

Contributions à l'algèbre, à l'analyse et à la combinatoire des endomorphismes sur les espaces de séries

Soutenance d'habilitation à diriger des recherches
Spécialités mathématiques et informatique

Laurent Poinot

LIPN - UMR CNRS 7030
Université Paris-Nord XIII - Institut Galilée

Le 8 novembre 2011.

- 1 Introduction
- 2 Algèbres de Fréchet : sous-groupes à un paramètre
- 3 Les matrices infinies
- 4 Algèbre de Weyl et exponentielle d'opérateurs
- 5 Opérateurs d'échelle généralisés
- 6 Conclusion

1 / 59

2 / 59

Table des matières

Un peu d'histoire

La mécanique quantique

- 1 Introduction
- 2 Algèbres de Fréchet : sous-groupes à un paramètre
- 3 Les matrices infinies
- 4 Algèbre de Weyl et exponentielle d'opérateurs
- 5 Opérateurs d'échelle généralisés
- 6 Conclusion

Dans la seule année 1925 paraissent trois modèles de la Mécanique Quantique :

- ceux de Dirac et de Schrödinger basés sur une (fameuse) équation aux dérivées partielles,
- celui d'Heisenberg fondé sur la relation :

$$AB - BA = Id .$$

3 / 59

4 / 59

Un peu d'histoire

Matrices infinies

La relation

$$AB - BA = Id$$

a immédiatement contraint Born, Heisenberg et Jordan à considérer des **matrices infinies**.

La relation

$$AB - BA = Id$$

a immédiatement contraint Born, Heisenberg et Jordan à considérer des **matrices infinies**.

En effet, un simple calcul de traces montre directement que cette relation ne peut, en caractéristique zéro, se représenter par des matrices finies non vides (sur une algèbre associative avec unité).

5 / 59

5 / 59

Un peu d'histoire

Matrices infinies

La relation

$$AB - BA = Id$$

a immédiatement contraint Born, Heisenberg et Jordan à considérer des **matrices infinies**.

En effet, un simple calcul de traces montre directement que cette relation ne peut, en caractéristique zéro, se représenter par des matrices finies non vides (sur une algèbre associative avec unité).

La représentation (non triviale) par des opérateurs continus n'est pas non plus possible dans un espace de Banach. (La preuve est plus subtile.)

Un peu d'histoire

Matrices infinies

La relation

$$AB - BA = Id$$

a immédiatement contraint Born, Heisenberg et Jordan à considérer des **matrices infinies**.

Cette relation peut être satisfaite **fidèlement** :

- soit par des opérateurs (fermables et densément définis, mais **non bornés**) sur un espace hilbertien.

- soit par des opérateurs **continus sur un espace de Fréchet**.

5 / 59

5 / 59

Un peu d'histoire

Opérateurs d'échelle

Il est ainsi possible de représenter l'opérateur A comme la dérivation usuelle des séries formelles en une variable z , et l'opérateur B comme la multiplication par z .

6 / 59

Un peu d'histoire

Groupe d'évolution

En général de nombreux opérateurs de la physique quantique sont interprétés comme des éléments de l'algèbre d'opérateurs engendrée par A et B (l'[algèbre de Weyl d'indice 1](#)).

Si l'on se donne un tel élément Ω , il est intéressant d'étudier le sous-groupe à un paramètre réel ([groupe d'évolution](#))

$$t \mapsto e^{t\Omega} .$$

De tels groupes sont importants en dynamique quantique (t est le temps) ou en mécanique statistique quantique (t est une grandeur liée à la température).

7 / 59

Un peu d'histoire

Opérateurs d'échelle

Il est ainsi possible de représenter l'opérateur A comme la dérivation usuelle des séries formelles en une variable z , et l'opérateur B comme la multiplication par z .

Lorsque l'on restreint leur action aux polynômes, on obtient des opérateurs gradués de degré -1 et $+1$.

A est un opérateur [descendant](#) et B un opérateur [montant](#).

6 / 59

Quelques questions

- 1 Le groupe $t \mapsto e^{t\Omega}$ est-il bien défini ? À travers quelle représentation ?
- 2 Quelles sont les méthodes combinatoires pouvant être extraites de la connaissance de tels groupes ?

8 / 59

- 1 Introduction
- 2 Algèbres de Fréchet : sous-groupes à un paramètre
- 3 Les matrices infinies
- 4 Algèbre de Weyl et exponentielle d'opérateurs
- 5 Opérateurs d'échelle généralisés
- 6 Conclusion

- Trouver une catégorie d'algèbres topologiques (de dimension infinie) convenable pour définir l'application exponentielle et qui permette la réalisation de la relation de commutation d'Heisenberg.
- Étendre les liens classiques entre l'exponentielle et les sous-groupes à un paramètre (problème de Cauchy).

9 / 59

10 / 59

Convention

Les espaces de Fréchet

Semi-normes

Soit V un \mathbb{K} -espace vectoriel. Une **semi-norme** est une norme ne satisfaisant pas l'axiome de séparation !

Pour l'intégralité de cette présentation (sauf sa dernière partie),

$$\mathbb{K} \in \{ \mathbb{R}, \mathbb{C} \} .$$

Les espaces de Fréchet

Semi-normes

Soit V un \mathbb{K} -espace vectoriel. Une **semi-norme** est une application $p: V \rightarrow \mathbb{R}_+$ satisfaisant les axiomes suivants :

Pour tous $x, y \in V$ et $\lambda \in \mathbb{K}$,

① $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$ (**sous-additivité**).

② $p(\lambda x) = |\lambda|p(x)$ (**homogénéité**).

12 / 59

Les espaces de Fréchet

Semi-normes

On appelle **noyau** de la semi-norme p le sous-espace vectoriel

$$\ker p = \{x \in V : p(x) = 0\} .$$

Une famille \mathcal{P} (non vide) de semi-normes de V est dite **séparante** si

$$\bigcap_{p \in \mathcal{P}} \ker p = \{0\} .$$

13 / 59

Les espaces de Fréchet

Semi-normes

On appelle **noyau** de la semi-norme p le sous-espace vectoriel

$$\ker p = \{x \in V : p(x) = 0\} .$$

13 / 59

Les espaces de Fréchet

Semi-normes

On appelle **noyau** de la semi-norme p le sous-espace vectoriel

$$\ker p = \{x \in V : p(x) = 0\} .$$

Une famille \mathcal{P} (non vide) de semi-normes de V est dite **séparante** si

$$\bigcap_{p \in \mathcal{P}} \ker p = \{0\} .$$

Autrement dit, pour $x \in V$, si $p(x) = 0$ quel que soit $p \in \mathcal{P}$, alors $x = 0$.

13 / 59

Remarque

La donnée d'un espace vectoriel V et d'une famille séparante \mathcal{P} de semi-normes définit une structure d'espace vectoriel localement convexe séparé dont une base locale de voisinages de zéro est donnée par

$$\{x \in V : p(x) < \epsilon\}$$

pour $p \in \mathcal{P}$ et $\epsilon > 0$.

14 / 59

Les espaces de Fréchet

Définition

Un **espace de Fréchet** est un espace vectoriel équipé d'une famille séparante au plus dénombrable de semi-normes et qui se trouve être complet pour cette topologie.

De façon équivalente, un espace de Fréchet est un espace vectoriel localement convexe, métrisable (donc séparé) et complet.

15 / 59

Définition

Un **espace de Fréchet** est un espace vectoriel équipé d'une famille séparante au plus dénombrable de semi-normes et qui se trouve être complet pour cette topologie.

15 / 59

Les espaces de Fréchet

Exemples

- ① Un espace banachique ou hilbertien est un espace de Fréchet.
- ② L'espace $\mathcal{C}^\infty([a, b], \mathbb{K})$ est de Fréchet avec $p_n(f) = \sum_{i=0}^n \sup_{x \in [a, b]} |f^{(i)}(x)|$.
- ③ L'espace $\mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ est de Fréchet avec $p_n(f) = \sup\{|f(x)| : -n \leq x \leq n\}$.
- ④ Toute limite projective d'un système projectif (au plus) dénombrable d'espaces de Banach est un espace de Fréchet.
- ⑤ Si X est un alphabet fini, alors $\mathbb{K}[[X]]$ et $\mathbb{K}\langle\langle X \rangle\rangle$ sont des espaces de Fréchet (en tant que limite projective d'un nombre dénombrable d'espaces de dimension finie).
- ⑥ L'espace $\text{ti}(\mathbb{N}, \mathbb{K})$ des matrices triangulaires inférieures indicées par $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ (algèbre d'incidence de \mathbb{N} pour l'ordre opposé à l'ordre naturel).

16 / 59

Les algèbres de Fréchet

Définition

Une algèbre de Fréchet est

- une \mathbb{K} -algèbre topologique dont l'espace vectoriel sous-jacent se trouve être un espace de Fréchet

- cette topologie peut être donnée par une famille (séparante et au plus dénombrable) $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de semi-normes **sous-multiplicatives**, *i.e.*,

$$p_n(xy) \leq p_n(x)p_n(y)$$

pour tout n et tous x, y .

17 / 59

Les algèbres de Fréchet

Exemples

- 1 Une algèbre de Banach est fréchetique.
- 2 Pour un alphabet fini X , $\mathbb{K}[[X]]$ et $\mathbb{K}\langle\langle X \rangle\rangle$ sont des algèbres de Fréchet.
- 3 L'algèbre $\text{ti}(\mathbb{N}, \mathbb{K})$ est de Fréchet.

19 / 59

Les algèbres de Fréchet

Limite projective dénombrable

Une \mathbb{K} -algèbre topologique est une algèbre de Fréchet

\Leftrightarrow

c'est la limite projective d'un système projectif au plus dénombrable d'algèbres de Banach.

18 / 59

Les algèbres de Fréchet

Exponentielle et logarithme

Dans une algèbre de Fréchet unitaire A ,

$$\text{Exp}(x) = \sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!}$$

a un sens pour tout élément x d'une algèbre de Fréchet. (Existence d'un calcul fonctionnel analytique.)

On a les propriétés usuelles évidentes : $\text{Exp}(0) = 1_A$,

$\text{Exp}(-x) = \text{Exp}(x)^{-1}$, si $[x, y] = 0$, alors $\text{Exp}(x + y) = \text{Exp}(x)\text{Exp}(y)$.

On peut également définir

$$\text{Log}(x) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} (1_A - x)^n$$

pour certains $x \in A$ (on utilise une notion de spectre « local »), de sorte que $\text{Exp}(\text{Log}(x)) = x$ (pour tout $x \in A$ admettant un logarithme). On obtient donc une correspondance $\text{Exp} \leftrightarrow \text{Log}$ entre l'algèbre de Fréchet et son groupe des inversibles (similaire aux algèbres de Banach).

20 / 59

Les algèbres de Fréchet

Exponentielle et logarithme : Discret (topologiquement nilpotent) contre Fréchet

Remarques

- 1 Sur un anneau (commutatif avec unité) R contenant \mathbb{Q} comme sous-anneau, on peut toujours calculer l'exponentielle d'une série sans terme constant, et d'une matrice triangulaire infinie **nilpotente**, ainsi que le logarithme d'une série de la forme $1 + zf$, et d'une matrice triangulaire infinie unipotente : par **nilpotence topologique**.
- 2 Dans les autres cas, quand $R = \mathbb{K}$, on doit utiliser la topologie de Fréchet.

21 / 59

Les algèbres de Fréchet

Sous-groupe à un paramètre

En utilisant astucieusement

- qu'une algèbre de Fréchet est la limite projective d'algèbres de Banach
- que les sous-groupes à un paramètre réel tracés dans le groupes des inversibles d'une algèbre de Banach sont nécessairement de classe \mathcal{C}^1

J'ai prouvé :

Lemme

Tout sous-groupe à un paramètre réel tracé dans le groupe des inversibles d'une algèbre de Fréchet est de classe \mathcal{C}^1 .

23 / 59

Intégration d'un problème de Cauchy

On montre (modulo la définition d'un calcul différentiel et intégral élémentaire) que pour chaque x , l'application $z \mapsto \text{Exp}(zx)$ est dérivable (et même de classe \mathcal{C}^∞), et que sa dérivée est $x\text{Exp}(zx)$.

Théorème

Soient $x, x_0 \in A$ fixés. Le problème de Cauchy

$$u'(z) = xu(z)$$

avec condition initiale $u(0) = x_0$ admet une unique solution dérivable $u: \mathbb{K} \rightarrow A$, à savoir,

$$u(z) = \text{Exp}(zx)x_0 .$$

22 / 59

Les algèbres de Fréchet

Sous-groupe à un paramètre

Puisqu'un sous-groupe à un paramètre γ est nécessairement dérivable, on en déduit aisément que

$$\gamma'(t) = \gamma'(0)\gamma(t)$$

de sorte qu'il se trouve être solution du problème de Cauchy

$$u'(t) = \gamma'(0)u(t)$$

avec condition initiale $u(0) = 1_A$.

Il s'ensuit (par unicité) que $\gamma(t) = \text{Exp}(t\gamma'(0))$.

Remarques

- 1 Tout sous-groupe à un paramètre est lisse (i.e., de classe \mathcal{C}^∞).
- 2 $\gamma'(0)$ est le **générateur infinitésimal** (ou **vecteur tangent à l'identité**) du sous-groupe à un paramètre.
- 3 Deux sous-groupes à un paramètre de même vecteur tangent sont égaux (*paradigme du vecteur tangent*).

24 / 59

- 1 Introduction
- 2 Algèbres de Fréchet : sous-groupes à un paramètre
- 3 Les matrices infinies
- 4 Algèbre de Weyl et exponentielle d'opérateurs
- 5 Opérateurs d'échelle généralisés
- 6 Conclusion

25 / 59

Quelques notations

Soient X un ensemble, et R un anneau (commutatif avec unité). Étant donné $f \in R^X$ et $x \in X$, notons

$$\langle f \mid \delta_x \rangle = f(x)$$

de sorte que si $p \in R^{(X)}$, on ait

$$\langle f \mid p \rangle = \sum_{x \in X} f(x)p(x) \in R.$$

Remarques

- 1 Il est clair que $\langle \cdot \mid \cdot \rangle : R^X \times R^{(X)} \rightarrow R$ est une forme R -bilinéaire non dégénérée, qui met en dualité $R^{(X)}$ et son dual algébrique R^X .
- 2 Si R est un corps topologique séparé, alors j'ai prouvé que $R^{(X)}$ est isomorphe au **dual topologique** de R^X avec la topologie produit (et cela quelle que soit la topologie de corps séparée sur R).
- 3 Sous les mêmes conditions précédentes, pour tout $f \in R^X$, la famille $(f(x)\delta_x)_{x \in X}$ est sommable de somme $f = \sum_{x \in X} f(x)\delta_x$.

27 / 59

- Liens entre opérateurs continus et matrices infinies.
- Étude de divers espaces (et algèbres) de matrices infinies.

26 / 59

Matrices en toute généralité

Soient X et Y deux ensembles, et R un anneau (commutatif avec unité).

Une **matrice de format $X \times Y$ et à coefficients dans R** est un élément du R -module $R^{X \times Y}$.

À chaque application R -linéaire ϕ de R^X dans R^Y , on associe une matrice M_ϕ de format $Y \times X$ à coefficients dans R donnée par

$$M_\phi(y, x) = \langle \phi(x) \mid \delta_y \rangle$$

(généralisation évidente de la matrice d'une application linéaire en dimension finie).

28 / 59

Puisque $(\delta_x)_x$ n'est pas une base algébrique de R^X dès que X est infini, on peut montrer qu'en général, la matrice M_ϕ ne caractérise pas l'application linéaire ϕ .

Il est en fait possible de prouver l'existence d'une application non nulle dont la matrice associée est nulle (preuve hautement non constructible!).

Matrices et opérateurs linéaires

On appelle **matrice à lignes finies** toute matrice $M \in R^{X \times Y}$ telle que quel que soit $x \in X$, l'ensemble $\{y \in Y : M(x, y) \neq 0\}$ est fini.

On note $R^{X \times (Y)}$ l'ensemble des telles matrices (c'est un R -module).

Théorème

Soit R un corps topologique séparé.

Pour chaque ensemble Z , supposons que R^Z est muni de la topologie produit.

Les R -espaces vectoriels $\text{Hom}_{R\text{-VectTop}}(R^X, R^Y)$ et $R^{Y \times (X)}$ sont **isomorphes** par $\phi \mapsto M_\phi$.

En particulier, $\text{End}_{R\text{-VectTop}}(R^X)$ et $R^{X \times (X)}$ sont des **algèbres isomorphes**.

$R^{X \times (X)}$ s'appelle l'**algèbre des matrices finies en ligne**.

Pour simplifier : $X = Y$ est infini, et R est un corps quelconque.

Par l'axiome du choix, on se donne une base algébrique \mathcal{B} de R^X étendant la famille R -linéairement indépendante $(\delta_x)_x$.

Soit V le sous-espace engendré par $\mathcal{B} \setminus \{\delta_x : x \in X\} \neq \emptyset$ de sorte que $R^X = V \oplus R^{(X)}$.

Considérons la projection $\pi_V \neq 0$ sur V parallèlement à $R^{(X)}$.

Alors $\langle \pi_V(\delta_x) | \delta_y \rangle = 0$ quels que soient x, y de sorte que $M_{\pi_V} = 0$.

Critère de continuité des applications linéaires

Corollaire

Si \mathbb{K} est un corps et $M \in \mathbb{K}^{Y \times (X)}$, alors l'application linéaire $\phi_M : \mathbb{K}^X \rightarrow \mathbb{K}^Y$ définie par $\langle \phi_M(x) | \delta_y \rangle = M(y, x)$ est continue pour les topologies produits sur \mathbb{K}^X et \mathbb{K}^Y , quelle que soit la topologie séparée de corps donnée à \mathbb{K} .

On remarque que $\text{ti}(\mathbb{N}, R) \subseteq R^{\mathbb{N} \times (\mathbb{N})}$ de sorte que toute matrice triangulaire infinie détermine de façon biunivoque un endomorphisme linéaire et continu de $R^{\mathbb{N}}$ (dès que R est un corps topologique séparé, et que $R^{\mathbb{N}}$ admet la topologie produit).

Rappelons également que $\text{ti}(\mathbb{N}, \mathbb{K})$ est une **algèbre de Fréchet** (même si X et Y sont au plus dénombrables, l'algèbre $\mathbb{K}^{X \times (Y)}$ n'est pas de Fréchet : elle n'est pas complète et sa multiplication n'est pas continue).

33 / 59

Algèbre de Weyl

Définition

Soit \mathbb{K} un corps de caractéristique zéro.

L'algèbre quotient de $\mathbb{K}\langle x, y \rangle$ par l'idéal bilatère engendré par la relation (inhomogène) $[x, y] = 1$ est l'**algèbre de Weyl** (d'indice 1), notée A .

On pose $a = \pi(x)$ et $a^\dagger = \pi(y)$ où $\pi: \mathbb{K}\langle x, y \rangle \rightarrow A$ désigne l'épimorphisme canonique.

35 / 59

- 1 Introduction
- 2 Algèbres de Fréchet : sous-groupes à un paramètre
- 3 Les matrices infinies
- 4 Algèbre de Weyl et exponentielle d'opérateurs
- 5 Opérateurs d'échelle généralisés
- 6 Conclusion

34 / 59

Algèbre de Weyl

Graduation par l'excès

Avec la nouvelle \mathbb{Z} -graduation (**excès**) de $\mathbb{K}\langle x, y \rangle$ donnée par

$$\text{exc}(y) = -\text{exc}(x) = 1 ,$$

la relation $[x, y] = 1$ est homogène, de sorte que A devient une algèbre \mathbb{Z} -graduée.

Les éléments d'excès $n \in \mathbb{N}$ sont ceux appartenant au sous-espace vectoriel engendré par $\{(a^\dagger)^i a^j : i - j = n\}$ (car comme toute algèbre de polynômes tordus on dispose d'une base algébrique « naturelle »).

36 / 59

On définit une représentation de A sur $\mathbb{K}[[z]]$ de la façon suivante :

- $\rho(x)(f) = zf$.
- $\rho(y)(f) = \frac{d}{dz}f$.

Comme $\ker \pi \subseteq \ker \rho$, on obtient une représentation de A dans $\mathbb{K}[[z]]$ (c'est-à-dire un homomorphisme de \mathbb{K} -algèbres de A dans l'algèbre des endomorphismes linéaires $\text{End}_{\mathbb{K}\text{-Vect}}(\mathbb{K}[[z]])$ de $\mathbb{K}[[z]]$) que l'on note (par abus) encore ρ .

Cette représentation est **fidèle**.

37 / 59

Représentation

Exponentielle d'opérateurs homogènes

Considérons un opérateur Ω homogène d'excès $n \in \mathbb{Z}$.

La matrice $M_{\rho(\Omega)}$ est :

- strictement triangulaire inférieure quand $n > 0$,
- diagonale quand $n = 0$,
- strictement triangulaire supérieure quand $n < 0$.

Il s'ensuit que l'exponentielle de $M_{\rho(\Omega)}$ (et donc de $\rho(\Omega)$) existe et se calcule dans la topologie de Fréchet de $\text{ti}(\mathbb{N}, \mathbb{K})$ pour des opérateurs homogènes d'excès ≥ 0 .

39 / 59

Convention

À partir de maintenant, nous supposons que $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ avec la topologie usuelle, et $\mathbb{K}[[z]]$ est muni de sa topologie d'espace de Fréchet.

Lemme

Quel que soit $\Omega \in A$, $M_{\rho(\Omega)} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N} \times \mathbb{N}}$ (on emploie par exemple la « base » $(z^n)_n$ de $\mathbb{K}[[z]] \cong \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$),

de sorte que $\rho(\Omega)$ est un endomorphisme linéaire et **continu** de $\mathbb{K}[[z]]$.

38 / 59

Exponentielle d'opérateurs différentiels du 1er ordre au plus

Nous souhaitons maintenant tirer parti de la graduation de A afin de calculer l'exponentielle d'opérateurs dont l'image par ρ est de la forme

$$P \frac{d}{dz} + Q.$$

On effectue cela en deux étapes :

- 1 On commence par intégrer le champ de vecteurs $P \frac{d}{dz}$.
- 2 Puis le cas général est traité en interprétant $P \frac{d}{dz} + Q$ comme le **conjugué** d'un champ de vecteurs.

40 / 59

Exponentielle d'opérateurs différentiels du 1er ordre au plus

L'exponentielle d'une dérivation est un automorphisme

Supposons donné $\omega \in \mathbb{K}\langle x, y \rangle$ tel que

$$\rho(\pi(\omega)) = P \frac{d}{dz}$$

où $P \in \mathbb{K}[z]$ est de degré ≥ 1 .

Ainsi $\pi(\omega) \in A$ est homogène d'excès ≥ 0 .

Lemme

L'exponentielle $\text{Exp}(tP \frac{d}{dz}) \in \text{Aut}_{\mathbb{K}\text{-AlgTop}}(\mathbb{K}[[z]])$.

Il existe une série formelle sans terme constant $s_t \in \mathbb{K}[[z]]$ telle que

$$\text{Exp}(tP \frac{d}{dz})(f) = f \circ s_t$$

pour tout $f \in \mathbb{K}[[z]]$.

41 / 59

Exponentielle d'opérateurs différentiels du 1er ordre au plus

Calcul de s_t

L'objectif est maintenant de calculer explicitement la série s_t .

Évacuons d'emblée le cas où $P = z$:

$$\text{Exp}(tz \frac{d}{dz})(f) = f(e^t z) .$$

42 / 59

Exponentielle d'opérateurs différentiels du 1er ordre au plus

Calcul de s_t

Supposons que $\deg(P) > 1$. Dans ce cas, nous opérons par intégration d'un champ de vecteurs continu :

Lemme

Soit I un intervalle ouvert (non vide) de \mathbb{R} .

Soit $P: I \rightarrow \mathbb{R}$ une application continue telle que $P(x) \neq 0$ pour $x \in I$.

Soit $x_0 \in I$.

On définit l'application $u: I \rightarrow \mathbb{R}$ par $u(x) = \int_{x_0}^x \frac{dt}{P(t)}$.

Alors u est un \mathcal{C}^1 -difféomorphisme, et l'application $\gamma: u(I) \rightarrow I$ donnée par $\gamma(t) = u^{-1}(t)$ est l'unique solution au problème de Cauchy $\gamma'(t) = P(\gamma(t))$ avec condition initiale $\gamma(0) = x_0$.

43 / 59

Exponentielle d'opérateurs différentiels du 1er ordre au plus

Calcul de s_t

Posons $s_t(x) = u^{-1}(u(x) + t)$ (pour x, t suffisamment petits).

Il est alors clair qu'au moins localement,

$$s_{t_1+t_2}(x) = s_{t_1}(s_{t_2}(x)) \text{ et } s_0(x) = x$$

(sous-groupe à un paramètre local).

Lorsque $P \in \mathbb{K}[z]$, $\deg(P) > 1$, alors $s_t \in \mathbb{K}[[z]]$ est une série rationnelle.

Par exemple, pour $P = z^n$, $n > 1$, alors

$$s_t = \frac{z}{(1 - t(n-1)z^{n-1})^{\frac{1}{n-1}}} .$$

44 / 59

Exponentielle d'opérateurs différentiels du 1er ordre au plus

Champ affine

Supposons donné $\omega \in \mathbb{K}\langle x, y \rangle$ tel que

$$\rho(\pi(\omega)) = P \frac{d}{dz} + Q$$

(somme d'un champ de vecteurs et d'un champ scalaire) où $P \in \mathbb{K}[z]$ est de degré ≥ 1 et $Q \in \mathbb{K}[z]$.

Pour obtenir l'exponentielle d'un tel opérateur, on va tirer parti du calcul effectué dans le cadre d'un opérateur homogène à une seule dérivation.

45 / 59

Exponentielle d'opérateurs différentiels du 1er ordre au plus

Champ affine = conjugué d'un champ de vecteurs

En utilisant le fait que l'exponentiation commute avec la conjugaison, l'exponentielle devient

$$\text{Exp}(t(P \frac{d}{dz} + Q)) = u^{-1} \text{Exp}(tP \frac{d}{dz}) u .$$

Compte tenu des calculs déjà effectués :

$$\text{Exp}(t(P \frac{d}{dz} + Q))(f) = \left(\frac{u \circ s_t}{u} \right) f \circ s_t$$

où s_t est la série associée à l'opérateur $\text{Exp}(tP \frac{d}{dz})$.

47 / 59

Exponentielle d'opérateurs différentiels du 1er ordre au plus

Champ affine = conjugué d'un champ de vecteurs

On suit l'intuition suivante :

Supposons donné $P: I \rightarrow \mathbb{R}$ comme dans le lemme précédent.

Sur I , on pose $u(x) = e^{\int_{x_0}^x \frac{Q(t)}{P(t)} dt}$.

On vérifie facilement la formule de conjugaison suivante

$$\rho(\pi(\omega)) = u^{-1} \left(P \frac{d}{dz} \right) u .$$

Cela signifie que $\rho(\pi(\omega))$ agit sur une série f comme la composition de :

- la multiplication de f par u ,
- l'action du champ de vecteurs $P \frac{d}{dz}$ sur uf ,
- la division par u .

46 / 59

Exponentielle d'opérateurs différentiels du 1er ordre au plus

Exemple

Soit $\Omega = (a^\dagger)^2 a a^\dagger$.

On a la forme conjuguée

$$\rho(\Omega) = z^2 \frac{d}{dz} z = z^{-1} \left(z^3 \frac{d}{dz} \right) z .$$

En utilisant la procédure précédente, on obtient le sous-groupe à un paramètre :

$$\text{Exp}(t\rho(\Omega))(f) = \sqrt{\frac{1}{1-2tz^2}} f \left(\frac{z}{\sqrt{1-2tz^2}} \right) .$$

48 / 59

- 1 Introduction
- 2 Algèbres de Fréchet : sous-groupes à un paramètre
- 3 Les matrices infinies
- 4 Algèbre de Weyl et exponentielle d'opérateurs
- 5 Opérateurs d'échelle généralisés
- 6 Conclusion

L'algèbre de Weyl est dense

Une conséquence immédiate du théorème de densité de Jacobson : l'algèbre de Weyl A (vue comme une algèbre d'opérateurs différentiels) est dense (au sens de la topologie compact-ouvert) dans $\text{End}_{\mathbb{K}\text{-Vect}}(\mathbb{K}[z])$.

Il est même possible de calculer **explicitement** une suite d'éléments de A convergeant vers un endomorphisme donné.

Par exemple, l'opérateur I d'intégration usuel des polynômes peut être vu comme un opérateur différentiel de degré infini (!) :

$$I = \sum_{n \geq 0} (-1)^n \frac{z^{n+1}}{(n+1)!} \frac{d^n}{dz}$$

(somme d'une famille sommable).

Soient V un espace vectoriel de **dimension infinie dénombrable** sur un corps \mathbb{K} quelconque, et $E = (e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une base distinguée.

L'**opérateur montant** R_E associé à la base E est

$$R_E e_n = e_{n+1} .$$

L'**opérateur descendant** L_E associé à la base E est

$$L_E e_{n+1} = e_n, \quad L_E e_0 = 0 .$$

Par exemple en caractéristique zéro, a^\dagger est l'opérateur montant associé à la base des monômes $(z^n)_n$, et a est l'opérateur descendant associé à la base $(\frac{z^n}{n!})_n$.

Généralisation au cas des opérateurs d'échelle

Théorème

Soit V un espace vectoriel de **dimension infinie dénombrable** sur un corps \mathbb{K} quelconque.

Soient E et F deux bases de V telles que $\lambda e_0 = f_0$.

Pour chaque $\phi \in \text{End}_{\mathbb{K}\text{-Vect}}(V)$, il existe une unique suite de polynômes $(P_n)_n$ en une indéterminée z telle que :

$$\phi = \sum_{n \geq 0} P_n(R_E)L_F^n$$

(somme d'une famille sommable).

Généralisation au cas des opérateurs d'échelle

Remarque

Commutateur

Pour la démonstration j'ai utilisé les faits évidents suivants :

- 1 Si $A = (a_n)_n$ est une base de V , alors l'application $P = \sum_{n \geq 0} P_n z^n \in \mathbb{K}[z] \mapsto P(A) = \sum_{n \geq 0} P_n a_n$ est un isomorphisme \mathbb{K} -linéaire.
- 2 Quel que soit $P \in \mathbb{K}[z]$, $P(R_E)e_0 = P(E)$.

Preuve

Par récurrence :

- $P_0(E) = \lambda^{-1} \phi(f_0)$.
- $\lambda P_{n+1}(E) = \phi(f_{n+1}) - \sum_{k=0}^n P_k(R_E) f_{n+1-k}$.

L'opérateur « diagonal » $[L_F, R_E]$ s'écrit également sous la forme $\sum_{n \geq 0} P_n(R_E) L_F^n$ de sorte que l'on obtient une relation de commutation

$$L_F R_E = P_0(R_E) + (P_1(R_E) + R_E) L_F + \sum_{n \geq 2} P_n(R_E) L_F^n .$$

53 / 59

54 / 59

Remarque

Il est possible d'étendre le résultat précédent au cas d'opérateurs linéaires et **continus** sur un certain complété \widehat{V} de l'espace V .

Les éléments de \widehat{V} sont des « combinaisons linéaires » **infinies**

$$\sum_{n \geq 0} \lambda_n e_n$$

par rapport à une base $(e_n)_n$ de V .

On utilise de façon essentielle que

$$\widehat{V}' \cong V$$

et

$$V^* \cong \widehat{V} .$$

55 / 59

Table des matières

- 1 Introduction
- 2 Algèbres de Fréchet : sous-groupes à un paramètre
- 3 Les matrices infinies
- 4 Algèbre de Weyl et exponentielle d'opérateurs
- 5 Opérateurs d'échelle généralisés
- 6 Conclusion

56 / 59

Conclusion et perspectives

- L'emploi d'outils topologiques est essentiel même lorsque l'on s'intéresse aux séries formelles.
- À développer :
 - Possibilités d'extensions aux algèbres localement convexes générales.
 - Extension des résultats de la partie précédente aux cas d'opérateurs bornés sur des espaces hilbertiens (séparables).
 - Liens avec les algèbres de polynômes tordus usuelles.
- Travaux en cours :
 - Étude du groupe de Thompson : représentation linéaire et liens avec le théorème de cohérence de Mac Lane-Stasheff des catégories monoïdales (voire avec les associateurs de V. Drinfel'd).
 - Étude de la correspondance exp-log (par rapport à la convolution) entre caractères et caractères infinitésimaux d'algèbres de Hopf.
 - Prolongement des liens entre non-linéarité parfaite (éventuellement généralisée) en cryptographie et structures algébriques (quasi-corps, etc.), ainsi que dans le cadre des groupes non abéliens.

57 / 59

Conclusion « bibliométrique »

Mes travaux de recherches ont abouti à la publication de

- Quinze articles dans des journaux internationaux.
- La publication de ma thèse de doctorat sous la forme d'un livre.
- Deux chapitres de cryptographie rédigés dans des livres collectifs, avec S. Harari (l'un en français, et l'autre en anglais).
- Et quelques prépublications et autres notes internes.

58 / 59

Conclusion « en un mot »

Merci¹ !

¹Et allez l'OM !