Empilements de Disques & Preuve Formelle

Thomas Fernique Micaela Mayero

Proposition de stage M2 au Laboratoire d'Informatique de Paris Nord

1 Contexte

Un *empilement de disques* est une collection de disques dans le plan Euclidien dont les intérieurs sont deux à deux disjoints (les rayons de disques peuvent a priori être variés). La *densité* d'un tel empilement est la proportion du plan couverte par l'intérieur des disques. L'étude de la densité des empilements de disques est notamment motivée par le fait que les empilements les plus denses semblent correspondre à des structures qui apparaissent naturellement en science des matériaux [PDKM15].

Un empilement qui a la particularité que son graphe de contact (qui relie les centres des disques adjacents) soit une triangulation est dit *compact* (Fig. 1). Il maximise le nombre de contact possibles et, intuitivement, est un candidat particulièrement prometteur pour maximiser la densité.

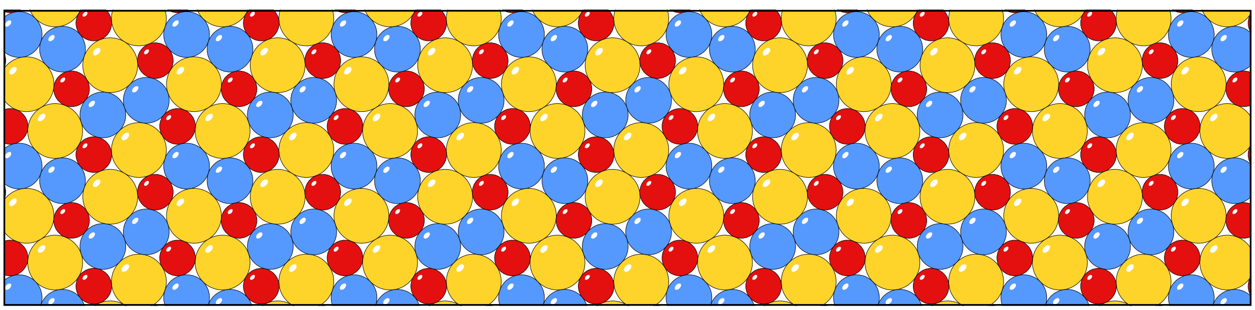

FIGURE 1 – Un empilement compact avec trois tailles de disques.

Pour des disques qui sont tous de rayon 1, il n'y a qu'un seul empilement compact, dit *hexagonal compact* : les disques sont centrés sur une grille triangulaire de côté 2. Pour des disques de rayon 1 et $r < 1$, il a été prouvé qu'il y a exactement 9 valeurs bien spécifiques de r qui permettent un empilement compact [Ken06]. Ce résultat a été étendu pour des disques de rayon 1, r et s : il y a exactement 164 paires (r, s) qui permettent un empilement compact [FHS21].

Si la preuve qu'il n'existe que 9 valeurs permettant un empilement compact avec deux tailles de disques est plutôt simple, celle pour trois disques est bien plus technique et utilise de façon cruciale l'ordinateur (énumération de cas, intervalle d'arithmétique, résolution de systèmes polynomiaux). À quel point peut-on être confiant dans cette preuve "humaine", assistée par l'ordinateur et de fait difficilement vérifiable par un humain ?

Par ailleurs, pour chacune des 9 valeurs de r qui permettent un empilement compact, la densité maximale a pu être caractérisée [BF21], dans une preuve qui repose également de manière importante sur l'ordinateur, dans l'esprit de la preuve de Hales de la conjecture de Kepler [Hal05]. Ici encore, la question de la validité de cette preuve se pose.

2 Objectifs

Les outils de preuves formelles sont de plus en plus adaptés à la démonstration de ce genre de défit, où il faut allier démonstration mathématique et puissance des ordinateurs par la programmation. Nous pouvons citer, à titre d'exemple, le projet Flyspeck [H^+15] sur la preuve formelle de la conjecture de Kepler [Hal05].

Au cours de ce stage nous allons utiliser Why3 couplé avec Coq si besoin. Why3 est un environnement logiciel, dédié à la vérification de programmes, utilisant les techniques de preuve assistée par ordinateur. La plateforme fournit un langage pour la spécification et la programmation, appelé WhyML, et s'appuie sur des outils externes de preuve de théorèmes, soit automatiques soit interactifs (comme Coq), pour valider les conditions de vérification.

L'objectif de ce stage est d'écrire dans Why3 les parties de programmes nécessaires à la démonstration et qui seront ainsi prouvées correctes. Il s'agit de commencer par le cas à 2 tailles de disques, et, suivant la vitesse d'avancement du stage, passer au cas à 3 tailles de disques. Il est à noter qu'une partie des programmes a déjà été écrite en Sage-Combinat [Dev], ce qui aidera au codage en WhyML.

Une connaissance en preuves formelles sera appréciée (quelque soit le ou les outils connus).

Ce sujet peut déboucher sur une thèse autour de preuves formelles de densité.

Références

[BF21] N. Bédaride and Th. Fernique. Density of binary disc packings : the 9 compact packings. *Discrete and Computational Geometry*, 2021. see arXiv:2002.07168.

[Dev] The Sage Developers. *Sage Mathematics Software*. `http://www.sagemath.org`.

[FHS21] Th. Fernique, A. Hashemi, and O. Sizova. Compact packings of the plane with three sizes of discs. *Discrete and Computational Geometry*, 66 :613–635, 2021. see arXiv:1810.02231.

[H^+15] Th. Hales et al. A formal proof of the Kepler conjecture, 2015. see arXiv:1501.02155.

[Hal05] Th. Hales. A proof of the Kepler conjecture. *Annals of Mathematics*, 162 :1065–1185, 2005.

[Ken06] T. Kennedy. Compact packings of the plane with two sizes of discs. *Discrete and Computational Geometry*, 35 :255–267, 2006. see arXiv:0407145.

[PDKM15] T. Paik, B. Diroll, C. Kagan, and Ch. Murray. Binary and ternary superlattices self-assembled from colloidal nanodisks and nanorods. *Journal of the American Chemical Society*, 137 :6662–6669, 2015.