexer les u_k, on peut supposer qu'on a pour tout k de $\{0, \ldots, n-1\}$:

- soit $\phi_k = id_{\{1,\ldots,N_k\}}$ $(N_{k+1} = N_k)$,
- soit ϕ_k est l'injection $\{1, \ldots, N_k\} \hookrightarrow \{1, \ldots, (N_k + 1)\}$ donnée par $\phi_k(i) = i$.

On note $u_k = [x_k^1, \ldots, x_k^{N_k}]$ pour $k = 0, \ldots, n$, avec $N_n = N$ et $x_n^i = x^i$. On définit I_j par : $I_j = \{\bot_V\} \cup \{x_k^j \text{ pour } k \text{ tel que } \operatorname{card} u_k \geq j\}$. On peut alors vérifier que I_j appartient à $\mathcal{TM}(x_j, V)$. Quant à l'entrelacement, on prend pour k dans $\{1, \ldots, n\}$:

$$e_I(k) = \begin{cases} i \text{ si } x_{k-1}^i < x_k^i, \\ N_k \text{ si } N_k > N_{k-1}, \text{ c.a.d. } \operatorname{card} u_k = \operatorname{card} u_{k-1} + 1. \end{cases}$$

On pose finalement $\phi_u(I) = ([I_1, \ldots, I_N], e_I)$. Notons $n_i = (\operatorname{card} I_i - 1)$ pour $i = 1, \ldots n$; on a $n = n_1 + \cdots + n_N$.

Inversement, étant donné $([I_1, \ldots, I_N], e)$ dans l'ensemble de droite on fixe une indexation $(I_i)_{1 \leq i \leq N}$ et on suppose l'entrelacement e adapté à cette indexation. On note $n_i = (\operatorname{card} I_i - 1)$ et $n = n_1 + \cdots + n_N$. On définit une suite strictement croissante $(u_k)_{0 \leq k \leq n}$ d'éléments de $\Box V$ par récurrence sur k de la manière suivante :

- $u_0 = []$,

- pour $0 \leq k \leq n-1$, supposons construit $u_k = [x_1^k, \ldots, x_{N_k}^k]$:
  - si $e(k+1) = N_k + 1$ alors soit x le premier élément de $(I_{N_k+1} \backslash \{\perp_V\})$; on pose $x_i^{k+1} = x_i^k$ pour $1 \leq i \leq N_k$ et $x_{N_k+1}^{k+1} = x$ puis $u_{k+1} = [x_1^{k+1}, \ldots, x_{N_k+1}^{k+1}]$.
  - si $e(k+1) = j$ avec j dans $\{1, \ldots, N_k\}$, alors soit x le successeur de x_j^k dans I_j. On pose $x_j^{k+1} = x$ et pour $i \neq j$, i appartenant à $\{1, \ldots, N_k\}$, $x_i^{k+1} = x_i^k$. Alors $u_{k+1} = [x_1^{k+1}, \ldots, x_{N_k}^{k+1}]$.

Il est clair que la suite $(u_k)_{0 \leq k \leq n}$ donne un ordre total I de $(\downarrow_{\Box V}[x^1, \ldots, x^N])$ et du fait que chaque I_i est maximal dans $(\downarrow_V x^i)$, on déduit que I appartient bien à $\mathcal{TM}([x^1, \ldots, x^N], \Box V)$. On pose $\psi([I_1, \ldots, I_N], e) = I$ et on peut vérifier que $\psi \circ \phi_u$ et $\phi_u \circ \psi$ sont les identités des deux ensembles de l'énoncé. L'application ϕ_u est donc une bijection. $\Box$

6.4 Constructions sur les ordres polarisés

On complète maintenant nos constructions de la section précédente dans le cas où les ordres sont polarisés par une structure d'ordre polarisé sur l'ordre résultat (on donne deux polarisations correspondant à chaque fois aux deux connecteurs duaux).

Définition 6.12 *Étant donnés deux ordres polarisés V_1 et V_2, l'ordre polarisé $V_1 \bar{\otimes} V_2$ (resp. $V_1 \bar{\invamp} V_2$) est l'ordre polarisé donné par :*

- *l'ordre pointé $V_1 \times V_2$,*
- *la fonction de polarité $\lambda_{V_1 \bar{\otimes} V_2}(a_1, a_2) = \lambda_{\bar{\otimes}}(\lambda_{V_1}(a_1), \lambda_{V_1}(a_2))$ (resp. $\lambda_{V_1 \bar{\invamp} V_2}(a_1, a_2) = \lambda_{\bar{\invamp}}(\lambda_{V_1}(a_1), \lambda_{V_1}(a_2))$) où $\lambda_{\bar{\otimes}}$ (resp. $\lambda_{\bar{\invamp}}$) est donnée par :*

$p_1 \backslash p_2$	O	P	N
O	O	O	O
P	O	P	P
N	O	P	N

Valeur de $\lambda_{\bar{\otimes}}(p_1, p_2)$.

$p_1 \backslash p_2$	O	P	N
O	O	P	O
P	P	P	P
N	O	P	N

Valeur de $\lambda_{\bar{\invamp}}(p_1, p_2)$.

Définition 6.13 *Étant donné un ordre polarisé V, l'ordre polarisé $V^\perp$ est défini par :*

- *l'ordre pointé $(|V|, \leq_V)$,*
- *la fonction de polarité $\lambda_{V^\perp} = \bar{\lambda}_V$.*

On a bien sûr $(V_1 \bar{\otimes} V_2)^\perp = V_1^\perp \bar{⅋} V_2^\perp$.

Définition 6.14 *Étant donné un ordre polarisé V, l'ordre polarisé $\bar{!}V$ (resp. $\bar{?}V$) est donné par :*

- *l'ordre pointé $\Box V$,*
- *la fonction de polarité $\lambda_{\bar{!}V}$ (resp. $\lambda_{\bar{?}V}$) définie par :*

$$\lambda_{\bar{!}V}([]) = N,$$
$$\lambda_{\bar{!}V}([x^1, \ldots, x^n]) = \begin{cases} P \text{ si pour tout } i & \lambda_V(x^i) = P, \\ O \text{ s'il existe } i \text{ tel que} & \lambda_V(x^i) = O, \end{cases}$$

respectivement

$$\lambda_{\bar{?}V}([]) = N,$$
$$\lambda_{\bar{?}V}([x^1, \ldots, x^n]) = \begin{cases} O \text{ si pour tout } i & \lambda_V(x^i) = O, \\ P \text{ s'il existe } i \text{ tel que} & \lambda_V(x^i) = P, \end{cases}$$

Notons que ces fonctions de polarités sont les généralisations à des multiensembles d'éléments de V des fonctions $\lambda_{V \bar{\otimes} V}$ et $\lambda_{V \bar{⅋} V}$ sur les couples de V (on observe que ces dernières sont des fonctions symétriques).

Remarque 6.15 Ces constructions sont plus libérales que les constructions correspondantes du chapitre 5 sur les espaces de positions bipolarisées car par exemple on accepte dans $V_1 \bar{\otimes} V_2$ les positions (x_1, x_2) où $\lambda_{V_1}(x_1) = \lambda_{V_2}(x_2) = O$ et on accepte dans $\bar{!}V$ les positions $[x^1, \ldots, x^n]$ où plusieurs x_i vérifient $\lambda_V(x^i) = O$. Elles coïncident avec les constructions sur les ensembles pointés.

Si on fixe une interprétation des formules atomiques par des ordres polarisés, ces constructions nous permettent d'associer à toute formule F de MELL un ordre polarisé.

6.5 Relèvement d'un ordre polarisé en ordre-jeu

On veut expliciter pour chaque élément (position) a d'un ordre polarisé les différentes manières d'accéder à a depuis $\perp$ via une succession alternée de positions consécutives ; c'est l'opération de *relèvement* :

Définition 6.16 *Étant donné un ordre polarisé V on définit son* relèvement *comme l'ordre polarisé $\widetilde{V}$ donné par :*

- $|\widetilde{V}| = \{(a, I) / \quad a \in |V|, I \in \mathcal{TM}(a, V)$ *et I alterné dans V*$\}$
- *l'ordre $\leq_{\widetilde{V}}$:*
$$(a, I) \leq_{\widetilde{V}} (b, J) \text{ si } I \subseteq J,$$
- *la fonction $\lambda_{\widetilde{V}}(a, I) = \lambda_V(a)$.*

Remarque 6.17 On a :
$$(a, I) \leq_{\widetilde{V}} (b, J) \Rightarrow a \leq_V b.$$
C'est une conséquence du lemme 6.4.

Proposition 6.18 *L'ordre polarisé $\widetilde{V}$ est un ordre-jeu.*

Preuve:
Il nous faut vérifier, (a, I) étant un élément de $|\widetilde{V}|$, que l'ordre $\downarrow_{\widetilde{V}}(a, I)$ est un ordre total alterné. Vérifions d'abord que $\downarrow_{\widetilde{V}}(a, I)$ est un ordre total.

Suposons $(a_1, I_1), (a_2, I_2) \leq_{\widetilde{V}} (a, I)$. Alors $I_i \subseteq I$, donc a_i appartient à I. Soit x dans I tel que $x \leq_V a_i$; alors comme I est total, $I_i \cup \{x\}$ est un ordre total de maximum a_i. De la maximalité de I_i on déduit alors $I_i = I \cap (\downarrow_V a_i)$. Comme I est un ordre total on a : $a_1 \leq_V a_2$ ou $a_2 \leq_V a_1$. Mettons par exemple $a_1 \leq_V a_2$. Alors $I \cap (\downarrow_V a_1) \subseteq I \cap (\downarrow_V a_2)$, soit $I_1 \subseteq I_2$. Par conséquent $(a_1, I_1) \leq_{\widetilde{V}} (a_2, I_2)$ et $\downarrow_{\widetilde{V}}(a, I)$ est bien un ordre total.

Vérifions maintenant qu'il est alterné. Pour cela considérons deux éléments successifs dans cet ordre (a_1, I_1) et (a_2, I_2). En vue d'obtenir une contradiction supposons $\lambda_{\widetilde{V}}(a_1, I_1) = \lambda_{\widetilde{V}}(a_2, I_2)$, par exemple O. L'inégalité $(a_1, I_1) \leq_{\widetilde{V}} (a_2, I_2)$ nous donne : $I_1 \subseteq I_2$. Par conséquent : $a_1, a_2 \in I_2$ et $a_1 \leq_V a_2$. On a vu qu'on a $I_1 = I_2 \cap (\downarrow_V a_1)$. De plus comme $\lambda_{\widetilde{V}}(a_i, I_i) = \lambda_V(a_i)$ on a $\lambda_V(a_1) = \lambda_V(a_2) = O$. Comme I_2 est un ordre alterné on en déduit alors : il existe b dans I_2 tel que $a_1 <_V b <_V a_2$ et $\lambda_V(b) = P$. Posons alors $J = I_2 \cap (\downarrow_V b)$. Par maximalité de I_2 on a $J = I \cap (\downarrow_V b)$, J appartient à $\mathcal{TM}(b, V)$ et comme I est alterné on a que J est alterné. Par conséquent (b, J) appartient à $\widetilde{V}$, donc $(a_1, I_1) <_{\widetilde{V}} (b, J) <_{\widetilde{V}} (a_2, I_2)$, ce qui contredit la consécutivité de (a_1, I_1) et (a_2, I_2). □

6.6 Constructions sur les ordres polarisés et relèvements

Nous avons décrit dans la proposition 6.7 les ordres totaux maximaux d'un ordre produit. Dans le cas où les ordres sont polarisés et où on considère des ordres totaux maximaux alternés on peut en dire plus :

Lemme 6.19 *Soient V_1 et V_2 deux ordres polarisés. Si (a_1, a_2) appartient à $V_1 \bar{\otimes} V_2$ (resp. à $V_1 \bar{\parr} V_2$), I appartient à $\mathcal{TM}((a_1, a_2), V_1 \times V_2)$ et I est alterné dans $V_1 \bar{\otimes} V_2$ (resp. $V_1 \bar{\parr} V_2$) alors en désignant $\phi_{(a_1,a_2)}(I)$ par (I_1, I_2, e) on a :*

- *I_i est alterné dans l'ordre polarisé V_i,*
- *si pour k dans $\{2, \ldots, (n_1 + n_2)\}$, k est un saut de l'entrelacement e alors (x_k^1, x_k^2) étant le $(k+1)$-ème élément de I on a : $\lambda_{V_1 \bar{\otimes} V_2}(x_k^1, x_k^2) = O$ (resp. $\lambda_{V_1 \bar{\parr} V_2}(x_k^1, x_k^2) = P$).*
- *(x_k^1, x_k^2) étant le $k+1$-ème élément de I on a :*

$$\lambda_{V_1 \bar{\otimes} V_2}(x_k^1, x_k^2) = \lambda_{V_i}(x_k^i), \text{ où } i = e(k)$$

$$(\text{resp. } \lambda_{V_1 \bar{\parr} V_2}(x_k^1, x_k^2) = \lambda_{V_i}(x_k^i), \text{ où } i = e(k)).$$

Preuve: On l'établit dans le cas de $\bar{\otimes}$; le cas de $\bar{\parr}$ est identique. Prenons deux éléments x_1, y_1 consécutifs dans I_1 avec $x_1 \neq \perp_{V_1}$. Par définition de $\phi_{(a_1,a_2)}$, il existe x_2 dans V_2 tel que (x_1, x_2), (y_1, x_2) sont consécutifs dans I. Maintenant si $\lambda_{V_2}(x_2) = O$ alors $\lambda_{V_1 \bar{\otimes} V_2}(x_1, x_2) = \lambda_{V_1 \bar{\otimes} V_2}(y_1, x_2) = O$, ce qui contredit l'alternance de I. Par conséquent $\lambda_{V_2}(x_2) = P$ ou N. Alors pour que $\lambda_{V_1 \bar{\otimes} V_2}(x_1, x_2) \neq \lambda_{V_1 \bar{\otimes} V_2}(y_1, x_2)$ il faut que $\lambda_{V_1}(x_1) \neq \lambda_{V_1}(y_1)$. On a montré que I_1 est alterné ; on obtient de la même manière que I_2 est alterné.

Maintenant supposons que $k \geq 2$ est un saut de e, par exemple $e(x_{k-1}^1, x_{k-1}^2) = 2$ et $e(x_k^1, x_k^2) = 1$. Alors par définition de l'application $\phi_{(a_1,a_2)}$ on sait que $x_{k-1}^2 = x_k^2$ et $x_{k-2}^1 = x_{k-1}^1$. On vient de voir que ceci implique : $\lambda_{V_2}(x_{k-1}^2) = P$ ou N, et $\lambda_{V_1}(x_{k-1}^1) = P$ ou N. Alors $\lambda_{V_1 \bar{\otimes} V_2}(x_{k-1}^1, x_{k-1}^2) = P$ ou N. De plus comme (x_{k-1}^1, x_{k-1}^2) n'est pas minimum de I on a $\lambda_{V_1 \bar{\otimes} V_2}(x_{k-1}^1, x_{k-1}^2) = P$. Par alternance dans I on en déduit $\lambda_{V_1 \bar{\otimes} V_2}(x_k^1, x_k^2) = O$.

Pour la troisième propriété : si $e(k) = i$ on a remarqué que $\lambda_{V_j}(x_j^k) = P$ ou N (où $j = 2$ si $i = 1$, $j = 1$ si $i = 2$) et on sait que $x_i^k \neq \perp_{V_i}$; dans ce cas la définition de $\lambda_{\bar{\otimes}}$ nous donne $\lambda_{V_1 \bar{\otimes} V_2}(x_1^k, x_2^k) = \lambda_{V_i}(x_i^k)$. □

Remarque 6.20 (Positions inaccessibles de $V_1 \bar{\otimes} V_2$) Notons que si I appartient à l'ensemble $\mathcal{TM}((a_1, a_2), V_1 \times V_2)$ et est alterné dans $V_1 \bar{\otimes} V_2$, alors I ne contient pas de position (x_1, x_2) telle que $\lambda_{V_1}(x_1) = \lambda_{V_2}(x_2) = O$.

En effet supposons que ce soit le cas. Comme $(x_1, x_2) \neq \perp$, on sait que (x_1, x_2) a un prédécesseur (y_1, y_2) dans I. Comme I est un ordre total maximal on a vu (preuve de la proposition 6.7) que $y_1 = x_1$ ou $y_2 = x_2$. Par conséquent la définition de $\lambda_{V_1 \bar{\otimes} V_2}$ nous donne $\lambda_{V_1 \bar{\otimes} V_2}(y_1, y_2) = \lambda_{V_1 \bar{\otimes} V_2}(x_1, x_2) = O$, ce qui contredit l'alternance de I.

Proposition 6.21 *Étant donnés deux ordres polarisés V_1 et V_2, on désigne par A_i $(i = 1, 2)$ le jeu associé à l'ordre-jeu $\widetilde{V_i}$. On considère sur $P_{A_1 \otimes A_2}$ l'ordre préfixe $\sqsubseteq$; alors on a un isomorphisme d'ordres :*

$$(\widetilde{V_1 \bar{\otimes} V_2}, \leq_{\widetilde{V_1 \bar{\otimes} V_2}}) \xrightarrow{\sim} (P_{A_1 \otimes A_2}, \sqsubseteq).$$

Cet isomorphisme préserve les polarités finales des parties. On a de la même façon un isomorphisme :

$$(\widetilde{V_1 \bar{⅋} V_2}, \leq_{\widetilde{V_1 \bar{⅋} V_2}}) \xrightarrow{\sim} (P_{A_1 ⅋ A_2}, \sqsubseteq).$$

Preuve :

Commençons par définir l'application, qu'on désignera par Ψ. Soit $((a_1, a_2), I)$ un élément de $\widetilde{V_1 \bar{\otimes} V_2}$ et $(I_1, I_2, e) = \phi_{(a_1, a_2)}(I)$. Alors d'après le lemme 6.19 on sait que I_i $(i = 1, 2)$ est alterné dans V_i, donc comme I_i appartient à $\mathcal{TM}(a_i, V_i)$ on en déduit : (a_i, I_i) appartient à $\widetilde{V_i}$. Par définition du jeu A_i l'ordre I_i donne une partie s_i de P_{A_i}. Soit alors s la suite de coups de $A_1 \otimes A_2$ de projection sur A_i la suite s_i et telle que pour tout k le k-ème coup de s appartient à M_{A_i} si $e(k) = i$. Montrons que s est une partie de $P_{A_1 \otimes A_2}$.

Lemme 6.22 *Si m désigne le k-ème coup de s et (x_k^1, x_k^2) est le $(k+1)$-ème élément de I on a $\lambda_{A_1 \otimes A_2}(m) = \lambda_{V_1 \bar{\otimes} V_2}(x_k^1, x_k^2)$.*

Vérifions ce lemme. On a $\lambda_{A_1 \otimes A_2}(m) = \lambda_{A_i}(m)$ si m appartient à M_{A_i}. Mais alors $e(k) = i$ et donc par le lemme 6.19 : $\lambda_{V_1 \bar{\otimes} V_2}(x_k^1, x_k^2) = \lambda_{V_i}(x_k^i)$. De plus comme $m = I_i \cap (\downarrow_{V_i} x_k^i)$ on a par définition de λ_{A_i} : $\lambda_{A_i}(m) = \lambda_{V_i}(x_k^i)$, ce qui nous donne le résultat voulu.

Par conséquent, comme I est alterné dans $V_1 \bar{\otimes} V_2$ on en déduit que s est une suite de coups alternée de $M_{A_1 \otimes A_2}$. Il ne nous reste qu'à vérifier la condition de switching pour établir que s est une partie de $P_{A_1 \otimes A_2}$. Or si le k-ème coup m de s n'est pas dans la même composante que le $(k-1)$-ème coup, alors $e(k)$ est un saut de e et d'après le lemme 6.19 on a : $\lambda_{V_1 \bar{\otimes} V_2}(x_k^1, x_k^2) = O$. D'après le lemme précédent on a donc $\lambda_{A_1 \otimes A_2}(m) = O$. La suite s vérifie par conséquent la condition de switching et s appartient à $P_{A_1 \otimes A_2}$. On pose $\Psi((a_1, a_2), I) = s$.

Montrons maintenant que Ψ est croissante. Supposons $((a_1, a_2), I) \leq_{\widetilde{V_1 \bar{\otimes} V_2}} ((a'_1, a'_2), I')$. Alors $I \subseteq I'$ et d'après le lemme 6.5 : $I = I' \cap (\downarrow_{V_1 \bar{\otimes} V_2}(a_1, a_2))$. On a par conséquent : $p_i(I) \subseteq p_i(I')$ pour $i = 1, 2$. Si on désigne respectivement par s_i et s'_i les parties de P_{A_i} associées à $p_i(I)$ et $p_i(I')$, l'inclusion précédente nous donne : $s_i \sqsubseteq s'_i$, pour $i = 1, 2$. Par ailleurs en notant $n = (\operatorname{card} I - 1)$ la construction de e_I et $e_{I'}$ donne : $e_{I'}|_{\{1,\ldots,n\}} = e_I$. Par conséquent la partie $s = \Psi((a_1, a_2), I)$ est préfixe de $s' = \Psi((a'_1, a'_2), I')$.

Afin d'établir que Ψ est un isomorphisme on définit une application $\Psi' : P_{A_1 \otimes A_2} \to \widetilde{V_1 \bar{\otimes} V_2}$. Soit s une partie de $P_{A_1 \otimes A_2}$ de longueur n. Notons $s_i = s_{A_i}$ pour $i = 1, 2$ et a_i son dernier coup. Alors à s_i est associé un ordre I_i de $\mathcal{TM}(a_i, V_i)$; comme s_i est alternée on sait que I_i est alterné. Maintenant considérons l'application e définie par :

$$\begin{aligned} e : \{1, \ldots, n\} &\to \{1, 2\} \\ k &\mapsto i \text{ , si le } k\text{-ème coup de } s \text{ appartient à } M_{A_i}. \end{aligned}$$

Alors e est un entrelacement de (I_1, I_2). On pose $I = \phi^{-1}_{(a_1,a_2)}(I_1, I_2, e)$. Montrons que I est alterné. Par construction le $(k+1)$-ème élément de I est (x_1, x_2), où s' étant la restriction de s aux k premiers coups, x_i est le dernier coup de s'_{A_i} ($x_i = \perp_{V_i}$ si $s'_{A_i} = \epsilon$). Or la polarité du dernier coup de s' est donnée par $\lambda_{\bar{\otimes}}(p_1, p_2)$, où $p_i = \lambda_{A_i}(x_i) = \lambda_{V_i}(x_i)$. Par conséquent comme s est alternée, I est alterné dans $V_1 \bar{\otimes} V_2$. Donc $((a_1, a_2), I)$ appartient à $\widetilde{V_1 \bar{\otimes} V_2}$. De plus $\lambda_{\widetilde{V_1 \bar{\otimes} V_2}}((a_1, a_2), I) = \lambda_{V_1 \bar{\otimes} V_2}(a_1, a_2)$; donc d'après ce qui précède $\lambda_{\widetilde{V_1 \bar{\otimes} V_2}}((a_1, a_2), I)$ est égale à la polarité finale de s. Par conséquent Ψ' préserve la polarité.

La vérification que les deux applications décrites son réciproques l'une de l'autre ne pose pas de problème : on a $\Psi \circ \Psi' = id_{P_{A_1 \otimes A_2}}$ et $\Psi' \circ \Psi = id_{\widetilde{V_1 \bar{\otimes} V_2}}$. Par conséquent Ψ est une bijection.

Il nous reste à vérifier que Ψ' est aussi croissante. Supposons dans $P_{A_1 \otimes A_2}$: $s \sqsubseteq s'$. Alors pour $i = 1, 2$: $s_{A_i} \sqsubseteq s'_{A_i}$ et donc $I_i \subseteq I'_i$. Par ailleurs $s \sqsubseteq s'$ implique que e coincide avec e' sur $\{1, \ldots, n\}$, où n est la longueur de s. Par conséquent I est la restriction de I' à ses $n+1$ premiers éléments. Donc $I \subseteq I'$ et $\Psi'(s) \leq_{\widetilde{V_1 \bar{\otimes} V_2}} \Psi'(s')$. On en déduit que Ψ est bien un isomorphisme d'ordres et comme on a vu que Ψ' préservait les polarités, Ψ préserve les polarités. □

Lemme 6.23 *Soit V un ordre polarisé. Si u appartient à $\bar{!}V$ (resp. $\bar{?}V$), I appartient à l'ensemble $\mathcal{TM}(u, \Box V)$ et I est alterné dans $\bar{!}V$ (resp. $\bar{?}V$), alors en notant $\phi_u(I) = ([I_1, \ldots, I_N], e)$ et $n = \operatorname{card} I - 1$ on a :*

- *pour tout i de $\{1, \ldots, N\}$, I_i est alterné dans l'ordre polarisé V,*
- *si pour k dans $\{2, \ldots, n\}$, k est un saut de l'entrelacement e alors u_k étant le $(k+1)$-ème élément de I on a : $\lambda_{\bar{!}V}(u_k) = O$ (resp. $\lambda_{\bar{?}V}(u_k) = P$).*
- *$u_k = [x_k^1, \ldots, x_k^{i_k}]$ étant le $(k+1)$-ème élément de I on a :*

$$\lambda_{\bar{!}V}(u_k) = \lambda_V(x_k^i), \text{ où } i = e(k)$$

$$(\text{resp. } \lambda_{\bar{?}V}(u_k) = \lambda_V(x_k^i), \text{ où } i = e(k)).$$

Preuve :

Montrons-le pour $\bar{!}V$. Pour établir la première implication prenons donc I dans $\mathcal{TM}(u, \Box V)$ alterné dans $\bar{!}V$ et $([I_1, \ldots, I_N], e) = \phi_u(I)$. Considérons deux éléments consécutifs dans I_i (où $i \in \{1, \ldots, N\}$) x,y avec $x \neq \perp_V$. Alors la construction de ϕ_u faite dans la preuve de la proposition 6.11 nous donne : il existe un multiensemble $[y_1, \ldots, y_m]$ tel que $[y_1, \ldots, y_m, x]$ et $[y_1, \ldots, y_m, y]$ soient deux éléments consécutifs de l'ordre I. Par conséquent comme I est alterné on a $\lambda_{\bar{!}V}([y_1, \ldots, y_m, x]) \neq \lambda_{\bar{!}V}([y_1, \ldots, y_m, y])$. Par définition de $\lambda_{\bar{!}V}$ ceci nous donne alors $\lambda_V(x) \neq \lambda_V(y)$ et pour tout $1 \leq j \leq m$, $\lambda_V(y_j) = P$. Par conséquent I_i est alterné.

Maintenant supposons que k dans $\{2, \ldots, n\}$ est un saut de e. Alors par définition de $\phi_u(I)$ on sait qu'on est dans l'un des cas suivants :

- 1er cas : u_{k-2}, u_{k-1}, u_k s'écrivent $u_{k-2} = [y_1, \ldots, y_{m-2}, x, y]$, $u_{k-1} = [y_1, \ldots, y_{m-2}, x', y]$, $u_k = [y_1, \ldots, y_{m-2}, x', y']$ et x' est successeur de x dans un I_j, y' est successeur de y dans un I_l. Supposons en vue d'obtenir une contradiction que $\lambda_{\bar{!}V}(u_k) = P$; alors par alternance de I on doit avoir $\lambda_{\bar{!}V}(u_{k-1}) = O$. Par définition de $\lambda_{\bar{!}V}$, l'égalité $\lambda_{\bar{!}V}(u_k) = P$ impose : pour tout i $\lambda_V(y_i) = P$, $\lambda_V(x') = P$ et $\lambda_V(y') = P$. Alors par alternance dans I_j et I_l on a : $\lambda_V(x) = O$ et $\lambda_V(y) = O$. Par conséquent $\lambda_{\Box V}(u_{k-2}) = O$ et $\lambda_{\Box V}(u_{k-1}) = O$ ce qui contredit l'alternance de I.

- 2ème cas : u_{k-2}, u_{k-1} et u_k s'écrivent $u_{k-2} = [y_1, \ldots, y_{m-2}, x]$, $u_{k-1} = [y_1, \ldots, y_{m-2}, x, y]$, $u_k = [y_1, \ldots, y_{m-2}, x', y]$ avec x' successeur de x dans un I_j, y successeur de $\perp_V$ dans un I_l. Si $\lambda_{\bar{!}V}(u_k) = P$ alors pour tout i $\lambda_V(y_i) = P$, $\lambda_V(x') = P$ et $\lambda_V(y) = P$. Par conséquent l'alternance dans I_j donne $\lambda_V(x) = O$. On a donc $\lambda_{\bar{!}V}(u_{k-2}) = O$ et $\lambda_{\bar{!}V}(u_{k-1}) = O$, ce qui contredit l'alternance dans I.

- 3ème cas : u_{k-2}, u_{k-1} et u_k s'écrivent $u_{k-2} = [y_1, \ldots, y_{m-2}, x]$, $u_{k-1} = [y_1, \ldots, y_{m-2}, x']$, $u_k = [y_1, \ldots, y_{m-2}, x', y']$ avec x' successeur de x dans un I_j, y' successeur de $\perp_V$ dans un I_l. Si $\lambda_{\bar{!}V}(u_k) = P$ alors pour tout i $\lambda_V(y_i) = P$, $\lambda_V(x') = P$ et $\lambda_V(y') = P$. Par conséquent $\lambda_{\bar{!}V}(u_{k-1}) = P$, ce qui contredit l'alternance de I.

- 4ème cas : on a $u_{k-2} = [y_1, \ldots, y_{m-2}]$, $u_{k-1} = [y_1, \ldots, y_{m-2}, x']$, $u_k = [y_1, \ldots, y_{m-2}, x', y']$ avec x' successeur de $\perp_V$ dans un I_j, y' successeur de $\perp_V$ dans un I_l. Alors si $\lambda_{\bar{!}V}(u_k) = P$ comme précédemment on en déduit $\lambda_{\bar{!}V}(u_{k-1}) = P$ et donc une contradiction.

Ainsi dans chaque cas l'hypothèse $\lambda_{\bar{!}V}(u_k) = P$ est absurde, donc on a $\lambda_{\bar{!}V}(u_k) = O$.

La troisième propriété suit comme dans le cas multiplicatif de la remarque faite ci-dessus suivant laquelle pour $j \neq e(k)$, $\lambda_V(x_j^k) = P$ ainsi que de la définition de $\lambda_{\bar{!}V}$. □

Remarque 6.24 (Positions inaccessibles de $\bar{!}V$) Si I est un ordre de $\mathcal{TM}(u, \Box V)$ et I est alterné dans $\bar{!}V$, alors I ne contient pas de position $u = [x_1, \ldots, x_n]$ telle qu'il existe $i \neq j$ pour lesquels $\lambda_V(x_i) = \lambda_V(x_j) = O$.

Comme dans la remarque 6.20 on le montre en remarquant que si I contient une telle position u, alors le prédécesseur v de cette position dans I contient au moins un élément de polarité O. Par conséquent $\lambda_{\bar{!}V}(v) = \lambda_{\bar{!}V}(u)$, ce qui contredit l'alternance de I.

Proposition 6.25 *Étant donné un ordre polarisé V on désigne par A le jeu associé à l'ordre-jeu $\widetilde{V}$. Alors on a un isomorphisme :*

$$(\widetilde{\bar{!}V}, \leq_{\widetilde{\bar{!}V}}) \tilde{\to} (P_{!A}/\equiv_{!A}, \sqsubseteq_q).$$

Cet isomorphisme préserve les polarités finales des parties. On a de la même façon un isomorphisme :

$$(\widetilde{\bar{?}V}, \leq_{\widetilde{\bar{?}V}}) \tilde{\to} (P_{?A}/\equiv_{?A}, \sqsubseteq_q).$$

Preuve : Commençons par définir l'application, qu'on appellera Ψ. Soit (u, I) un élément de $\widetilde{\bar{!}V}$, $u = [x^1, \ldots, x^N]$. Notons $\phi_u(I) = ([I_1, \ldots, I_N], e)$, où ϕ_u est l'application de la proposition 6.11. Par le lemme 6.23 on sait que pour $1 \leq i \leq N$, l'ordre I_i est alterné dans V. Par conséquent (x^i, I_i) appartient à $\widetilde{V}$. On choisit une indexation $(I_i)_{1 \leq i \leq N}$ et l'entrelacement correspondant. Soit alors s_i la partie de A donnée par (x^i, I_i). On prend s la suite de coups de $M_{!A}$ donnée par :

- $s_{!A,j} = \epsilon$ pour $j \notin \{1, \ldots, N\}$,
- $s_{!A,j} = s_j$ pour $j \in \{1, \ldots, N\}$,
- le k-ème coup de s a pour indice j où $j = e(k)$.

Comme dans le cas multiplicatif (preuve de la proposition 6.21), le lemme 6.23 nous garantit que s est une partie valide de $P_{!A}$. Le choix d'une autre indexation pour u nous donnerait une partie s' équivalente à s par $\equiv_{!A}$. On définit donc $\Psi(u, I)$ comme la classe de s dans $P_A/\equiv_{!A}$.

Vérifions que Ψ est croissante. Supposons $(u, I) \leq_{\widetilde{!V}} (u', I')$; alors $I \subseteq I'$. Un entrelacement e de I' nous donne par restriction un entrelacement de I. Appelons s, s' les parties de $P_{!A}$ obtenues par la méthode précédente à partir de I, I' par les entrelacements en question. Comme dans le cas multiplicatif nous avons $s \sqsubseteq s'$. Il s'ensuit alors: $\Psi(u, I) \sqsubseteq_q \Psi(u', I')$.

Donnons maintenant une application $\Psi' : P_{!A}/\equiv_{!A} \to \widetilde{!V}$ candidate à être réciproque de Ψ. Soit s une partie de $P_{!A}$ de longueur n et N le nombre de projections $s_{!A,i}$ non vides de s. Il existe une partie t de $P_{!A}$ telle que $t \equiv_{!A} s$ vérifiant : pour tout k de $\{1, \ldots, N\}$, le k-ème indice de coup apparaissant dans t pour la première fois est k. Pour chaque projection $t_{!A,i}$ non vide de t notons x^i son dernier coup et I_i l'ordre (alterné) de $\mathcal{TM}(x^i, V)$ associé. Maintenant soit e l'application définie par :

$$\begin{aligned} e : \{1, \ldots, n\} &\to \{1, \ldots, N\} \\ k &\mapsto i, \text{ si le } k\text{-ème coup de } t \text{ est de la forme } i.m \end{aligned}$$

Cette application nous donne un entrelacement de $(I_i)_{1 \leq i \leq N}$. On prend alors $u = [x^1, \ldots, x^N]$ et $I = \phi_u^{-1}([I_1, \ldots, I_N], e) \in \mathcal{TM}(u, \widetilde{!V})$. La vérification que I est alterné se fait de la même manière que dans le cas multiplicatif et suit du fait que t est alternée et de la définition de $\lambda_{\widetilde{!V}}$. De même $\lambda_{\widetilde{!V}}(u, I)$ est égale à la polarité finale de t (et donc de s). On désigne par $\bar{s}$ la classe de s dans $P_{!A}/\equiv_{!A}$; on pose finalement $\Psi'(\bar{s}) = (u, I)$. La vérification que Ψ' est croissante et que Ψ et Ψ' sont réciproques l'une de l'autre sont sans surprise. □

Définition 6.26 *On appelle* isomorphisme de parties *entre deux jeux A et B un isomorphisme d'ordres :*

$$f : (P_A/\equiv_A, \sqsubseteq_q) \to (P_B/\equiv_B, \sqsubseteq_q),$$

qui vérifie de plus :

pour tout $\bar{s}$ de $P_A/\equiv_A$, les parties de $f(\bar{s})$ ont même polarité finale que les parties de s.

Remarque 6.27
- Il n'y a pas de condition sur les ensembles de coups M_A, M_B. En particulier on peut avoir un isomorphisme de parties entre A et B sans que M_A et M_B aient même cardinal.
- Si f est un isomorphisme de parties entre A et B alors une conséquence du fait que f est un isomorphisme d'ordres est que les parties de $f(\bar{s})$ ont même longueur que les parties de $\bar{s}$.

Proposition 6.28 *Deux isomorphismes de parties f_i entre A_i et B_i pour $i = 1, 2$ induisent un isomorphisme de parties f entre $A_1 \otimes A_2$ et $B_1 \otimes B_2$ (resp. entre $A_1 \parr A_2$ et $B_1 \parr B_2$).*

Un isomorphisme de parties f entre A et B induit un isomorphisme de parties g entre $!A$ et $!B$ (resp. $?A$ et $?B$).

Preuve: Montrons qu'un isomorphisme de parties f entre A et B induit un isomorphisme de parties g entre $!A$ et $!B$ (le cas des multiplicatifs et de ? sont similaires). Prenons une partie s de $P_{!A}$, de longueur n. À chacune de ses projections non vides $s_{!A,i}$ on peut associer une partie t_i de $f(\overline{s_{!A,i}})$, où $\overline{s_{!A,i}}$ est la classe de $s_{!A,i}$ dans $P_A/\equiv_A$. Chaque t_i a même longueur que la partie $s_{!A,i}$ correspondante d'après une remarque antérieure. On définit alors une suite de coups t de $!B$ de longueur n par : pour tout $1 \leq k \leq n$, le k-ème coup de t est $i.m$, où i et m sont donnés par :

- l'indice i est l'indice du k-ème coup de s,

– si le k-ème coup de s est le j-ème coup de s d'indice i, on prend pour m le j-ème coup de t_i.

Alors comme f préserve les polarités finales et la longueur, les coups de $s_{!A,i}$ et de t_i de même numéro dans la suite ont même polarité ; par conséquent comme s est alternée et vérifie la condition de switching pour ! il en est de même de t. Les deux suites ont notamment même polarité finale. Par ailleurs les projections de t sont des parties valides de P_B ; la suite t est donc une partie de $P_{!B}$. Maintenant, il suit de la définition de $\equiv_{!B}$ que la classe $\bar{t}$ de t dans $P_{!B}/\equiv_{!B}$ ne dépend pas du représentant s de $\bar{s}$ utilisé et on pose donc $g(\bar{s}) = \bar{t}$.

Si $\bar{s} \sqsubseteq_q \bar{s'}$ dans $P_{!A}/\equiv_{!A}$ on peut prendre pour les deux classes des représentants dans $P_{!A}$ tels que $s \sqsubseteq s'$. Appelons n la longueur de s. Alors si on associe à s' de la manière précédente une partie t' de $P_{!B}$, du fait de la propriété de clôture par préfixes de $\equiv_{!B}$ la restriction de t' aux n premiers coups nous donne un représentant de $g(\bar{s})$. Par conséquent $g(\bar{s}) \sqsubseteq_q g(\bar{s'})$.

Enfin on peut définir de la même manière à partir de l'application $f^{-1} : P_B/\equiv_B \to P_A/\equiv_A$ une application $g' : P_{!B}/\equiv_{!B} \to P_{!A}/\equiv_{!A}$, croissante et dont il est clair qu'elle est réciproque de g. Ainsi g nous donne bien l'isomorphisme voulu. □

Théorème 6.29 *Soit F une formule de MELL de formules atomiques $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$. Soient $V_1, \ldots, V_n$ des ordres polarisés et :*

- *V_F l'ordre polarisé associé à F en interprétant α_i par V_i pour $i = 1, \ldots, n$,*
- *F^G le jeu associé à F en interprétant α_i par le jeu donné par l'ordre-jeu $\widetilde{V_i}$ pour $i = 1, \ldots, n$,*

On a un isomorphisme d'ordres :

$$(\widetilde{V_F}, \leq_{\widetilde{V_F}}) \stackrel{\sim}{\to} (P_{F^G}/\equiv_{F^G}, \sqsubseteq_q),$$

qui préserve les polarités finales.

Preuve: On le montre par induction sur F. Si F est réduite à une formule atomique α_i, c'est conséquence directe de la définition du jeu associé à un ordre-jeu.

Si $F = F_1 \otimes F_2$: par hypothèse d'induction sur les F_i on a deux isomorphismes d'ordres :

$$(\widetilde{V_{F_i}}, \leq_{\widetilde{V_{F_i}}}) \stackrel{\sim}{\to} (P_{F_i^G}/\equiv_{F_i^G}, \sqsubseteq_q).$$

Si A_i est le jeu associé à l'ordre-jeu $\widetilde{\widetilde{V_{F_i}}}$ on a par définition :

$$(P_{A_i}/\equiv_{A_i}, \sqsubseteq_q) \stackrel{\sim}{\to} (\widetilde{V_{F_i}}, \leq_{\widetilde{V_{F_i}}}).$$

Par conséquent :

$$(P_{F_i^G}/\equiv_{F_i^G}, \sqsubseteq_q) \stackrel{\sim}{\to} (P_{A_i}/\equiv_{A_i}, \sqsubseteq_q) \text{ pour } i = 1, 2. \tag{6.1}$$

D'autre part la proposition 6.21 nous donne un isomorphisme d'ordres :

$$(\widetilde{V_{F_1} \bar{\otimes} V_{F_2}}, \leq_{\widetilde{V_{F_1} \bar{\otimes} V_{F_2}}}) \stackrel{\sim}{\to} (P_{A_1 \otimes A_2}, \sqsubseteq_q). \tag{6.2}$$

Comme $\equiv_{A_1 \otimes A_2}$ est l'identité on a : $(P_{A_1 \otimes A_2}/\equiv_{A_1 \otimes A_2}, \sqsubseteq_q) \stackrel{\sim}{\to} (P_{A_1 \otimes A_2}, \sqsubseteq)$. Par conséquent la proposition 6.28 appliquée à (6.1) et l'isomorphisme (6.2) nous donnent :

$$\begin{aligned}
(P_{F_1^G \otimes F_2^G}/\equiv_{F_1^G \otimes F_2^G}, \sqsubseteq_q) &\stackrel{\sim}{\to} (P_{A_1 \otimes A_2}/\equiv_{A_1 \otimes A_2}, \sqsubseteq) \\
&\stackrel{\sim}{\to} (\widetilde{V_{F_1} \bar{\otimes} V_{F_2}}, \leq_{\widetilde{V_{F_1} \bar{\otimes} V_{F_2}}})
\end{aligned}$$

Soit finalement :

$$(P_{FG}/{\equiv_{FG}}, \sqsubseteq_q) \xrightarrow{\sim} (\widetilde{V_F}, \leq_{\widetilde{V_F}}).$$

Tous les isomorphismes utilisés préservent la polarité et par conséquent on obtient bien un isomorphisme préservant la polarité.

Le cas de $F = F_1 \parr F_2$ est identique et le cas de $F = !F_1$ ou $F = ?F_2$ est traité de manière similaire en utilisant les propositions 6.25 et 6.28. $\square$

6.7 Morphismes

Nous avons noté que les ordres polarisés étaient des ensembles pointés et que les constructions multiplicatives et exponentielles sur les ordres polarisés étaient compatibles avec celles sur les ensembles pointés sous-jacents. Par conséquent on obtient une catégorie $\star$-autonome avec exponentiels en considérant comme objets les ordres polarisés et comme morphismes les relations pointées entre ordres polarisés (les morphismes exponentiels, l'action du bifoncteur $\otimes$ sur les relations pointées et la promotion ont été donnés dans 5.1.1, 5.1.2) ; cette catégorie est un modèle de MELL pour la réduction stricte (cf proposition 5.4). En particulier on peut définir une application $\widehat{.}$ de $\mathbb{G}$ vers cette catégorie et un relèvement des relations pointées exactement comme dans 5.4.2: pour une relation f d'un ordre polarisé A vers un ordre polarisé B,

$$\widetilde{f} = \{s \in P^O_{A \multimap B} \text{ t.q. pour tout préfixe OP } t \text{ de } s, \quad \widehat{t} \in f\}.$$

Comme nous l'avons souligné dans 5.3 pour $\widehat{.} : \mathbb{G} \to \mathbb{PR}$ l'application $\widehat{.}$ ne sera pas surjective des parties vers les positions.

Cependant cette notion de morphisme ne prenant en compte ni la structure d'ordre, ni la polarité des objets il semble plus intéressant de poursuivre ce travail afin de mettre en évidence une catégorie plus proche des jeux. Un méthode de relèvement des morphismes en stratégies “intrinsèque”, analogue à celle décrite pour le relèvement des ordres polarisés en jeux (utilisant les ordres totaux maximaux alternés) pourrait alors être étudiée.

Conclusion

Nous avons décrit des modèles de jeux pour trois fragments de la logique linéaire d'expressivité croissante : MLL, IMELL puis MELL. Notons que notre préoccupation dans cette étude s'est déplacée du problème de la complétude forte (ou définissabilité) vers celui de la validité du modèle (*soundness*) et de la nature du processus d'évaluation sous-jacent à l'interprétation. Nous avons vu en quel sens ces sémantiques étaient des "extensions" dénotationnelles du modèle de géométrie de l'interaction des applications partielles (applications sur les littéraux indexés plus précisément). Le modèle des stratégies saturées a en retour permis sur le plan de la géométrie de l'interaction de définir une interprétation plus libérale des réseaux par des applications partielles (applications obtenues au moyen de paramétrages généralisés).

Soulignons que la principale lacune de ces sémantiques réside dans l'interprétation des additifs ($\oplus$, $\&$) et des constantes (ce sont aussi les points difficiles de la théorie des réseaux). Mentionnons à ce sujet les travaux récents de J.-Y. Girard ([Gir98a, Gir98b]) qui conduisent à un nouveau type de sémantique de jeux, baptisée *ludique*. Cette interprétation part justement du fragment multiplicatif additif avec constantes uniquement, dans une syntaxe séquentielle (calcul HC). Elle est fortement basée sur la notion de polarité (au sens des connecteurs positifs ou négatifs). Le processus d'évaluation sous-jacent est ici une élimination paresseuse des coupures dans HC et ce modèle fournit un résultat de complétude forte. Un des aspects séduisants de cette approche réside dans le fait qu'elle ne nécessite pas la définition *a priori* du jeu associé à une formule (à la manière des constructions $\otimes$, $(.)^\perp$ et ! que nous avons utilisées) : il n'y a qu'un jeu. De manière similaire les conditions sur les "bonnes" stratégies (du type de la condition "sans-mémoire", ou "auto-équivalente") sont testées au moyen de l'évaluation par des contre-stratégies. Dans l'état actuel des choses nous ne pouvons dire dans quelle mesure cette nouvelle théorie a à voir avec les sémantiques de jeux basées sur la géométrie de l'interaction ou si certaines de ses idées pourraient permettre un renouvellement de celles-ci.

Cette comparaison nous ramène au problème de la complétude forte. L'éloignement du modèle des stratégies saturées par rapport à cette question se manifeste par l'absence de condition de type "sans-mémoire" sur les stratégies : toutes les stratégies de $\mathbb{G}$ ne sont pas les saturées de stratégies "sans-mémoire" bien que cette propriété soit vraie pour les stratégies venant de réseaux. Le problème de la mise en évidence d'une sous-catégorie de $\mathbb{G}$ dont les stratégies soient des saturées de stratégies sans-mémoire reste ouvert.

Par ailleurs la description des jeux interprétant des formules à partir d'ordres de positions polarisées faite dans le chapitre 6 incite à l'étude de modèles de jeux où la notion primitive de position remplace celle de coup ; une telle formulation de catégorie de jeux a été considérée notamment par A. Joyal (voir une discussion dans [AJ94]). Tout récemment S. Abramsky et P.-A. Melliès ont donné un modèle de jeux fortement complet de la logique linéaire multiplicative additive ([AM98b]) où les jeux sont définis comme des ordres de positions. Nous avons vu que dans notre cas nous manquions de contraintes sur les relations qui permettraient de décrire une catégorie raisonnablement "petite" (proche de la syntaxe). Abramsky et Melliès apportent dans leur modèle un point de vue nouveau : les stratégies sont définies comme des opérateurs de clôture sur le jeu correspondant. Leur notion de position est plus générale que celle que nous avons considérée car elle ne se limite pas à des positions polarisées (susceptibles d'être étendues par un seul des deux joueurs).

Notons enfin que la démarche de notre chapitre 6 offre aussi un rapprochement avec un travail de T. Ehrhard ([Ehr97]) : celui-ci consiste en une construction de jeux (hypercohérences séries-parallèles plus précisément) à partir des hypercohérences dans le but de mettre ensuite en évidence le contenu séquentiel de la sémantique hypercohérente. Un autre avantage de cette approche pourrait être de fournir un cadre commun rendant possible la comparaison de différentes interprétations des exponentielles dans les jeux, plus précisément l'interprétation à la manière des algorithmes séquentiels ([Cur94]) et celle que nous avons considérée (à la manière de Abramsky *et al.*). Une analogie avec la sémantique cohérente est donnée par la comparaison entre les versions ensemblistes et multiensemblistes des exponentielles : N. Barreiro et T. Ehrhard ont montré que dans la hiérarchie des types simples la sémantique cohérente ensembliste est le collapse extensionnel de la sémantique cohérente multiensembliste ([BE97]).

Chapitre 7

Géométrie de l'interaction et complexité élémentaire

Ce chapitre est issu d'un travail en collaboration avec M. Pedicini ([BP98]). Il concerne la géométrie de l'interaction formulée dans le cadre des algèbres de clauses munies de l'opération de résolution. Ce modèle a été introduit par Girard dans [Gir95a]. Contrairement à ce qui a été entrepris dans les chapitres précédents nous ne cherchons pas ici à donner une interprétation des preuves invariante par élimination des coupures. Nous nous intéressons en revanche à la longueur du calcul de l'opération d'exécution (l'analogue en termes de jeux est la longueur maximale des projections s_B pour les parties s obtenues en composant deux stratégies de jeux $A \multimap B$ et $B \multimap C$).

L'algèbre de clauses que nous décrivons permet l'interprétation des preuves de la logique linéaire élémentaire ELL (sans additifs). En comparaison avec l'interprétation du chapitre 3 des réseaux par des applications, les indices de copies des exponentielles sont ici gérés non plus par des entiers mais par des termes sur un language T défini à partir de fonctions unaires : un littéral indexé $\vec{\imath}\alpha$ correspond à un *atome* $P_A(t_0, \ldots, t_d)$, où les t_i sont des termes de T. La résolution sur les clauses en question décrit une situation où la communication entre opérateurs se fait exclusivement profondeur par profondeur ; en d'autres termes il n'y a pas de possibilité pour un opérateur de condenser l'information de plusieurs profondeurs en une seule. Ce n'était pas le cas avec les applications du chapitre 3 du fait de la pile d'indices que nous avions notée p_b (pile de boîtes) et de l'application $\langle .,. \rangle$ utilisées pour l'interprétation des preuves de MELL : l'application associée à la preuve naturelle de $!A \multimap !!A$ par exemple envoyait un littéral à deux indices $i.j\alpha$ sur un littéral à un indice $\langle i,j \rangle \alpha^{\perp}$. Cette propriété de l'algèbre de clauses est l'analogue de la propriété de préservation de la profondeur de la réduction des réseaux de ELL : au cours d'une étape de réduction la profondeur des arêtes non effacées est inchangée.

7.1 Introduction

Geometry of interaction (GOI)**:** geometry of interaction was introduced by Girard ([Gir88, Gir89]) as a semantics of computation which:

- on the one hand, contrarily to denotational semantics interprets explicitly the dynamics of computation and handles finite objects,
- on the other hand, expresses this dynamic by more *mathematical* means than syntaxical rewriting.

The EXECUTION operation is the mathematical tool inside the model used to interpret the cut-elimination or normalization process. This operation is not always defined and sufficient conditions have been given which ensure convergence of the computation : it has been shown in the case of second-order Linear Logic ([Gir88, Gir95b]) and of untyped lambda-calculus [MR91]) that operators coming from the syntax do satisfy such conditions (a nilpotency condition for instance in the case of LL).

Various frameworks have been used to describe GOI models, including bounded operators on Hilbert spaces ([Gir88, DR96]), partial applications ([Dan90, Reg92]) and algebras of clauses ([Gir95a]). This latter point of view is the one we will adopt here.

Let us recall that the result of EXECUTION on operators interpreting proofs is not in general an invariant of cut-elimination, though this holds provided certain conditions on the conclusion of the proof are satisfied (it is the case for instance with the type of booleans; see [Gir88]).

Elementary Linear Logic (ELL): as Light Linear Logic (LLL), ELL is a variant of Linear Logic in which the rules introducing exponentials have been modified (cf. [Gir95b]) in order to limit the size explosion of proofs during normalization. It is obtained by removing the two principles : $!A \vdash A$ and $!A \vdash !!A$; contraction and weakening are kept unchanged. We consider here a version of ELL without additive connectives and where introduction of the modality ! is handled through a (multi-)functorial promotion rule (called t-promotion, see [Ped96]), which offers the advantage of having simple proof-nets. A proof-net has two main parameters: its *size* (say the number of edges) and its *depth* (maximal nesting of the boxes it contains). The number of steps of its normalization is bounded by a function of the size which is elementary: the expression of this function is an exponential tower whose height only depends on the depth (see [Ped96]). This property is a consequence of the preservation of depth by normalization steps: the depth of an edge is unchanged through any normalization step (but of course the edge might be duplicated or erased).

A drawback of ELL (as well as of LLL) is the lack of a specific semantics of proofs, though a phase semantics has been given by Kanovitch et al. ([KOS97]). We address this problem from the angle of a GOI semantics. Ideally we could imagine an elementary GOI where algorithms terminating within elementary time could be interpreted even though there are not performed by any proof (think of incorrect proof-structures or of programs using fixpoints).

Achievements and limits of the present work: we present here an algebra of clauses along the lines of [Gir95a] with a kind of depth-preservation property analogous to that of ELL. Execution is defined through resolution and the operators are certain sets of clauses; a comparison of these operators with Prolog programs can be found in [Gir95a], section 2.3. In addition to usual EXECUTION we define a *weak execution* which amounts to giving up the computation of certain products of the EXECUTION (products yielding a deadlock when one restrains the depth). WEAK EXECUTION coincides with usual EXECUTION for operators coming from ELL proof-nets.

A size and a depth are defined for general operators respectively as the number of clauses and the maximal arity of the predicates of the terms (actually all predicates have the same arity). Our main result is then that WEAK EXECUTION always terminates (there is no need for nilpotency sufficient condition for instance) and that the depth being fixed, the number of steps of the computation is bounded by a function of the size of the program which is elementary.

Clearly speaking, in this setting we can bound in advance the run-time of a program provided we know its size and depth. Therefore the intrinsic elementary bound obtained in ELL by logical means has been extended to a semantical ground.

Yet this WEAK EXECUTION presents a serious drawback as it is not in general an associative operation ... Still at least one inclusion is obtained instead of the expected equality (we call this property sub-associativity): the result of *global* EXECUTION is included in the result of any *modular* EXECUTION (see section 7.5 for a precise statement).

Organization of the chapter: sections 7.2 and 7.3 are devoted to a presentation of the algebra, to the definition of EXECUTION and WEAK EXECUTION and to the statement of the theorem. This result is then proved in section 7.4 and we examine in section 7.5 the sub-associativity property. The rest of the chapter is devoted to the interpretation of proof-structures into the model and to the proof that on operators coming from proof-nets, WEAK EXECUTION yields the same result as usual execution.

7.2 Resolution Algebra

We need first to introduce clauses and resolution. We then recall the definition of the algebra of clauses given in [Gir95a] before describing the particular algebra we consider in this work: the *layered algebra of clauses.*

A *term language* T is built over a set of variables and a set of symbols of functions; its elements will be denoted t, u. Let $\{P_i\}_{i\in I}$ be a set of predicate symbols given together with their arity; the *language of atoms* $\mathcal{L}$ built over T and this set of predicates is the set of elements $P_i(t_1,\ldots,t_n)$, where n is the arity of P_i and the t_j's belong to T.

A *substitution* θ is a partial application from the set of variables to T with finite domain. If $\mathrm{dom}(\theta)=\{x_1,\ldots,x_n\}$ and if $t_i=\theta(x_i)$ for $1\le i\le n$ we will denote θ by $< t_1/x_1,\ldots,t_n/x_n >$. The application θ is extended into two applications $T\to T$ and $\mathcal{L}\to\mathcal{L}$ (also denoted by θ) in the following way: the image of an *expression* (term or atom) e by the substitution θ is obtained by replacing in e each occurrence of a variable x from $\mathrm{dom}(\theta)$ by $\theta(x)$; this image will be denoted by $e\theta$. The composition of two such applications θ_1, θ_2 will be denoted by $\theta_1\theta_2$: $e(\theta_1\theta_2)=(e\theta_1)\theta_2$. A *renaming* of the variables of an expression e is an injection θ from the set of variables of e to the set of variables; the *renamed expression* is $e\theta$.

Definition 7.1 (Unification) *We say that two expressions (terms or atoms) e and e' are* comparable *when there is a substitution θ (a* unifier *of e and e') defined over the variables in e and e' such that $e\theta=e'\theta$.*

If e,e' are comparable then there exists a most general unifier *(*m.g.u.*) i.e. a unifier θ_0 such that for every unifier θ there exists a substitution θ' such that $\theta=\theta_0\theta'$.*

If e and e' are not comparable, we say that they are orthogonal*: $e\perp e'$.*

Definition 7.2 (Clauses) *A* clause *ϕ in the language $\mathcal{L}$ is a sequent*

$$\forall x_0,\ldots,x_d.\,(P_i(t_0,\ldots,t_m)\vdash P_j(u_0,\ldots,u_n)),$$

where $P_i(t_0,\ldots,t_m)$ and $P_j(u_0,\ldots,u_n)$ are atoms of L with the same variables $x_0,\ldots,x_d$. We will omit to write the quantification.

The head *of the clause ϕ is the atom $\texttt{head}(\phi)=P_i(t_0,\ldots,t_m)$, its* tail *is the atom $\texttt{tail}(\phi)=P_j(u_0,\ldots,u_n)$.*

We introduce also a formal clause 0*. Let $\mathcal{C}$ denote the set of clauses over $\mathcal{L}$.*

The composition of two clauses is defined by unification of the tail of the first clause against the head of the second one:

Definition 7.3 (Resolution) *Given two clauses ϕ and ϕ' we can assume they have disjoint variables (by choosing adequate instantiations). If $\texttt{tail}(\phi)$ is comparable with $\texttt{head}(\phi')$ and θ is a most general unifier such that $\texttt{tail}(\phi)\theta=\texttt{head}(\phi')\theta$, we define the* resolution *of the two clauses as the clause*

$$\phi\cdot\phi'=\texttt{head}(\phi)\theta\vdash\texttt{tail}(\phi')\theta$$

otherwise, if $\texttt{tail}(\phi)$ and $\texttt{head}(\phi')$ are not comparable we say that the resolution fails and the composition is null (i.e. the clause 0*).*

We fix by convention that the resolution of the clause zero with any other clause is zero, and this implies that resolution is associative.

As unification is used here to perform resolution between universally quantified clauses we will from now on consider that the expressions we compare have disjoint variables; when it is not the case we rename suitably their variables and unify the two new expressions. For instance if p is a unary symbol of function, the two terms px and x are said to be unifiable as the renamed terms px and y admit a unifier: $\theta =< px/y >$.

Definition 7.4 (Projections, null-squares) *A clause ϕ is a* projection *if $\phi^2 = \phi$, which is equivalent to $\texttt{head}(\phi) = \texttt{tail}(\phi)$. A clause ϕ is a* null-square *if $\phi^2 = 0$, which is equivalent to $\texttt{head}(\phi) \perp \texttt{tail}(\phi)$.*

Definition 7.5 (Resolution Algebra) *Let $\lambda^\star(\mathcal{L})$ be the set of all finite formal linear combinations*

$$\sum \alpha_i \phi_i$$

where the scalars α_i belong to the field of complex numbers $\mathbb{C}$ and the clauses ϕ_i to $\mathcal{C}$. The set $\lambda^\star(\mathcal{L})$ is equipped with

- *a structure of complex vector space,*
- *a structure of complex algebra, the multiplication being extended by bilinearity from resolution:*
$$\sum \alpha_i \phi_i \sum \beta_j \phi'_j = \sum \alpha_i \beta_j (\phi_i \cdot \phi'_j),$$
- *a unit w.r.t. multiplication :*
$$1 = \sum_{i \in I} P_i(x_0, \ldots, x_n) \vdash P_i(x_0, \ldots, x_n),$$
- *an anti-involution defined by*
$$(\sum \alpha_i \phi_i)^\star = \sum \overline{\alpha_i} {\phi_i}^\star$$
where $\phi^\star := \texttt{tail}(\phi) \vdash \texttt{head}(\phi)$.

A norm can be introduced in order to get a $\mathbb{C}^\star$-algebra, see [Gir95a].

Another way to write a combination of clauses is as $\sum \alpha(\phi)\phi$, where the sum is taken over $\mathcal{C}$ and α is an application from the set of clauses $\mathcal{C}$ to $\mathbb{C}$ such that $\alpha^{-1}(\mathbb{C}\backslash\{0\})$ is finite. We will use this notation when it is more convenient.

If $U = \sum \alpha_i \phi_i$ and $V = \sum \beta_i \phi_i$ are two elements with coefficients in $\mathbb{N}$, we write $U \subseteq V$ if for all i, $\alpha_i \leq \beta_i$. We write $(\phi_i \in U)$ if $\alpha_i \neq 0$.

A *projection* of the algebra is a combination U such that $U^\star = U$ and $U^2 = U$.

Definition 7.6 (Execution Formula)

- *A* wiring *is a finite sum of clauses*
$$\sum \phi_i \textit{ such that for } i \neq j : \begin{cases} \texttt{head}(\phi_i) \perp \texttt{head}(\phi_j) \\ \texttt{tail}(\phi_i) \perp \texttt{tail}(\phi_j) \end{cases}$$
- *A* loop *is a pair of wirings (U, σ) such that σ is hermitian (i.e. $\sigma^\star = \sigma$),*

– *A loop* converges *when σU is nilpotent, i.e. when $(\sigma U)^n = 0$ for some n. The* execution *of the loop (U, σ) is then the element*

$$\mathtt{Ex}_\sigma(U) := U(1 - \sigma U)^{-1} = U \sum_{k=0}^{n} (\sigma U)^k$$

and the result of the execution is given by

$$\mathtt{Result}_\sigma(U) := (1 - \sigma^2)\mathtt{Ex}_\sigma(U)(1 - \sigma^2).$$

Remark 7.7 Another way to write the execution is directly as a sum of clauses:

$$\mathtt{Ex}_\sigma(U) = \sum_{\substack{\phi_0 \in U \\ \phi_i \in \sigma U, 1 \leq i \leq k \\ k \leq n}} \phi_0 \cdot \phi_1 \cdots \phi_k$$

Now we specify the particular language we are going to consider. The terms of T are built over a set of unary symbols of function $\{p, q, r, s\}$; therefore such terms have exactly one free variable, and $t[x]$ will denote a term with free variable x. The *length* $|t|$ of the term t is the number of symbols of function appearing in it.

Remark 7.8 Notice that due to the particular form of terms, as T is defined over unary symbols of function, if two terms t and u are unifiable their m.g.u. θ leaves at least one of the two terms unchanged (up to renaming of its variable). For any pair of terms (t, u), only one of the following cases can occur: $t \perp u$ or $t \leq u$ or $t \geq u$, where $t \leq u$ means that u is the unchanged term.

We will consider a family of symbols of predicate $\{P_i\}_{i \in \{1,\ldots,m\}}$ of same arity[1] $(d+1)$. Let $T^d \cdot m$ denote the set of atoms defined this way.

The set $\mathcal{C}^d$ is the set of clauses:

$$\phi = \forall x_0, \ldots, x_d.\, (P_i(t_0[x_0], \ldots, t_d[x_d]) \vdash P_j(u_0[x_0], \ldots, u_d[x_d])),$$

where $\mathtt{head}(\phi)$ and $\mathtt{tail}(\phi)$ belong to $T^d \cdot m$. Notice that t_k and u_k $(k \in \{0, \ldots, d\})$ are required to have the same free variable.

We call *layered algebra* the algebra of clauses defined over $\mathcal{C}^d$ and we denote it by $\lambda^\star(T^d \cdot m)$. From now on this is the algebra we consider.

7.3 Weak Execution

Definition 7.9 (Word of clauses, sub-product of a word) *A* word *of clauses w is a finite sequence of clauses $w = (\phi_1, \ldots, \phi_n)$ with $\phi_i \in \mathcal{C}^d$, and the* product clause *obtained by resolution will be denoted by $\phi_1 \cdot \phi_2 \cdots \phi_n \in \mathcal{C}^d$.*

A sub-product *of the word w is the product clause of a word $(\phi_i, \ldots, \phi_j)$ for some $i \leq j \leq n$.*

Definition 7.10 (Width, cardinality) *Given a clause $\phi = P(t_0, \ldots, t_d) \vdash P'(u_0, \ldots, u_d)$ its* width *is defined as*

$$||\phi|| := \sup\{|t_k|, |u_k| \,/\, 0 \leq k \leq d\}.$$

The width of the word w is simply given by

$$||w|| := \sup_{1 \leq i \leq n} (||\phi_i||).$$

We also define the cardinality *of w:*

$$N(w) := \#\{\phi_i \mid 1 \leq i \leq n\}.$$

1. The choice of $d+1$ is done to keep the same notations when we interpret proof-structures, see section 7.6.

Example : Consider in $\mathcal{C}^0$ the clause $\phi = P(x) \vdash P(rx)$ and let w_n be the word $(\phi, \ldots, \phi)$ of length n. In that case we have $||w_n|| = ||\phi|| = 1$, $N(w_n) = 1$ and the product of w_n is the clause $P(x) \vdash P(r^n x)$.

Definition 7.11 (Acyclicity) *An* acyclic clause *is a clause*

$$\phi = P(t_0, \ldots, t_d) \vdash P'(u_0, \ldots, u_d)$$

such that $P \neq P'$, or $P = P'$ and

there exists $k \leq d$ such that for every $i < k$ we have $u_i = t_i$ and $u_k \perp t_k$.

An acyclic word *is a word $(\phi_1, \ldots, \phi_n)$ such that every sub-product ψ is either an acyclic clause or a projection.*

A word is strictly acyclic *if and only if all its sub-products are acyclic clauses.*

Example : Consider in $\mathcal{C}^1$ the clauses $\phi_1 = P(sx_0, x_1) \vdash P(rx_0, x_1)$, $\phi_2 = P(rx_0, rrx_1) \vdash P(rx_0, sx_1)$ and $\phi_3 = P(x_0, sx_1) \vdash P(rx_0, rsx_1)$. Each of them is an acyclic clause. The word $w = (\phi_1, \phi_2, \phi_3)$ has a non-null product but is not acyclic since its subproduct $\phi_2 \cdot \phi_3 = P(rx_0, rrx_1) \vdash P(rrx_0, rsx_1)$ is not an acyclic clause (though it is a null-square).

We now introduce a restricted form of execution over strictly acyclic words of clauses. Contrarily to usual execution we define it not only for converging loops but for any pair of combination (U, σ); theorem 7.18 will establish the fact that this definition always makes sense (the sum is finite).

Definition 7.12 (Weak Execution) *Let (U, σ) be a pair of combinations; we write $U = \sum \alpha(\phi)\phi$ and $\sigma U = \sum \gamma(\phi)\phi$. The* weak execution *of (U, σ) is defined as:*

$$\mathtt{Ex}^{\dagger}_{\sigma}(U) = \sum_{(\phi_0, \phi_1 \ldots, \phi_n) \in A} \alpha(\phi_0) (\prod_{i=1}^{n} \gamma(\phi_i))\, \phi_0 \cdot \phi_1 \cdot \cdots \cdot \phi_n$$

where

$$A := \left\{ (\phi_0, \phi_1 \ldots, \phi_n) \;\middle|\; \begin{array}{l} \alpha(\phi_0) \neq 0, \gamma(\phi_i) \neq 0 \textit{ when } i \neq 0, \textit{ and} \\ \textit{the word } (\phi_0, \ldots, \phi_n) \textit{ is strictly acyclic} \end{array} \right\}.$$

As a particular case, given a loop (U, σ) its weak execution *is*

$$\mathtt{Ex}^{\dagger}_{\sigma}(U) = \sum_{(\phi_0, \phi_1 \ldots, \phi_n) \in A} \phi_0 \cdot \phi_1 \cdot \cdots \cdot \phi_n$$

where

$$A := \left\{ (\phi_0, \phi_1 \ldots, \phi_n) \;\middle|\; \begin{array}{l} \phi_0 \in U, \phi_i \in \sigma U \textit{ when } i \neq 0, \textit{ and} \\ \textit{the word } (\phi_0, \ldots, \phi_n) \textit{ is strictly acyclic} \end{array} \right\}.$$

The result of the weak execution is in that case defined as

$$\mathtt{Result}^{\dagger}_{\sigma}(U) := (1 - \sigma^2)\mathtt{Ex}^{\dagger}_{\sigma}(U)(1 - \sigma^2).$$

Remark 7.13 Note that in cases where $\mathtt{Ex}_{\sigma}(U)$ makes sense ((U, σ) is a loop and σU is nilpotent), we have that $\mathtt{Ex}^{\dagger}_{\sigma}(U) \subseteq \mathtt{Ex}_{\sigma}(U)$.

Our first goal is to show that we can bound the width of the clause product of an acyclic word (proposition 7.14). In the case of a strictly acyclic word this implies that the length of the word cannot exceed a certain bound (depending on the number and the width of the clauses) without yielding zero as result. This bound will be expressed as an exponential tower of height

d (proposition 7.16). We give first the statement of these propositions and we shall establish their proofs further.

Proposition 7.14 *Given an acyclic word $w = (\phi_1, \dots \phi_n)$ with non-null product, we have the following inequality*[2]

$$||\phi_1 \cdot \dots \cdot \phi_n|| \leq L(||w||, N(w), d)$$

where L is defined by

$$L(a, b, d) := 2^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2^{4ab(d+1)^2}}}}}}$$

and the height of the exponential tower is d (for d=0 we get the exponent $8ab$).

The result relies of course on the fact that w is strictly acyclic. Otherwise, given a fixed width (of word) and cardinality one might exhibit non acyclic words whose products are of arbitrary big width: see for instance the example following definition 7.10 where for any n, $||w_n|| = 1$, $N(w_n) = 1$ and the product of w_n is $P(x) \vdash P(r^n x)$ whose width is n.

Definition 7.15 *Given three integers $l, N \geq 1$ and s we define*

$$B(l, N, s) := 2^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2^{9 \cdot lN(s+1)^2}}}}}}$$

where the height of the exponential tower is $s + 1$.

Proposition 7.16 *Given a strictly acyclic word w with non-null product, of length n, and with $||w|| \geq 1$, we have that*

$$n \leq B(||w||, N(w), d).$$

Remark 7.17 If $||w|| = 0$ one can check that $n \leq N(w)$.

We give now the main result: weak execution always terminates and can be computed in an *elementary* number of resolution steps. We state it first for a loop and give then the result for an arbitrary pair of combinations:

Theorem 7.18 *Given a loop (U, σ), let $N = \#\sigma U$ and $k = 1 + \max\{||\phi|| \,/\, \phi \in \sigma U\}$. We have*

$$\mathtt{Ex}^\dagger_\sigma(U) = \sum_{\substack{(\phi_0,\dots,\phi_n) \in A \\ n \leq B(k,N,d)}} \phi_0 \cdot \phi_1 \cdot \dots \cdot \phi_n$$

where as in the definition of weak execution

$$A := \left\{ (\phi_0, \phi_1 \dots, \phi_n) \;\middle|\; \begin{array}{l} \phi_0 \in U, \phi_i \in \sigma U \text{ when } i \neq 0, \\ \text{the word } (\phi_0, \dots, \phi_n) \text{ is strictly acyclic} \end{array} \right\}.$$

More generally, (U, σ) being simply a pair of combinations let us denote $U = \sum \alpha(\phi)\phi$, $\sigma U = \sum \gamma(\phi)\phi$. Put $N = \#\{\phi, \gamma(\phi) \neq 0\}$ and $k = 1 + \max\{||\phi|| \,/\, \gamma(\phi) \neq 0\}$. We have:

$$\mathtt{Ex}^\dagger_\sigma(U) = \sum_{\substack{(\phi_0,\dots,\phi_n) \in A \\ n \leq B(k,N,d)}} \alpha(\phi_0)(\prod_{i=1}^{n} \gamma(\phi_i))\; \phi_0 \cdot \phi_1 \cdot \dots \cdot \phi_n$$

2. Note that $||\phi_1 \cdot \dots \cdot \phi_n||$ should not be confused with $||(\phi_1, \dots, \phi_n)||$, the former being the width of a clause and the latter the width of the word.

where

$$A := \left\{ (\phi_0, \phi_1 \ldots, \phi_n) \;\middle|\; \begin{array}{l} \alpha(\phi_0) \neq 0, \gamma(\phi_i) \neq 0 \textit{ when } i \neq 0, \textit{ and} \\ \textit{the word } (\phi_0, \ldots, \phi_n) \textit{ is strictly acyclic} \end{array} \right\}.$$

Let us show right away how the theorem is derived from proposition 7.16.

Proof :[Proof of theorem 7.18] Let $w = (\phi_0, \ldots, \phi_n)$ be a word in the set A with $n \geq 1$. Let us denote by w' the word $(\phi_1, \ldots, \phi_n)$ on σU. We have $N(w') \leq N$ and $||w'|| \leq k$. Now, if $n > B(k, N, d)$ then $n > B(||w'||, N(w'), d)$ and we know by proposition 7.16 that w' (and consequently w) has a null product.

Therefore the sum in $\mathtt{Ex}^{\dagger}_{\sigma}(U)$ can be restricted to the words of A such that $n \leq B(k, N, d)$.

□

7.4 Proof of Proposition 7.14

Let us introduce a few more notations on clauses and words of clauses. To each predicate symbol P_i of our set we associate d predicate symbols, one for each arity $k+1$ in $\{1, \ldots, d\}$; we will denote them all by P_i as anyway in atoms the arity of the predicate will be made explicit by the number of terms. For k in $\{0, \ldots, d-1\}$, we denote by $T^k \cdot m$ the language built from T and the family of predicates of arity $k+1$ and $\mathcal{C}^k$ is defined as before from $T^k \cdot m$.

Definition 7.19 (Layer, truncation) *For every clause*

$$\phi = P(t_0, \ldots, t_d) \vdash P'(u_0, \ldots, u_d) \in \mathcal{C}^d$$

we define its k-th layer *as the clause*

$$[\phi]_k := P(t_k) \vdash P'(u_k) \in \mathcal{C}^0$$

and its k-th truncation *as the clause*

$$[\phi]_{(0,k)} := P(t_0, \ldots, t_k) \vdash P'(u_0, \ldots, u_k) \in \mathcal{C}^k.$$

The k-th layer of a word $w := (\phi_1, \ldots, \phi_n)$ is defined as the word $[w]_k = ([\phi_1]_k, \ldots, [\phi_n]_k)$ and similarly its k-th truncation $[w]_{(0,k)} = ([\phi_1]_{(0,k)}, \ldots, [\phi_n]_{(0,k)})$.

If ϕ is an instantiated clause, the action of a substitution θ on ϕ is defined by: $\phi\theta = \mathtt{head}(\phi)\theta \vdash \mathtt{tail}(\phi)\theta$.

We will aso need to handle width of atoms: $|P(t_0, \ldots, t_k)| = \sup\{|t_i|/0 \leq i \leq k\}$.

We will prove the proposition by means of an intermediate inequality, namely we will prove by induction on d the following one:

$$||\phi_1 \cdot \cdots \cdot \phi_n|| \leq L'(||w||, N(w), d) \tag{7.1}$$

where $L'(a, b, s)$ is defined inductively by:

$$\begin{cases} L'(a, b, 0) = 2ab \\ L'(a, b, s+1) = 2ab2^{4(s+1)L'(a,b,s)} \end{cases} \tag{7.2}$$

Then the announced result will be obtained as a consequence. Next lemmas give the result for $d = 0$. Until it is differently specified we will consider clauses in $\mathcal{C}^0$.

Lemma 7.20 *Given two clauses ϕ and ψ,*

1. *if* $\mathtt{tail}(\phi) \geq \mathtt{head}(\psi)$ *then* $|\mathtt{head}(\phi\psi)| = |\mathtt{head}(\phi)|$,

2. *if* $\mathtt{tail}(\phi) \leq \mathtt{head}(\psi)$ *then* $|\mathtt{head}(\phi\psi)| \leq |\mathtt{head}(\psi)| + |\mathtt{head}(\phi)|$.

Proof : In the first case $\mathtt{head}(\phi\psi) = \mathtt{head}(\phi)$, in case (2) $\mathtt{head}(\phi\psi) = \mathtt{head}(\phi)\theta$ where

$$\theta := m.g.u.(\mathtt{tail}(\phi), \mathtt{head}(\psi)) = \langle u[x]/x_\phi, x/x_\psi \rangle,$$

and so $|u[x]| \leq |\mathtt{head}(\psi)|$. □

Remark 7.21 Given a word $w = (\phi_1, \ldots, \phi_n)$ with non-null product, let us denote

$$\{j_1, \ldots, j_m\} = \{j \geq 2 \mid \mathtt{tail}(\phi_1 \cdot \cdots \cdot \phi_{j-1}) < \mathtt{head}(\phi_j)\}.$$

By induction over the integer m we deduce from the previous lemma the following inequality:

$$|\mathtt{head}(\phi_1 \cdot \cdots \cdot \phi_n)| \leq |\mathtt{head}(\phi_1)| + \sum_{i=1}^{m} |\mathtt{head}(\phi_{j_i})|$$

analogously for the $\mathtt{tail}(\phi_1 \cdot \cdots \cdot \phi_n)$.

Lemma 7.22 *An acyclic word $w = (\phi_1, \ldots, \phi_n)$ with non null product $\psi := \phi_1 \cdot \cdots \cdot \phi_n$, satisfies*

$$||\psi|| \leq ||w||(N(w) + 1).$$

Proof : In order to get contradiction assume $||\psi|| > ||w||(N(w) + 1)$. In that case either $|\mathtt{head}(\psi)| > ||w||(N(w) + 1)$ or $|\mathtt{tail}(\psi)| > ||w||(N(w) + 1)$. Suppose for instance that are in the first situation (the second case is handled in a completely symmetric way). By the remark 7.21, using the same notations we have that $|\mathtt{head}(\phi_1 \cdot \cdots \cdot \phi_n)| \leq (m + 1)||w||$; then we have $m \geq N(w) + 1$, so there exist $i_1 < i_2$ such that $\phi := \phi_{j_{i_1}} = \phi_{j_{i_2}}$. We claim that the sub-product $\phi_{j_{i_1}} \cdot \cdots \cdot \phi_{j_{i_2}-1}$ gives a cyclic clause, hence the contradiction with the acyclicity of w. Indeed: let us denote $\Pi' := \phi_1 \cdot \cdots \cdot \phi_{j_{i_1}-1}$ and $\Pi'' := \phi_{j_{i_1}+1} \cdot \cdots \cdot \phi_{j_{i_2}-1}$; then we have

$$\mathtt{tail}(\Pi' \cdot \phi \cdot \Pi'') < \mathtt{head}(\phi).$$

So as $\mathtt{tail}(\phi \cdot \Pi'') \leq \mathtt{tail}(\Pi' \cdot \phi \cdot \Pi'')$, we get

$$\mathtt{tail}(\phi \cdot \Pi'') < \mathtt{head}(\phi).$$

Moreover, from $\mathtt{head}(\phi) \leq \mathtt{head}(\phi \cdot \Pi'')$, we deduce

$$\mathtt{tail}(\phi \cdot \Pi'') < \mathtt{head}(\phi \cdot \Pi'')$$

and we are done. □

This lemma ends the base case of induction $(d = 0)$ since

$$||w||(N(w) + 1) \leq 2||w||N(w) = L'(||w||, N(w), 0)$$

as $N(w) \geq 1$.

In order to get the step of induction, we need a few intermediary results about products of clauses.

Lemma 7.23 *Let us consider a word $w = (\phi_1, \ldots, \phi_n)$ with non null product; the product of w induces a unique substitution family $(\sigma_1^0, \ldots, \sigma_n^0)$ such that σ_i^0 is defined on the variable of ϕ_i and*

$$\phi_1 \cdot \cdots \cdot \phi_n = \mathtt{head}(\phi_1)\sigma_1^0 \vdash \mathtt{tail}(\phi_n)\sigma_n^0,$$

and

$$\texttt{tail}(\phi_i)\sigma_i^0 = \texttt{head}(\phi_{i+1})\sigma_{i+1}^0 \text{ when } 1 \leq i \leq n-1.$$

Moreover, every substitution family $(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$ *such that* σ_i *is defined on the variable of* ϕ_i *and satisfying:*

$$\texttt{tail}(\phi_i)\sigma_i = \texttt{head}(\phi_{i+1})\sigma_{i+1} \text{ when } 1 \leq i \leq n-1 \tag{7.3}$$

can be obtained from $(\sigma_1^0, \ldots, \sigma_n^0)$ *by means of a substitution* θ *such that*

$$(\sigma_1, \ldots, \sigma_n) = (\sigma_1^0\theta, \ldots, \sigma_n^0\theta).$$

Proof : We start by proving the existential part of the first claim by induction over n. If $n = 1$, $\sigma_1 = \langle x/x \rangle$ satisfies the property ... Now assume the property is satisfied for $n \geq 1$ and let us prove it for $n+1$:
there exists a family $(\sigma_1^0, \ldots, \sigma_n^0)$ such that

$$\phi_1 \cdot \cdots \cdot \phi_n = \texttt{head}(\phi_1)\sigma_1^0 \vdash \texttt{tail}(\phi_n)\sigma_n^0,$$

- first case: $\texttt{tail}(\phi_n)\sigma_n^0 \geq \texttt{head}(\phi_{n+1})$.

  There exists σ_{n+1}^0 such that $\texttt{tail}(\phi_n)\sigma_n^0 = \texttt{head}(\phi_{n+1})\sigma_{n+1}^0$ and we have:

  $$\phi_1 \cdot \cdots \cdot \phi_{n+1} = \texttt{head}(\phi_1)\sigma_1^0 \vdash \texttt{tail}(\phi_n)\sigma_{n+1}^0.$$

  Moreover the second condition (7.3) is satisfied by $(\sigma_1^0, \ldots, \sigma_{n+1}^0)$ and $(\phi_1, \ldots, \phi_{n+1})$.

- second case: $\texttt{tail}(\phi_n)\sigma_n^0 < \texttt{head}(\phi_{n+1})$.

  There exists τ such that $\texttt{tail}(\phi_n)\sigma_n^0\tau = \texttt{head}(\phi_{n+1})$ and we have:

  $$\begin{aligned} \phi_1 \cdot \cdots \cdot \phi_{n+1} &= (\phi_1 \cdot \cdots \cdot \phi_n) \cdot \phi_{n+1} \\ &= (\texttt{head}(\phi_1)\sigma_1^0 \vdash \texttt{tail}(\phi_n)\sigma_n^0) \cdot \phi_{n+1} \\ &= \texttt{head}(\phi_1)\sigma_1^0\tau \vdash \texttt{tail}(\phi_{n+1}). \end{aligned}$$

  and the condition (7.3) is satisfied by $(\sigma_1^0\tau, \ldots, \sigma_n^0\tau, \langle x/x \rangle)$.

Now we check the uniqueness part of the first claim: assume $(\sigma_1^0, \ldots, \sigma_n^0)$ and $(\tau_1^0, \ldots, \tau_n^0)$ satisfy both condition (7.3) and

$$\begin{aligned} \phi_1 \cdot \cdots \cdot \phi_n &= \texttt{head}(\phi_1)\sigma_1^0 \vdash \texttt{tail}(\phi_n)\sigma_n^0 \\ &= \texttt{head}(\phi_1)\tau_1^0 \vdash \texttt{tail}(\phi_n)\tau_n^0. \end{aligned}$$

Then $\texttt{head}(\phi_1)\sigma_1^0 = \texttt{head}(\phi_1)\tau_1^0$ implies $\sigma_1^0 = \tau_1^0$ and consequently $\texttt{tail}(\phi_1)\sigma_1^0 = \texttt{tail}(\phi_1)\tau_1^0$. Using (7.3) for σ_1^0 and τ_1^0 ($i = 1$) we get $\texttt{head}(\phi_2)\sigma_2^0 = \texttt{head}(\phi_2)\tau_2^0$ and again $\sigma_2^0 = \tau_2^0$. Applying this method inductively we eventually conclude with $(\sigma_1^0, \ldots, \sigma_n^0) = (\tau_1^0, \ldots, \tau_n^0)$.

As to the second statement, we prove it by another induction over n. The base case is trivial. Assume given $n \geq 1$ the result is true for any $(\phi_1, \ldots, \phi_n)$ and $(\sigma_1^0, \ldots, \sigma_n^0)$ satisfying the hypothesis, and consider the case of $(\phi_1, \ldots, \phi_{n+1})$ and of a family $(\sigma_1, \ldots, \sigma_{n+1})$ satisfying (7.3).

Let $(\sigma_1^0, \ldots, \sigma_n^0)$ be the family of substitutions induced by the non null product of the word $(\phi_1, \ldots, \phi_n)$ according to the first statement. As (7.3) ($1 \leq i \leq n$) is satisfied by $(\phi_1, \ldots, \phi_n)$ and $(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$, by induction hypothesis there exists θ such that for $1 \leq i \leq n$: $\sigma_i = \sigma_i^0\theta$.

Now we consider the two cases we distinguished previously:

- first case: $\texttt{tail}(\phi_n)\sigma_n^0 \geq \texttt{head}(\phi_{n+1})$.

There exists σ^0_{n+1} such that $\mathtt{tail}(\phi_n)\sigma^0_n = \mathtt{head}(\phi_{n+1})\sigma^0_{n+1}$ and the family induced by the product of $(\phi_1, \ldots, \phi_{n+1})$ is $(\sigma^0_1, \ldots, \sigma^0_{n+1})$. Now,

$$\begin{array}{rcl} \mathtt{head}(\phi_{n+1})\sigma_{n+1} & = & \mathtt{tail}(\phi_n)\sigma_n \\ & = & \mathtt{tail}(\phi_n)\sigma^0_n\theta \\ & = & \mathtt{head}(\phi_{n+1})\sigma^0_{n+1}\theta \end{array}$$

and so $\sigma_{n+1} = \sigma^0_{n+1}\theta$, $(\sigma_1, \ldots, \sigma_{n+1}) = (\sigma^0_1\theta, \ldots, \sigma^0_{n+1}\theta)$.

– second case: $\mathtt{tail}(\phi_n)\sigma^0_n < \mathtt{head}(\phi_{n+1})$.

There exists τ such that $\mathtt{tail}(\phi_n)\sigma^0_n\tau = \mathtt{head}(\phi_{n+1})$, and the family induced by the product of $(\phi_1, \ldots, \phi_{n+1})$ is

$$(\sigma^0_1\tau, \ldots, \sigma^0_n\tau, \langle x/x\rangle) = ({\sigma'}^0_1, \ldots, {\sigma'}^0_{n+1}).$$

We have:

$$\begin{array}{rcl} \mathtt{head}(\phi_{n+1})\sigma_{n+1} & = & \mathtt{tail}(\phi_n)\sigma_n \\ & = & \mathtt{tail}(\phi_n)\sigma^0_n\theta \end{array}$$

and

$$\mathtt{head}(\phi_{n+1})\sigma_{n+1} = (\mathtt{tail}(\phi_n)\sigma^0_n\tau)\sigma_{n+1},$$

therefore $\theta = \tau\sigma_{n+1}$ and

$$\begin{array}{rcl} (\sigma_1, \ldots, \sigma_n, \sigma_{n+1}) & = & (\sigma^0_1\theta, \ldots, \sigma^0_n\theta, \sigma_{n+1}) \\ & = & (\sigma^0_1\tau\sigma_{n+1}, \ldots, \sigma^0_n\tau\sigma_{n+1}, \sigma_{n+1}) \\ & = & ((\sigma^0_1\tau)\sigma_{n+1}, \ldots, (\sigma^0_n\tau)\sigma_{n+1}, \langle x/x\rangle\sigma_{n+1}) \\ & = & ({\sigma'}^0_1\theta', \ldots, {\sigma'}^0_{n+1}\theta') \end{array}$$

where $\theta' = \sigma_{n+1}$.

So in both cases the result is true for $(\phi_1, \ldots, \phi_{n+1})$ and $(\sigma_1, \ldots, \sigma_{n+1})$, the induction step is proved and we can conclude by induction. □

Remark 7.24 Note the fact that for $2 \leq i \leq n-1$:

$$\mathtt{tail}(\phi_i\sigma^0_i) = \mathtt{head}(\phi_{i+1}\sigma^0_{i+1}) = \begin{cases} \mathtt{tail}(\phi_1 \cdot \cdots \cdot \phi_i) & \text{if } \mathtt{tail}(\phi_1 \cdot \cdots \cdot \phi_i) \geq \mathtt{head}(\phi_{i+1} \cdot \cdots \cdot \phi_n) \\ \mathtt{head}(\phi_{i+1} \cdot \cdots \cdot \phi_n) & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Lemma 7.25 *Let us consider a word $w = (\phi_1, \ldots, \phi_n)$ with non null product; the product of w induces a word $w' = (\phi'_1, \ldots, \phi'_n)$ such that $\phi'_i = \phi_i\sigma^0_i$ $(1 \leq i \leq n)$ with σ^0_i as in lemma 7.23. Then for every i and h, we have that the subproduct $\phi_i \cdot \cdots \cdot \phi_{i+h}$ is a projection if and only if the corresponding sub-product of w', $\phi'_i \cdot \cdots \cdot \phi'_{i+h}$ is a projection.*

If $\phi_i \cdot \cdots \cdot \phi_{i+h}$ is a null-square then $\phi'_i \cdot \cdots \cdot \phi'_{i+h}$ is a null-square.

Proof : The family of substitutions $(\sigma^0_i, \ldots, \sigma^0_{i+h})$ satisfies condition (7.3) with respect to the word $(\phi_i, \ldots, \phi_{i+h})$. So by lemma 7.23 there exists a family $(\tau^0_i, \ldots, \tau^0_{i+h})$ such that product $\phi_i \cdot \cdots \cdot \phi_{i+h} = \mathtt{head}(\phi_i\tau^0_i) \vdash \mathtt{tail}(\phi_{i+h}\tau^0_{i+h})$ and a substitution θ such that $\sigma^0_j = \tau^0_j\theta$ for

$j = i, \ldots, i+h$. Then we have $\phi'_i \cdots \cdot \phi'_{i+h} = \mathtt{head}(\phi_i \tau_i^0 \theta) \vdash \mathtt{tail}(\phi_{i+h} \tau_{i+h}^0 \theta)$, and $\mathtt{head}(\phi_i \tau_i^0 \theta) = \mathtt{tail}(\phi_{i+h} \tau_{i+h}^0 \theta)$ holds if and only if $\mathtt{head}(\phi_i \tau_i^0) = \mathtt{tail}(\phi_{i+h} \tau_{i+h}^0)$.

The second part of the proposition is obtained by the fact that:

$$\mathtt{head}(\phi_i \tau_i^0) \perp \mathtt{tail}(\phi_{i+h} \tau_{i+h}^0) \text{ implies } \mathtt{head}(\phi_i \tau_i^0 \theta) \perp \mathtt{tail}(\phi_{i+h} \tau_{i+h}^0 \theta).$$

□

Proof :[Proof of induction step of inequality (7.1)] Assume the inequality is true for any acyclic word in $\mathcal{C}^k$ with $k \leq d$, and take a word $w = (\phi_1, \ldots, \phi_n)$ over clauses $\mathcal{C}^{(d+1)}$. Consider for every layer $[w]_k$ the induced family of substitutions: $(\sigma_1^k, \ldots, \sigma_n^k)$. Let w' be the word obtained by applying in w the substitution family to every layer $k \leq d$ and by freezing variables by means of newly introduced symbols of constants a_k:

$$\begin{cases} [\phi'_i]_k &= [\phi_i]_k \sigma_i^k \langle a_k / x_k \rangle \qquad 0 \leq k \leq d, \\ [\phi'_i]_{d+1} &= [\phi_i]_{d+1}. \end{cases} \tag{7.4}$$

notice that in w', variables remain only in the last layer $d+1$, so we can consider w' built over clauses of $\mathcal{C}^{(0)}$ with the first d layers constituting the predicate (we enlarge our set of predicates).

Let us show that w' is an acyclic word: we take a sub-word $(\phi'_i, \ldots, \phi'_{i+h})$ and its product $\phi' := \phi'_i \cdot \cdots \cdot \phi'_{i+h}$; moreover denote the corresponding sub-product in w by $\phi := \phi_i \cdot \cdots \cdot \phi_{i+h}$. By lemma 7.25, if the layer $[\phi]_k$ is a projection then $[\phi']_k$ is a projection too and if $[\phi]_k$ is a null-square then $[\phi']_k$ is a null-square. Combined with the fact that ϕ is an acyclic clause (definition 7.11), this implies that ϕ' is an acyclic clause.

So w' is an acyclic word in $\mathcal{C}^0$ and by establishing the $N(w')$ and $||w'||$ we obtain the following inequality:

$$||\phi'_1 \cdot \cdots \cdot \phi'_n|| \leq L'(||w'||, N(w'), 0). \tag{7.5}$$

As the width of a word doesn't depend upon predicates appearing in its clauses and terms in w' are equal to terms in the last layer of w, we have that $||w'|| \leq ||w||$. By definition $N(w')$ is the number of distinct clauses in w'; in order to find it we can calculate the number of all possible instances of terms in w'. By the remark 7.24 we have

$$\mathtt{tail}([\phi'_i]_k) = \begin{cases} \mathtt{tail}([\phi_1 \cdot \cdots \cdot \phi_i]_k \langle a_k / x_k \rangle \\ \text{or} \\ \mathtt{head}([\phi_{i+1} \cdot \cdots \cdot \phi_n]_k \langle a_k / x_k \rangle \end{cases}$$

and an analog equality is satisfied by $\mathtt{head}([\phi'_i]_k)$. Moreover we have

$$||[\phi_1 \cdot \cdots \cdot \phi_i]_k|| \leq ||[\phi_1 \cdot \cdots \cdot \phi_i]_{(0,k)}||.$$

Since by induction hypothesis

$$||[\phi_1 \cdot \cdots \cdot \phi_i]_{(0,k)}|| \leq L'(||[w]_{(0,k)}||, N([w]_{(0,k)}), k),$$

we can apply the following inequalities: $N([w]_{(0,k)}) \leq N(w)$ and $||[w]_{(0,k)}|| \leq ||w||$, and we get

$$||[\phi_1 \cdot \cdots \cdot \phi_i]_{(0,k)}|| \leq L'(||w||, N(w), k).$$

Similarly

$$||[\phi_{i+1} \cdot \cdots \cdot \phi_n]_{(0,k)}|| \leq L'(||w||, N(w), k).$$

Finally, we obtain

$$||[\phi'_i]_k|| \leq L'(||w||, N(w), k).$$

Besides as the number of symbols of function in our language is 4, the number of terms of length k is 4^k, and the number of terms of length at most l is $\sum_{k=0}^{l} 4^k \leq 4^{l+1}$. Therefore the number of terms in our language of length at most $L'(||w||, N(w), k)$ is bounded by $4^{L'(||w||,N(w),k)+1}$.

We are now able to bound the number of clauses $N(w')$ in w': the number of possibilities for the choice of the head and tail predicates is bounded by $N(w)$; at the level k the number of possibilities for the head and tail terms is bounded by $4^{2(L'(||w||,N(w),k)+1)}$. Therefore we have:

$$N(w') \leq N(w) \prod_{k=0}^{d} 4^{2(L'(||w||,N(w),k)+1)} = N(w) \prod_{k=0}^{d} 2^{4(L'(||w||,N(w),k)+1)}.$$

By substitution of quantities $N(w')$ and $||w'||$ in (7.5) we have

$$\begin{aligned}
||\phi'_1 \cdot \cdots \cdot \phi'_n|| &\leq L'(||w'||, N(w'), 0) \\
&= 2||w'||N(w') \\
&\leq 2||w||N(w) \prod_{k=0}^{d} 2^{4(L'(||w||,N(w),k)+1)} \\
&= 2||w||N(w) 2^{4\sum_{k=0}^{d}(L'(||w||,N(w),k)+1)} \\
&\leq 2||w||N(w) 2^{4(d+1)L'(||w||,N(w),d)} \\
&= L'(||w||, N(w), d+1)
\end{aligned} \tag{7.6}$$

We used the following inequality $L'(a, b, k) + 2 \leq L'(a, b, d)$ for $k \leq d - 1$.

We therefore get

$$||[\phi_1 \cdot \cdots \cdot \phi_n]_{d+1}|| \leq L'(||w||, N(w), d+1)$$

and by induction hypothesis we have

$$||[\phi_1 \cdot \cdots \cdot \phi_n]_{(0,d)}|| \leq L'(||w||, N(w), d).$$

Since $L'(||w||, N(w), d) \leq L'(||w||, N(w), d+1)$, we get

$$||\phi_1 \cdot \cdots \cdot \phi_n|| \leq L'(||w||, N(w), d+1).$$

This ends our proof for the induction step and the inequality (7.1) is established. $\square$

Let us conclude this section with the bound of the quantity $L'(||w||, N(w), d)$ to a more readable expression, so that it will explicitly appear as an elementary tower of height d:

$$L'(a, b, d) = 2ab \cdot 2^{d(8ab) \cdot 2^{(d-1)(8ab) \cdot 2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2^{8ab}}}}}}}$$

using inequalities $\alpha \leq 2^\alpha$ and $x + y \leq xy$ whenever $x \geq 2$ and $y \geq 2$, we have

$$\begin{aligned}
L'(a, b, d) &\leq 2^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2^{2ab+8ab\sum_{j=1}^{d} j}}}}}} \\
&\leq 2^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2^{2ab(1+2d(d+1))}}}}}} \\
&\leq 2^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2^{4ab(d+1)^2}}}}}}
\end{aligned} \tag{7.7}$$

with the height of the exponential tower equal to d.

7.4.1 Consequences of Proposition 7.14

Proof :[Proof of Proposition 7.16] Let us take $w = (\phi_1, \ldots, \phi_n)$ a strictly acyclic word. Let $(\sigma_1^k, \ldots, \sigma_n^k)$ be the family of substitutions induced by the product of $[w]_k$, for any $k = 0, \ldots, d$. We consider the word $w' := (\psi_1, \ldots, \psi_n)$ such that $[\psi_i]_k := [\phi_i]_k \sigma_i^k$ for $k = 0, \ldots, d$ and $i = 1, \ldots, n$. By the same argument we already used in the proof of proposition 7.14, from lemma 7.25 we get that as w is strictly acyclic the word w' is also strictly acyclic.

By proposition 7.14 we have $||[w']_k|| \leq L(||w||, N(w), k)$. As before we get the following inequality

$$\begin{array}{rcl}
N(w') & \leq & N(w)2^{4(\sum_{k=0}^{d} L(||w||,N(w),k)+1)} \\
& \leq & N(w)2^{4(d+1)L(||w||,N(w),d)} \\
& & \qquad \text{we applied } L(a,b,k)+2 \leq L(a,b,d) \text{ when } k \leq d-1, \\
& \leq & N(w)2^{4(d+1)\cdot 2^{\cdot^{\cdot^{2^{4||w||N(w)(d+1)^2}}}}} \\
& & \qquad \text{where the height of the exponential tower is } d+1, \\
& \leq & N(w)2^{2^{\cdot^{\cdot^{2^{4||w||N(w)(d+1)^2+4(d+1)}}}}} \\
& \leq & 2^{2^{\cdot^{\cdot^{2^{4||w||N(w)(d+1)^2+4(d+1)+N(w)}}}}} \\
& \leq & 2^{2^{\cdot^{\cdot^{2^{9||w||N(w)(d+1)^2}}}}} \qquad = B(||w||, N(w), d),
\end{array}$$

the three last inequalities being obtained by using the same basic inequalities as in the computation in the proof of proposition 7.14. Assume the length of w is such that $n > B(||w||, N(w), d)$. As the length of w' is the same as the length of w, there exists $1 \leq i < j \leq n$ such that $\psi_i = \psi_j$. Let us now consider the sub-product $\pi = \psi_i \cdots \cdot \psi_{j-1}$, then $\texttt{head}(\pi) = \texttt{head}(\psi_i)$ and $\texttt{tail}(\pi) = \texttt{tail}(\psi_{j-1})$. But $\texttt{tail}(\psi_{j-1}) = \texttt{head}(\psi_j) = \texttt{head}(\psi_i)$ therefore $\texttt{head}(\pi) = \texttt{tail}(\pi)$. This means that for every layer k, $[\pi]_k$ is a projection, which contradicts strict acyclicity of w'. So finally the length of w is bounded by $B(||w||, N(w), d)$. □

7.5 Sub-associativity of weak Execution

Let $\vdash \Gamma, \Delta, \Delta'$ be a sequent such that in Δ and Δ' formulas can be assembled dually in pairs $(B, B^\perp)$. We consider the algebra $\lambda^\star(\Delta, \Delta', \Gamma)$ built, as in section 7.2, using the language T and the family of predicates of arity $(d+1)$, $\{P_A\}_{A \in \Delta, \Delta', \Gamma}$. Let us define $\sigma_{\Delta;\Delta',\Gamma}$ as:

$$\sigma_{\Delta;\Delta',\Gamma} = \sum_{B \in \Delta} P_B(x_0, \ldots, x_d) \vdash P_{B^\perp}(x_0, \ldots, x_d)$$

We denote $\sigma_{\Delta;\Delta',\Gamma}$ by σ and $\sigma_{\Delta';\Delta,\Gamma}$ by τ, so that $\sigma + \tau = \sigma_{\Delta,\Delta';\Gamma}$.

Proposition 7.26 (Sub-associativity of weak execution) *Consider a wiring U of the algebra $\lambda^\star(\Delta, \Delta', \Gamma)$ and σ and τ defined as above; we have:*

$$\texttt{Result}^\dagger_{\sigma+\tau}(U) \subseteq \texttt{Result}^\dagger_\tau(\texttt{Result}^\dagger_\sigma(U)).$$

Remark 7.27 The equality is false in general, which contrasts with usual execution and the expected modularity of a valuable computation process. Still, as far as we are dealing with loops coming from proofs, associativity is valid since we will prove in the sequel that weak execution and ordinary execution coincide on such loops.

Proof :

Let us first describe the result of the execution with this particular choice of hermitian wiring $\sigma_{\Delta,\Delta';\Gamma}$:

$$\begin{aligned}\mathtt{Result}^{\dagger}_{\sigma_{\Delta,\Delta';\Gamma}}(U) &= (1-\sigma^2_{\Delta,\Delta';\Gamma})\mathtt{Ex}^{\dagger}_{\sigma_{\Delta,\Delta';\Gamma}}(U)(1-\sigma^2_{\Delta,\Delta';\Gamma}) \\ &= \left\{ \Pi \in \mathtt{Ex}^{\dagger}_{\sigma_{\Delta,\Delta';\Gamma}}(U) \;\middle|\; \begin{array}{l} \Pi \text{ is of the shape} \\ P_A(t_0,\dots,t_d) \vdash P_B(u_0,\dots,u_d) \\ \text{where } A, B \in \Gamma \end{array} \right\}.\end{aligned}$$

Let Π be an element of $\mathtt{Result}^{\dagger}_{\sigma+\tau}(U)$, it can be written as a product $\psi_0.\psi_1\dots\psi_n$ where $(\psi_0,\psi_1,\dots,\psi_n)$ is a strictly acyclic word with:

- ψ_0 belongs to U,
- ψ_i belongs to $(\sigma+\tau)U$ for $1 \leq i \leq n$, which means that ψ_i belongs either to σU or to τU.
- the term $\mathtt{head}(\psi_0)$ starts with a predicate P_A where $A \in \Gamma$; the term $\mathtt{tail}(\psi_n)$ with a predicate P_B where $B \in \Gamma$.

Let $i_1,\dots i_m$ denote the indexes of the clauses ψ_i such that ψ_i belongs to τU (or equivalently: the term $\mathtt{head}(\psi_i)$ starts with a predicate P_A where $A \in \Delta'$). For j belonging to $\{1,\dots,m\}$ we introduce T_j and ψ'_{i_j} the respective elements of τ and U such that $\psi_{i_j} = T_j \cdot \psi'_{i_j}$.

Now, consider $1 \leq j \leq (m-1)$: by strict acyclicity of $(\psi_0,\psi_1,\dots,\psi_n)$ we know that $(\psi'_{i_j},\psi_{i_j+1},\dots,\psi_{i_{j+1}-1})$ is strictly acyclic and it has a non-null product, so the product $\psi'_{i_j}\cdot\psi_{i_j+1}\cdot\dots\cdot\psi_{i_{j+1}-1}$ belongs to $\mathtt{Ex}^{\dagger}_{\sigma}(U)$.

Moreover $\psi'_{i_j}\cdot\psi_{i_j+1}\cdot\dots\cdot\psi_{i_{j+1}-1}$ is of the shape $P_A(.) \vdash P_B(.)$ where $A, B \in \Delta'$, which ensures by what precedes that it belongs to $\mathtt{Result}^{\dagger}_{\sigma}(U)$.

Similarly:

- the product $\psi_0\dots\psi_{i_1-1}$ belongs to $\mathtt{Ex}^{\dagger}_{\sigma}(U)$ and is of the shape $P_A(.) \vdash P_B(.)$ where $A \in \Gamma$ and $B \in \Delta'$, so it belongs to $\mathtt{Result}^{\dagger}_{\sigma}(U)$;
- the product $\psi'_{i_m}\dots\psi_n$ belongs to $\mathtt{Ex}^{\dagger}_{\sigma}(U)$ and is of the shape $P_A(.) \vdash P_B(.)$ where $A \in \Delta'$ and $B \in \Gamma$, so it belongs to $\mathtt{Result}^{\dagger}_{\sigma}(U)$.

To simplify the notations we put $i_0 = 0$ and $i_{m+1} = n+1$. Let us then denote by Π_j the product $\psi_{i_j}\dots\psi_{i_{j+1}-1}$ for $0 \leq j \leq m$. We have shown that Π_0 belongs to $\mathtt{Result}^{\dagger}_{\sigma}(U)$ and Π_j belongs to $\tau\mathtt{Result}^{\dagger}_{\sigma}(U)$ for $1 \leq j \leq m$. By associativity of resolution we have:

$$\begin{aligned}\Pi &= \psi_0.\psi_1.\dots.\psi_n \\ &= (\psi_0.\dots.\psi_{i_1-1}).(\psi_{i_1}.\dots.\psi_{i_2-1}).\dots.(\psi_{i_m}.\dots.\psi_n) \\ &= \Pi_0.\Pi_1\dots\Pi_m\end{aligned}$$

So the word $(\Pi_0,\Pi_1,\dots\Pi_m)$ has a non null product and as $(\psi_0,\dots,\psi_n)$ is strictly acyclic, $(\Pi_0,\Pi_1,\dots\Pi_m)$ is also strictly acyclic. So its product Π belongs to $\mathtt{Ex}^{\dagger}_{\tau}(\mathtt{Result}^{\dagger}_{\sigma}(U))$.

Moreover we know that Π is of the shape $P_A(.) \vdash P_B(.)$ where $A, B \in \Gamma$, so that finally Π belongs to $\mathtt{Result}^{\dagger}_{\tau}(\mathtt{Result}^{\dagger}_{\sigma}(U))$ and we are done. $\square$

7.6 Interpretation of ELL Proof Structures

Let us recall briefly the sequent calculus of elementary linear logic with t-promotion (without additives and quantifiers); the rules are given as in multiplicative exponential linear logic except for:

- dereliction which is not included in the system,
- the introduction of the !-modality which now appears to be a kind of multilinear functor, acting both as dereliction on context formulas and as promotion on the principal formula.

– **Identity Group**

Cut $$\dfrac{\vdash A, \Delta \quad \vdash A^{\perp}, \Delta'}{\vdash \Delta, \Delta'}\ \mathbf{cut}$$

Axiom $$\vdash A^{\perp}, A$$

– **Logical Rules** *(multiplicatives)*

Times $$\dfrac{\vdash A, \Delta \quad \vdash B, \Delta'}{\vdash A \otimes B, \Delta, \Delta'}\ \otimes$$

Par $$\dfrac{\vdash A, B, \Delta}{\vdash A \parr B, \Delta}\ \parr$$

– **Structural Rules**

Weakening $$\dfrac{\vdash \Delta}{\vdash ?A, \Delta}\ \mathbf{we}$$

Contraction $$\dfrac{\vdash ?A, ?A, \Delta}{\vdash ?A, \Delta}\ \mathbf{co}$$

t-Promotion $$\dfrac{\vdash A, \Delta}{\vdash !A, ?\Delta}\ \mathbf{pro}$$

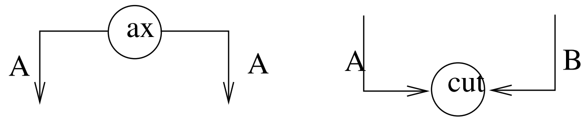
We now give the corresponding definition of *ELL proof-structures*. As usual there is a translation of proofs into proof-structures, yielding *ELL proof-nets*. In section 7.6.2 we will define the interpretation of a proof-structure by a loop.

7.6.1 ELL Proof Structures: some definitions

Definition 7.28 *The* ELL proof-structures *are graphs with boxes whose edges are labelled by (multiplicative exponential) LL formulas; they are defined inductively together with their* depth *by:*

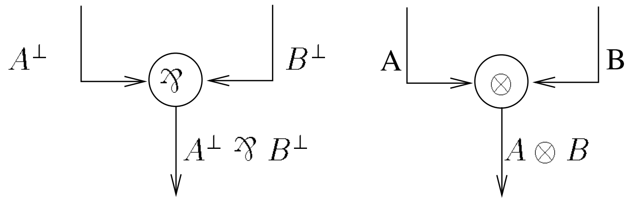
– *if R is a graph built over the following nodes it is a proof-structure of depth 0:*

  – *Axiom and cut:*



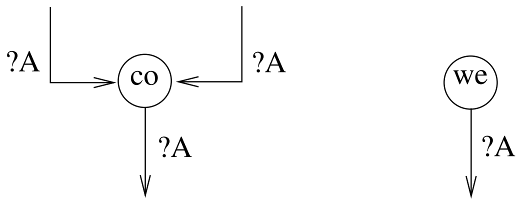
  We consider axioms labelled by atomic formulas.

  – *Multiplicative nodes:*



– *if $R_1, \ldots, R_n$ are proof-structures of maximal depth d then a graph R built from $R_1, \ldots R_n$ using the preceding nodes and the following exponential nodes is a proof-structure of depth d:*

  – *Exponential nodes:*



– *if R is a proof-structure of depth d, of conclusions $A, B_1, \ldots, B_n$, the box containing R and with conclusions as on figure 7.1 is a proof-structure of depth $d + 1$.*

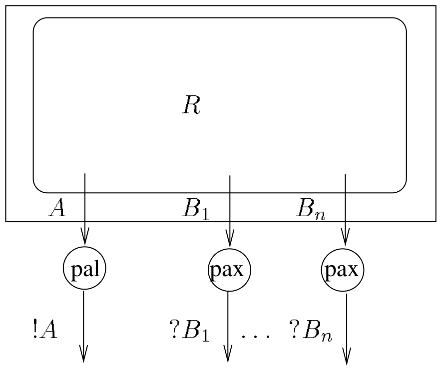


FIG. 7.1: *Box*

The formulas labelling premises of cut-nodes will be called cut formulas. The depth of an edge is be the number of boxes it is contained in.

We will consider in proof-structures paths crossing multiplicative and exponential nodes either from a premise to the conclusion or from the conclusion to a premise, and axiom nodes (resp. cut nodes) from a conclusion (resp. premise) to the other conclusion (resp. premise) (*straight paths* in the terminology of [DR95]).

Let us fix orientation *up* (resp. *down*) referring to paths crossing nodes of a proof-structure from conclusion to premise (resp. premise to conclusion).

The *length* of a path is the number of edges it goes through. If γ_1 is a path ending upwards (resp. downwards) with an edge conclusion (resp. premise) of a node N and γ_2 starts upwards (resp. downwards) with an edge premise (resp. conclusion) of N, we denote by $\gamma_1; \gamma_2$ their concatenation. Given a proof structure R, we denote by $\mathcal{P}(R)$ the set of paths over R and by $\mathcal{P}_c(R)$ the set of paths from conclusion to conclusion.

An *elementary path* of R is a path going upwards from a conclusion or a cut node to an axiom and then downwards to a conclusion or a cut node. The set of elementary paths of R will be denoted by $\mathcal{P}_e(R)$.

A *constant-depth path* of R is a path of R which doesn't cross any box node, axiom node or cut node and starting upwards with a premise of box node or downwards with a conclusion of box node. The depth of such a path is the number of boxes of R it is contained in.

A proof-structure R gives a multiset Γ of conclusion formulas and a multiset Δ of cut formulas (associated dually in pairs $(B, B^\perp)$ by cut nodes). The language we consider is $T^d \cdot m$ where d is the depth of the proof-structure R and m is the cardinality of Γ, Δ. Predicates will be indexed by formulas in Γ, Δ.

Notice that to each axiom node corresponds a pair of dual elementary paths (same path up to the direction). The wiring part U_R of the loop interpreting R will be obtained by interpreting each elementary path of R by a clause.

7.6.2 Representation of a constant-depth path by a term

As they don't cross axiom or cut nodes, constant-depth paths don't change orientation and are globally oriented up or down. We only consider constant-depth paths which don't visit any weakening node; this is enough to give the interpretation of proof-structures.

We associate to such a path γ of depth i a term $t_\gamma[x_i]$; we define this interpretation below in the case of a path oriented up by induction on the length of the path. In the case of a down path the interpretation t_γ is that of the reverted up path (orientation will be taken into account when we introduce the clauses...).

- if γ is reduced to an edge premise of a box node, then $t_\gamma = x_i$,
- otherwise we can write $\gamma = \gamma_1; \gamma_2$ where γ_2 is reduced to an edge premise of a multiplicative or a contraction node:
  - if γ_2 is the left (resp. right) premise of a multiplicative node then
  $$t_\gamma = t_{\gamma_1}[px_i/x_i] \text{ (resp. } t_\gamma = t_{\gamma_1}[qx_i/x_i]).$$
  - if γ_2 is the left (resp. right) premise of a contraction node then
  $$t_\gamma = t_{\gamma_1}[rx_i/x_i] \text{ (resp. } t_\gamma = t_{\gamma_1}[sx_i/x_i]).$$

7.6.3 Representation of an elementary path by a clause

If γ is an elementary path of the proof-structure R of depth d, it can be decomposed as:

$$\gamma = \gamma_i; \gamma_{i+1}; \dots; \gamma_j; \gamma'_j; \gamma'_{j-1}; \dots; \gamma'_k$$

where:

- we have $0 \leq i, j, k \leq d$,
- the path γ_l (resp. γ'_l) for $i \leq l \leq j$ (resp. $k \leq l \leq j$) is a constant-depth up path (resp. down path) of depth l.

Let A (resp. A') be the beginning (resp. ending) conclusion or cut formula. Their respective depths (i.e. the depths of their edges) are i and k.

The *weight* $W(\gamma)$ of γ is the clause:

$$\begin{cases} W(\gamma) := h[x_0, \dots, x_d] \vdash t[x_0, \dots, x_d] \\ h[x_0, \dots, x_d] := P_A(x_0, \dots, x_{i-1}, t_{\gamma_i}, \dots, t_{\gamma_j}, x_{j+1}, \dots, x_d) \\ t[x_0, \dots, x_d] := P_{A'}(x_0, \dots, x_{k-1}, t_{\gamma'_k}, \dots, t_{\gamma'_j}, x_{j+1}, \dots, x_d) \end{cases}$$

(with the natural adjustment in the cases where $i = 0, j = d$ or $k = 0$. For instance if $i = 0$ and $j = d$ the head of the clause becomes: $P_A(t_{\gamma_0}, \ldots, t_{\gamma_d})$).

Remark 7.29 Notice that if γ and γ' are two elementary paths starting in the same terminal formula and forking in a node at depth k we have: if $\texttt{head}(W(\gamma)) = P_A(t_0, \ldots, t_d)$ and $\texttt{head}(W(\gamma')) = P_A(t'_0, \ldots, t'_d)$ then for $i \leq k-1$ we have $t_i = t'_i$ and $t_k \perp t'_k$.

7.6.4 Interpretation of the proof-structure

The ELL proof-structure R is interpreted by (U_R, σ_R) where:

$$\begin{aligned} U_R &= \sum_{\gamma \in \mathcal{P}_e(R)} W(\gamma) \\ \sigma_R &= \sum_{B \in \Delta} P_B(x_0, \ldots, x_d) \vdash P_{B^\perp}(x_0, \ldots, x_d). \end{aligned}$$

One can check that U_R and σ_R are both hermitian wirings and thus (U_R, σ_R) is a loop.

7.7 Weak execution of proof nets

In this section we prove that for every proof net R the associated loop (U, σ) satisfies

$$\texttt{Result}_\sigma(U) \subseteq \texttt{Result}^\dagger_\sigma(U).$$

The equality $\texttt{Result}_\sigma(U) = \texttt{Result}^\dagger_\sigma(U)$ follows then by remark 7.13.

First we will prove a proposition (7.34) and then we will derive this result as a corollary (7.35). Let us give before a few definitions.

A *balanced path* of R is a (straight) path starting upwards in a conclusion or downwards in a cut premise, ending downwards in a conclusion or in a cut premise. An *elementary balanced path* γ of R is a balanced path crossing at most one cut node, so that:

- if γ crosses no cut node it is an elementary path and its weight is given in the previous section;
- if it crosses a cut node from the premise B to the premise $B^\perp$ then it can be decomposed in the path just crossing the cut with weight $\sigma_0 = P_B(x_0, \ldots, x_d) \vdash P_{B^\perp}(x_0, \ldots, x_d)$ and in an elementary path γ_0 with weight $W(\gamma_0)$, so its weight is

$$W(\gamma) = \sigma_0 \cdot W(\gamma_0).$$

Any balanced path γ can be written as a concatenation of elementary balanced paths: $\gamma = \gamma_0; \ldots; \gamma_n$ and its weight is given by the product

$$W(\gamma) = W(\gamma_0) \cdot \cdots \cdot W(\gamma_n).$$

Definition 7.30 *We say a clause* $\phi = P(t_0, \ldots, t_d) \vdash P'(u_0, \ldots, u_d)$ *is* cyclic at depth $k \leq d$ *if:*

- $P = P'$,
- $\forall i \leq k-1,\ t_i = u_i$,
- $t_k \neq u_k$ *and* t_k *and* u_k *are comparable.*

We say the clause is cyclic at depth $+\infty$ if the clause is a projection (that is to say if $P(t_0,\ldots,t_d) = P'(u_0,\ldots,u_d)$).

We need first to establish three intermediary lemmas.

Lemma 7.31 *Let R be a proof-net and γ be a balanced path of R such that $W(\gamma)$ is non-null and cyclic at depth k. Then γ crosses at least one cut in R at depth lower than k (i.e. at depth $l \leq k$).*

Proof : First, the fact that $W(\gamma)$ is cyclic implies that $\mathtt{head}(W(\gamma))$ and $\mathtt{tail}(W(\gamma))$ have the same predicate symbol and therefore that γ starts and ends in the same terminal formula A (either a cut formula or a conclusion). In order to get a contradiction assume γ doesn't cross any cut at depth lower than k. Let us write the decomposition of γ into elementary balanced paths: $\gamma = \gamma_1;\gamma_2;\ldots;\gamma_n$. We denote the weights by $\phi_i = W(\gamma_i)$ and $\phi = W(\gamma)$.

- first case: A is a conclusion.

  We know that each γ_i with $2 \leq i \leq n$ starts in a cut formula at depth strictly greater than k and that each γ_i with $1 \leq i \leq (n-1)$ ends in a cut formula at depth strictly greater than k. Consequently for $2 \leq i \leq (n-1)$, the weight ϕ_i is of the shape:

  $$\phi_i = P_{B_i}(x_0,\ldots,x_k,t^i_{k+1},\ldots,t^i_d) \vdash P_{B_{i+1}}(x_0,\ldots,x_k,u^i_{k+1},\ldots,u^i_d)$$

  Therefore we get:

  $$\begin{array}{rcl} \mathtt{head}([\phi]_{(0,k)}) & = & \mathtt{head}([\phi_1]_{(0,k)}), \\ \mathtt{tail}([\phi]_{(0,k)}) & = & \mathtt{tail}([\phi_n]_{(0,k)}). \end{array}$$

  But as A is a conclusion we know by remark 7.29 that if $\mathtt{head}([\phi_1]_{(0,k)}) = P_A(t_0,\ldots,t_k)$ and if $\mathtt{tail}([\phi_n]_{(0,k)}) = P_A(u_0,\ldots,u_k)$ then:

  - either for all $0 \leq i \leq k$, $t_i = u_i$,
  - or there exists $j \leq k$ such that for $0 \leq i \leq (j-1)$, $t_i = u_i$ and $t_j \perp u_j$.

  Both cases contradict the fact that $W(\gamma)$ is cyclic at depth k, so that we are done.

- second case: A is a cut formula. Let us call σ the corresponding cut node. As γ crosses σ we know by assumption on γ that σ is at depth strictly greater than k. In the same way as before we get: $[\phi]_{(0,k)} = P_A(x_0,\ldots,x_k) \vdash P_A(x_0,\ldots,x_k)$. This contradicts the hypothesis.

  This last case ends the proof.

□

We will need in the sequel the notion of *special cut*. A special cut w.r.t. a path γ is an exponential cut σ such that γ crosses σ but doesn't cross any cut below the auxiliary ports of the box associated to the !-premise of σ (special cuts have been introduced by Regnier and Danos in [Reg92], [Dan90]). We prove a variant of the "special cut lemma" stated in [Reg92] whose proof follows the same line.

Lemma 7.32 *Let γ be a path of a proof-net R. If γ crosses only exponential cuts at depth lower than k and at least one, then R has a special exponential cut w.r.t. γ at depth lower than k.*

Proof : We proceed by double induction over k and the number of nodes of R at depth lower than k. We use the sequentializability property of proof-nets: if R is a proof-net it can be obtained by a last rule (of course there might be several possible last rules).

- If R can be obtained by a $\parr$-rule on a proof-net R' then γ gives a path of R' satisfying the hypothesis. By induction hypothesis on R' we know that R' has a special exponential cut w.r.t. γ at depth lower than k, which yields in R a special exponential cut w.r.t. γ.

- If R can be obtained by a contraction or weakening rule from a certain R' then the same argument applies.

- If R is obtained from R_1 and R_2 by a $\otimes$-rule then γ is contained in one of the R_i's and we can use the i.h. on R_i.

- If R is obtained from R_1 and R_2 by an axiom or multiplicative cut σ, then σ is at depth 0 in R and by assumption on γ we know that the path is contained in one of the R_i's.

- If R is obtained from R' by a t-promotion, then γ gives a path γ' in R' and $k \geq 1$. By assumption on γ we know that γ' crosses in R' only exponential cuts at depth lower than $k-1$ (and at least one) and by i.h. on $k-1$ we conclude that R' has a special exponential cut σ w.r.t. γ' at depth lower than $k-1$. Then σ is a special exponential cut of R w.r.t. γ and is at depth lower than k in R.

- If none of the previous cases applies, then all conclusions of R are conclusions of boxes at depth 0. Let us call $\mathbb{B}_1, \ldots, \mathbb{B}_n$ the boxes of R at depth 0. Consider the relation $\mathcal{R}$ between the $\mathbb{B}_i$'s defined by: $(\mathbb{B}_i \mathcal{R} \mathbb{B}_j)$ if there exists a cut between the principal port of $\mathbb{B}_j$ and an edge hereditary conclusion of an auxiliary port of $\mathbb{B}_i$. The correctness of R implies that the transitive closure $\mathcal{R}^\star$ of $\mathcal{R}$ is antisymmetric; therefore there is a box $\mathbb{B}_{i_0}$ such that there exists no cut below the auxiliary ports of $\mathbb{B}_{i_0}$. Let us denote by σ the cut on the principal port of $\mathbb{B}_{i_0}$. The proof-net R is obtained by a cut (σ) between a proof-net R' and $\mathbb{B}_{i_0}$. Now, if γ doesn't cross σ then it is contained in R' or $\mathbb{B}_{i_0}$ and as usual we can conclude by induction hypothesis. Otherwise if γ crosses σ, then by the property of $\mathbb{B}_{i_0}$ the cut σ is special w.r.t. γ and we are done.

$\square$

Lemma 7.33 *Let R be a proof-net and γ be a balanced path of R such that $W(\gamma)$ is non-null and cyclic at depth k. Assume σ is a cut of R at depth lower than k and crossed by γ which is either a multiplicative cut, an axiom cut or a special exponential cut with respect to γ. Let R' be the proof-net obtained from R by reducing σ. Then R' has a balanced path γ' such that $W(\gamma')$ is non-null and cyclic at depth k.*

Proof :

Let us denote by l the depth of σ in R: $l \leq k$. As $W(\gamma)$ is cyclic the path γ starts and ends in the same terminal formula A. Let R' be the proof-net obtained from R by reducing σ. We consider each case for σ:

- if σ is an axiom cut: let γ' be the *residual path* of γ in R', that is to say the path obtained in R' by removing from γ the edges conclusions of the erased axiom; then we have $W(\gamma') = W(\gamma)$ and so $W(\gamma')$ is cyclic at depth k.

- if σ is a multiplicative cut let us call $B_1 \otimes B_2$ and $B_1^\perp \parr B_2^\perp$ the formulas labeling its premises. First if γ doesn't cross σ then γ yields a path γ' in R' identical to γ; then

$W(\gamma') = W(\gamma)$ and we are done. Otherwise we decompose γ into balanced paths by cutting it before each crossing of σ:

$$\gamma = \gamma_1; \gamma_2; \cdots; \gamma_n$$

where for $2 \leq i \leq (n-1)$ the path γ_i starts and ends downwards in a premise of σ; the path γ_1 (resp. γ_n) ends downwards in a premise of σ (resp. starts downwards in a premise of σ). We denote by ϕ_i the clause $W(\gamma_i)$. Now, let γ'_i $(1 \leq i \leq n)$ be the path of R' defined in the following way (we call it *residual path* of γ_i in R'):

- for $2 \leq i \leq n$, $\gamma'_i = \delta_i; \gamma''_i$ where γ''_i is obtained from γ_i by removing the edges labeled by $B_1 \otimes B_2$ or $B_1^\perp \parr B_2^\perp$ and δ_i is the path of length 2 crossing the cut $(B_j, B_j^\perp)$ of R' (from B_j to $B_j^\perp$ if γ''_i starts in $B_j^\perp$, from $B_j^\perp$ to B_j if γ''_i starts in B_j);
- if γ_1 starts in a premise of σ (i.e. A is premise of σ) then γ'_1 is obtained from γ_1 in the same way; otherwise γ'_1 is simply obtained by removing the edges labeled by $B_1 \otimes B_2$ or $B_1^\perp \parr B_2^\perp$.

We denote by ϕ'_i the clause $W(\gamma'_i)$. We examine the composition of γ_i and γ_{i+1} for $1 \leq i \leq (n-1)$. As $W(\gamma) \neq 0$, we know that $\texttt{tail}(\phi_i)$ unifies with $\texttt{head}(\phi_{i+1})$; this implies in particular that they share the same predicate $P_{B_1\otimes B_2}$ or $P_{B_1^\perp \parr B_2^\perp}$. Let us assume for instance it is $P_{B_1\otimes B_2}$. We have:

$$\begin{aligned}\texttt{tail}([\phi_i]_l) &= P_{B_1\otimes B_2}(cu_l)\\ \texttt{head}([\phi_{i+1}]_l) &= P_{B_1\otimes B_2}(c't_l),\end{aligned}$$

where $c = p$ (resp. $c = q$) if γ_i goes through B_1 (resp. B_2) before $B_1 \otimes B_2$, $c' = p$ (resp. $c' = q$) if γ_{i+1} goes through $B_1^\perp$ (resp. $B_2^\perp$) after $B_1^\perp \parr B_2^\perp$. Now, as $\texttt{tail}(\phi_i)$ and $\texttt{head}(\phi_{i+1})$ are unifiable we get $c = c'$. Then we have:

$$\begin{aligned}\texttt{tail}([\phi'_i]_l) &= P_{B_j}(u_l)\\ \texttt{head}([\phi'_{i+1}]_l) &= P_{B_j}(t_l)\end{aligned}$$

where $j = 1$ if $c = c' = p$, $j = 2$ if $c = c' = q$. The terms of $\texttt{tail}([\phi'_i])$ (resp. $\texttt{head}([\phi_{i+1}]_l)$) of rank lower than l are equal to the terms of same rank of $\texttt{tail}([\phi_i])$ (resp. $\texttt{head}([\phi'_{i+1}]_l)$). As a result we have:

- if A is not $B_1 \otimes B_2$ or $B_1^\perp \parr B_2^\perp$ then $\texttt{head}(\phi'_1) = \texttt{head}(\phi_1)$ and $\texttt{tail}(\phi'_n) = \texttt{tail}(\phi_n)$; we get:

  $$\phi'_1 \cdot \phi'_2 \cdots \phi'_n = \phi_1 \cdot \phi_2 \cdots \phi_n,$$

  so $W(\gamma') = W(\gamma)$ and thus γ' has a weight non-null and cyclic at depth k.
- if A is one of the premises of σ, say $A = B_1 \otimes B_2$ for instance: as $W(\gamma)$ is cyclic at depth k we know that $\texttt{tail}([\phi_n]_{(0,k)})$ is unifiable with $\texttt{head}([\phi_1]_{(0,k)})$, so if:

  $$\begin{aligned}\texttt{tail}([\phi_n]_l) &= P_{B_1\otimes B_2}(cu_l)\\ \texttt{head}([\phi_1]_l) &= P_{B_1\otimes B_2}(c't_l),\end{aligned}$$

  by the same argument as before we get $c = c'$ and:

  $$\begin{aligned}\texttt{tail}([\phi'_n]_l) &= P_{B_j}(u_l)\\ \texttt{head}([\phi'_1]_l) &= P_{B_j}(t_l),\end{aligned}$$

  where $j = 1$ or $j = 2$. Thus $[W(\gamma)]_l$ is of the shape $P_{B_1\otimes B_2}(cv_l) \vdash P_{B_1\otimes B_2}(cw_l)$ and $[W(\gamma')]_l = P_{B_j}(v_l) \vdash P_{B_j}(w_l)$. The terms of $W(\gamma')$ of rank lower than l are equal to the terms of $W(\gamma)$ of same rank. Therefore $W(\gamma')$ is non-null and cyclic at same depth k as $W(\gamma)$.

– if σ is an exponential cut which is special with respect to γ, let us call $?B^\perp$ and $!B$ its premises. Notice that σ cannot be a weakening cut since γ crosses σ and no balanced path crosses any edge conclusion of a weakening node. So σ is either a contraction cut or a commutative cut. We decompose γ into balanced paths crossing σ at most once in the same way as in the multiplicative case:

$$\gamma = \gamma_1; \gamma_2; \cdots; \gamma_n.$$

– If σ is a commutative cut, let us denote by γ_i' the residual path of γ_i in R' obtained as before. The cut node σ is replaced in R' by a cut node σ' at depth $(l+1)$, but still $W(\gamma_i') = W(\gamma_i)$ up to the renaming of predicate $P_{?B^\perp}$ (resp. $P_{!B}$) into $P_{B^\perp}$ (resp. P_B). Therefore taking $\gamma' = \gamma_1'; \cdots; \gamma_n'$ we know that $W(\gamma') = W(\gamma)$ (up to the same remark on predicates) and thus $W(\gamma')$ is non-null and cyclic at depth k.

– Consider the case where σ is a contraction cut. As σ is a special exponential cut w.r.t. γ, if γ_i starts in $?B^\perp$ then γ_i ends in $!B$ and is contained in the box of principal port $!B$ but for its initial crossing of σ (see figure 7.2). Therefore if γ_i starts in $?B^\perp$ we have: $[\phi_i]_l = P_{?B^\perp}(x_l) \vdash P_{!B}(x_l)$. Now if γ_i starts in $!B$ then γ_i ends in $?B^\perp$. This case can be handled as the multiplicative cut case:

  – if A is not a premise of σ then γ has a residual path γ' in R' of same weight;

  – if A is a premise of σ, say for instance $A = !B$. Then $W(\gamma)$ and $W(\gamma')$ have same terms of rank lower than l and $[W(\gamma)]_l$ is of the shape $P_{!B}(cv_l) \vdash P_{!B}(c'w_l)$ with c, c' belonging to $\{r, s\}$. As $W(\gamma)$ is cyclic at depth k we have $c = c'$. We then have $[W(\gamma')]_l = P_{!B}(v_l) \vdash P_{!B}(w_l)$ and so finally $W(\gamma')$ is cyclic at depth k.

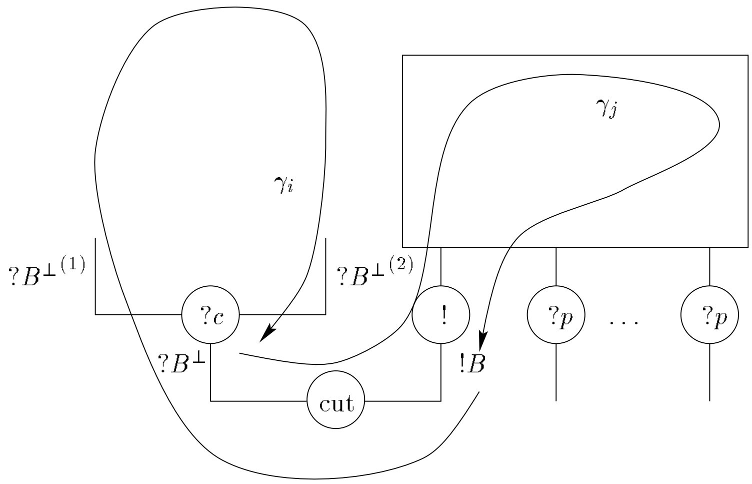


FIG. 7.2: *Case of a special exponential cut (contraction)*

This last case ended the proof of the lemma. □

Proposition 7.34 *Given a proof net R and γ a balanced path of non-null weight, the clause $W(\gamma)$ associated to γ is acyclic.*

Proof :

In order to get contradiction we assume the proof-net R has a balanced path φ of non-null weight cyclic at depth k. By lemma 7.31 this implies that φ crosses at least one cut in R at depth lower than k.

The idea is then to reduce progressively all the cuts at depth lower than k crossed by φ in such a way that at each step we keep in the corresponding proof-net a path satisfying the hypothesis. Now in order to do so we need to consider a particular strategy of reduction:

- if there is a multiplicative cut at depth lower than k crossed by the path, then we reduce it,
- otherwise, if all cuts crossed by the path at depth lower than k are exponential then we choose a special cut with respect to the path and reduce it.

We build a sequence (R_i, δ_i) of pairs of a proof-net and a path in it satisfying the property : $W(\delta_i)$ is non-null and cyclic at depth k.

Put $R_0 = R$ and $\delta_0 = \varphi$. Now assume the sequence has been defined up to rank $i \geq 0$. By lemma 7.31, δ_i crosses at least one cut in R_i at depth lower than k. If it crosses a multiplicative or axiom cut σ at depth lower than k take for R_{i+1} the proof-net obtained from R by reducing σ ; then by lemma 7.33 we know that R_{i+1} has a path satisfying the hypothesis which we take as δ_{i+1}. Otherwise by lemma 7.32 we know that δ_i has a special exponential cut σ at depth lower than k and this is the cut we choose.

Therefore we build a sequence (R_i, δ_i) of pairs of a proof-net and a path in it with these properties. The first result mentioned giving the existence of a cut ensures that we can define an infinite sequence of this kind, which contradicts the strong normalization property of ELL. □

From this proposition, we derive the two corollaries:

Corollary 7.35 *Let (U, σ) be the loop associated to a proof-net R; we have:*

$$\mathtt{Result}^{\dagger}_{\sigma}(U) = \mathtt{Result}_{\sigma}(U).$$

Proof : As we know that $\mathtt{Result}^{\dagger}_{\sigma}(U) \subseteq \mathtt{Result}_{\sigma}(U)$ we only need to prove that the reverse inclusion holds. Let us recall (see [DR95]) that the result of the execution of a loop coming from a proof net is given by

$$\mathtt{Result}_{\sigma}(U) = \sum_{\gamma \in \mathcal{P}_c(R)} W(\gamma).$$

Consider a path $\gamma \in \mathcal{P}_c(R)$ such that $W(\gamma) \neq 0$ and its decomposition into elementary balanced paths $\gamma = \gamma_0; \gamma_1; \cdots; \gamma_n$. We want to show that the associated word $(W(\gamma_0), W(\gamma_1), \cdots, W(\gamma_n))$ is strictly acyclic: for any sub-product we have

$$W(\gamma_i) \cdot \cdots \cdot W(\gamma_{i+h}) = W(\gamma_i; \cdots; \gamma_{i+h}) \neq 0$$

and $\gamma_i; \cdots; \gamma_{i+h}$ is a balanced path. By proposition 7.34 the clause $W(\gamma_i; \cdots; \gamma_{i+h})$ is acyclic. Therefore the clause $W(\gamma) = W(\gamma_0)W(\gamma_1) \cdot \cdots \cdot W(\gamma_n)$ belongs to $\mathtt{Result}^{\dagger}_{\sigma}(U)$. □

Corollary 7.36 *Let $(U, \sigma + \tau)$ be the loop associated to a proof-net R, then:*

$$\mathtt{Result}^{\dagger}_{\sigma}(\mathtt{Result}^{\dagger}_{\tau}(U)) = \mathtt{Result}^{\dagger}_{\sigma+\tau}(U) = \mathtt{Result}_{\sigma+\tau}(U).$$

Proof : As by sub-associativity we know that

$$\mathtt{Result}^{\dagger}_{\sigma+\tau}(U) \subseteq \mathtt{Result}^{\dagger}_{\sigma}(\mathtt{Result}^{\dagger}_{\tau}(U)),$$

we need to prove the reverse inclusion. Take an element ψ of the sum $\mathtt{Result}^{\dagger}_{\sigma}(\mathtt{Result}^{\dagger}_{\tau}(U))$: it can be written as a product $\psi = \psi_0 \cdot \cdots \cdot \psi_m$ where for all $1 \leq i \leq m$, $\psi_i \in \sigma\mathtt{Result}^{\dagger}_{\tau}(U)$ and $\psi_0 \in \mathtt{Result}^{\dagger}_{\tau}(U)$. So there exist $\phi_0 \in U$ and ϕ_i's in τU or in σU such that

$$\psi_0 \cdot \cdots \cdot \psi_m = \phi_0 \cdot \cdots \cdot \phi_n.$$

Now the product $\phi_0 \cdot \cdots \cdot \phi_n$ belongs to $\texttt{Result}_{\sigma+\tau}(U)$ since: $\phi_0 \in U$, the ϕ_i's belong to $(\sigma+\tau)U$, and $\texttt{head}(\phi_0)$ and $\texttt{tail}(\phi_n)$ are of the form $P_A(.)$ and $P_B(.)$ with A and B conclusions of R. By the corollary 7.35, we conclude that ψ belongs to $\texttt{Result}^{\dagger}_{\sigma+\tau}(U)$. □

7.8 Conclusion

Broadly speaking our aim is to define a setting as large – and as simple – as possible for elementarily bounded computations. The operation we introduced, Weak Execution, indeed satisfies the complexity requirement for pairs of combinations (U, σ) of our algebra ; furthermore the establishing of this elementary bound doesn't need any assumption on (U, σ) (typically U and σ are not required to be wirings). This yields a large possibility as to the choice of the pairs we wish to consider as proper "programs" of our model. However, Weak Execution (partially) fails to fulfill the modularity requirement : this is the point which should guide us in the search for conditions to ask on pairs ensuring good properties to the computation. Hence the work can be pursued in two directions : the first possibility is to look for a sufficient condition on pairs which guarantees this modularity/associativity property for a larger class of operators than those coming from proof-nets. A second option would be to come back to usual execution and use the techniques developed in this work to try to establish a result of the following kind : there exists a function $B(N, d)$ expressed as an exponential tower of height (depending on) d such that for any pair (U, σ) (satisfying certain conditions) if σU is nilpotent then its degree of nilpotency is bounded by $B(N, d)$ (where d is the depth of σU and N is given by its size).

In the previous chapters we studied game models whose composition operation relied on the GoI model of partial applications. A natural extension of the last chapter would therefore be the exploitation of the clauses model and of Weak Execution for defining a game category where interaction would be elementarily bounded : a depth being attached to games and a size to strategies, the play arising from the evaluation of a strategy $\sigma : A$ against a strategy $\tau : A^\perp$ would have a length bounded by an elementary function $B(N, d)$ (where d is given by the game and N by the strategies). Such a model could be an intermediary step to define a relational model specific to ELL (proceeding in the way of chapter 5).

Finally let us stress the fact that one underlying goal of this work is to provide a basis for the study of the system LLL (Light Linear Logic) which at the price of a more delicate syntax, offers a polynomial complexity bound. We believe that the study of ELL and of Elementary GoI is a worthwhile step in this more practically interesting direction.

7.9 Conclusion (français)

Le but visé par ce travail est de définir un cadre aussi large (et aussi simple) que possible pour le calcul élémentairement borné en temps. L'opération que nous avons introduite, l'exécution faible, satisfait bien cette condition de borne de complexité pour les couples de combinaisons (U, σ) de l'algèbre de clauses ; qui plus est la preuve de la terminaison et de la validité de la borne ne nécessite pas d'hypothèse sur (U, σ) (en particulier on ne demande pas que U et σ soient des *wirings*). Ceci nous autorise une grande marge de manœuvre pour le choix des couples que nous voulons retenir comme des "programmes" valides. Cependant l'exécution faible ne satisfait pas (du moins pas totalement) l'exigence de modularité : c'est donc cette condition qui incite à ajouter des contraintes sur les couples exécutables. Ce travail peut ainsi être poursuivi dans deux directions : la première possibilité est de chercher à donner une condition suffisante sur les couples qui garantisse cette propriété de modularité/associativité pour une classe de programmes plus grande que celle des programmes venant de réseaux ELL. Une deuxième alternative consisterait à revenir à l'exécution standard et à exploiter les techniques développées ici afin de chercher à établir un résultat du type : il existe une fonction $B(N, d)$

tour d'exponentielles de hauteur (dépendant de) d telle que pour tout couple (U, σ) (vérifiant certaines propriétés), si σU est nilpotent alors son degré de nilpotence est majoré par $B(N, d)$ (où d est la profondeur de σU et N est donné par sa taille).

Dans les chapitres précédents nous avons vu des modèles de jeux pour lesquels la composition repose sur le modèle de géométrie de l'interaction des applications partielles. Un développement naturel du travail de ce dernier chapitre consisterait donc à utiliser le modèle des clauses et l'exécution faible afin de définir une catégorie de jeux où l'interaction serait élémentairement bornée : une profondeur étant attachée aux jeux et une taille aux stratégies, la partie résultant de l'évaluation d'une stratégie $\sigma : A$ contre une stratégie $\tau : A^{\perp}$ est de longueur majorée par une fonction élémentaire $B(N, d)$ (où d est donnée par le jeu et N par les stratégies). Un tel modèle de jeux pourrait être un intermédiaire pour définir à la manière du chapitre 5 un modèle relationnel spécifique de ELL.

Enfin soulignons qu'un des objectifs de ce travail est de servir d'étape pour l'étude du système LLL (Light Linear Logic) qui au prix d'une syntaxe plus délicate présente une borne polynômiale sur la normalisation (et s'avère donc plus prometteur en applications). Nous pensons que l'étude de ELL et de la géométrie de l'interaction élémentaire est un pas utile dans cette direction.

Bibliographie

[AC97] Roberto Amadio and Pierre-Louis Curien, *Domains and lambda-calculi*, Cambridge Tracts in Theoretical Computer Science, no. 46, Cambridge University Press, 1997.

[AJ94] Samson Abramsky and Radha Jagadeesan, *Games and full completeness for multiplicative linear logic* , Journal of Symbolic Logic **59** (1994), 543–574.

[AJM94] Samson Abramsky, Radha Jagadeesan, and Pasquale Malacaria, *Full abstraction for PCF (extended abstract)*, Theoretical Aspects of Computer Software. International Symposium TACS'94 (Sendai, Japan) (Masami Hagiya and John C. Mitchell, eds.), Lecture Notes in Computer Science, no. 789, Springer-Verlag, April 1994, pp. 1–15.

[AJM95] Samson Abramsky, Radha Jagadeesan, and Pasquale Malacaria, *Full abstraction for PCF*, à paraître dans Information and Computation, disponible par ftp à theory.doc.ic.ac.uk, November 1995.

[AM98a] Samson Abramsky and Guy McCusker, *Game semantics*, Notes accompagnant le cours de S. Abramsky à l'école d'été de Marktoberdorf 1997. A paraître (accessible par ftp à ftp.comlab.ox.ac.uk/pub/Documents/techpapers/Guy.McCusker), 1998.

[AM98b] Samson Abramsky and Paul-André Melliès, *Concurrent games and full completeness*, Version préliminaire, Décembre 1998.

[Bai96] Patrick Baillot, *AJM-strategies and the geometry of interaction*, Mémoire de DEA de l'Université Paris 7, disponible par `ftp` à `ftp.logique.jussieu.fr`, 1996.

[BDER97a] Patrick Baillot, Vincent Danos, Thomas Ehrhard, and Laurent Regnier, *Believe it or not, AJM's games model is a model of classical linear logic*, Proceedings of the 12^{th} Symposium on Logic in Computer Science (Warsaw), IEEE Computer Society Press, 1997.

[BDER97b] Patrick Baillot, Vincent Danos, Thomas Ehrhard, and Laurent Regnier, *Timeless games*, Proceedings of the 11^{th} International workshop on Computer Science Logic (Aarhus) (W. Thomas M. Nielsen, ed.), Lecture Notes in Computer Science, vol. 1414, EACSL, Springer Verlag, 1997.

[BP98] Patrick Baillot and Marco Pedicini, *Elementary complexity and the geometry of interaction (Extended Abstract)*, à paraître dans Proceedings of the fourth International Conference on Typed Lambda-Calculi and Applications (TLCA'99), Lecture Notes in Computer Science, Springer Verlag, 1998.

[BE97] Nuno Barreiro and Thomas Ehrhard, *Anatomy of an extensional collapse*, disponible par ftp anonyme à l'adresse iml.univ-mrs.fr, répertoire pub/barreiro, 1997.

[Cur94] Pierre-Louis Curien, *On the symmetry of sequentiality*, LNCS **802** (1994), 29–71, Mathematical Foundations of Programming Semantics 93.

[Dan90] Vincent Danos, *Une application de la logique linéaire à l'étude des processus de normalisation (principalement du λ-calcul)*, Thèse de doctorat, Université Paris 7, 1990.

[DHR96] Vincent Danos, Hugo Herbelin, and Laurent Regnier, *Games semantics and abstract machines*, Proceedings of the 11^{th} Symposium on Logic in Computer Science (New Brunswick), IEEE Computer Society Press, 1996.

[DR93] Vincent Danos and Laurent Regnier, *Local and asynchronous beta-reduction*, Proceedings of the 8^{th} Symposium on Logic in Computer Science, IEEE Computer Society Press, 1993.

[DR95] Vincent Danos and Laurent Regnier, *Proof-nets and the Hilbert space*, Advances in Linear Logic (Jean-Yves Girard, Yves Lafont, and Laurent Regnier, eds.), London Mathematical Society Lecture Note Series, vol. 222, Cambridge University Press, 1995.

[DR96] V. Danos and L. Regnier, *Reversible, irreversible and optimal lambda-machines (extended abstract)*, A Special Issue on the Linear Logic 96, Tokyo Meeting, Electronic Notes in Theoretical Computer Science, vol. 3, 1996.

[Ehr97] Thomas Ehrhard, *Parallel and serial hypercoherences*, disponible par ftp anonyme à l'adresse iml.univ-mrs.fr, répertoire pub/ehrhard, 1997.

[Gir87] Jean-Yves Girard, *Linear logic*, Theoretical Computer Science **50** (1987), 1–102.

[Gir88] Jean-Yves Girard, *Geometry of interaction I: an interpretation of system F*, Proceedings of A.S.L. Meetings (Padova) (Ferro and al, eds.), North-Holland, 1988.

[Gir89] J.-Y. Girard, *Towards a geometry of interaction*, Categories in Computer Science and Logic (J. W. Gray and A. Scedrov, eds.), American Mathematical Society, 1989, Proceedings of the AMS-IMS-SIAM Joint Summer Research Conference, June 14-20, 1987, Boulder, Colorado; Contemporary Mathematics Volume 92, pp. 69–108.

[Gir95a] J.-Y. Girard, *Geometry of interaction 3: the general case*, Advances in Linear Logic (J.-Y. Girard, Y. Lafont, and L. Regnier, eds.), Cambridge University Press, 1995, London Mathematical Society Lecture Note Series 222, Proceedings of the 1993 Workshop on Linear Logic, Cornell University, Ithaca, pp. 329–389.

[Gir95b] Jean-Yves Girard, *Light linear logic*, Proceedings of the International Workshop on Logic and Computational Complexity (LCC'94) (Berlin, GER) (Daniel Leivant, ed.), LNCS, vol. 960, Springer, October 1995, pp. 145–176.

[Gir96] J.-Y. Girard, *Proof-nets: the parallel syntax for proof theory*, Logic and algebra (Pontignano, 1994) (New York), Lecture Notes in Pure and Appl. Math., vol. 180, Dekker, New York, 1996, pp. 97–124.

[Gir98a] J.-Y. Girard, *On the meaning of logical rules I: syntax vs. semantics*, disponible par ftp anonyme à l'adresse iml.univ-mrs.fr, répertoire /pub/girard, 1998.

[Gir98b] J.-Y. Girard, *On the meaning of logical rules II: multiplicatives and additives*, disponible par ftp anonyme à l'adresse iml.univ-mrs.fr, répertoire /pub/girard, 1998.

[HO93] J. M. E. Hyland and C.-H. L. Ong, *Fair games and full completeness for multiplicative linear logic without the MIX-rule*, disponible par ftp anonyme à l'adresse ftp.comlab.ox.ac.uk, répertoire pub/Documents/techpapers/Luke.Ong, 1993.

[KOS97] Max I. Kanovich, Mitsuhiro Okada, and Andre Scedrov, *Phase semantics for light linear logic (extended abstract)*, Mathematical foundations of programming semantics (Pittsburgh, PA, 1997) (Amsterdam), Electron. Notes Theor. Comput. Sci., vol. 6, Elsevier, Amsterdam, 1997, p. 14 pp. (electronic).

[Lam92] F. Lamarche, *Sequentiality, games and linear logic (announcement)*, Workshop on Categorical Logic in Computer Science, Publications of the Computer Science Department of Aarhus University, DAIMI PB-397-II, 1992.

[Mac71] S. MacLane, *Categories for the working mathematician*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 5, Springer Verlag, 1971.

[MR91] P. Malacaria and L. Regnier, *Some results on the interpretation of λ-calculus in operator algebras*, Logic in Computer Science, IEEE Computer Society Press, 1991, Proceedings of the Sixth Annual Symposium on Logic in Computer Science, Amsterdam, July 15-18, 1991, pp. 63–72.

[Ped96] M. Pedicini, *Remarks on elementary linear logic*, A Special Issue on the "Linear Logic 96, Tokyo Meeting" (Amsterdam, The Netherlands), Electronic Notes in Theoretical Computer Science, vol. 3, Elsevier, 1996.

[Reg92] Laurent Regnier, *Lambda-calcul et réseaux*, Thèse de doctorat, Université Paris 7, 1992.

[See89] R. A. G. Seely, *Linear logic, $\star$-autonomous categories and cofree coalgebras*, Categories in Computer Science and Logic (J. W. Gray and A. Scedrov, eds.), American Mathematical Society, 1989, Proceedings of the AMS-IMS-SIAM Joint Summer Research Conference, June 14-20, 1987, Boulder, Colorado; Contemporary Mathematics Volume 92, pp. 371–382.

Index

RÉSUMÉ en français : Cette thèse concerne le calcul, sous la forme de la normalisation des preuves de la logique linéaire. Elle vise à explorer les liens entre trois domaines de la théorie de la démonstration. La *sémantique dénotationnelle* interprète les preuves par des invariants extensionnels de la normalisation. La *géométrie de l'interaction* (GdI) décrit les preuves comme des objets communicants et le calcul comme un flot d'information (l'*exécution*) circulant entre ces objets. La *sémantique des jeux* occupe une position intermédiaire : les preuves sont des stratégies qui admettent une description extensionnelle à la manière de la sémantique dénotationnelle, mais également dynamique à la manière de la GdI.

Nous donnons une nouvelle preuve de définissabilité pour le modèle de Hyland-Ong de la logique linéaire multiplicative utilisant le critère de correction des longs voyages pour les réseaux. Nous associons ensuite une application à tout réseau multiplicatif exponentiel ; cette application permet de calculer l'interprétation d'une preuve intuitionniste (IMELL) dans le modèle d'Abramsky-Jagadeesan-Malacaria. Nous définissons un modèle de jeux (modèle des stratégies saturées) pour la logique linéaire classique (MELL) et étudions ses liens avec la GdI. Nous le comparons ensuite à des modèles dénotationnels en décrivant un (pseudo-)foncteur d'oubli du temps de ce modèle vers une variante du modèle relationnel : le modèle des relations pointées. Deux raffinements de ce dernier modèle sont étudiés : les espaces de positions bipolarisées et les ordres polarisés ; pour chacun nous établissons des liens précis avec le modèle de jeux.

La dernière partie aborde le problème des bornes de complexité en GdI : nous introduisons un modèle de clauses permettant l'interprétation de la logique linéaire élémentaire et définissons une variante de l'exécution terminant en temps élémentaire.

TITRE en anglais : DYNAMICAL APPROACHES IN THE SEMANTICS OF LINEAR LOGIC: GAMES AND GEOMETRY OF INTERACTION.

RÉSUMÉ en anglais : This thesis deals with computation seen as normalization of proofs of linear logic. It aims at exploring the links between three domains of proof-theory. *Denotational semantics* interprets proofs by extensional invariants of normalization. *Geometry of interaction* (GoI) describes proofs as communicating objects and computation as a stream of information (*execution*) circulating between these objects. *Game semantics* lies in the middle ground: proofs are strategies which admit both an extensional description as in denotational semantics and a dynamical description as in GoI.

We give a new definability proof for Hyland-Ong's game model of multiplicative linear logic using the long-trip correctness criterion of proof-nets. We then associate an application to each multiplicative exponential proof-net; this application enables the computation of an intuitionistic proof's (IMELL) interpretation into the model of Abramsky-Jagadeesan-Malacaria. We define a game model (the saturated strategies model) for classical linear logic (MELL) and we study its links with GoI. We then compare it to denotational semantics by defining a lax functor (time-forgetting map) from this model to a variant of the relational model: the model of pointed relations. Two refinements of this latter model are then described: the sets of bipolarized positions and the polarized orders; for each of them we establish precise links with the game model.

In the last part we consider the problem of complexity bounds in GoI: we introduce a model of clauses into which elementary linear logic can be interpreted and we define a variant of execution terminating within an elementary time bound.

DISCIPLINE : MATHÉMATIQUES DISCRÈTES ET FONDEMENTS DE L'INFORMATIQUE.

MOTS-CLÉS : logique linéaire, sémantique de jeux, réseau de preuve, catégorie monoïdale, catégorie étoile-autonome, géométrie de l'interaction, sémantique dénotationnelle, élimination des coupures, logique linéaire élémentaire, machine abstraite

---

ADRESSE DU LABORATOIRE : Institut de Mathématiques de Luminy (CNRS,UPR 9016), 163 Avenue de Luminy, Case 907, 13288 MARSEILLE CEDEX 9.