Séries entières & algèbres de Fréchet

Laurent Poinsot

Séminaire CIP

Plan

Plan

Plan

Plan

Espace vectoriel topologique

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) et τ une topologie sur E. (E, τ) est un **espace vectoriel topologique** si, et seulement si, les lois d'espace vectoriel de E sont continues. On dit aussi que τ est une **topologie d'espace vectoriel** (sur E).

Semi-norme

Soit V un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Une application $p : V \to \mathbb{R}_+$ est une **semi-norme** sur V si, et seulement si, quels que soient $x, y \in V$, $\lambda \in \mathbb{K}$,

1. $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$ (sous-additivité) ;
2. $p(\lambda x) = |\lambda| p(x)$ (homogénéité).

Espace vectoriel topologique localement convexe

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Une famille $\mathcal{P}$ de semi-normes sur E définit la topologie localement convexe $\tau_{\mathcal{P}}$ d'espace vectoriel sur E dont une base de voisinages de zéro est donnée par

$$U_p(\epsilon) := \{x \in E : p(x) < \epsilon\} \tag{1}$$

pour $p \in \mathcal{P}$, $\epsilon > 0$.

$(E, \mathcal{P})$ est alors un **espace vectoriel topologique localement convexe** (et toutes les topologies localement convexe peuvent être définies de cette manière).

De plus si l'ensemble $\mathcal{P}$ des semi-normes est séparant, $\tau_{\mathcal{P}}$ est séparée.

Espace vectoriel topologique localement convexe

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Une famille $\mathcal{P}$ de semi-normes sur E définit la topologie localement convexe $\tau_{\mathcal{P}}$ d'espace vectoriel sur E dont une base de voisinages de zéro est donnée par

$$U_p(\epsilon) := \{x \in E : p(x) < \epsilon\} \tag{1}$$

pour $p \in \mathcal{P}$, $\epsilon > 0$.
$(E, \mathcal{P})$ est alors un **espace vectoriel topologique localement convexe** (et toutes les topologies localement convexe peuvent être définies de cette manière).
De plus si l'ensemble $\mathcal{P}$ des semi-normes est séparant, $\tau_{\mathcal{P}}$ est séparée.

Espace vectoriel topologique localement convexe

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Une famille $\mathcal{P}$ de semi-normes sur E définit la topologie localement convexe $\tau_{\mathcal{P}}$ d'espace vectoriel sur E dont une base de voisinages de zéro est donnée par

$$U_p(\epsilon) := \{x \in E : p(x) < \epsilon\} \quad (1)$$

pour $p \in \mathcal{P}$, $\epsilon > 0$.
$(E, \mathcal{P})$ est alors un **espace vectoriel topologique localement convexe** (et toutes les topologies localement convexe peuvent être définies de cette manière).
De plus si l'ensemble $\mathcal{P}$ des semi-normes est séparant, $\tau_{\mathcal{P}}$ est séparée.

Espace de Fréchet

Un **espace de Fréchet** F est un espace vectoriel topologique localement convexe métrisable (donc séparé) et complet. Sa topologie est définie par une famille dénombrable de semi-normes $\{p_k\}_{k\in\mathbb{N}}$.

Critère de convergence : Une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de F converge vers x si, et seulement si, quel que soit $k \in \mathbb{N}$,

$$\lim_{n\to\infty} p_k(x_n - x) = 0 . \tag{2}$$

Espace de Fréchet

Un **espace de Fréchet** F est un espace vectoriel topologique localement convexe métrisable (donc séparé) et complet. Sa topologie est définie par une famille dénombrable de semi-normes $\{p_k\}_{k\in\mathbb{N}}$.

Critère de convergence : Une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de F converge vers x si, et seulement si, quel que soit $k \in \mathbb{N}$,

$$\lim_{n\to\infty} p_k(x_n - x) = 0 \ . \tag{2}$$

Exemples d'espaces de Fréchet

1. Tout espace de Banach est un espace de Fréchet ;
2. $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ avec $p_k((a_n)_{n\in\mathbb{N}}) := \sum_{i=0}^{k} |a_i|$;
3. $C^\infty([a,b])$ avec $p_k(f) := \sum_{i=0}^{k} \sup_{x\in[a,b]} |D^i f(x)|$;
4. $C^0(\mathbb{R})$ avec $p_k(f) := \sup\{|f(x)| : -k \leq x \leq k\}$.

Exemples d'espaces de Fréchet

1. Tout espace de Banach est un espace de Fréchet ;
2. $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ avec $p_k((a_n)_{n\in\mathbb{N}}) := \sum_{i=0}^{k} |a_i|$;
3. $C^{\infty}([a,b])$ avec $p_k(f) := \sum_{i=0}^{k} \sup_{x\in[a,b]} |D^i f(x)|$;
4. $C^0(\mathbb{R})$ avec $p_k(f) := \sup\{|f(x)| : -k \leq x \leq k\}$.

Exemples d'espaces de Fréchet

1. Tout espace de Banach est un espace de Fréchet ;
2. $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ avec $p_k((a_n)_{n\in\mathbb{N}}) := \sum_{i=0}^{k} |a_i|$;
3. $C^\infty([a,b])$ avec $p_k(f) := \sum_{i=0}^{k} \sup_{x\in[a,b]} |D^i f(x)|$;
4. $C^0(\mathbb{R})$ avec $p_k(f) := \sup\{|f(x)| : -k \leq x \leq k\}$.

Exemples d'espaces de Fréchet

1. Tout espace de Banach est un espace de Fréchet ;
2. $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ avec $p_k((a_n)_{n\in\mathbb{N}}) := \sum_{i=0}^{k} |a_i|$;
3. $C^\infty([a,b])$ avec $p_k(f) := \sum_{i=0}^{k} \sup_{x\in[a,b]} |D^i f(x)|$;
4. $C^0(\mathbb{R})$ avec $p_k(f) := \sup\{|f(x)| : -k \leq x \leq k\}$.

Exemples d'espaces de Fréchet

1. Tout espace de Banach est un espace de Fréchet ;
2. $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ avec $p_k((a_n)_{n\in\mathbb{N}}) := \sum_{i=0}^{k} |a_i|$;
3. $C^{\infty}([a,b])$ avec $p_k(f) := \sum_{i=0}^{k} \sup_{x\in[a,b]} |D^i f(x)|$;
4. $C^0(\mathbb{R})$ avec $p_k(f) := \sup\{|f(x)| : -k \leq x \leq k\}$.

Plan

Algèbre topologique

Par convention, toutes les algèbres considérées dans cette présentation sont supposées associatives.

Soit A une $\mathbb{K}$-algèbre et τ une topologie sur A. (A, τ) est une **algèbre topologique** si, et seulement si, les lois d'algèbres sont continues (en particulier l'espace vectoriel sous-jacent à A est un espace vectoriel topologique).

Algèbre topologique

Par convention, toutes les algèbres considérées dans cette présentation sont supposées associatives.
Soit A une $\mathbb{K}$-algèbre et τ une topologie sur A. (A, τ) est une **algèbre topologique** si, et seulement si, les lois d'algèbres sont continues (en particulier l'espace vectoriel sous-jacent à A est un espace vectoriel topologique).

Semi-norme sous-multiplicative

Soit A une $\mathbb{K}$-algèbre et p une semi-norme de l'espace vectoriel sous-jacent à A. p est dite **sous-multiplicative** si, et seulement si, quels que soient $x, y \in A$,

$$p(xy) \leq p(x)p(y) \ . \tag{3}$$

Algèbre topologique localement convexe

Une **algèbre topologique localement convexe** est la donnée de $(A, \mathcal{P})$ avec

1. A est une $\mathbb{K}$-algèbre ;
2. $\mathcal{P}$ est une famille de semi-normes de A sous-multiplicatives ;
3. A muni de la topologie $\tau_{\mathcal{P}}$ définie par $\mathcal{P}$ est une algèbre topologique.

Si A est unifère (1_A), alors on demande aussi

$$p(1_A) = 1 \qquad (4)$$

quelle que soit la semi-norme $p \in \mathcal{P}$ (on dit que p **respecte l'identité multiplicative**).

Algèbre topologique localement convexe

Une **algèbre topologique localement convexe** est la donnée de $(A, \mathcal{P})$ avec

1. A est une $\mathbb{K}$-algèbre ;
2. $\mathcal{P}$ est une famille de semi-normes de A sous-multiplicatives ;
3. A muni de la topologie $\tau_{\mathcal{P}}$ définie par $\mathcal{P}$ est une algèbre topologique.

Si A est unifère (1_A), alors on demande aussi

$$p(1_A) = 1 \tag{4}$$

quelle que soit la semi-norme $p \in \mathcal{P}$ (on dit que p **respecte l'identité multiplicative**).

Lemme

Soit $(A, \mathcal{P})$ une algèbre topologique localement convexe telle que

1. quelle que soit $p \in \mathcal{P}$, $p \neq 0$;
2. A est unifère (1_A).

Alors il existe une famille de semi-normes $\mathcal{P}'$ de A équivalente à $\mathcal{P}$ telle que quelle que soit $p' \in \mathcal{P}'$, p' est sous-multiplicative et $p'(1_A) = 1$.

Lemme

Soit $(A, \mathcal{P})$ une algèbre topologique localement convexe telle que

1. quelle que soit $p \in \mathcal{P}$, $p \neq 0$;
2. A est unifère (1_A).

Alors il existe une famille de semi-normes $\mathcal{P}'$ de A équivalente à $\mathcal{P}$ telle que quelle que soit $p' \in \mathcal{P}'$, p' est sous-multiplicative et $p'(1_A) = 1$.

Preuve (1/3)

Soit $p \in \mathcal{P}$. Puisque par hypothèse p n'est pas identiquement nulle, $p(1_A) \neq 0$.

La fonction

$$p'(x) := \sup\{p(xy) : p(y) = 1\},\ x \in A\ , \tag{5}$$

est une semi-norme bien définie sur A telle que

$$\begin{cases} p'(x) & \leq & p(x) & \forall x \in A\ , \\ p'(1_A) & = & 1 & . \end{cases} \tag{6}$$

Preuve (1/3)

Soit $p \in \mathcal{P}$. Puisque par hypothèse p n'est pas identiquement nulle, $p(1_A) \neq 0$.
La fonction

$$p'(x) := \sup\{p(xy) : p(y) = 1\},\ x \in A\,, \tag{5}$$

est une semi-norme bien définie sur A telle que

$$\begin{cases} p'(x) & \leq & p(x) & \forall x \in A\,, \\ p'(1_A) & = & 1 & . \end{cases} \tag{6}$$

Preuve (1/3)

Soit $p \in \mathcal{P}$. Puisque par hypothèse p n'est pas identiquement nulle, $p(1_A) \neq 0$.
La fonction

$$p'(x) := \sup\{p(xy) : p(y) = 1\}, \; x \in A \,, \tag{5}$$

est une semi-norme bien définie sur A telle que

$$\begin{cases} p'(x) & \leq & p(x) & \forall x \in A \,, \\ p'(1_A) & = & 1 & . \end{cases} \tag{6}$$

Preuve (2/3)

En particulier, pour tout $x, y \in A$, $p \in \mathcal{P}$,

$$p(xy) \leq p'(x)p(y)\ . \tag{7}$$

En effet si $p(y) = 0$, alors $p(xy) = 0 = p'(x)p(y)\ \forall x \in A$.
Si $p(y) \neq 0$, alors $p(\frac{y}{p(y)}) = 1$, donc d'après la définition de p', $p(xy) = p(y)p(x\frac{y}{p(y)}) \leq p(y)p'(x)\ \forall x \in A$.
Il en résulte que quel que soit $p \in \mathcal{P}$, quel que soit $x \in A$,

$$p'(x) \leq p(x) \leq p'(x)p(1_A)\ . \tag{8}$$

Ainsi $\mathcal{P}$ et $\{p'\}_{p \in \mathcal{P}}$ définissent la même topologie.

Preuve (2/3)

En particulier, pour tout $x, y \in A$, $p \in \mathcal{P}$,

$$p(xy) \leq p'(x)p(y) \ . \tag{7}$$

En effet si $p(y) = 0$, alors $p(xy) = 0 = p'(x)p(y)\ \forall x \in A$.
Si $p(y) \neq 0$, alors $p(\frac{y}{p(y)}) = 1$, donc d'après la définition de p', $p(xy) = p(y)p(x\frac{y}{p(y)}) \leq p(y)p'(x)\ \forall x \in A$.
Il en résulte que quel que soit $p \in \mathcal{P}$, quel que soit $x \in A$,

$$p'(x) \leq p(x) \leq p'(x)p(1_A) \ . \tag{8}$$

Ainsi $\mathcal{P}$ et $\{p'\}_{p\in\mathcal{P}}$ définissent la même topologie.

Preuve (2/3)

En particulier, pour tout $x, y \in A$, $p \in \mathcal{P}$,

$$p(xy) \leq p'(x)p(y)\ . \tag{7}$$

En effet si $p(y) = 0$, alors $p(xy) = 0 = p'(x)p(y)\ \forall x \in A$.
Si $p(y) \neq 0$, alors $p(\frac{y}{p(y)}) = 1$, donc d'après la définition de p', $p(xy) = p(y)p(x\frac{y}{p(y)}) \leq p(y)p'(x)\ \forall x \in A$.
Il en résulte que quel que soit $p \in \mathcal{P}$, quel que soit $x \in A$,

$$p'(x) \leq p(x) \leq p'(x)p(1_A)\ . \tag{8}$$

Ainsi $\mathcal{P}$ et $\{p'\}_{p\in\mathcal{P}}$ définissent la même topologie.

Preuve (2/3)

En particulier, pour tout $x, y \in A$, $p \in \mathcal{P}$,

$$p(xy) \leq p'(x)p(y) \ . \tag{7}$$

En effet si $p(y) = 0$, alors $p(xy) = 0 = p'(x)p(y)$ $\forall x \in A$.
Si $p(y) \neq 0$, alors $p(\frac{y}{p(y)}) = 1$, donc d'après la définition de p', $p(xy) = p(y)p(x\frac{y}{p(y)}) \leq p(y)p'(x)$ $\forall x \in A$.
Il en résulte que quel que soit $p \in \mathcal{P}$, quel que soit $x \in A$,

$$p'(x) \leq p(x) \leq p'(x)p(1_A) \ . \tag{8}$$

Ainsi $\mathcal{P}$ et $\{p'\}_{p\in\mathcal{P}}$ définissent la même topologie.

Preuve (2/3)

En particulier, pour tout $x, y \in A$, $p \in \mathcal{P}$,

$$p(xy) \leq p'(x)p(y) \ . \tag{7}$$

En effet si $p(y) = 0$, alors $p(xy) = 0 = p'(x)p(y)$ $\forall x \in A$.
Si $p(y) \neq 0$, alors $p(\frac{y}{p(y)}) = 1$, donc d'après la définition de p', $p(xy) = p(y)p(x\frac{y}{p(y)}) \leq p(y)p'(x)$ $\forall x \in A$.
Il en résulte que quel que soit $p \in \mathcal{P}$, quel que soit $x \in A$,

$$p'(x) \leq p(x) \leq p'(x)p(1_A) \ . \tag{8}$$

Ainsi $\mathcal{P}$ et $\{p'\}_{p\in\mathcal{P}}$ définissent la même topologie.

Preuve (3/3)

Il reste à montrer que toutes les semi-normes p' sont sous-multiplicatives.

Soit $y \in A$ avec $p(y) = 1$ et soient $x, z \in A$. Alors on a

$$p((xz)y) \leq p'(x)p(zy) \leq p'(x)p'(z) \tag{9}$$

et donc

$$p'(xz) \leq p'(x)p'(z) . \tag{10}$$

Preuve (3/3)

Il reste à montrer que toutes les semi-normes p' sont sous-multiplicatives.
Soit $y \in A$ avec $p(y) = 1$ et soient $x, z \in A$. Alors on a

$$p((xz)y) \leq p'(x)p(zy) \leq p'(x)p'(z) \tag{9}$$

et donc

$$p'(xz) \leq p'(x)p'(z) . \tag{10}$$

Preuve (3/3)

Il reste à montrer que toutes les semi-normes p' sont sous-multiplicatives.
Soit $y \in A$ avec $p(y) = 1$ et soient $x, z \in A$. Alors on a

$$p((xz)y) \leq p'(x)p(zy) \leq p'(x)p'(z) \quad (9)$$

et donc

$$p'(xz) \leq p'(x)p'(z) . \quad (10)$$

Preuve (3/3)

Il reste à montrer que toutes les semi-normes p' sont sous-multiplicatives.
Soit $y \in A$ avec $p(y) = 1$ et soient $x, z \in A$. Alors on a

$$p((xz)y) \leq p'(x)p(zy) \leq p'(x)p'(z) \tag{9}$$

et donc

$$p'(xz) \leq p'(x)p'(z) \ . \tag{10}$$

Algèbre de Fréchet

Une **algèbre de Fréchet** est une algèbre topologique localement convexe métrisable (donc séparée) et complète (en particulier son espace vectoriel sous-jacent est un espace de Fréchet). Sa topologie est définie par une famille dénombrable de semi-normes sous-multiplicatives (et si l'algèbre est unifère, en vertu de ce qui précède, les semi-normes respectent l'unité multiplicative).

Algèbre de Fréchet

Une **algèbre de Fréchet** est une algèbre topologique localement convexe métrisable (donc séparée) et complète (en particulier son espace vectoriel sous-jacent est un espace de Fréchet). Sa topologie est définie par une famille dénombrable de semi-normes sous-multiplicatives (et si l'algèbre est unifère, en vertu de ce qui précède, les semi-normes respectent l'unité multiplicative).

Exemples d'algèbres de Fréchet

1. $\mathbb{C}[[z]]$ avec la topologie produit de $\mathbb{C}$;
2. $\mathrm{LT}(\mathbb{N}, \mathbb{C})$ avec $p_{m,n}(M) := \sum_{n \leq j \leq i \leq m} |M[i,j]|$ (pour $0 \leq n \leq m$) ;
3. Soit R une relation d'ordre sur $\mathbb{N}$ localement finie ($\forall m, n \in \mathbb{N}$ tel que $(m,n) \in R$, $[m,n] := \{k \in \mathbb{N} : (m,k) \in R \text{ et } (k,n) \in R\}$ est fini). Alors $A_R := \{M \in \mathbb{C}^{\mathbb{N} \times \mathbb{N}} : M[i,j] = 0 \text{ si } (i,j) \notin R\}$ avec $p_{m,n}(M) := \sum_{i,j : [i,j] \subseteq [m,n]} |M[i,j]|$ (pour $(m,n) \in R$) est une algèbre de Fréchet.

Exemples d'algèbres de Fréchet

1. $\mathbb{C}[[z]]$ avec la topologie produit de $\mathbb{C}$;
2. $\mathrm{LT}(\mathbb{N}, \mathbb{C})$ avec $p_{m,n}(M) := \sum_{n \leq j \leq i \leq m} |M[i,j]|$ (pour $0 \leq n \leq m$) ;
3. Soit R une relation d'ordre sur $\mathbb{N}$ localement finie ($\forall m, n \in \mathbb{N}$ tel que $(m,n) \in R$, $[m,n] := \{k \in \mathbb{N} : (m,k) \in R \text{ et } (k,n) \in R\}$ est fini). Alors $A_R := \{M \in \mathbb{C}^{\mathbb{N} \times \mathbb{N}} : M[i,j] = 0 \text{ si } (i,j) \notin R\}$ avec $p_{m,n}(M) := \sum_{i,j : [i,j] \subseteq [m,n]} |M[i,j]|$ (pour $(m,n) \in R$) est une algèbre de Fréchet.

Exemples d'algèbres de Fréchet

1. $\mathbb{C}[[z]]$ avec la topologie produit de $\mathbb{C}$;
2. $\mathtt{LT}(\mathbb{N}, \mathbb{C})$ avec $p_{m,n}(M) := \sum_{n \leq j \leq i \leq m} |M[i,j]|$ (pour $0 \leq n \leq m$) ;
3. Soit R une relation d'ordre sur $\mathbb{N}$ localement finie ($\forall m, n \in \mathbb{N}$ tel que $(m, n) \in R$, $[m, n] := \{k \in \mathbb{N} : (m, k) \in R$ et $(k, n) \in R\}$ est fini). Alors $A_R := \{M \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}} : M[i,j] = 0$ si $(i,j) \notin R\}$ avec $p_{m,n}(M) := \sum_{i,j : [i,j] \subseteq [m,n]} |M[i,j]|$ (pour $(m, n) \in R$) est une algèbre de Fréchet.

Exemples d'algèbres de Fréchet

1. $\mathbb{C}[[z]]$ avec la topologie produit de $\mathbb{C}$;
2. $\mathrm{LT}(\mathbb{N}, \mathbb{C})$ avec $p_{m,n}(M) := \sum_{n \leq j \leq i \leq m} |M[i,j]|$ (pour $0 \leq n \leq m$) ;
3. Soit R une relation d'ordre sur $\mathbb{N}$ localement finie ($\forall m, n \in \mathbb{N}$ tel que $(m,n) \in R$, $[m,n] := \{k \in \mathbb{N} : (m,k) \in R \text{ et } (k,n) \in R\}$ est fini). Alors $A_R := \{M \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}} : M[i,j] = 0 \text{ si } (i,j) \notin R\}$ avec $p_{m,n}(M) := \sum_{i,j : [i,j] \subseteq [m,n]} |M[i,j]|$ (pour $(m,n) \in R$) est une algèbre de Fréchet.

Exemples d'algèbres de Fréchet

1. $\mathbb{C}[[z]]$ avec la topologie produit de $\mathbb{C}$;
2. $\mathrm{LT}(\mathbb{N}, \mathbb{C})$ avec $p_{m,n}(M) := \sum_{n \leq j \leq i \leq m} |M[i,j]|$ (pour $0 \leq n \leq m$) ;
3. Soit R une relation d'ordre sur $\mathbb{N}$ localement finie ($\forall m, n \in \mathbb{N}$ tel que $(m,n) \in R$, $[m,n] := \{k \in \mathbb{N} : (m,k) \in R \text{ et } (k,n) \in R\}$ est fini). Alors $A_R := \{M \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}} : M[i,j] = 0 \text{ si } (i,j) \notin R\}$ avec $p_{m,n}(M) := \sum_{i,j : [i,j] \subseteq [m,n]} |M[i,j]|$ (pour $(m,n) \in R$) est une algèbre de Fréchet.

Exemples d'algèbres de Fréchet

1. $\mathbb{C}[[z]]$ avec la topologie produit de $\mathbb{C}$;
2. $\mathtt{LT}(\mathbb{N},\mathbb{C})$ avec $p_{m,n}(M) := \sum_{n\leq j\leq i\leq m} |M[i,j]|$ (pour $0\leq n\leq m$) ;
3. Soit R une relation d'ordre sur $\mathbb{N}$ localement finie ($\forall m,n\in\mathbb{N}$ tel que $(m,n)\in R$, $[m,n] := \{k\in\mathbb{N} : (m,k)\in R \text{ et } (k,n)\in R\}$ est fini). Alors $A_R := \{M\in\mathbb{C}^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}} : M[i,j]=0 \text{ si } (i,j)\notin R\}$ avec $p_{m,n}(M) := \sum_{i,j:[i,j]\subseteq[m,n]} |M[i,j]|$ (pour $(m,n)\in R$) est une algèbre de Fréchet.

Exemples d'algèbres de Fréchet (suite)

Notons que A_R est l'algèbre d'incidence de $(\mathbb{N}, R)$.
En particulier si tous les idéaux d'ordre principaux de $(\mathbb{N}, R)$, $(\leftarrow, m] := \{k \in \mathbb{N} : (k, m) \in R\}$, sont finis, alors pour $Z \in A_R$ défini par $Z[i, j] = 1$ si, et seulement si, $(i, j) \in R$, on a

$$(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = (\sum_{k\in(\leftarrow,n]} v_k)_{n\in\mathbb{N}} \Leftrightarrow (v_n)_{n\in\mathbb{N}} = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} Z^{-1} \,. \quad (11)$$

(Formule d'inversion de Möbius.)

Exemples d'algèbres de Fréchet (suite)

Notons que A_R est l'algèbre d'incidence de $(\mathbb{N}, R)$.
En particulier si tous les idéaux d'ordre principaux de $(\mathbb{N}, R)$, $(\leftarrow, m] := \{k \in \mathbb{N} : (k, m) \in R\}$, sont finis, alors pour $Z \in A_R$ défini par $Z[i, j] = 1$ si, et seulement si, $(i, j) \in R$, on a

$$(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = \Big(\sum_{k\in(\leftarrow,n]} v_k\Big)_{n\in\mathbb{N}} \Leftrightarrow (v_n)_{n\in\mathbb{N}} = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} Z^{-1} . \quad (11)$$

(Formule d'inversion de Möbius.)

Exemples d'algèbres de Fréchet (suite)

Notons que A_R est l'algèbre d'incidence de $(\mathbb{N}, R)$.
En particulier si tous les idéaux d'ordre principaux de $(\mathbb{N}, R)$, $(\leftarrow, m] := \{k \in \mathbb{N} : (k, m) \in R\}$, sont finis, alors pour $Z \in A_R$ défini par $Z[i,j] = 1$ si, et seulement si, $(i,j) \in R$, on a

$$(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = (\sum_{k\in(\leftarrow,n]} v_k)_{n\in\mathbb{N}} \Leftrightarrow (v_n)_{n\in\mathbb{N}} = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} Z^{-1} \ . \qquad (11)$$

(**Formule d'inversion de Möbius.**)

Remarque (1/2)

On peut trouver une algèbre topologique unifère localement convexe, dont l'espace vectoriel sous-jacent est un espace de Fréchet, et qui n'est pas une algèbre de Fréchet (on ne peut pas trouver de famille équivalente de semi-normes sous-multiplicatives).

Remarque (2/2)

Soit $H(\mathbb{D})$ l'algèbre de toutes les fonctions holomorphes sur le disque unité ouvert $\mathbb{D}$. On munit $H(\mathbb{D})$ des opérations point à point d'espace vectoriel et du produit de Hadamard :

$$(fg)(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=r} f(z)g(xz^{-1})dz \text{ avec } x \in \mathbb{D} \text{ et } |x| < r < 1 \,. \tag{12}$$

Équipée de la topologie compact-ouvert, $H(\mathbb{D})$ est à la fois un espace de Fréchet et une algèbre topologique (unifère) localement convexe qui n'est pas une algèbre de Fréchet.

Remarque (2/2)

Soit $H(\mathbb{D})$ l'algèbre de toutes les fonctions holomorphes sur le disque unité ouvert $\mathbb{D}$. On munit $H(\mathbb{D})$ des opérations point à point d'espace vectoriel et du produit de Hadamard :

$$(fg)(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=r} f(z)g(xz^{-1})dz \text{ avec } x \in \mathbb{D} \text{ et } |x| < r < 1\ . \tag{12}$$

Équipée de la topologie compact-ouvert, $H(\mathbb{D})$ est à la fois un espace de Fréchet et une algèbre topologique (unifère) localement convexe qui n'est pas une algèbre de Fréchet.

Définition de l'exponentielle

Soit A une algèbre topologique séparée et unifère (1_A).

On définit l'**exponentielle** de A par

$$Exp(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \ (x \in A,\ x^0 := 1_A) \tag{13}$$

dès que la série dans le membre de droite de l'égalité converge dans A.

On note $\mathcal{D}$ le domaine de définition de Exp et $\mathcal{R}$ son image.

Ni $\mathcal{D}$ ni $\mathcal{R}$ n'est vide puisque $0 \in \mathcal{D}$ et $1_A \in \mathcal{R}$.

Définition de l'exponentielle

Soit A une algèbre topologique séparée et unifère (1_A).
On définit l'**exponentielle** de A par

$$Exp(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}\ (x \in A,\ x^0 := 1_A) \tag{13}$$

dès que la série dans le membre de droite de l'égalité converge dans A.
On note $\mathcal{D}$ le domaine de définition de Exp et $\mathcal{R}$ son image.
Ni $\mathcal{D}$ ni $\mathcal{R}$ n'est vide puisque $0 \in \mathcal{D}$ et $1_A \in \mathcal{R}$.

Définition de l'exponentielle

Soit A une algèbre topologique séparée et unifère (1_A).
On définit l'**exponentielle** de A par

$$Exp(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \ (x \in A,\ x^0 := 1_A) \tag{13}$$

dès que la série dans le membre de droite de l'égalité converge dans A.
On note $\mathcal{D}$ le domaine de définition de Exp et $\mathcal{R}$ son image.
Ni $\mathcal{D}$ ni $\mathcal{R}$ n'est vide puisque $0 \in \mathcal{D}$ et $1_A \in \mathcal{R}$.

Définition de l'exponentielle

Soit A une algèbre topologique séparée et unifère (1_A).
On définit l'**exponentielle** de A par

$$Exp(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \; (x \in A, \; x^0 := 1_A) \tag{13}$$

dès que la série dans le membre de droite de l'égalité converge dans A.
On note $\mathcal{D}$ le domaine de définition de Exp et $\mathcal{R}$ son image.
Ni $\mathcal{D}$ ni $\mathcal{R}$ n'est vide puisque $0 \in \mathcal{D}$ et $1_A \in \mathcal{R}$.

Convergence absolue dans un espace de Fréchet

Soit $(E, \{p_k\}_{k\in\mathbb{N}})$ un espace de Fréchet. Une série $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ de E est dite **absolument convergente** si, et seulement si, $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} p_k(x_n)$ converge dans $\mathbb{R}$ quel que soit $k \in \mathbb{N}$.

Convergence absolue dans un espace de Fréchet (suite)

Soit $(E, \{p_k\}_{k\in\mathbb{N}})$ un espace de Fréchet. Toute série absolument convergente $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ de E est convergente.

Preuve : Cela provient de l'inégalité

$$p_k(x_{m+1} + \cdots + x_{m+n}) \leq p_k(x_{m+1}) + \cdots + p_k(x_{m+n}) \ (k \in \mathbb{N}) . \tag{14}$$

Convergence absolue dans un espace de Fréchet (suite)

Soit $(E, \{p_k\}_{k\in\mathbb{N}})$ un espace de Fréchet. Toute série absolument convergente $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ de E est convergente.

Preuve : Cela provient de l'inégalité

$$p_k(x_{m+1} + \cdots + x_{m+n}) \leq p_k(x_{m+1}) + \cdots + p_k(x_{m+n}) \ (k \in \mathbb{N}) \ . \tag{14}$$

Proposition

Soit $(A, \{p_k\}_{k\in\mathbb{N}})$ une algèbre de Fréchet (unifère). $\mathcal{D} = A$ et de plus, la série $Exp(x)$ converge absolument dans A pour tout $x \in A$.

Preuve

Puisque les semi-normes sont sous-multiplicatives, on a

$$u_n := p_k\left(\frac{x^n}{n!}\right) \leq \frac{p_k(x)^n}{n!} \tag{15}$$

et $\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{p_k(x)}{n+1} = 0$. La série $Exp(x)$ converge absolument et donc converge également dans A quel que soit $x \in A$.

Propriétés de l'exponentielle

1. $Exp(0) = 1_A$ et $Exp(1_A) = e1_A$;
2. $Exp(x + y) = Exp(x)Exp(y)$ lorsque x et y commutent ;
3. $Exp(-x) = Exp(x)^{-1}$.

Propriétés de l'exponentielle

1. $Exp(0) = 1_A$ et $Exp(1_A) = e1_A$;
2. $Exp(x+y) = Exp(x)Exp(y)$ lorsque x et y commutent ;
3. $Exp(-x) = Exp(x)^{-1}$.

Propriétés de l'exponentielle

1. $Exp(0) = 1_A$ et $Exp(1_A) = e1_A$;
2. $Exp(x + y) = Exp(x)Exp(y)$ lorsque x et y commutent ;
3. $Exp(-x) = Exp(x)^{-1}$.

Propriétés de l'exponentielle

1. $Exp(0) = 1_A$ et $Exp(1_A) = e1_A$;
2. $Exp(x + y) = Exp(x)Exp(y)$ lorsque x et y commutent ;
3. $Exp(-x) = Exp(x)^{-1}$.

Preuve

1. Évident ;
2. $Exp(x+y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+y)^n}{n!}$. En développant les éléments de la série dans le membre de droite de l'égalité, et en regroupant les termes (ce qui est permis en raison de l'absolue convergence), on trouve que le coefficient de $\frac{y^n}{n!}$ n'est autre que $Exp(x)$. Ainsi,
$$Exp(x+y) = Exp(x)(1_A + y + \frac{y^2}{2!} + \dots) = Exp(x)Exp(y)\,; \tag{16}$$
3. Cela provient de (2) en prenant $y = -x$ et en utilisant (1).

Preuve

1. Évident ;
2. $Exp(x+y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+y)^n}{n!}$. En développant les éléments de la série dans le membre de droite de l'égalité, et en regroupant les termes (ce qui est permis en raison de l'absolue convergence), on trouve que le coefficient de $\frac{y^n}{n!}$ n'est autre que $Exp(x)$. Ainsi,
$$Exp(x+y) = Exp(x)(1_A + y + \frac{y^2}{2!} + \dots) = Exp(x)Exp(y) ; \quad (16)$$
3. Cela provient de (2) en prenant $y = -x$ et en utilisant (1).

Preuve

1. Évident ;
2. $Exp(x+y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+y)^n}{n!}$. En développant les éléments de la série dans le membre de droite de l'égalité, et en regroupant les termes (ce qui est permis en raison de l'absolue convergence), on trouve que le coefficient de $\frac{y^n}{n!}$ n'est autre que $Exp(x)$. Ainsi,

$$Exp(x+y) = Exp(x)(1_A+y+\frac{y^2}{2!}+\dots) = Exp(x)Exp(y)\,; \tag{16}$$

3. Cela provient de (2) en prenant $y = -x$ et en utilisant (1).

Preuve

1. Évident ;
2. $Exp(x+y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+y)^n}{n!}$. En développant les éléments de la série dans le membre de droite de l'égalité, et en regroupant les termes (ce qui est permis en raison de l'absolue convergence), on trouve que le coefficient de $\frac{y^n}{n!}$ n'est autre que $Exp(x)$. Ainsi,

$$Exp(x+y) = Exp(x)(1_A+y+\frac{y^2}{2!}+\dots) = Exp(x)Exp(y)\,; \tag{16}$$

3. Cela provient de (2) en prenant $y = -x$ et en utilisant (1).

Logarithme (proposition & définition)

Soit $(A, \{p_k\}_{k\in\mathbb{N}})$ une algèbre de Fréchet (unifère). Alors :

1. La série $Log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}$ converge absolument pour tout $x \in A$ tel que quel que soit $k \in \mathbb{N}$, $p_k(x) < 1$;
2. $Exp(Log(1+x)) = 1 + x$.

Logarithme (proposition & définition)

Soit $(A, \{p_k\}_{k\in\mathbb{N}})$ une algèbre de Fréchet (unifère). Alors :

1. La série $Log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}$ converge absolument pour tout $x \in A$ tel que quel que soit $k \in \mathbb{N}$, $p_k(x) < 1$;
2. $Exp(Log(1+x)) = 1 + x$.

Logarithme (proposition & définition)

Soit $(A, \{p_k\}_{k\in\mathbb{N}})$ une algèbre de Fréchet (unifère). Alors :

1. La série $Log(1+x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}$ converge absolument pour tout $x \in A$ tel que quel que soit $k \in \mathbb{N}$, $p_k(x) < 1$;
2. $Exp(Log(1+x)) = 1 + x$.

Preuve

1. Supposons que pour tout entier k, $p_k(x) < 1$: la série numérique $\sum_{n\geq 1} \frac{p_k(x)}{n}$ est donc convergente. Puisque $p_k((-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}) \leq \frac{p_k(x)^n}{n}$, la série définissant $Log(1+x)$ est absolument convergente donc converge dans A ;
2. L'identité $Exp(Log(1+x)) = 1 + x$ peut être vérifiée, comme dans le cas classique, en substituant la série $Log(1+x)$ dans chaque terme de la série

$$Exp(Log(1+x)) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{Log(1+x)^n}{n!} \tag{17}$$

puis en simplifiant (grâce à l'absolue convergence).

Preuve

1. Supposons que pour tout entier k, $p_k(x) < 1$: la série numérique $\sum_{n\geq 1} \frac{p_k(x)}{n}$ est donc convergente. Puisque $p_k((-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}) \leq \frac{p_k(x)^n}{n}$, la série définissant $Log(1+x)$ est absolument convergente donc converge dans A ;
2. L'identité $Exp(Log(1+x)) = 1 + x$ peut être vérifiée, comme dans le cas classique, en substituant la série $Log(1+x)$ dans chaque terme de la série

$$Exp(Log(1+x)) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{Log(1+x)^n}{n!} \tag{17}$$

puis en simplifiant (grâce à l'absolue convergence).

Preuve

1. Supposons que pour tout entier k, $p_k(x) < 1$: la série numérique $\sum_{n\geq 1} \dfrac{p_k(x)}{n}$ est donc convergente. Puisque $p_k((-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}) \leq \frac{p_k(x)^n}{n}$, la série définissant $Log(1+x)$ est absolument convergente donc converge dans A ;
2. L'identité $Exp(Log(1+x)) = 1+x$ peut être vérifiée, comme dans le cas classique, en substituant la série $Log(1+x)$ dans chaque terme de la série

$$Exp(Log(1+x)) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{Log(1+x)^n}{n!} \tag{17}$$

puis en simplifiant (grâce à l'absolue convergence).

Rappels

Une **série entière** de la variable λ est une série de terme général $f_n\lambda^n$, où n est un entier naturel et $f_n \in \mathbb{K}$. Par (double) abus, on notera $f(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n\lambda^n$ une telle série entière.

Rappelons enfin que $f(\lambda)$ converge absolument en tout point de son disque (ouvert) de convergence $D(0, R[$ où $R \in [0; +\infty]$ désigne son **rayon de convergence**.

Exemples : $exp(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!}$ avec $R = +\infty$ et

$log(1+\lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\lambda^n}{n}$ avec $R = 1$.

Rappels

Une **série entière** de la variable λ est une série de terme général $f_n\lambda^n$, où n est un entier naturel et $f_n \in \mathbb{K}$. Par (double) abus, on notera $f(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n\lambda^n$ une telle série entière.

Rappelons enfin que $f(\lambda)$ converge absolument en tout point de son disque (ouvert) de convergence $D(0, R[$ où $R \in [0; +\infty]$ désigne son **rayon de convergence**.

Exemples : $exp(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!}$ avec $R = +\infty$ et

$log(1+\lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\lambda^n}{n}$ avec $R = 1$.

Rappels

Une **série entière** de la variable λ est une série de terme général $f_n\lambda^n$, où n est un entier naturel et $f_n \in \mathbb{K}$. Par (double) abus, on notera $f(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n\lambda^n$ une telle série entière.

Rappelons enfin que $f(\lambda)$ converge absolument en tout point de son disque (ouvert) de convergence $D(0, R[$ où $R \in [0; +\infty]$ désigne son **rayon de convergence**.

Exemples : $exp(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!}$ avec $R = +\infty$ et $log(1+\lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\lambda^n}{n}$ avec $R = 1$.

Rappels

Une **série entière** de la variable λ est une série de terme général $f_n\lambda^n$, où n est un entier naturel et $f_n \in \mathbb{K}$. Par (double) abus, on notera $f(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n\lambda^n$ une telle série entière.

Rappelons enfin que $f(\lambda)$ converge absolument en tout point de son disque (ouvert) de convergence $D(0, R[$ où $R \in [0; +\infty]$ désigne son **rayon de convergence**.

Exemples : $exp(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!}$ avec $R = +\infty$ et $log(1+\lambda) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\lambda^n}{n}$ avec $R = 1$.

Soient $f(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n \lambda^n$ une série entière, A une algèbre topologique unifère et $x \in A$. On dit que f **opère sur** x si, et seulement si, la série $\sum_{n=0}^{\infty} f_n x^n$ converge dans A ; dans ce cas on note $f(x)$ cette dernière série.
Si maintenant $(A, \{p_k\})$ est une algèbre (unifère) de Fréchet, on dit que la série f **opère absolument sur** x si, et seulement si, $\sum_{n=0}^{\infty} p_k(f_n x^n)$ converge pour chaque k.
Si f opère absolument sur x, alors f opère sur x.

Soient $f(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n \lambda^n$ une série entière, A une algèbre topologique unifère et $x \in A$. On dit que f **opère sur** x si, et seulement si, la série $\sum_{n=0}^{\infty} f_n x^n$ converge dans A ; dans ce cas on note $f(x)$ cette dernière série.

Si maintenant $(A, \{p_k\})$ est une algèbre (unifère) de Fréchet, on dit que la série f **opère absolument sur** x si, et seulement si, $\sum_{n=0}^{\infty} p_k(f_n x^n)$ converge pour chaque k.

Si f opère absolument sur x, alors f opère sur x.

Soient $f(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n \lambda^n$ une série entière, A une algèbre topologique unifère et $x \in A$. On dit que f **opère sur** x si, et seulement si, la série $\sum_{n=0}^{\infty} f_n x^n$ converge dans A ; dans ce cas on note $f(x)$ cette dernière série.
Si maintenant $(A, \{p_k\})$ est une algèbre (unifère) de Fréchet, on dit que la série f **opère absolument sur** x si, et seulement si, $\sum_{n=0}^{\infty} p_k(f_n x^n)$ converge pour chaque k.
Si f opère absolument sur x, alors f opère sur x.

Soient $f(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n \lambda^n$ une série entière, A une algèbre topologique unifère et $x \in A$. On dit que f **opère sur** x si, et seulement si, la série $\sum_{n=0}^{\infty} f_n x^n$ converge dans A ; dans ce cas on note $f(x)$ cette dernière série.

Si maintenant $(A, \{p_k\})$ est une algèbre (unifère) de Fréchet, on dit que la série f **opère absolument sur** x si, et seulement si, $\sum_{n=0}^{\infty} p_k(f_n x^n)$ converge pour chaque k.

Si f opère absolument sur x, alors f opère sur x.

Proposition

Soit $(A, \{p_k\})$ est une algèbre (unifère) de Fréchet. Soit $f(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} f_n \lambda^n$ une série entière de rayon de convergence R. Alors $f(\lambda)$ opère absolument sur chaque élément de la partie $\bigcap_{k \geq 0} p_k^{-1}(D(0, R[))$ de A.

En particulier une série entière de rayon de convergence infini (c'est-à-dire une fonction entière) opère sur tous les éléments de A.

Proposition

Soit $(A, \{p_k\})$ est une algèbre (unifère) de Fréchet. Soit $f(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} f_n \lambda^n$ une série entière de rayon de convergence R. Alors $f(\lambda)$ opère absolument sur chaque élément de la partie $\bigcap_{k \geq 0} p_k^{-1}(D(0, R[))$ de A.

En particulier une série entière de rayon de convergence infini (c'est-à-dire une fonction entière) opère sur tous les éléments de A.

Proposition

Soit $(A, \{p_k\})$ est une algèbre (unifère) de Fréchet. Soit $f(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} f_n \lambda^n$ une série entière de rayon de convergence R. Alors $f(\lambda)$ opère absolument sur chaque élément de la partie $\bigcap_{k \geq 0} p_k^{-1}(D(0, R[))$ de A.

En particulier une série entière de rayon de convergence infini (c'est-à-dire une fonction entière) opère sur tous les éléments de A.