TD2 : Matrice & Graphes
Module M3204

Fayssal Benkhaldoune, Rushed Kanawati
IUTV - Département R&T

28 octobre 2015

Exercice 1

Parmi les matrices suivantes quelles sont celles que l'on peut multiplier ? Effectuer 3 multiplications possibles.

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 5 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} -1 & 5 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} C = \begin{bmatrix} -1 & 5 \\ 2 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Une matrice A peut être multipliée par une matrice B si le nombre de colonnes de A est égale au nombre de lignes de B. Nous modélisons notre problème sous forme de graphe orienté. Chaque matrice est représentée par un sommet. Une arête relie un sommet X à un sommet Y si on peut multiplier la matrice X par la matrice Y. Noter que les boucles sont autorisées dans un tel graphe (une matrice peut être multipliée par elle même). Le nombre d'arêtes potentiels dans un graphe dirigé avec boucles est n^2 où n est le nombre de sommets. Donc dans notre cas on a $3^2 = 9$ combinaisons à examiner. Le graphe illustré à la figure 1 donne les multiplications possible : $A \times B, A \times C, B \times B, B \times C, C \times A$

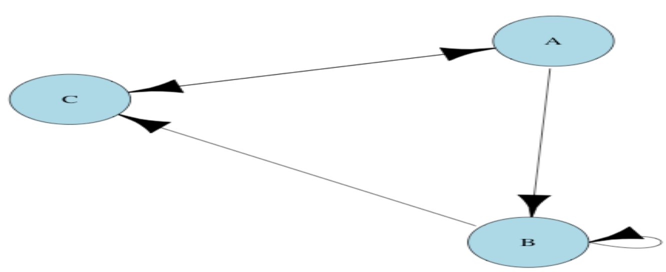


FIGURE 1 – Graphe modélisant les multiplications de matrices possibles

$$A \times B = \begin{bmatrix} 11 & -6 & 12 \\ -2 & 13 & 10 \end{bmatrix}$$

$$A \times C = \begin{bmatrix} 11 & -16 \\ -2 & 13 \end{bmatrix}$$

$$B \times B = \begin{bmatrix} 11 & -6 & 12 \\ -2 & 13 & 10 \\ 2 & 4 & 19 \end{bmatrix}$$

Exercice 2

1. Vérifier sur un exemple la propriété : $(A.B)^t = B^t.A^t$

   $(A.I)^t = A^t = I.A^t = I^t.A^t$

2. Utiliser la propriété précédente pour démonter que si A est une matrice carrée inversible, alors $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$

   $(AA^{-1})^t = (A^{-1})^t A^t = I^t = I \Rightarrow (A^{-1})^t = (A^t)^{-1}$

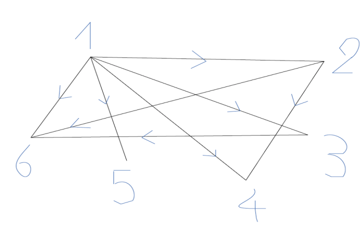
Exercice 3

Trouver 2 matrices A et B de dimensions 2×2 , non nulles telles que $A.B = 0$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Exercice 4

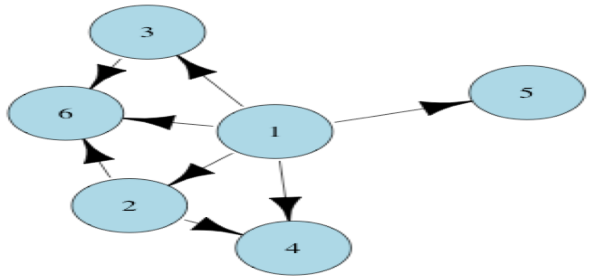
Soit le graphe dont une représentation sagittale est la suivante :



1. Proposer une représentation sagittale plus simple.

2. Evaluer $d_-(6), d_+(2), \sum d(x)$ et vérifier le théorème des poignées de main.

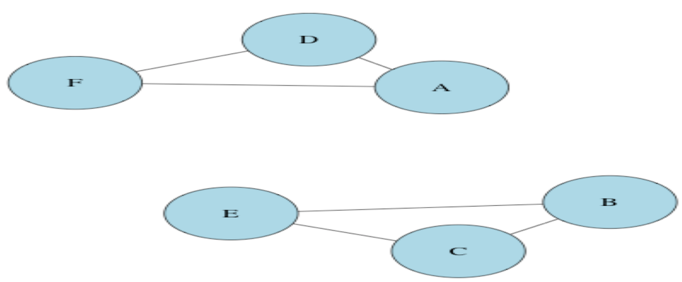
   Le théorème des poignées de main est bien vérifié comme la somme des degrés entrant est égale à la somme des degrés sortants.



	1	2	3	4	5	6	$\sum$
d_-	0	1	1	2	1	3	8
d_+	5	2	1	0	0	0	8

Exercice 5

Faire une représentation sagittale simple et proposer une propriété caractéristique du graphe non orienté suivant : $S = \{A = -3, B = 5, C = 14, D = 15, E = 23, F = 24\}$ et $A = \{(A, D), (A, F), (B, C), (B, E), (C, E), (D, F)\}$



Le graphe obtenu est un graphe régulier puisque tous les nœuds ont le même degrés (en occurrence 2), et il est non connexe.

Exercice 6

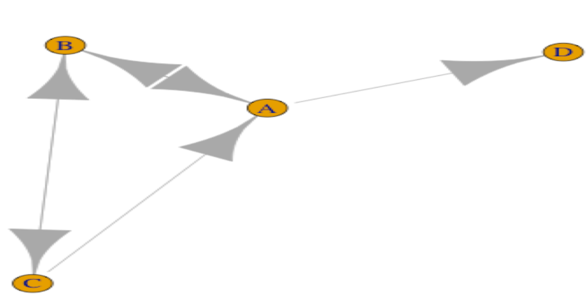
Soit le graphe orienté défini par $S = \{A = 1, B = 2\}$ et $A = \{(A, A), (A, B), (B, B)\}$. Quel est le nombre de chemins de longueurs 4 de A vers B ? Décrire ces chemins. Vérifier par un calcul matriciel.

4 chemines : $AA - AA - AA - AB, AA - AA - AB - BB, AA, AB - BB - BB, AB - BB - BB - BB$.
La matrice d'adjacence du graphe est

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} A^4 = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Exercice 7

Faire une représentation sagittale simple du graphe orienté suivant : $S = \{A = 1, B = 2, C = 3\}$ $A = \{(A, D), (A, B), (B, A), (B, C), (C, B), (C, A)\}$. Donner le nombre et décrire les chemins de longueur 3, de A vers B, de B vers C et de C vers C.



La matrice d'adjacence du graphe est le suivant pour les nœuds **numérotés comme suit A,D,B,C** :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} A^3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \mathbf{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & \mathbf{2} \\ 2 & 1 & 2 & \mathbf{1} \end{bmatrix}$$

On a deux chemins de longueur 3 de A vers B : $AB - BA - AB$ et $AB - BC - CB$
On a deux chemins de longueur 3 de B vers C : $BC - CB - BC$ et $BA - AB - BC$
On a un seul chemin de longueur 3 de C vers C : $CA - AB - BC$