Équations différentielles dans les algèbres de Fréchet

Laurent Poinsot

Séminaire CIP

Plan

Plan

Plan

Plan

Plan

Rappel : Problème de Cauchy dans une algèbre de Banach

Soit A une algèbre de Banach. Soient $x, x_0 \in A$ fixés.

L'équation différentielle linéaire du premier ordre

$$u'(t) = xu(t) \tag{1}$$

avec la condition initiale

$$u(0) = x_0 \tag{2}$$

admet une unique solution $u : \mathbb{R} \to A$ dérivable

$$u(t) = e^{tx}x_0 \ . \tag{3}$$

Rappelons que $e^{tx} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n x^n}{n!}$ et $\frac{d}{dt}(e^{tx}) = xe^{tx}$.

Rappel : Problème de Cauchy dans une algèbre de Banach

Soit A une algèbre de Banach. Soient $x, x_0 \in A$ fixés. L'équation différentielle linéaire du premier ordre

$$u'(t) = xu(t) \tag{1}$$

avec la condition initiale

$$u(0) = x_0 \tag{2}$$

admet une unique solution $u : \mathbb{R} \to A$ dérivable

$$u(t) = e^{tx}x_0 \ . \tag{3}$$

Rappelons que $e^{tx} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n x^n}{n!}$ et $\frac{d}{dt}(e^{tx}) = xe^{tx}$.

Rappel : Problème de Cauchy dans une algèbre de Banach

Soit A une algèbre de Banach. Soient $x, x_0 \in A$ fixés. L'équation différentielle linéaire du premier ordre

$$u'(t) = xu(t) \tag{1}$$

avec la condition initiale

$$u(0) = x_0 \tag{2}$$

admet une unique solution $u : \mathbb{R} \to A$ dérivable

$$u(t) = e^{tx}x_0 \ . \tag{3}$$

Rappelons que $e^{tx} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n x^n}{n!}$ et $\frac{d}{dt}(e^{tx}) = xe^{tx}$.

Rappel : Problème de Cauchy dans une algèbre de Banach

Soit A une algèbre de Banach. Soient $x, x_0 \in A$ fixés. L'équation différentielle linéaire du premier ordre

$$u'(t) = xu(t) \tag{1}$$

avec la condition initiale

$$u(0) = x_0 \tag{2}$$

admet une unique solution $u : \mathbb{R} \to A$ dérivable

$$u(t) = e^{tx} x_0 \ . \tag{3}$$

Rappelons que $e^{tx} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n x^n}{n!}$ et $\frac{d}{dt}(e^{tx}) = xe^{tx}$.

Rappel : Problème de Cauchy dans une algèbre de Banach

Soit A une algèbre de Banach. Soient $x, x_0 \in A$ fixés. L'équation différentielle linéaire du premier ordre

$$u'(t) = xu(t) \tag{1}$$

avec la condition initiale

$$u(0) = x_0 \tag{2}$$

admet une unique solution $u : \mathbb{R} \to A$ dérivable

$$u(t) = e^{tx} x_0 \ . \tag{3}$$

Rappelons que $e^{tx} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n x^n}{n!}$ et $\frac{d}{dt}(e^{tx}) = xe^{tx}$.

Objectif : Démontrer la proposition suivante

Soit A une algèbre de Fréchet. Soient $x, x_0 \in A$ fixés. L'équation différentielle linéaire du premier ordre

$$u'(t) = xu(t) \tag{4}$$

avec la condition initiale

$$u(0) = x_0 \tag{5}$$

admet une unique solution $u : \mathbb{R} \to A$ dérivable

$$u(t) = e^{tx} x_0 \ . \tag{6}$$

Objectif : Démontrer la proposition suivante

Soit A une algèbre de Fréchet. Soient $x, x_0 \in A$ fixés.
L'équation différentielle linéaire du premier ordre

$$u'(t) = xu(t) \tag{4}$$

avec la condition initiale

$$u(0) = x_0 \tag{5}$$

admet une unique solution $u : \mathbb{R} \to A$ dérivable

$$u(t) = e^{tx} x_0 \ . \tag{6}$$

Objectif : Démontrer la proposition suivante

Soit A une algèbre de Fréchet. Soient $x, x_0 \in A$ fixés. L'équation différentielle linéaire du premier ordre

$$u'(t) = xu(t) \tag{4}$$

avec la condition initiale

$$u(0) = x_0 \tag{5}$$

admet une unique solution $u : \mathbb{R} \to A$ dérivable

$$u(t) = e^{tx} x_0 \ . \tag{6}$$

Objectif : Démontrer la proposition suivante

Soit A une algèbre de Fréchet. Soient $x, x_0 \in A$ fixés. L'équation différentielle linéaire du premier ordre

$$u'(t) = xu(t) \tag{4}$$

avec la condition initiale

$$u(0) = x_0 \tag{5}$$

admet une unique solution $u : \mathbb{R} \to A$ dérivable

$$u(t) = e^{tx} x_0 \ . \tag{6}$$

Objectif : Démontrer la proposition suivante

Soit A une algèbre de Fréchet. Soient $x, x_0 \in A$ fixés. L'équation différentielle linéaire du premier ordre

$$u'(t) = xu(t) \tag{4}$$

avec la condition initiale

$$u(0) = x_0 \tag{5}$$

admet une unique solution $u : \mathbb{R} \to A$ dérivable

$$u(t) = e^{tx}x_0 \ . \tag{6}$$

Problèmes

1. Notion de dérivabilité des fonctions de $\mathbb{R}$ dans A ;
2. L'application $t \mapsto e^{tx}$ est-elle dérivable (pour tout $x \in A$) ?
3. Peut-on dériver terme à terme cette dernière fonction ?

Pour résoudre ces problèmes nous allons définir une notion d'analycité des applications réelles à valeurs dans A.

Problèmes

1. Notion de dérivabilité des fonctions de $\mathbb{R}$ dans A ;
2. L'application $t \mapsto e^{tx}$ est-elle dérivable (pour tout $x \in A$) ?
3. Peut-on dériver terme à terme cette dernière fonction ?

Pour résoudre ces problèmes nous allons définir une notion d'analycité des applications réelles à valeurs dans A.

Problèmes

1. Notion de dérivabilité des fonctions de $\mathbb{R}$ dans A ;
2. L'application $t \mapsto e^{tx}$ est-elle dérivable (pour tout $x \in A$) ?
3. Peut-on dériver terme à terme cette dernière fonction ?

Pour résoudre ces problèmes nous allons définir une notion d'analycité des applications réelles à valeurs dans A.

Problèmes

1. Notion de dérivabilité des fonctions de $\mathbb{R}$ dans A ;
2. L'application $t \mapsto e^{tx}$ est-elle dérivable (pour tout $x \in A$) ?
3. Peut-on dériver terme à terme cette dernière fonction ?

Pour résoudre ces problèmes nous allons définir une notion d'analycité des applications réelles à valeurs dans A.

Problèmes

1. Notion de dérivabilité des fonctions de $\mathbb{R}$ dans A ;
2. L'application $t \mapsto e^{tx}$ est-elle dérivable (pour tout $x \in A$) ?
3. Peut-on dériver terme à terme cette dernière fonction ?

Pour résoudre ces problèmes nous allons définir une notion d'analycité des applications réelles à valeurs dans A.

Plan

Espace vectoriel topologique

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) et τ une topologie sur E. (E, τ) est un **espace vectoriel topologique** si, et seulement si, les lois d'espace vectoriel de E sont continues. On dit aussi que τ est une **topologie d'espace vectoriel** (sur E).

Semi-norme

Soit V un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Une application $p : V \to \mathbb{R}_+$ est une **semi-norme** sur V si, et seulement si, quels que soient $x, y \in V$, $\lambda \in \mathbb{K}$,

1. $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$ (sous-additivité) ;
2. $p(\lambda x) = |\lambda| p(x)$ (homogénéité).

Espace vectoriel topologique localement convexe

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Une famille $\mathcal{P}$ de semi-normes sur E définit la topologie localement convexe $\tau_{\mathcal{P}}$ d'espace vectoriel sur E dont une base de voisinages de zéro est donnée par

$$U_p(\epsilon) := \{x \in E : p(x) < \epsilon\} \tag{7}$$

pour $p \in \mathcal{P}$, $\epsilon > 0$.

$(E, \mathcal{P})$ est alors un **espace vectoriel topologique localement convexe** (et toutes les topologies localement convexe peuvent être définies de cette manière).

De plus si l'ensemble $\mathcal{P}$ des semi-normes est séparant, $\tau_{\mathcal{P}}$ est séparée.

Espace vectoriel topologique localement convexe

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Une famille $\mathcal{P}$ de semi-normes sur E définit la topologie localement convexe $\tau_{\mathcal{P}}$ d'espace vectoriel sur E dont une base de voisinages de zéro est donnée par

$$U_p(\epsilon) := \{x \in E : p(x) < \epsilon\} \tag{7}$$

pour $p \in \mathcal{P}$, $\epsilon > 0$.
$(E, \mathcal{P})$ est alors un **espace vectoriel topologique localement convexe** (et toutes les topologies localement convexe peuvent être définies de cette manière).
De plus si l'ensemble $\mathcal{P}$ des semi-normes est séparant, $\tau_{\mathcal{P}}$ est séparée.

Espace vectoriel topologique localement convexe

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Une famille $\mathcal{P}$ de semi-normes sur E définit la topologie localement convexe $\tau_{\mathcal{P}}$ d'espace vectoriel sur E dont une base de voisinages de zéro est donnée par

$$U_p(\epsilon) := \{x \in E : p(x) < \epsilon\} \tag{7}$$

pour $p \in \mathcal{P}$, $\epsilon > 0$.
$(E, \mathcal{P})$ est alors un **espace vectoriel topologique localement convexe** (et toutes les topologies localement convexe peuvent être définies de cette manière).
De plus si l'ensemble $\mathcal{P}$ des semi-normes est séparant, $\tau_{\mathcal{P}}$ est séparée.

Espace de Fréchet

Un **espace de Fréchet** F est un espace vectoriel topologique localement convexe métrisable (donc séparé) et complet. Sa topologie est définie par une famille dénombrable de semi-normes $\{p_k\}_{k\in\mathbb{N}}$.

Critère de convergence : Une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de F converge vers x si, et seulement si, quel que soit $k \in \mathbb{N}$,

$$\lim_{n\to\infty} p_k(x_n - x) = 0 . \qquad (8)$$

Espace de Fréchet

Un **espace de Fréchet** F est un espace vectoriel topologique localement convexe métrisable (donc séparé) et complet. Sa topologie est définie par une famille dénombrable de semi-normes $\{p_k\}_{k\in\mathbb{N}}$.

Critère de convergence : Une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de F converge vers x si, et seulement si, quel que soit $k \in \mathbb{N}$,

$$\lim_{n\to\infty} p_k(x_n - x) = 0 \ . \tag{8}$$

Plan

Algèbre topologique

Par convention, toutes les algèbres considérées dans cette présentation sont supposées associatives.

Soit A une $\mathbb{K}$-algèbre et τ une topologie sur A. (A, τ) est une **algèbre topologique** si, et seulement si, les lois d'algèbres sont continues (en particulier l'espace vectoriel sous-jacent à A est un espace vectoriel topologique).

Algèbre topologique

Par convention, toutes les algèbres considérées dans cette présentation sont supposées associatives.
Soit A une $\mathbb{K}$-algèbre et τ une topologie sur A. (A, τ) est une **algèbre topologique** si, et seulement si, les lois d'algèbres sont continues (en particulier l'espace vectoriel sous-jacent à A est un espace vectoriel topologique).

Semi-norme sous-multiplicative

Soit A une $\mathbb{K}$-algèbre et p une semi-norme de l'espace vectoriel sous-jacent à A. p est dite **sous-multiplicative** si, et seulement si, quels que soient $x, y \in A$,

$$p(xy) \leq p(x)p(y) \; . \tag{9}$$

Algèbre topologique localement convexe

Une **algèbre topologique localement convexe** est la donnée de $(A, \mathcal{P})$ avec

1. A est une $\mathbb{K}$-algèbre ;
2. $\mathcal{P}$ est une famille de semi-normes de A sous-multiplicatives ;
3. A muni de la topologie $\tau_{\mathcal{P}}$ définie par $\mathcal{P}$ est une algèbre topologique.

Si A est unifère (1_A), alors on demande aussi

$$p(1_A) = 1 \tag{10}$$

quelle que soit la semi-norme $p \in \mathcal{P}$ (on dit que p **respecte l'identité multiplicative**).

Algèbre topologique localement convexe

Une **algèbre topologique localement convexe** est la donnée de $(A, \mathcal{P})$ avec

1. A est une $\mathbb{K}$-algèbre ;
2. $\mathcal{P}$ est une famille de semi-normes de A sous-multiplicatives ;
3. A muni de la topologie $\tau_{\mathcal{P}}$ définie par $\mathcal{P}$ est une algèbre topologique.

Si A est unifère (1_A), alors on demande aussi

$$p(1_A) = 1 \tag{10}$$

quelle que soit la semi-norme $p \in \mathcal{P}$ (on dit que p **respecte l'identité multiplicative**).

Algèbre de Fréchet

Une **algèbre de Fréchet** est une algèbre topologique localement convexe métrisable (donc séparée) et complète (en particulier son espace vectoriel sous-jacent est un espace de Fréchet). Sa topologie est définie par une famille dénombrable de semi-normes sous-multiplicatives, et, si l'algèbre est unifère, les semi-normes respectent l'unité multiplicative.

Algèbre de Fréchet

Une **algèbre de Fréchet** est une algèbre topologique localement convexe métrisable (donc séparée) et complète (en particulier son espace vectoriel sous-jacent est un espace de Fréchet). Sa topologie est définie par une famille dénombrable de semi-normes sous-multiplicatives, et, si l'algèbre est unifère, les semi-normes respectent l'unité multiplicative.

Dérivabilité des chemins

Soit E un espace de Fréchet. Soit $U \subseteq \mathbb{R}$ un ouvert. Une **chemin** $f : U \to E$ est **dérivable en** $t_0 \in U$ si, et seulement si,

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(t + t_0) - f(t_0)}{t} \tag{11}$$

existe dans F.
Dans ce cas on note $f'(t_0)$ ou $\frac{d}{dt} f(t)|_{t=t_0}$ cette limite.
Si $f'(t_0)$ existe pour tout $t_0 \in U$, on dit que f est (un chemin) **dérivable** sur U.

Dérivabilité des chemins

Soit E un espace de Fréchet. Soit $U \subseteq \mathbb{R}$ un ouvert. Une **chemin** $f : U \to E$ est **dérivable en** $t_0 \in U$ si, et seulement si,

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(t + t_0) - f(t_0)}{t} \tag{11}$$

existe dans F.

Dans ce cas on note $f'(t_0)$ ou $\frac{d}{dt} f(t)|_{t=t_0}$ cette limite.

Si $f'(t_0)$ existe pour tout $t_0 \in U$, on dit que f est (un chemin) **dérivable** sur U.

Dérivabilité des chemins

Soit E un espace de Fréchet. Soit $U \subseteq \mathbb{R}$ un ouvert. Une **chemin** $f : U \rightarrow E$ est **dérivable en** $t_0 \in U$ si, et seulement si,

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(t+t_0) - f(t_0)}{t} \tag{11}$$

existe dans F.
Dans ce cas on note $f'(t_0)$ ou $\frac{d}{dt} f(t)|_{t=t_0}$ cette limite.
Si $f'(t_0)$ existe pour tout $t_0 \in U$, on dit que f est (un chemin) **dérivable** sur U.

Dérivabilité des chemins

Soit E un espace de Fréchet. Soit $U \subseteq \mathbb{R}$ un ouvert. Une **chemin** $f : U \to E$ est **dérivable en** $t_0 \in U$ si, et seulement si,

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(t+t_0) - f(t_0)}{t} \tag{11}$$

existe dans F.

Dans ce cas on note $f'(t_0)$ ou $\frac{d}{dt} f(t)|_{t=t_0}$ cette limite.

Si $f'(t_0)$ existe pour tout $t_0 \in U$, on dit que f est (un chemin) **dérivable** sur U.

Dérivabilité des chemins

Soit E un espace de Fréchet. Soit $U \subseteq \mathbb{R}$ un ouvert. Une **chemin** $f : U \to E$ est **dérivable en** $t_0 \in U$ si, et seulement si,

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(t+t_0) - f(t_0)}{t} \tag{11}$$

existe dans F.

Dans ce cas on note $f'(t_0)$ ou $\frac{d}{dt} f(t)|_{t=t_0}$ cette limite.

Si $f'(t_0)$ existe pour tout $t_0 \in U$, on dit que f est (un chemin) **dérivable** sur U.

Dérivabilité des chemins

Soit E un espace de Fréchet. Soit $U \subseteq \mathbb{R}$ un ouvert. Une **chemin** $f : U \to E$ est **dérivable en** $t_0 \in U$ si, et seulement si,

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(t + t_0) - f(t_0)}{t} \tag{11}$$

existe dans F.

Dans ce cas on note $f'(t_0)$ ou $\frac{d}{dt} f(t)|_{t=t_0}$ cette limite.

Si $f'(t_0)$ existe pour tout $t_0 \in U$, on dit que f est (un chemin) **dérivable** sur U.

Dérivabilité des chemins

Soit E un espace de Fréchet. Soit $U \subseteq \mathbb{R}$ un ouvert. Une **chemin** $f : U \to E$ est **dérivable en** $t_0 \in U$ si, et seulement si,

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(t+t_0) - f(t_0)}{t} \tag{11}$$

existe dans F.
Dans ce cas on note $f'(t_0)$ ou $\frac{d}{dt} f(t)|_{t=t_0}$ cette limite.
Si $f'(t_0)$ existe pour tout $t_0 \in U$, on dit que f est (un chemin) **dérivable** sur U.

Lemme

Si $f : U \to E$ est dérivable en $t_0 \in U$, alors f est continue en t_0.

Preuve

D'après la définition de dérivabilité, on a

$$\lim_{t \to t_0} (f(t) - f(t_0)) = \lim_{t \to t_0} (t - t_0) f'(t_0) = 0 , \qquad (12)$$

ce qui prouve que f est continue en t_0.

Preuve

D'après la définition de dérivabilité, on a

$$\lim_{t \to t_0} (f(t) - f(t_0)) = \lim_{t \to t_0} (t - t_0) f'(t_0) = 0 \,, \tag{12}$$

ce qui prouve que f est continue en t_0.

Preuve

D'après la définition de dérivabilité, on a

$$\lim_{t \to t_0} (f(t) - f(t_0)) = \lim_{t \to t_0} (t - t_0) f'(t_0) = 0 \ , \tag{12}$$

ce qui prouve que f est continue en t_0.

Soit $f : U \to F$ un chemin dérivable. Si f' est continue (sur U), on dit que f est un **chemin continûment dérivable** ou encore que f est un **chemin de classe** C^1, ce que l'on note $f \in C^1$.

Lemme

Soit $f : \mathbb{R} \to E$ un chemin de classe C^1. Si $f'(t) = 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, alors f est constante.

Lemme

Soit $f : \mathbb{R} \to E$ un chemin de classe C^1. Si $f'(t) = 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, alors f est constante.

Preuve

Soient $a, b \in \mathbb{R}$. On a $f(b) - f(a) = \int_a^b f'(t)dt = 0$ (en utilisant la définition usuelle de l'intégrale de Riemann dans les evt localement convexes). Donc $f(a) = f(b)$.

Preuve

Soient $a, b \in \mathbb{R}$. On a $f(b) - f(a) = \int_a^b f'(t)dt = 0$ (en utilisant la définition usuelle de l'intégrale de Riemann dans les evt localement convexes). Donc $f(a) = f(b)$.

Preuve

Soient $a, b \in \mathbb{R}$. On a $f(b) - f(a) = \int_a^b f'(t)dt = 0$ (en utilisant la définition usuelle de l'intégrale de Riemann dans les evt localement convexes). Donc $f(a) = f(b)$.

Lemme

Soient E, F, G trois espaces de Fréchet. Soit $B : E \times F \to G$ une application bilinéaire et continue. Soient $u : U \subseteq \mathbb{R} \to E$ et $v : U \subseteq \mathbb{R} \to F$ des chemins dérivables sur U. L'application

$$w : \begin{array}{ccc} U & \to & G \\ t & \mapsto & B(u(t), v(t)) \end{array} \tag{13}$$

est dérivable sur U et $w'(t) = B(u'(t), v(t)) + B(u(t), v'(t))$.

Lemme

Soient E, F, G trois espaces de Fréchet. Soit $B : E \times F \to G$ une application bilinéaire et continue. Soient $u : U \subseteq \mathbb{R} \to E$ et $v : U \subseteq \mathbb{R} \to F$ des chemins dérivables sur U. L'application

$$w : \begin{array}{ccc} U & \to & G \\ t & \mapsto & B(u(t), v(t)) \end{array} \tag{13}$$

est dérivable sur U et $w'(t) = B(u'(t), v(t)) + B(u(t), v'(t))$.

Lemme

Soient E, F, G trois espaces de Fréchet. Soit $B : E \times F \to G$ une application bilinéaire et continue. Soient $u : U \subseteq \mathbb{R} \to E$ et $v : U \subseteq \mathbb{R} \to F$ des chemins dérivables sur U.

L'application

$$\begin{array}{rccc} w: & U & \to & G \\ & t & \mapsto & B(u(t), v(t)) \end{array} \tag{13}$$

est dérivable sur U et $w'(t) = B(u'(t), v(t)) + B(u(t), v'(t))$.

Lemme

Soient E, F, G trois espaces de Fréchet. Soit $B : E \times F \to G$ une application bilinéaire et continue. Soient $u : U \subseteq \mathbb{R} \to E$ et $v : U \subseteq \mathbb{R} \to F$ des chemins dérivables sur U. L'application

$$w : \begin{array}{ccc} U & \to & G \\ t & \mapsto & B(u(t), v(t)) \end{array} \tag{13}$$

est dérivable sur U et $w'(t) = B(u'(t), v(t)) + B(u(t), v'(t))$.

Lemme

Soient E, F, G trois espaces de Fréchet. Soit $B : E \times F \to G$ une application bilinéaire et continue. Soient $u : U \subseteq \mathbb{R} \to E$ et $v : U \subseteq \mathbb{R} \to F$ des chemins dérivables sur U. L'application

$$w : \begin{array}{ccc} U & \to & G \\ t & \mapsto & B(u(t), v(t)) \end{array} \qquad (13)$$

est dérivable sur U et $w'(t) = B(u'(t), v(t)) + B(u(t), v'(t))$.

Preuve

Soit $h \in \mathbb{R}$ tel que $t + h \in U$.

$$
\begin{aligned}
& B(u(t+h), v(t+h)) - B(u(t), v(t)) \\
& = B(u(t+h) - u(t) + u(t), v(t+h)) \\
& -B(u(t), v(t+h) - v(t+h) + v(t)) \\
& = B(u(t+h) - u(t), v(t+h)) + B(u(t), v(t+h) - v(t)) \ .
\end{aligned}
\tag{14}
$$

Donc $\lim_{h \to 0} \frac{1}{h}(B(u(t+h), v(t+h)) - B(u(t), v(t)))$ est égale à $B(u'(t), v(t)) + B(u(t), v'(t))$.

Preuve

Soit $h \in \mathbb{R}$ tel que $t + h \in U$.

$$\begin{aligned} & B(u(t+h), v(t+h)) - B(u(t), v(t)) \\ & = B(u(t+h) - u(t) + u(t), v(t+h)) \\ & -B(u(t), v(t+h) - v(t+h) + v(t)) \\ & = B(u(t+h) - u(t), v(t+h)) + B(u(t), v(t+h) - v(t)) \,. \end{aligned} \tag{14}$$

Donc $\lim_{h \to 0} \frac{1}{h}(B(u(t+h), v(t+h)) - B(u(t), v(t)))$ est égale à $B(u'(t), v(t)) + B(u(t), v'(t))$.

Preuve

Soit $h \in \mathbb{R}$ tel que $t + h \in U$.

$$\begin{array}{l} B(u(t+h), v(t+h)) - B(u(t), v(t)) \\ = B(u(t+h) - u(t) + u(t), v(t+h)) \\ -B(u(t), v(t+h) - v(t+h) + v(t)) \\ = B(u(t+h) - u(t), v(t+h)) + B(u(t), v(t+h) - v(t)) \; . \end{array} \tag{14}$$

Donc $\lim_{h \to 0} \frac{1}{h}(B(u(t+h), v(t+h)) - B(u(t), v(t)))$ est égale à $B(u'(t), v(t)) + B(u(t), v'(t))$.

Preuve

Soit $h \in \mathbb{R}$ tel que $t + h \in U$.

$$\begin{aligned}
& B(u(t+h), v(t+h)) - B(u(t), v(t)) \\
& = B(u(t+h) - u(t) + u(t), v(t+h)) \\
& -B(u(t), v(t+h) - v(t+h) + v(t)) \\
& = B(u(t+h) - u(t), v(t+h)) + B(u(t), v(t+h) - v(t)) \,.
\end{aligned} \tag{14}$$

Donc $\lim_{h\to 0} \frac{1}{h}(B(u(t+h), v(t+h)) - B(u(t), v(t)))$ est égale à $B(u'(t), v(t)) + B(u(t), v'(t))$.

Lemme

Soit A une algèbre de Fréchet. Si u et v sont deux chemins de $U \subseteq \mathbb{R}$ dans A dérivables, alors uv est dérivable et

$$(uv)'(t) = u'(t)v(t) + u(t)v'(t) \ . \tag{15}$$

Lemme

Soit A une algèbre de Fréchet. Si u et v sont deux chemins de $U \subseteq \mathbb{R}$ dans A dérivables, alors uv est dérivable et

$$(uv)'(t) = u'(t)v(t) + u(t)v'(t) \ . \tag{15}$$

Lemme

Soit A une algèbre de Fréchet. Si u et v sont deux chemins de $U \subseteq \mathbb{R}$ dans A dérivables, alors uv est dérivable et

$$(uv)'(t) = u'(t)v(t) + u(t)v'(t) . \qquad (15)$$

Lemme

Soit A une algèbre de Fréchet. Si u et v sont deux chemins de $U \subseteq \mathbb{R}$ dans A dérivables, alors uv est dérivable et

$$(uv)'(t) = u'(t)v(t) + u(t)v'(t) \ . \tag{15}$$

Définition

Soit $(E, (p_l)_l)$ un espace de Fréchet. Soit $f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} t^n x_n$ où $x_n \in E$ et $t \in \mathbb{R}$ une série entière (à valeurs dans E). Soit $R := \inf_{l \in \mathbb{N}} R_l$ où $\frac{1}{R_l} = \limsup_{n \to \infty} p_l(x_n)^{\frac{1}{n}}$. R s'appelle le **rayon de convergence de** $f(t)$.

Définition

Soit $(E,(p_l)_l)$ un espace de Fréchet. Soit $f(t)=\sum_{n=0}^{\infty} t^n x_n$ où $x_n \in E$ et $t \in \mathbb{R}$ une série entière (à valeurs dans E). Soit $R := \inf_{l \in \mathbb{N}} R_l$ où $\frac{1}{R_l} = \limsup_{n\to\infty} p_l(x_n)^{\frac{1}{n}}$. R s'appelle le **rayon de convergence de** $f(t)$.

Définition

Soit $(E, (p_l)_l)$ un espace de Fréchet. Soit $f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} t^n x_n$ où $x_n \in E$ et $t \in \mathbb{R}$ une série entière (à valeurs dans E). Soit $R := \inf_{l \in \mathbb{N}} R_l$ où $\frac{1}{R_l} = \limsup_{n \to \infty} p_l(x_n)^{\frac{1}{n}}$. R s'appelle le **rayon de convergence de** $f(t)$.

Proposition

1. La série $f(t)$ est absolument convergente (et donc converge dans E) pour tout $|t| < R$;
2. La série $\sum_{n=1}^{\infty} nt^{n-1}x_n$, obtenue par dérivation terme à terme à partir de $f(t)$, possède le même rayon de convergence R.

Proposition

1. La série $f(t)$ est absolument convergente (et donc converge dans E) pour tout $|t| < R$;
2. La série $\sum_{n=1}^{\infty} nt^{n-1}x_n$, obtenue par dérivation terme à terme à partir de $f(t)$, possède le même rayon de convergence R.

Proposition

1. La série $f(t)$ est absolument convergente (et donc converge dans E) pour tout $|t| < R$;
2. La série $\sum_{n=1}^{\infty} nt^{n-1}x_n$, obtenue par dérivation terme à terme à partir de $f(t)$, possède le même rayon de convergence R.

Proposition

Le chemin $f : t \in]-R;+R[\to \sum_{n=0}^{\infty} t^n x_n$ est dérivable et

$$f'(t) = \sum_{n=1}^{\infty} n t^{n-1} x_n.$$

Proposition

Le chemin $f : t \in]-R;+R[\to \sum_{n=0}^{\infty} t^n x_n$ est dérivable et $f'(t) = \sum_{n=1}^{\infty} n t^{n-1} x_n$.

Définition de l'exponentielle

Soit A une algèbre de Fréchet (unifère).
On définit l'**exponentielle** de A par

$$Exp(x) = e^x := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \; (x \in A, \; x^0 := 1_A) \tag{16}$$

dès que la série dans le membre de droite de l'égalité converge dans A.
On note $\mathcal{D}$ le domaine de définition de Exp et $\mathcal{R}$ son image.
Ni $\mathcal{D}$ ni $\mathcal{R}$ n'est vide puisque $0 \in \mathcal{D}$ et $1_A \in \mathcal{R}$.

Définition de l'exponentielle

Soit A une algèbre de Fréchet (unifère).
On définit l'**exponentielle** de A par

$$Exp(x) = e^x := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \; (x \in A,\; x^0 := 1_A) \tag{16}$$

dès que la série dans le membre de droite de l'égalité converge dans A.
On note $\mathcal{D}$ le domaine de définition de Exp et $\mathcal{R}$ son image.
Ni $\mathcal{D}$ ni $\mathcal{R}$ n'est vide puisque $0 \in \mathcal{D}$ et $1_A \in \mathcal{R}$.

Définition de l'exponentielle

Soit A une algèbre de Fréchet (unifère).
On définit l'**exponentielle** de A par

$$Exp(x) = e^x := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \; (x \in A,\; x^0 := 1_A) \tag{16}$$

dès que la série dans le membre de droite de l'égalité converge dans A.
On note $\mathcal{D}$ le domaine de définition de Exp et $\mathcal{R}$ son image.
Ni $\mathcal{D}$ ni $\mathcal{R}$ n'est vide puisque $0 \in \mathcal{D}$ et $1_A \in \mathcal{R}$.

Définition de l'exponentielle

Soit A une algèbre de Fréchet (unifère).
On définit l'**exponentielle** de A par

$$Exp(x) = e^x := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \; (x \in A, \; x^0 := 1_A) \tag{16}$$

dès que la série dans le membre de droite de l'égalité converge dans A.
On note $\mathcal{D}$ le domaine de définition de Exp et $\mathcal{R}$ son image.
Ni $\mathcal{D}$ ni $\mathcal{R}$ n'est vide puisque $0 \in \mathcal{D}$ et $1_A \in \mathcal{R}$.

Proposition

$\mathcal{D} = A$ et de plus, la série e^x converge absolument dans A pour tout $x \in A$.

Propriétés de l'exponentielle

1. $e^0 = 1_A$ et $e^{1_A} = e1_A$;
2. $e^{x+y} = e^x e^y$ lorsque x et y commutent ;
3. $e^{-x} = (e^x)^{-1}$;
4. Pour tout $x \in A$ et tout $t \in \mathbb{R}$,

$$xe^{tx} = e^{tx}x \,. \tag{17}$$

Propriétés de l'exponentielle

1. $e^0 = 1_A$ et $e^{1_A} = e1_A$;
2. $e^{x+y} = e^x e^y$ lorsque x et y commutent ;
3. $e^{-x} = (e^x)^{-1}$;
4. Pour tout $x \in A$ et tout $t \in \mathbb{R}$,
$$xe^{tx} = e^{tx}x \,. \quad (17)$$

Propriétés de l'exponentielle

1. $e^0 = 1_A$ et $e^{1_A} = e1_A$;
2. $e^{x+y} = e^x e^y$ lorsque x et y commutent ;
3. $e^{-x} = (e^x)^{-1}$;
4. Pour tout $x \in A$ et tout $t \in \mathbb{R}$,

$$xe^{tx} = e^{tx}x \ . \tag{17}$$

Équations différentielles dans les algèbres de Fréchet

Laurent Poinsot

Propriétés de l'exponentielle

1. $e^0 = 1_A$ et $e^{1_A} = e1_A$;
2. $e^{x+y} = e^x e^y$ lorsque x et y commutent ;
3. $e^{-x} = (e^x)^{-1}$;
4. Pour tout $x \in A$ et tout $t \in \mathbb{R}$,

$$xe^{tx} = e^{tx}x \; . \tag{17}$$

Propriétés de l'exponentielle

1. $e^0 = 1_A$ et $e^{1_A} = e1_A$;
2. $e^{x+y} = e^x e^y$ lorsque x et y commutent ;
3. $e^{-x} = (e^x)^{-1}$;
4. Pour tout $x \in A$ et tout $t \in \mathbb{R}$,

$$xe^{tx} = e^{tx}x \; . \tag{17}$$

Lemme

Pour tout $x \in A$, le chemin

$$\begin{array}{rccc} E_x : & \mathbb{R} & \longrightarrow & A \\ & t & \longmapsto & e^{tx} \end{array} \tag{18}$$

est dérivable et sa dérivée est $\frac{d}{dt}E_x(t) = xe^{tx} = e^{tx}x$.

Lemme

Pour tout $x \in A$, le chemin

$$E_x : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & A \\ t & \longmapsto & e^{tx} \end{array} \tag{18}$$

est dérivable et sa dérivée est $\frac{d}{dt}E_x(t) = xe^{tx} = e^{tx}x$.

Lemme

Pour tout $x \in A$, le chemin

$$E_x : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & A \\ t & \longmapsto & e^{tx} \end{array} \quad (18)$$

est dérivable et sa dérivée est $\frac{d}{dt}E_x(t) = xe^{tx} = e^{tx}x$.

Lemme

Pour tout $x \in A$, le chemin

$$\begin{array}{rccc} E_x : & \mathbb{R} & \longrightarrow & A \\ & t & \longmapsto & e^{tx} \end{array} \tag{18}$$

est dérivable et sa dérivée est $\frac{d}{dt}E_x(t) = xe^{tx} = e^{tx}x$.

Preuve

On montre facilement que le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n=0}^{\infty} t^n \frac{x^n}{n!}$ est $+\infty$. Il en résulte que E_x est dérivable et sa dérivée est obtenue terme à terme : $\sum_{n=1}^{\infty} nt^{n-1}\frac{x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} x(n+1)t^n \frac{x^n}{n!} = xe^{tx}$ (par continuité de la multiplication dans A).

Preuve

On montre facilement que le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n=0}^{\infty} t^n \frac{x^n}{n!}$ est $+\infty$. Il en résulte que E_x est dérivable et sa dérivée est obtenue terme à terme : $\sum_{n=1}^{\infty} nt^{n-1} \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} x(n+1)t^n \frac{x^n}{n!} = xe^{tx}$ (par continuité de la multiplication dans A).

Proposition

Soit A une algèbre de Fréchet. Soient $x, x_0 \in A$ fixés. L'équation différentielle linéaire du premier ordre

$$u'(t) = xu(t) \tag{19}$$

avec la condition initiale

$$u(0) = x_0 \tag{20}$$

admet une unique solution $u : \mathbb{R} \to A$ dérivable

$$u(t) = e^{tx} x_0 \ . \tag{21}$$

Proposition

Soit A une algèbre de Fréchet. Soient $x, x_0 \in A$ fixés.
L'équation différentielle linéaire du premier ordre

$$u'(t) = xu(t) \tag{19}$$

avec la condition initiale

$$u(0) = x_0 \tag{20}$$

admet une unique solution $u : \mathbb{R} \to A$ dérivable

$$u(t) = e^{tx} x_0 \ . \tag{21}$$

Proposition

Soit A une algèbre de Fréchet. Soient $x, x_0 \in A$ fixés. L'équation différentielle linéaire du premier ordre

$$u'(t) = xu(t) \tag{19}$$

avec la condition initiale

$$u(0) = x_0 \tag{20}$$

admet une unique solution $u : \mathbb{R} \to A$ dérivable

$$u(t) = e^{tx} x_0 \ . \tag{21}$$

Proposition

Soit A une algèbre de Fréchet. Soient $x, x_0 \in A$ fixés. L'équation différentielle linéaire du premier ordre

$$u'(t) = xu(t) \tag{19}$$

avec la condition initiale

$$u(0) = x_0 \tag{20}$$

admet une unique solution $u : \mathbb{R} \to A$ dérivable

$$u(t) = e^{tx} x_0 \ . \tag{21}$$

Proposition

Soit A une algèbre de Fréchet. Soient $x, x_0 \in A$ fixés. L'équation différentielle linéaire du premier ordre

$$u'(t) = xu(t) \tag{19}$$

avec la condition initiale

$$u(0) = x_0 \tag{20}$$

admet une unique solution $u : \mathbb{R} \to A$ dérivable

$$u(t) = e^{tx} x_0 \ . \tag{21}$$

Preuve

Existence : Soit $v(t) = e^{tx}x_0$. Alors v est un chemin dérivable sur $\mathbb{R}$ et $v'(t) = xe^{tx}x_0 = xv(t)$ et $v(0) = x_0$;
Unicité : Soit $u(t)$ une autre solution de l'équa. diff. Posons $w(t) := e^{-tx}u(t)$. On a

$$\begin{aligned} w'(t) &= -xe^{-tx}u(t) + e^{-tx}u'(t) \\ &= -xe^{-tx}u(t) + e^{-tx}xu(t) \\ &= 0\ . \end{aligned} \tag{22}$$

Donc w est constante. Or $w(0) = u(0) = x_0$, donc $x_0 = e^{-tx}u(t)$, soit encore $e^{tx}x_0 = e^{tx}e^{-tx}u(t) = e^{(t-t)x}u(t) = u(t)$.

Preuve

Existence : Soit $v(t) = e^{tx}x_0$. Alors v est un chemin dérivable sur $\mathbb{R}$ et $v'(t) = xe^{tx}x_0 = xv(t)$ et $v(0) = x_0$;
Unicité : Soit $u(t)$ une autre solution de l'équa. diff. Posons $w(t) := e^{-tx}u(t)$. On a

$$\begin{aligned} w'(t) &= -xe^{-tx}u(t) + e^{-tx}u'(t) \\ &= -xe^{-tx}u(t) + e^{-tx}xu(t) \\ &= 0\ . \end{aligned} \tag{22}$$

Donc w est constante. Or $w(0) = u(0) = x_0$, donc $x_0 = e^{-tx}u(t)$, soit encore $e^{tx}x_0 = e^{tx}e^{-tx}u(t) = e^{(t-t)x}u(t) = u(t)$.

Preuve

Existence : Soit $v(t) = e^{tx}x_0$. Alors v est un chemin dérivable sur $\mathbb{R}$ et $v'(t) = xe^{tx}x_0 = xv(t)$ et $v(0) = x_0$;

Unicité : Soit $u(t)$ une autre solution de l'équa. diff. Posons $w(t) := e^{-tx}u(t)$. On a

$$\begin{aligned} w'(t) &= -xe^{-tx}u(t) + e^{-tx}u'(t) \\ &= -xe^{-tx}u(t) + e^{-tx}xu(t) \\ &= 0\,. \end{aligned} \tag{22}$$

Donc w est constante. Or $w(0) = u(0) = x_0$, donc $x_0 = e^{-tx}u(t)$, soit encore $e^{tx}x_0 = e^{tx}e^{-tx}u(t) = e^{(t-t)x}u(t) = u(t)$.

Preuve

Existence : Soit $v(t) = e^{tx}x_0$. Alors v est un chemin dérivable sur $\mathbb{R}$ et $v'(t) = xe^{tx}x_0 = xv(t)$ et $v(0) = x_0$;
Unicité : Soit $u(t)$ une autre solution de l'équa. diff. Posons $w(t) := e^{-tx}u(t)$. On a

$$\begin{aligned} w'(t) &= -xe^{-tx}u(t) + e^{-tx}u'(t) \\ &= -xe^{-tx}u(t) + e^{-tx}xu(t) \qquad (22) \\ &= 0\,. \end{aligned}$$

Donc w est constante. Or $w(0) = u(0) = x_0$, donc $x_0 = e^{-tx}u(t)$, soit encore $e^{tx}x_0 = e^{tx}e^{-tx}u(t) = e^{(t-t)x}u(t) = u(t)$.

Preuve

Existence : Soit $v(t) = e^{tx}x_0$. Alors v est un chemin dérivable sur $\mathbb{R}$ et $v'(t) = xe^{tx}x_0 = xv(t)$ et $v(0) = x_0$;
Unicité : Soit $u(t)$ une autre solution de l'équa. diff. Posons $w(t) := e^{-tx}u(t)$. On a

$$\begin{aligned} w'(t) &= -xe^{-tx}u(t) + e^{-tx}u'(t) \\ &= -xe^{-tx}u(t) + e^{-tx}xu(t) \\ &= 0\ . \end{aligned} \tag{22}$$

Donc w est constante. Or $w(0) = u(0) = x_0$, donc $x_0 = e^{-tx}u(t)$, soit encore $e^{tx}x_0 = e^{tx}e^{-tx}u(t) = e^{(t-t)x}u(t) = u(t)$.

Preuve

Existence : Soit $v(t) = e^{tx}x_0$. Alors v est un chemin dérivable sur $\mathbb{R}$ et $v'(t) = xe^{tx}x_0 = xv(t)$ et $v(0) = x_0$;
Unicité : Soit $u(t)$ une autre solution de l'équa. diff. Posons $w(t) := e^{-tx}u(t)$. On a

$$\begin{aligned} w'(t) &= -xe^{-tx}u(t) + e^{-tx}u'(t) \\ &= -xe^{-tx}u(t) + e^{-tx}xu(t) \\ &= 0\ . \end{aligned} \tag{22}$$

Donc w est constante. Or $w(0) = u(0) = x_0$, donc $x_0 = e^{-tx}u(t)$, soit encore $e^{tx}x_0 = e^{tx}e^{-tx}u(t) = e^{(t-t)x}u(t) = u(t)$.

Preuve

Existence : Soit $v(t) = e^{tx}x_0$. Alors v est un chemin dérivable sur $\mathbb{R}$ et $v'(t) = xe^{tx}x_0 = xv(t)$ et $v(0) = x_0$;
Unicité : Soit $u(t)$ une autre solution de l'équa. diff. Posons $w(t) := e^{-tx}u(t)$. On a

$$\begin{aligned} w'(t) &= -xe^{-tx}u(t) + e^{-tx}u'(t) \\ &= -xe^{-tx}u(t) + e^{-tx}xu(t) \\ &= 0\ . \end{aligned} \tag{22}$$

Donc w est constante. Or $w(0) = u(0) = x_0$, donc $x_0 = e^{-tx}u(t)$, soit encore $e^{tx}x_0 = e^{tx}e^{-tx}u(t) = e^{(t-t)x}u(t) = u(t)$.

Preuve

Existence : Soit $v(t) = e^{tx}x_0$. Alors v est un chemin dérivable sur $\mathbb{R}$ et $v'(t) = xe^{tx}x_0 = xv(t)$ et $v(0) = x_0$;
Unicité : Soit $u(t)$ une autre solution de l'équa. diff. Posons $w(t) := e^{-tx}u(t)$. On a

$$\begin{aligned} w'(t) &= -xe^{-tx}u(t) + e^{-tx}u'(t) \\ &= -xe^{-tx}u(t) + e^{-tx}xu(t) \\ &= 0\,. \end{aligned} \tag{22}$$

Donc w est constante. Or $w(0) = u(0) = x_0$, donc $x_0 = e^{-tx}u(t)$, soit encore $e^{tx}x_0 = e^{tx}e^{-tx}u(t) = e^{(t-t)x}u(t) = u(t)$.

Preuve

Existence : Soit $v(t) = e^{tx}x_0$. Alors v est un chemin dérivable sur $\mathbb{R}$ et $v'(t) = xe^{tx}x_0 = xv(t)$ et $v(0) = x_0$;
Unicité : Soit $u(t)$ une autre solution de l'équa. diff. Posons $w(t) := e^{-tx}u(t)$. On a

$$\begin{aligned} w'(t) &= -xe^{-tx}u(t) + e^{-tx}u'(t) \\ &= -xe^{-tx}u(t) + e^{-tx}xu(t) \\ &= 0\,. \end{aligned} \tag{22}$$

Donc w est constante. Or $w(0) = u(0) = x_0$, donc $x_0 = e^{-tx}u(t)$, soit encore $e^{tx}x_0 = e^{tx}e^{-tx}u(t) = e^{(t-t)x}u(t) = u(t)$.

Preuve

Existence : Soit $v(t) = e^{tx}x_0$. Alors v est un chemin dérivable sur $\mathbb{R}$ et $v'(t) = xe^{tx}x_0 = xv(t)$ et $v(0) = x_0$;
Unicité : Soit $u(t)$ une autre solution de l'équa. diff. Posons $w(t) := e^{-tx}u(t)$. On a

$$\begin{aligned} w'(t) &= -xe^{-tx}u(t) + e^{-tx}u'(t) \\ &= -xe^{-tx}u(t) + e^{-tx}xu(t) \\ &= 0\ . \end{aligned} \tag{22}$$

Donc w est constante. Or $w(0) = u(0) = x_0$, donc $x_0 = e^{-tx}u(t)$, soit encore $e^{tx}x_0 = e^{tx}e^{-tx}u(t) = e^{(t-t)x}u(t) = u(t)$.

Preuve

Existence : Soit $v(t) = e^{tx}x_0$. Alors v est un chemin dérivable sur $\mathbb{R}$ et $v'(t) = xe^{tx}x_0 = xv(t)$ et $v(0) = x_0$;
Unicité : Soit $u(t)$ une autre solution de l'équa. diff. Posons $w(t) := e^{-tx}u(t)$. On a

$$\begin{aligned} w'(t) &= -xe^{-tx}u(t) + e^{-tx}u'(t) \\ &= -xe^{-tx}u(t) + e^{-tx}xu(t) \\ &= 0\,. \end{aligned} \tag{22}$$

Donc w est constante. Or $w(0) = u(0) = x_0$, donc $x_0 = e^{-tx}u(t)$, soit encore $e^{tx}x_0 = e^{tx}e^{-tx}u(t) = e^{(t-t)x}u(t) = u(t)$.

Preuve

Existence : Soit $v(t) = e^{tx}x_0$. Alors v est un chemin dérivable sur $\mathbb{R}$ et $v'(t) = xe^{tx}x_0 = xv(t)$ et $v(0) = x_0$;
Unicité : Soit $u(t)$ une autre solution de l'équa. diff. Posons $w(t) := e^{-tx}u(t)$. On a

$$\begin{aligned} w'(t) &= -xe^{-tx}u(t) + e^{-tx}u'(t) \\ &= -xe^{-tx}u(t) + e^{-tx}xu(t) \\ &= 0\,. \end{aligned} \tag{22}$$

Donc w est constante. Or $w(0) = u(0) = x_0$, donc $x_0 = e^{-tx}u(t)$, soit encore $e^{tx}x_0 = e^{tx}e^{-tx}u(t) = e^{(t-t)x}u(t) = u(t)$.

Preuve

Existence : Soit $v(t) = e^{tx}x_0$. Alors v est un chemin dérivable sur $\mathbb{R}$ et $v'(t) = xe^{tx}x_0 = xv(t)$ et $v(0) = x_0$;
Unicité : Soit $u(t)$ une autre solution de l'équa. diff. Posons $w(t) := e^{-tx}u(t)$. On a

$$\begin{aligned} w'(t) &= -xe^{-tx}u(t) + e^{-tx}u'(t) \\ &= -xe^{-tx}u(t) + e^{-tx}xu(t) \\ &= 0\,. \end{aligned} \tag{22}$$

Donc w est constante. Or $w(0) = u(0) = x_0$, donc $x_0 = e^{-tx}u(t)$, soit encore $e^{tx}x_0 = e^{tx}e^{-tx}u(t) = e^{(t-t)x}u(t) = u(t)$.