TD1 : Espaces vectoriels
Module M3204

Fayssal Benkhaldoune, Rushed Kanawati
IUTV - Département R&T

22 octobre 2015

Exercice 1

1 Montrer que l'ensemble des solutions de l'équation $x + y + z = 0$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

Soit $S \subseteq \mathbb{R}^3$ l'ensemble de solutions de l'équation $x + y + z = 0$. S est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ car :

- L'élément neutre $0 \in S$ puisque $0 + 0 + 0 = 0$.
- S est stable par rapport la loi de composition $+$: En effet, $\forall s_i = (x_i, y_i, z_i), s_j = (x_j, y_j, z_j) \in S : s_i + s_j = (x_i + x_j; y_i + y_j, z_i + z_j) \in S$ puisque $x_i + x_j + y_i + y_j + z_i + z_j = x_i + y_i + z_i + x_j + y_j + z_j = 0 + 0 = 0$
- S est stable par rapport à la loi de composition $\times$: $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall s = (x, y, z) \in S : \lambda \times s = (\lambda x, \lambda \times y, \lambda \times z) \in S$ car $\lambda \times x + \lambda \times y + \lambda \times z = \lambda \times (x + y + z) = \lambda \times 0 = 0$.

2 Montrer que l'ensemble : $S = \{(a, 0, 0, b) : a, b \in \mathbb{R}\}$ est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$

S est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ car :

- L'élément neutre $0 \in S$ puisque $0 = (0, 0, 0, 0)$ avec $a = b = 0$.
- S est stable par rapport à la loi de composition $+$, puisque $\forall s_i, s_j \in S : s_i + s_j = (a_i + a_j, 0 + 0, 0 + 0, b_i + b_j) \in S$
- S est stable par rapport à la loi $\times$ puisque : $\forall \lambda \in \mathbb{R}, s \in S : \lambda \times s = (\lambda \times a, \lambda \times 0, \lambda \times 0, \lambda \times b) = (\lambda a, 0, 0, \lambda b) \in S$

3 Donner deux éléments de $\mathbb{R}^4$ permettant de recouvrir S a l'aide de combinaisons linéaires.

Soient $s_1 = (1, 0, 0, 0), s_2 = (0, 0, 0, 1) \in S$, Le système $\{s_1, s_2\}$ est un système générateur de S puisque il est un système libre. En effet, $\forall \lambda_i \in \mathbb{R} \sum_{i=1}^{2} \lambda_i \times s_i = (0, 0, 0, 0) \Rightarrow (\lambda_1, 0, 0, \lambda_2) = (0, 0, 0, 0) \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0$

Exercice 2

Pourquoi les ensembles suivants ne sont pas des espaces vectoriels ?

— $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2x - 3y + z = 5\}$

E n'est pas un espace vectoriel car l'élément neutre $(0, 0, 0) \notin E$ puisque $2 \times 0 - 3 \times 0 + 0 = 0 \neq 5$

— $E' = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0, y > 0\}$

E' n'est pas un espace vectoriel car l'élément neutre $(0, 0) \notin E'$ puisque $0 \not> 0$

Exercice 3

1 Expliquer pourquoi les 3 vecteurs $e_1 = (1, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0)$ et $e_3 = (0, 0, 1)$ génèrent $\mathbb{R}^3$

Il suffit de vérifier si les trois vecteurs forment un système libre. $\forall \lambda_i \in \mathbb{R} \sum_{i=1}^{3} \lambda_I \times e_i = (0, 0, 0) \Rightarrow (\lambda_1 \times 1 + \lambda_2 \times 0 + \lambda_3 \times 0, \lambda_1 \times 0 + \lambda_2 \times 1 + \lambda_3 \times 0, \lambda_1 \times 0 + \lambda_2 \times 0 + \lambda_3 \times 1) = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (0, 0, 0) \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. Donc, les trois vecteurs e_1, e_2, e_3 forment un système libre. Leurs nombre est égale à la dimension de $\mathbb{R}^3$, par conséquent ils forment une base de $\mathbb{R}^3$

2 Montrer que tout vecteur $v \in \mathbb{R}^3$ peut s'écrire comme combinaison linéaire de $u_1 = (1, 0, 0), u_2 = (1, 1, 0)$ et $u_3 = (1, 1, 1)$

Il suffit de montrer que les vecteurs u_1, u_2, u_3 forment un système libre.
$\forall \lambda_i \in \mathbb{R} \sum_{i=1}^{3} \lambda_i u_i = (0, 0, 0) \Rightarrow$

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ Donc le système u_1, u_2, u_3 est libre donc il forme une base de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 4

Les vecteurs u suivants sont-ils combinaison linéaire des vecteurs u_i ?

1 $\mathbb{E} = \mathbb{R}^2, u = (1, 2), u_1 = (1, -2), u_2 = (2, 3)$

Nous cherchons à trouver $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} : \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 = u$

$$\begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 = 1 \\ -2\lambda_1 + 3\lambda_2 = 2 \end{cases}$$

on multiple la première équation par 2 et on addition le résultats à la deuxième équation, on obtient :
$7\lambda_2 = 4 \Rightarrow \lambda_2 = \frac{4}{7}$
Or, $\lambda_1 = 1 - 2\lambda_2 = 1 - 2\frac{4}{7} = -\frac{1}{7}$. Donc u est une combinaison linéaire de u_1, u_2

2 $\mathbb{E} = \mathbb{R}^3, u = (2, 5, 3), u_1 = (1, 3, 2), u_2 = (1, -1, 4)$

Nous cherchons $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} : u = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2$

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 &= 2 \\ 3\lambda_1 - \lambda_2 &= 5 \\ 2\lambda_1 + 4\lambda_2 &= 3 \end{cases}$$

(1) +(2) $\rightarrow \lambda_1 = \frac{7}{4} \Rightarrow \lambda_2 = \frac{7}{4} - 2 = \frac{3}{4}$. On substitue ces deux valeurs dans l'équation 3 : $2 \times \frac{7}{4} + 4 \times \frac{3}{4} = \frac{26}{4} \neq 3$. Donc u n'est pas une combinaison linéaire de u_1, u_2

3 $\mathbb{E} = \mathbb{R}^3, u = (3, 1, m), u1 = (1, 3, 2), u_2 = (1, -1, 4)$ (discuter suivant la valeur de m).

$?\exists \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} : u = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2$

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 &= 3 \\ 3\lambda_1 - \lambda_2 &= 1 \\ 2\lambda_1 + 4\lambda_2 &= m \end{cases}$$

(1) + (2) $\Rightarrow \lambda_1 = 1$. En substituant dans (2) on a $\lambda_2 = 2$. L'égalité (3) sere verifiée si $m = 10$. Donc pour $m = 10$ u sera un combinsaon linéraire de u_1, u_2 et pour toute autre valeur de m u ne sera pas une combinaison linéraire de u_1, u_2

Exercice 5

1 Les vecteurs $a = (1, 0, 0), b = (0, 1, 0)$ et $c = (2, 5, 0)$ forment ils une famille génératrice de l'espace $\mathbb{R}^3$?

Non, car les trois vecteurs a, b et c ne forment pas un système libre : nous avons $c = 2a + 5b$.

2 Considérons les vecteurs $u = (1, 4, -3), v = (-4, -4, 8)$ et $w = (-3, 0, 5)$. La famille $\{u, v, w\}$ est elle génératrice de $\mathbb{R}^3$?

Non, car les trois vecteurs u, v et w ne forment pas un système libre : nous avons $w = u + v$.

Exercice 6

Les familles suivantes sont-elles libres dans $\mathbb{R}^3$?

1 (u, v) avec $u = (1, 2, 3)$ et $v = (-1, 4, 6)$

$\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} : \lambda_1 u + \lambda_2 v = 0, \Rightarrow$

$$\begin{cases} \lambda_1 - \lambda_2 &= 0 \\ 2\lambda_1 + 4\lambda_2 &= 0 \\ 3\lambda_1 + 6\lambda_2 &= 0 \end{cases}$$

L'égalité (1) implique que $\lambda_1 = \lambda_2$, en substituant dans (2) on a $6\lambda_1 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0 \Rightarrow \lambda_2 = 0$. L'égalité (3) est aussi satisfaite pour $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ par conséquence, la famille u, v est libre.

2 (u, v, w) avec $u = (1, 2, -1), v = (1, 0, 1)$ et $w = (-1, 2, -3)$

$\forall \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R} : \lambda_1 u + \lambda_2 v + \lambda_3 w = 0 \Rightarrow$

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 &= 0 \\ 2\lambda_1 + 2\lambda_3 &= 0 \\ -\lambda_1 + \lambda_2 - 3\lambda_3 &= 0 \end{cases}$$

(2) $\Rightarrow \lambda_1 = -\lambda_3$
En substituant dans (1) et (2) on a $\lambda_2 = 2\lambda_3$, Donc $\exists \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \neq 0 : \lambda_1 u + \lambda_2 v + \lambda_3 w = (0, 0, 0)$. La famille u, v, w est donc une famille liée.

3 (u, v, w, z) avec $u = (1, 2, 3), v = (4, 5, 6), w = (7, 8, 9)$ et $z = (10, 11, 12)$

Le nombre de vecteurs de la famille est $4 > 3$ la dimension de l'espace $\mathbb{R}^3$, cette famille est donc forcément liée.

Exercice 7

1 On considère les 3 vecteurs de $\mathbb{R}^3$: $u_1 = (1, 2, 1), u_2 = (2, 1, 3)$ et $u_3 = (1, 1, 2)$. Ces vecteurs sont ils linéairement indépendants ? Forment ils une base ?

$\forall \lambda_i \in \mathbb{R} \sum_{i=1}^{3} \lambda_i u_i = (0, 0, 0) \Rightarrow$

$$\begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 &= 0 \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 &= 0 \\ \lambda_1 + 3\lambda_2 + 2\lambda_3 &= 0 \end{cases}$$

(3) - (1) $\Rightarrow \lambda_2 + \lambda_3 = 0$ en substituant dans (2) on a $\lambda_1 = 0$
En substituant dans (1) on a $\lambda_2 = 0$. En substituant dans (2) on a $\lambda_3 = 0$. Dons la famille est libre et elle forme une base de $\mathbb{R}^3$.

2 Ecrire le vecteur $v = (6, 7, 8)$ dans la base $\{u_1, u_2, u_3\}$.

$$\begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 &= 6 \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 &= 7 \\ \lambda_1 + 3\lambda_2 + 2\lambda_3 &= 8 \end{cases}$$

(3) -(1) $\Rightarrow \lambda_2 = 2 - \lambda_3$. En substituant dans (2) on obtient $2\lambda_1 = 5 \Rightarrow \lambda_1 = 2.5$. On substitue λ_1 dans (1) et (3) on obtient :

$$\begin{cases} 2\lambda_2 + \lambda_3 &= 3.5 \\ 3\lambda_2 + 2\lambda_3 &= 5.5 \end{cases}$$

(2) - 2 (1) $\Rightarrow \lambda_2 = 1.5 \Rightarrow \lambda_3 = 0.5$
Donc $(6, 7, 8) = 2.5u_1 + 1.5u_2 + 0.5u_3$

3 On note $t_1 = (1, 0, 0), t_2 = (1, 1, 0)$ et $t_3 = (1, 1, 1)$. Montrer que la famille $B = \{t_1, t_2, t_3\}$ est libre. Que peut-on en conclure ?

Nous avons montrer dans l'exercice 3 que B forme une famille libre, donc elle forme une base dans $\mathbb{R}^3$.

4 Determiner les coordonnées de tout vecteur $v = (x, y, z)$ de $\mathbb{R}^3$ dans la base B.

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = x \\ \lambda_2 + \lambda_3 = y \\ \lambda_3 = z \end{cases}$$

$\lambda_2 = y - z$ et $\lambda_1 = x - y$. Donc $\forall v = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : v = (x - y)t_1 + (y - z)t_2 + zt_3$