# Monoïdes partiels, Anneaux booléens et Formule exponentielle

Laurent Poinsot

Séminaire CIP

# Plan

# Plan

# Plan

# Plan

# Plan

# Plan

# Formule exponentielle : version informelle



Informellement, la formule exponentielle exprime le fait que "*la série génératrice exponentielle* $\mathrm{EGF}(S; z)$ *d'une classe de structures S est égale à l'exponentielle* $e^{\mathrm{EGF}(S_c; z)}$ *de la série génératrice exponentielle des sous-structures connexes* $S_c$", *i.e.*,

$$\mathrm{EGF}(S; z) = e^{\mathrm{EGF}(S_c; z)} . \tag{1}$$

# Formule exponentielle : version informelle

Informellement, la formule exponentielle exprime le fait que "*la série génératrice exponentielle* $\mathrm{EGF}(S;\, \mathrm{z})$ *d'une classe de structures* $S$ *est égale à l'exponentielle* $e^{\mathrm{EGF}(S_c;\mathrm{z})}$ *de la série génératrice exponentielle des sous-structures connexes* $S_c$", *i.e.*,

$$\mathrm{EGF}(S;\, \mathrm{z}) = e^{\mathrm{EGF}(S_c;\mathrm{z})} \,. \tag{1}$$

# Formule exponentielle : version informelle

Informellement, la formule exponentielle exprime le fait que "*la série génératrice exponentielle* $\mathrm{EGF}(S;\mathrm{z})$ *d'une classe de structures S est égale à l'exponentielle* $e^{\mathrm{EGF}(S_c;\mathrm{z})}$ *de la série génératrice exponentielle des sous-structures connexes* $S_c$", *i.e.*,

$$\mathrm{EGF}(S;\mathrm{z}) = e^{\mathrm{EGF}(S_c;\mathrm{z})} . \tag{1}$$

# Objectif



L'objectif de cette présentation est de définir un cadre formel général dans lequel on peut appliquer cette formule exponentielle.

# Objectif

L'objectif de cette présentation est de définir un cadre formel général dans lequel on peut appliquer cette formule exponentielle.

# Ingrédients



- Classe de structures admettant une série génératrice exponentielle ;
- Notions de structures *connexes* ou d'*atomes*.

# Ingrédients

- Classe de structures admettant une série génératrice exponentielle ;
- Notions de structures *connexes* ou d'*atomes*.

# Ingrédients



- Classe de structures admettant une série génératrice exponentielle ;
- Notions de structures *connexes* ou d'*atomes*.

# Série génératrice exponentielle

Soit $S = \bigcup_{n\geq 0} S_n$ une “classe de structures” (un ensemble d'ensembles) localement finie, *i.e.*, quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $S_n$ est fini. Sa série génératrice exponentielle $\mathrm{EGF}(S; \mathrm{z})$ est définie comme la série formelle de $\mathbb{Q}[[\mathrm{z}]]$ suivante

$$\mathrm{EGF}(S; \mathrm{z}) := \sum_{n\geq 0} \mathrm{card}(S_n)\frac{\mathrm{z}^n}{n!} . \qquad (2)$$

# Série génératrice exponentielle



Soit $S = \bigcup_{n \geq 0} S_n$ une “classe de structures” (un ensemble d’ensembles) localement finie, *i.e.*, quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $S_n$ est fini. Sa série génératrice exponentielle $\mathrm{EGF}(S; \mathrm{z})$ est définie comme la série formelle de $\mathbb{Q}[[\mathrm{z}]]$ suivante

$$\mathrm{EGF}(S; \mathrm{z}) := \sum_{n \geq 0} \mathrm{card}(S_n) \frac{\mathrm{z}^n}{n!} \ . \qquad (2)$$

# Série génératrice exponentielle



Soit $S = \bigcup_{n \geq 0} S_n$ une “classe de structures” (un ensemble d'ensembles) localement finie, *i.e.*, quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $S_n$ est fini. Sa série génératrice exponentielle $\mathrm{EGF}(S; \mathrm{z})$ est définie comme la série formelle de $\mathbb{Q}[[\mathrm{z}]]$ suivante

$$\mathrm{EGF}(S; \mathrm{z}) := \sum_{n \geq 0} \mathrm{card}(S_n) \frac{\mathrm{z}^n}{n!} \ . \tag{2}$$

# Exemple

Considérons le magma libre $\mathcal{M}$ sur une lettre $\mathrm{x}$. $\mathcal{M}_2$ n'est ici rien d'autre que

$$(\mathrm{xx})\mathrm{x},\ \mathrm{x}(\mathrm{xx}) \tag{3}$$

et $\mathcal{M}_3$ est

$$((\mathrm{xx})\mathrm{x})\mathrm{x},\ \mathrm{x}((\mathrm{xx})\mathrm{x}),\ (\mathrm{x}(\mathrm{xx}))\mathrm{x},\ \mathrm{x}(\mathrm{x}(\mathrm{xx})),\ (\mathrm{xx})(\mathrm{xx})\ . \tag{4}$$

Dans ce cas nous avons $\mathrm{card}(\mathcal{M}_n) = C_n$ où $C_n$ est le nombre de Catalan, et $\mathrm{EGF}(\mathcal{M}; \mathrm{z}) = \sum_{n\geq 0} C_n \frac{\mathrm{z}^n}{n!}$.

## Exemple



Considérons le magma libre $\mathcal{M}$ sur une lettre $\mathrm{x}$. $\mathcal{M}_2$ n'est ici rien d'autre que

$$(\mathrm{xx})\mathrm{x},\ \mathrm{x}(\mathrm{xx}) \tag{3}$$

et $\mathcal{M}_3$ est

$$((\mathrm{xx})\mathrm{x})\mathrm{x},\ \mathrm{x}((\mathrm{xx})\mathrm{x}),\ (\mathrm{x}(\mathrm{xx}))\mathrm{x},\ \mathrm{x}(\mathrm{x}(\mathrm{xx})),\ (\mathrm{xx})(\mathrm{xx})\ . \tag{4}$$

Dans ce cas nous avons $\mathrm{card}(\mathcal{M}_n) = C_n$ où $C_n$ est le nombre de Catalan, et $\mathrm{EGF}(\mathcal{M}; \mathrm{z}) = \sum_{n \geq 0} C_n \frac{\mathrm{z}^n}{n!}$.

# Exemple

Considérons le magma libre $\mathcal{M}$ sur une lettre $\mathrm{x}$. $\mathcal{M}_2$ n'est ici rien d'autre que

$$(\mathrm{xx})\mathrm{x},\ \mathrm{x}(\mathrm{xx}) \tag{3}$$

et $\mathcal{M}_3$ est

$$((\mathrm{xx})\mathrm{x})\mathrm{x},\ \mathrm{x}((\mathrm{xx})\mathrm{x}),\ (\mathrm{x}(\mathrm{xx}))\mathrm{x},\ \mathrm{x}(\mathrm{x}(\mathrm{xx})),\ (\mathrm{xx})(\mathrm{xx})\ . \tag{4}$$

Dans ce cas nous avons $\mathrm{card}(\mathcal{M}_n) = C_n$ où $C_n$ est le nombre de Catalan, et $\mathrm{EGF}(\mathcal{M}; \mathrm{z}) = \sum_{n \geq 0} C_n \frac{\mathrm{z}^n}{n!}$.

# Exemple

Considérons le magma libre $\mathcal{M}$ sur une lettre $\mathrm{x}$. $\mathcal{M}_2$ n'est ici rien d'autre que

$$(\mathrm{xx})\mathrm{x},\ \mathrm{x}(\mathrm{xx}) \tag{3}$$

et $\mathcal{M}_3$ est

$$((\mathrm{xx})\mathrm{x})\mathrm{x},\ \mathrm{x}((\mathrm{xx})\mathrm{x}),\ (\mathrm{x}(\mathrm{xx}))\mathrm{x},\ \mathrm{x}(\mathrm{x}(\mathrm{xx})),\ (\mathrm{xx})(\mathrm{xx})\ . \tag{4}$$

Dans ce cas nous avons $\mathrm{card}(\mathcal{M}_n) = C_n$ où $C_n$ est le nombre de Catalan, et $\mathrm{EGF}(\mathcal{M}; \mathrm{z}) = \sum_{n\geq 0} C_n \frac{\mathrm{z}^n}{n!}$.

# Exemple



Considérons le magma libre $\mathcal{M}$ sur une lettre $\mathrm{x}$. $\mathcal{M}_2$ n'est ici rien d'autre que

$$(\mathrm{xx})\mathrm{x},\ \mathrm{x}(\mathrm{xx}) \tag{3}$$

et $\mathcal{M}_3$ est

$$((\mathrm{xx})\mathrm{x})\mathrm{x},\ \mathrm{x}((\mathrm{xx})\mathrm{x}),\ (\mathrm{x}(\mathrm{xx}))\mathrm{x},\ \mathrm{x}(\mathrm{x}(\mathrm{xx})),\ (\mathrm{xx})(\mathrm{xx})\ . \tag{4}$$

Dans ce cas nous avons $\mathrm{card}(\mathcal{M}_n) = C_n$ où $C_n$ est le nombre de Catalan, et $\mathrm{EGF}(\mathcal{M}; \mathrm{z}) = \sum_{n \geq 0} C_n \frac{\mathrm{z}^n}{n!}$.

# Structures connexes



- Considérons la classe $\mathcal{G}$ des graphes (simples, non orientés, avec un nombre fini de sommets). Tout élément de $\mathcal{G}$ s'écrit de façon unique comme une somme disjointe de (sous-)graphes connexes. Ces graphes connexes constituent la sous-classe $\mathcal{G}_c$ des structures connexes de $\mathcal{G}$ ;
- Soit $G$ un groupe fini (abélien ou non). Soit $\mathrm{Rep}(G)$ l'ensemble (des classes d'isomorphisme) des représentations linéaires complexes de dimension finie. Soit $\widehat{G}$ un système de représentants des classes d'isomorphisme de représentations irréductibles. Tout élément de $\mathrm{Rep}(G)$ s'écrit comme une somme directe d'éléments de $\widehat{G}$. L'ensemble $\widehat{G}$ correspond aux structures connexes (ou atomiques) de $\mathrm{Rep}(G)$.

# Structures connexes

- Considérons la classe $\mathcal{G}$ des graphes (simples, non orientés, avec un nombre fini de sommets). Tout élément de $\mathcal{G}$ s'écrit de façon unique comme une somme disjointe de (sous-)graphes connexes. Ces graphes connexes constituent la sous-classe $\mathcal{G}_c$ des structures connexes de $\mathcal{G}$ ;
- Soit $G$ un groupe fini (abélien ou non). Soit $\mathrm{Rep}(G)$ l'ensemble (des classes d'isomorphisme) des représentations linéaires complexes de dimension finie. Soit $\widehat{G}$ un système de représentants des classes d'isomorphisme de représentations irréductibles. Tout élément de $\mathrm{Rep}(G)$ s'écrit comme une somme directe d'éléments de $\widehat{G}$. L'ensemble $\widehat{G}$ correspond aux structures connexes (ou atomiques) de $\mathrm{Rep}(G)$.

# Structures connexes



- Considérons la classe $\mathcal{G}$ des graphes (simples, non orientés, avec un nombre fini de sommets). Tout élément de $\mathcal{G}$ s'écrit de façon unique comme une somme disjointe de (sous-)graphes connexes. Ces graphes connexes constituent la sous-classe $\mathcal{G}_c$ des structures connexes de $\mathcal{G}$ ;
- Soit $G$ un groupe fini (abélien ou non). Soit $\mathrm{Rep}(G)$ l'ensemble (des classes d'isomorphisme) des représentations linéaires complexes de dimension finie. Soit $\widehat{G}$ un système de représentants des classes d'isomorphisme de représentations irréductibles. Tout élément de $\mathrm{Rep}(G)$ s'écrit comme une somme directe d'éléments de $\widehat{G}$. L'ensemble $\widehat{G}$ correspond aux structures connexes (ou atomiques) de $\mathrm{Rep}(G)$.

# Structures connexes



- Considérons la classe $\mathcal{G}$ des graphes (simples, non orientés, avec un nombre fini de sommets). Tout élément de $\mathcal{G}$ s'écrit de façon unique comme une somme disjointe de (sous-)graphes connexes. Ces graphes connexes constituent la sous-classe $\mathcal{G}_c$ des structures connexes de $\mathcal{G}$ ;
- Soit $G$ un groupe fini (abélien ou non). Soit $\mathrm{Rep}(G)$ l'ensemble (des classes d'isomorphisme) des représentations linéaires complexes de dimension finie. Soit $\widehat{G}$ un système de représentants des classes d'isomorphisme de représentations irréductibles. Tout élément de $\mathrm{Rep}(G)$ s'écrit comme une somme directe d'éléments de $\widehat{G}$. L'ensemble $\widehat{G}$ correspond aux structures connexes (ou atomiques) de $\mathrm{Rep}(G)$.

# Structures connexes

- Considérons la classe $\mathcal{G}$ des graphes (simples, non orientés, avec un nombre fini de sommets). Tout élément de $\mathcal{G}$ s'écrit de façon unique comme une somme disjointe de (sous-)graphes connexes. Ces graphes connexes constituent la sous-classe $\mathcal{G}_c$ des structures connexes de $\mathcal{G}$ ;
- Soit $G$ un groupe fini (abélien ou non). Soit $\text{Rep}(G)$ l'ensemble (des classes d'isomorphisme) des représentations linéaires complexes de dimension finie. Soit $\widehat{G}$ un système de représentants des classes d'isomorphisme de représentations irréductibles. Tout élément de $\text{Rep}(G)$ s'écrit comme une somme directe d'éléments de $\widehat{G}$. L'ensemble $\widehat{G}$ correspond aux structures connexes (ou atomiques) de $\text{Rep}(G)$.

# Structures connexes



- Considérons la classe $\mathcal{G}$ des graphes (simples, non orientés, avec un nombre fini de sommets). Tout élément de $\mathcal{G}$ s'écrit de façon unique comme une somme disjointe de (sous-)graphes connexes. Ces graphes connexes constituent la sous-classe $\mathcal{G}_c$ des structures connexes de $\mathcal{G}$ ;
- Soit $G$ un groupe fini (abélien ou non). Soit $\mathrm{Rep}(G)$ l'ensemble (des classes d'isomorphisme) des représentations linéaires complexes de dimension finie. Soit $\widehat{G}$ un système de représentants des classes d'isomorphisme de représentations irréductibles. Tout élément de $\mathrm{Rep}(G)$ s'écrit comme une somme directe d'éléments de $\widehat{G}$. L'ensemble $\widehat{G}$ correspond aux structures connexes (ou atomiques) de $\mathrm{Rep}(G)$.

# Structures connexes

- Considérons la classe $\mathcal{G}$ des graphes (simples, non orientés, avec un nombre fini de sommets). Tout élément de $\mathcal{G}$ s'écrit de façon unique comme une somme disjointe de (sous-)graphes connexes. Ces graphes connexes constituent la sous-classe $\mathcal{G}_c$ des structures connexes de $\mathcal{G}$ ;
- Soit $G$ un groupe fini (abélien ou non). Soit $\text{Rep}(G)$ l'ensemble (des classes d'isomorphisme) des représentations linéaires complexes de dimension finie. Soit $\widehat{G}$ un système de représentants des classes d'isomorphisme de représentations irréductibles. Tout élément de $\text{Rep}(G)$ s'écrit comme une somme directe d'éléments de $\widehat{G}$. L'ensemble $\widehat{G}$ correspond aux structures connexes (ou atomiques) de $\text{Rep}(G)$.

Plus généralement pour une classe $S$ quelconque, il est souvent possible de considérer une sous-classe $S_c$ de structures “connexes” ou *atomiques* dont les éléments servent de briques de base à la construction de structures plus complexes. Les structures connexes, quant à elles, ne pouvant pas être subdivisées en structures plus simples.

Plus généralement pour une classe $S$ quelconque, il est souvent possible de considérer une sous-classe $S_c$ de structures “connexes” ou *atomiques* dont les éléments servent de briques de base à la construction de structures plus complexes. Les structures connexes, quant à elles, ne pouvant pas être subdivisées en structures plus simples.

Plus généralement pour une classe $S$ quelconque, il est souvent possible de considérer une sous-classe $S_c$ de structures “connexes” ou *atomiques* dont les éléments servent de briques de base à la construction de structures plus complexes. Les structures connexes, quant à elles, ne pouvant pas être subdivisées en structures plus simples.

Plus généralement pour une classe $S$ quelconque, il est souvent possible de considérer une sous-classe $S_c$ de structures “connexes” ou *atomiques* dont les éléments servent de briques de base à la construction de structures plus complexes. Les structures connexes, quant à elles, ne pouvant pas être subdivisées en structures plus simples.

# Approches existantes

- **Structures exponentielles** de Stanley : suites d'ensembles partiellement ordonnés ;
- **Espèces de structures** de Joyal : endofoncteurs du groupoïde des ensembles finis avec bijections.

# Approches existantes

- **Structures exponentielles** de Stanley : suites d'ensembles partiellement ordonnés ;
- **Espèces de structures** de Joyal : endofoncteurs du groupoïde des ensembles finis avec bijections.

# Approches existantes

- **Structures exponentielles** de Stanley : suites d'ensembles partiellement ordonnés ;
- **Espèces de structures** de Joyal : endofoncteurs du groupoïde des ensembles finis avec bijections.

# Approches existantes





- **Structures exponentielles** de Stanley : suites d'ensembles partiellement ordonnés ;
- **Espèces de structures** de Joyal : endofoncteurs du groupoïde des ensembles finis avec bijections.

# Approches existantes



- **Structures exponentielles** de Stanley : suites d'ensembles partiellement ordonnés ;
- **Espèces de structures** de Joyal : endofoncteurs du groupoïde des ensembles finis avec bijections.

# Algèbres booléennes



Une algèbre booléenne est la donnée de $(B, \wedge, \vee, -, 0, 1)$ où $B$ est un ensemble non vide avec deux éléments (distincts et distingués) 0 et 1, $\vee$ et $\wedge$ sont deux lois de composition internes binaires, et $-$ est une opération unaire telles que

1. Associativité : $a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c$ et $a \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge c$ ;
2. Commutativité : $a \vee b = b \vee a$ et $a \wedge b = b \wedge a$ ;
3. distributivité : $a \wedge (b \vee c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$ et $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$ ;
4. 0 est neutre pour $\vee$ : $a \vee 0 = a$ ;
5. 1 est neutre pour $\wedge$ : $a \wedge 1 = a$ ;
6. Quel que soit $a \in B$, $-a$ vérifie : $a \vee (-a) = 1$ et $a \wedge (-a) = 0$.

# Algèbres booléennes

Une **algèbre booléenne** est la donnée de $(B, \wedge, \vee, -, 0, 1)$ où $B$ est un ensemble non vide avec deux éléments (distincts et distingués) 0 et 1, $\vee$ et $\wedge$ sont deux lois de composition internes binaires, et $-$ est une opération unaire telles que

1. Associativité : $a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c$ et $a \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge c$ ;
2. Commutativité : $a \vee b = b \vee a$ et $a \wedge b = b \wedge a$ ;
3. distributivité : $a \wedge (b \vee c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$ et $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$ ;
4. 0 est neutre pour $\vee$ : $a \vee 0 = a$ ;
5. 1 est neutre pour $\wedge$ : $a \wedge 1 = a$ ;
6. Quel que soit $a \in B$, $-a$ vérifie : $a \vee (-a) = 1$ et $a \wedge (-a) = 0$.

# Algèbres booléennes

Une algèbre booléenne est la donnée de $(B, \wedge, \vee, -, 0, 1)$ où $B$ est un ensemble non vide avec deux éléments (distincts et distingués) 0 et 1, $\vee$ et $\wedge$ sont deux lois de composition internes binaires, et $-$ est une opération unaire telles que

1. Associativité : $a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c$ et $a \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge c$ ;
2. Commutativité : $a \vee b = b \vee a$ et $a \wedge b = b \wedge a$ ;
3. distributivité : $a \wedge (b \vee c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$ et $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$ ;
4. 0 est neutre pour $\vee$ : $a \vee 0 = a$ ;
5. 1 est neutre pour $\wedge$ : $a \wedge 1 = a$ ;
6. Quel que soit $a \in B$, $-a$ vérifie : $a \vee (-a) = 1$ et $a \wedge (-a) = 0$.

# Algèbres booléennes

Une algèbre booléenne est la donnée de $(B, \wedge, \vee, -, 0, 1)$ où $B$ est un ensemble non vide avec deux éléments (distincts et distingués) 0 et 1, $\vee$ et $\wedge$ sont deux lois de composition internes binaires, et $-$ est une opération unaire telles que

1. Associativité : $a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c$ et $a \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge c$ ;
2. Commutativité : $a \vee b = b \vee a$ et $a \wedge b = b \wedge a$ ;
3. distributivité : $a \wedge (b \vee c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$ et $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$ ;
4. 0 est neutre pour $\vee$ : $a \vee 0 = a$ ;
5. 1 est neutre pour $\wedge$ : $a \wedge 1 = a$ ;
6. Quel que soit $a \in B$, $-a$ vérifie : $a \vee (-a) = 1$ et $a \wedge (-a) = 0$.

# Algèbres booléennes



Une algèbre booléenne est la donnée de $(B, \wedge, \vee, -, 0, 1)$ où $B$ est un ensemble non vide avec deux éléments (distincts et distingués) 0 et 1, $\vee$ et $\wedge$ sont deux lois de composition internes binaires, et $-$ est une opération unaire telles que

1. Associativité : $a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c$ et $a \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge c$ ;
2. Commutativité : $a \vee b = b \vee a$ et $a \wedge b = b \wedge a$ ;
3. distributivité : $a \wedge (b \vee c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$ et $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$ ;
4. 0 est neutre pour $\vee$ : $a \vee 0 = a$ ;
5. 1 est neutre pour $\wedge$ : $a \wedge 1 = a$ ;
6. Quel que soit $a \in B$, $-a$ vérifie : $a \vee (-a) = 1$ et $a \wedge (-a) = 0$.

# Algèbres booléennes

Une algèbre booléenne est la donnée de $(B, \wedge, \vee, -, 0, 1)$ où $B$ est un ensemble non vide avec deux éléments (distincts et distingués) 0 et 1, $\vee$ et $\wedge$ sont deux lois de composition internes binaires, et $-$ est une opération unaire telles que

1. Associativité : $a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c$ et $a \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge c$ ;
2. Commutativité : $a \vee b = b \vee a$ et $a \wedge b = b \wedge a$ ;
3. distributivité : $a \wedge (b \vee c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$ et $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$ ;
4. 0 est neutre pour $\vee$ : $a \vee 0 = a$ ;
5. 1 est neutre pour $\wedge$ : $a \wedge 1 = a$ ;
6. Quel que soit $a \in B$, $-a$ vérifie : $a \vee (-a) = 1$ et $a \wedge (-a) = 0$.

# Algèbres booléennes

Une algèbre booléenne est la donnée de $(B, \wedge, \vee, -, 0, 1)$ où $B$ est un ensemble non vide avec deux éléments (distincts et distingués) 0 et 1, $\vee$ et $\wedge$ sont deux lois de composition internes binaires, et $-$ est une opération unaire telles que

1. Associativité : $a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c$ et $a \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge c$ ;
2. Commutativité : $a \vee b = b \vee a$ et $a \wedge b = b \wedge a$ ;
3. distributivité : $a \wedge (b \vee c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$ et $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$ ;
4. 0 est neutre pour $\vee$ : $a \vee 0 = a$ ;
5. 1 est neutre pour $\wedge$ : $a \wedge 1 = a$ ;
6. Quel que soit $a \in B$, $-a$ vérifie : $a \vee (-a) = 1$ et $a \wedge (-a) = 0$.

# Algèbres booléennes



Une algèbre booléenne est la donnée de $(B, \wedge, \vee, -, 0, 1)$ où $B$ est un ensemble non vide avec deux éléments (distincts et distingués) 0 et 1, $\vee$ et $\wedge$ sont deux lois de composition internes binaires, et $-$ est une opération unaire telles que

1. Associativité : $a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c$ et $a \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge c$ ;
2. Commutativité : $a \vee b = b \vee a$ et $a \wedge b = b \wedge a$ ;
3. distributivité : $a \wedge (b \vee c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$ et $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$ ;
4. 0 est neutre pour $\vee$ : $a \vee 0 = a$ ;
5. 1 est neutre pour $\wedge$ : $a \wedge 1 = a$ ;
6. Quel que soit $a \in B$, $-a$ vérifie : $a \vee (-a) = 1$ et $a \wedge (-a) = 0$.

# Algèbres booléennes

Une algèbre booléenne est la donnée de $(B, \wedge, \vee, -, 0, 1)$ où $B$ est un ensemble non vide avec deux éléments (distincts et distingués) 0 et 1, $\vee$ et $\wedge$ sont deux lois de composition internes binaires, et $-$ est une opération unaire telles que

1. Associativité : $a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c$ et $a \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge c$ ;
2. Commutativité : $a \vee b = b \vee a$ et $a \wedge b = b \wedge a$ ;
3. distributivité : $a \wedge (b \vee c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$ et $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$ ;
4. 0 est neutre pour $\vee$ : $a \vee 0 = a$ ;
5. 1 est neutre pour $\wedge$ : $a \wedge 1 = a$ ;
6. Quel que soit $a \in B$, $-a$ vérifie : $a \vee (-a) = 1$ et $a \wedge (-a) = 0$.

# Algèbres booléennes

Une algèbre booléenne est la donnée de $(B, \wedge, \vee, -, 0, 1)$ où $B$ est un ensemble non vide avec deux éléments (distincts et distingués) 0 et 1, $\vee$ et $\wedge$ sont deux lois de composition internes binaires, et $-$ est une opération unaire telles que

1. Associativité : $a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c$ et $a \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge c$ ;
2. Commutativité : $a \vee b = b \vee a$ et $a \wedge b = b \wedge a$ ;
3. distributivité : $a \wedge (b \vee c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$ et $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$ ;
4. 0 est neutre pour $\vee$ : $a \vee 0 = a$ ;
5. 1 est neutre pour $\wedge$ : $a \wedge 1 = a$ ;
6. Quel que soit $a \in B$, $-a$ vérifie : $a \vee (-a) = 1$ et $a \wedge (-a) = 0$.

# Algèbres booléennes

Monoïdes partiels, Anneaux booléens et Formule exponentielle

Laurent Poinsot

Formule exponentielle : version informelle

Algèbres booléennes

Représentations des algèbres booléennes

Algèbres booléennes généralisées

Monoïdes partiels

Formule exponentielle

Une algèbre booléenne est la donnée de $(B, \wedge, \vee, -, 0, 1)$ où $B$ est un ensemble non vide avec deux éléments (distincts et distingués) 0 et 1, $\vee$ et $\wedge$ sont deux lois de composition internes binaires, et $-$ est une opération unaire telles que

1. Associativité : $a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c$ et $a \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge c$ ;
2. Commutativité : $a \vee b = b \vee a$ et $a \wedge b = b \wedge a$ ;
3. distributivité : $a \wedge (b \vee c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$ et $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$ ;
4. 0 est neutre pour $\vee$ : $a \vee 0 = a$ ;
5. 1 est neutre pour $\wedge$ : $a \wedge 1 = a$ ;
6. Quel que soit $a \in B$, $-a$ vérifie : $a \vee (-a) = 1$ et $a \wedge (-a) = 0$.

# Algèbres booléennes

Une algèbre booléenne est la donnée de $(B, \wedge, \vee, -, 0, 1)$ où $B$ est un ensemble non vide avec deux éléments (distincts et distingués) 0 et 1, $\vee$ et $\wedge$ sont deux lois de composition internes binaires, et $-$ est une opération unaire telles que

1. Associativité : $a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c$ et $a \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge c$ ;
2. Commutativité : $a \vee b = b \vee a$ et $a \wedge b = b \wedge a$ ;
3. distributivité : $a \wedge (b \vee c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$ et $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$ ;
4. 0 est neutre pour $\vee$ : $a \vee 0 = a$ ;
5. 1 est neutre pour $\wedge$ : $a \wedge 1 = a$ ;
6. Quel que soit $a \in B$, $-a$ vérifie : $a \vee (-a) = 1$ et $a \wedge (-a) = 0$.

# Algèbres booléennes

Une algèbre booléenne est la donnée de $(B, \wedge, \vee, -, 0, 1)$ où $B$ est un ensemble non vide avec deux éléments (distincts et distingués) 0 et 1, $\vee$ et $\wedge$ sont deux lois de composition internes binaires, et $-$ est une opération unaire telles que

1. Associativité : $a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c$ et $a \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge c$ ;
2. Commutativité : $a \vee b = b \vee a$ et $a \wedge b = b \wedge a$ ;
3. distributivité : $a \wedge (b \vee c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$ et $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$ ;
4. 0 est neutre pour $\vee$ : $a \vee 0 = a$ ;
5. 1 est neutre pour $\wedge$ : $a \wedge 1 = a$ ;
6. Quel que soit $a \in B$, $-a$ vérifie : $a \vee (-a) = 1$ et $a \wedge (-a) = 0$.

# Exemples

1. Soit $E$ un ensemble non vide. Alors $(\mathcal{P}(E), \cap, \cup, \overline{(.)}, \emptyset, E)$ est une algèbre booléenne ;
2. Soit *Prop* le langage (formel) des *proposition logiques* (classiques). L'algèbre de Lindebaum-Tarski $(Prop/\sim, \wedge, \vee, \neg, \perp, \top)$ (où " $A \sim B$ " signifie " $A \Leftrightarrow B$ est une tautologie ") est une algèbre booléenne ;
3. Soit $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$ un entier sans carré, *i.e.*, qui n'est pas divisible par le carré d'un nombre premier quelconque. Soit $D_n$ l'ensemble des diviseurs de $n$. Alors $(D_n, \mathrm{pgcd}, \mathrm{ppcm}, -, 1, n)$, avec $-k := m/k$, est une algèbre de booléenne.

# Exemples

1. Soit $E$ un ensemble non vide. Alors $(\mathcal{P}(E), \cap, \cup, \overline{(.)}, \emptyset, E)$ est une algèbre booléenne ;
2. Soit *Prop* le langage (formel) des *proposition logiques* (classiques). L'algèbre de Lindebaum-Tarski $(Prop/\sim, \wedge, \vee, \neg, \bot, \top)$ (où " $A \sim B$ " signifie " $A \Leftrightarrow B$ est une tautologie ") est une algèbre booléenne ;
3. Soit $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$ un entier sans carré, *i.e.*, qui n'est pas divisible par le carré d'un nombre premier quelconque. Soit $D_n$ l'ensemble des diviseurs de $n$. Alors $(D_n, \text{pgcd}, \text{ppcm}, -, 1, n)$, avec $-k := m/k$, est une algèbre de booléenne.

# Exemples



1. Soit $E$ un ensemble non vide. Alors $(\mathcal{P}(E), \cap, \cup, \overline{(.)}, \emptyset, E)$ est une algèbre booléenne ;
2. Soit *Prop* le langage (formel) des *proposition logiques* (classiques). L'algèbre de Lindebaum-Tarski $(Prop/\sim, \wedge, \vee, \neg, \bot, \top)$ (où " $A \sim B$ " signifie " $A \Leftrightarrow B$ est une tautologie ") est une algèbre booléenne ;
3. Soit $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$ un entier sans carré, *i.e.*, qui n'est pas divisible par le carré d'un nombre premier quelconque. Soit $D_n$ l'ensemble des diviseurs de $n$. Alors $(D_n, \text{pgcd}, \text{ppcm}, -, 1, n)$, avec $-k := m/k$, est une algèbre de booléenne.

# Exemples

1. Soit $E$ un ensemble non vide. Alors $(\mathcal{P}(E), \cap, \cup, \overline{(.)}, \emptyset, E)$ est une algèbre booléenne ;
2. Soit *Prop* le langage (formel) des *proposition logiques* (classiques). L'algèbre de Lindebaum-Tarski $(Prop/\sim, \wedge, \vee, \neg, \bot, \top)$ (où " $A \sim B$ " signifie " $A \Leftrightarrow B$ est une tautologie ") est une algèbre booléenne ;
3. Soit $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$ un entier sans carré, *i.e.*, qui n'est pas divisible par le carré d'un nombre premier quelconque. Soit $D_n$ l'ensemble des diviseurs de $n$. Alors $(D_n, \text{pgcd}, \text{ppcm}, -, 1, n)$, avec $-k := m/k$, est une algèbre de booléenne.

# Exemples



1. Soit $E$ un ensemble non vide. Alors $(\mathcal{P}(E), \cap, \cup, \overline{(.)}, \emptyset, E)$ est une algèbre booléenne ;
2. Soit *Prop* le langage (formel) des *proposition logiques* (classiques). L'algèbre de Lindebaum-Tarski $(Prop/\sim, \wedge, \vee, \neg, \perp, \top)$ (où “ $A \sim B$ ” signifie “ $A \Leftrightarrow B$ est une tautologie ”) est une algèbre booléenne ;
3. Soit $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$ un entier sans carré, *i.e.*, qui n'est pas divisible par le carré d'un nombre premier quelconque. Soit $D_n$ l'ensemble des diviseurs de $n$. Alors $(D_n, \text{pgcd}, \text{ppcm}, -, 1, n)$, avec $-k := m/k$, est une algèbre de booléenne.

# Exemples



1. Soit $E$ un ensemble non vide. Alors $(\mathcal{P}(E), \cap, \cup, \overline{(.)}, \emptyset, E)$ est une algèbre booléenne ;
2. Soit *Prop* le langage (formel) des *proposition logiques* (classiques). L'algèbre de Lindebaum-Tarski $(Prop/\sim, \wedge, \vee, \neg, \bot, \top)$ (où " $A \sim B$ " signifie " $A \Leftrightarrow B$ est une tautologie ") est une algèbre booléenne ;
3. Soit $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$ un entier sans carré, *i.e.*, qui n'est pas divisible par le carré d'un nombre premier quelconque. Soit $D_n$ l'ensemble des diviseurs de $n$. Alors $(D_n, \mathrm{pgcd}, \mathrm{ppcm}, -, 1, n)$, avec $-k := m/k$, est une algèbre de booléenne.

# Exemples

1. Soit $E$ un ensemble non vide. Alors $(\mathcal{P}(E), \cap, \cup, \overline{(.)}, \emptyset, E)$ est une algèbre booléenne ;
2. Soit *Prop* le langage (formel) des *proposition logiques* (classiques). L'algèbre de Lindebaum-Tarski $(Prop/\sim, \wedge, \vee, \neg, \bot, \top)$ (où " $A \sim B$ " signifie " $A \Leftrightarrow B$ est une tautologie ") est une algèbre booléenne ;
3. Soit $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$ un entier sans carré, *i.e.*, qui n'est pas divisible par le carré d'un nombre premier quelconque. Soit $D_n$ l'ensemble des diviseurs de $n$. Alors $(D_n, \text{pgcd}, \text{ppcm}, -, 1, n)$, avec $-k := m/k$, est une algèbre de booléenne.

# Exemples

1. Soit $E$ un ensemble non vide. Alors $(\mathcal{P}(E), \cap, \cup, \overline{(.)}, \emptyset, E)$ est une algèbre booléenne ;
2. Soit *Prop* le langage (formel) des *proposition logiques* (classiques). L'algèbre de Lindebaum-Tarski $(Prop/\sim, \wedge, \vee, \neg, \perp, \top)$ (où " $A \sim B$ " signifie " $A \Leftrightarrow B$ est une tautologie ") est une algèbre booléenne ;
3. Soit $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$ un entier sans carré, *i.e.*, qui n'est pas divisible par le carré d'un nombre premier quelconque. Soit $D_n$ l'ensemble des diviseurs de $n$. Alors $(D_n, \text{pgcd}, \text{ppcm}, -, 1, n)$, avec $-k := m/k$, est une algèbre de booléenne.

# Treillis booléens

1. Un ensemble partiellement ordonné $(L, \leq)$ est un treillis si, et seulement si, quels que soient $a, b \in L$, $\{a, b\}$ admet une borne supérieure $\sup(a, b)$ et une borne inférieure $\inf(a, b)$ ;
2. Un treillis $(L, \leq, \inf, \sup)$ est dit borné si, et seulement, si $L$ admet un minimum $\perp$ et un maximum $\top$ ;
3. Un treillis $(L, \leq, \inf, \sup)$ est dit distributif si, et seulement si, quels que soient $a, b, c \in L$, $\sup(a, \inf(b, c)) = \inf(\sup(a, b), \sup(a, c))$ et $\sup(a, \inf(b, c)) = \sup(\inf(a, b), \inf(a, c))$ ;
4. Un treillis borné $(L, \leq, \inf, \sup, \perp, \top)$ est dit complémenté si, et seulement si, quel que soit $a \in L$, il existe $-a \in L$ tel que $\inf(a, -a) = \perp$ et $\sup(a, -a) = \top$ ;
5. Un treillis booléen est un treillis complémenté et distributif.

# Treillis booléens

1. Un ensemble partiellement ordonné $(L, \leq)$ est un treillis si, et seulement si, quels que soient $a, b \in L$, $\{a, b\}$ admet une borne supérieure $\sup(a, b)$ et une borne inférieure $\inf(a, b)$ ;
2. Un treillis $(L, \leq, \inf, \sup)$ est dit borné si, et seulement si $L$ admet un minimum $\perp$ et un maximum $\top$ ;
3. Un treillis $(L, \leq, \inf, \sup)$ est dit distributif si, et seulement si, quels que soient $a, b, c \in L$, $\sup(a, \inf(b, c)) = \inf(\sup(a, b), \sup(a, c))$ et $\sup(a, \inf(b, c)) = \sup(\inf(a, b), \inf(a, c))$ ;
4. Un treillis borné $(L, \leq, \inf, \sup, \perp, \top)$ est dit complémenté si, et seulement si, quel que soit $a \in L$, il existe $-a \in L$ tel que $\inf(a, -a) = \perp$ et $\sup(a, -a) = \top$ ;
5. Un treillis booléen est un treillis complémenté et distributif.

# Treillis booléens

1. Un ensemble partiellement ordonné $(L, \leq)$ est un treillis si, et seulement si, quels que soient $a, b \in L$, $\{a, b\}$ admet une borne supérieure $\sup(a, b)$ et une borne inférieure $\inf(a, b)$ ;
2. Un treillis $(L, \leq, \inf, \sup)$ est dit borné si, et seulement, si $L$ admet un minimum $\perp$ et un maximum $\top$ ;
3. Un treillis $(L, \leq, \inf, \sup)$ est dit distributif si, et seulement si, quels que soient $a, b, c \in L$, $\sup(a, \inf(b, c)) = \inf(\sup(a, b), \sup(a, c))$ et $\sup(a, \inf(b, c)) = \sup(\inf(a, b), \inf(a, c))$ ;
4. Un treillis borné $(L, \leq, \inf, \sup, \perp, \top)$ est dit complémenté si, et seulement si, quel que soit $a \in L$, il existe $-a \in L$ tel que $\inf(a, -a) = \perp$ et $\sup(a, -a) = \top$ ;
5. Un treillis booléen est un treillis complémenté et distributif.

# Treillis booléens



1. Un ensemble partiellement ordonné $(L, \leq)$ est un treillis si, et seulement si, quels que soient $a, b \in L$, $\{a, b\}$ admet une borne supérieure $\sup(a, b)$ et une borne inférieure $\inf(a, b)$ ;
2. Un treillis $(L, \leq, \inf, \sup)$ est dit borné si, et seulement, si $L$ admet un minimum $\perp$ et un maximum $\top$ ;
3. Un treillis $(L, \leq, \inf, \sup)$ est dit distributif si, et seulement si, quels que soient $a, b, c \in L$, $\sup(a, \inf(b, c)) = \inf(\sup(a, b), \sup(a, c))$ et $\sup(a, \inf(b, c)) = \sup(\inf(a, b), \inf(a, c))$ ;
4. Un treillis borné $(L, \leq, \inf, \sup, \perp, \top)$ est dit complémenté si, et seulement si, quel que soit $a \in L$, il existe $-a \in L$ tel que $\inf(a, -a) = \perp$ et $\sup(a, -a) = \top$ ;
5. Un treillis booléen est un treillis complémenté et distributif.

# Treillis booléens

1. Un ensemble partiellement ordonné $(L, \leq)$ est un treillis si, et seulement si, quels que soient $a, b \in L$, $\{a, b\}$ admet une borne supérieure $\sup(a, b)$ et une borne inférieure $\inf(a, b)$ ;
2. Un treillis $(L, \leq, \inf, \sup)$ est dit borné si, et seulement, si $L$ admet un minimum $\perp$ et un maximum $\top$ ;
3. Un treillis $(L, \leq, \inf, \sup)$ est dit distributif si, et seulement si, quels que soient $a, b, c \in L$, $\sup(a, \inf(b, c)) = \inf(\sup(a, b), \sup(a, c))$ et $\sup(a, \inf(b, c)) = \sup(\inf(a, b), \inf(a, c))$ ;
4. Un treillis borné $(L, \leq, \inf, \sup, \perp, \top)$ est dit complémenté si, et seulement si, quel que soit $a \in L$, il existe $-a \in L$ tel que $\inf(a, -a) = \perp$ et $\sup(a, -a) = \top$ ;
5. Un treillis booléen est un treillis complémenté et distributif.

# Treillis booléens



1. Un ensemble partiellement ordonné $(L, \leq)$ est un treillis si, et seulement si, quels que soient $a, b \in L$, $\{a, b\}$ admet une borne supérieure $\sup(a, b)$ et une borne inférieure $\inf(a, b)$ ;
2. Un treillis $(L, \leq, \inf, \sup)$ est dit borné si, et seulement, si $L$ admet un minimum $\perp$ et un maximum $\top$ ;
3. Un treillis $(L, \leq, \inf, \sup)$ est dit distributif si, et seulement si, quels que soient $a, b, c \in L$, $\sup(a, \inf(b, c)) = \inf(\sup(a, b), \sup(a, c))$ et $\sup(a, \inf(b, c)) = \sup(\inf(a, b), \inf(a, c))$ ;
4. Un treillis borné $(L, \leq, \inf, \sup, \perp, \top)$ est dit complémenté si, et seulement si, quel que soit $a \in L$, il existe $-a \in L$ tel que $\inf(a, -a) = \perp$ et $\sup(a, -a) = \top$ ;
5. Un treillis booléen est un treillis complémenté et distributif.

## Treillis booléens



1. Un ensemble partiellement ordonné $(L, \leq)$ est un treillis si, et seulement si, quels que soient $a, b \in L$, $\{a, b\}$ admet une borne supérieure $\sup(a, b)$ et une borne inférieure $\inf(a, b)$ ;
2. Un treillis $(L, \leq, \inf, \sup)$ est dit borné si, et seulement, si $L$ admet un minimum $\perp$ et un maximum $\top$ ;
3. Un treillis $(L, \leq, \inf, \sup)$ est dit distributif si, et seulement si, quels que soient $a, b, c \in L$, $\sup(a, \inf(b, c)) = \inf(\sup(a, b), \sup(a, c))$ et $\sup(a, \inf(b, c)) = \sup(\inf(a, b), \inf(a, c))$ ;
4. Un treillis borné $(L, \leq, \inf, \sup, \perp, \top)$ est dit complémenté si, et seulement si, quel que soit $a \in L$, il existe $-a \in L$ tel que $\inf(a, -a) = \perp$ et $\sup(a, -a) = \top$ ;
5. Un treillis booléen est un treillis complémenté et distributif.

# Treillis booléens

1. Un ensemble partiellement ordonné $(L, \leq)$ est un treillis si, et seulement si, quels que soient $a, b \in L$, $\{a, b\}$ admet une borne supérieure $\sup(a, b)$ et une borne inférieure $\inf(a, b)$ ;
2. Un treillis $(L, \leq, \inf, \sup)$ est dit borné si, et seulement, si $L$ admet un minimum $\perp$ et un maximum $\top$ ;
3. Un treillis $(L, \leq, \inf, \sup)$ est dit distributif si, et seulement si, quels que soient $a, b, c \in L$, $\sup(a, \inf(b, c)) = \inf(\sup(a, b), \sup(a, c))$ et $\sup(a, \inf(b, c)) = \sup(\inf(a, b), \inf(a, c))$ ;
4. Un treillis borné $(L, \leq, \inf, \sup, \perp, \top)$ est dit complémenté si, et seulement si, quel que soit $a \in L$, il existe $-a \in L$ tel que $\inf(a, -a) = \perp$ et $\sup(a, -a) = \top$ ;
5. Un treillis booléen est un treillis complémenté et distributif.

# Algèbre booléenne $\leftrightarrow$ treillis booléen

1. Soit $(B, \wedge, \vee, -, 0, 1)$. On définit une relation d'ordre sur $B$ par :
$$\begin{aligned} a \leq b \quad &\Leftrightarrow \quad a \wedge b = a \\ &\Leftrightarrow \quad a \vee b = b\,. \end{aligned} \tag{5}$$
On définit également $\inf(a, b) := a \wedge b$ et $\sup(a, b) := a \vee b$. On peut alors montrer que $(B, \leq, \inf, \sup, 0, 1, -)$ est un treillis booléen.

2. Réciproquement, soit $(L, \leq, \inf, \sup, \perp, \top, -)$ un treillis booléen. On définit $a \wedge b := \inf(a, b)$ et $a \vee b := \sup(a, b)$. On peut montrer que $(L, \wedge, \vee, -, \perp, \top)$ est une algèbre booléenne.

# Algèbre booléenne $\leftrightarrow$ treillis booléen

1. Soit $(B, \wedge, \vee, -, 0, 1)$. On définit une relation d'ordre sur $B$ par :

$$\begin{aligned} a \leq b \quad &\Leftrightarrow \quad a \wedge b = a \\ &\Leftrightarrow \quad a \vee b = b \,. \end{aligned} \tag{5}$$

   On définit également $\inf(a, b) := a \wedge b$ et $\sup(a, b) := a \vee b$. On peut alors montrer que $(B, \leq, \inf, \sup, 0, 1, -)$ est un treillis booléen.

2. Réciproquement, soit $(L, \leq, \inf, \sup, \bot, \top, -)$ un treillis booléen. On définit $a \wedge b := \inf(a, b)$ et $a \vee b := \sup(a, b)$. On peut montrer que $(L, \wedge, \vee, -, \bot, \top)$ est une algèbre booléenne.

# Algèbre booléenne $\leftrightarrow$ treillis booléen



1. Soit $(B, \wedge, \vee, -, 0, 1)$. On définit une relation d'ordre sur $B$ par :

$$\begin{aligned} a \leq b \quad &\Leftrightarrow \quad a \wedge b = a \\ &\Leftrightarrow \quad a \vee b = b \,. \end{aligned} \tag{5}$$

   On définit également $\inf(a, b) := a \wedge b$ et $\sup(a, b) := a \vee b$. On peut alors montrer que $(B, \leq, \inf, \sup, 0, 1, -)$ est un treillis booléen.

2. Réciproquement, soit $(L, \leq, \inf, \sup, \perp, \top, -)$ un treillis booléen. On définit $a \wedge b := \inf(a, b)$ et $a \vee b := \sup(a, b)$. On peut montrer que $(L, \wedge, \vee, -, \perp, \top)$ est une algèbre booléenne.

# Algèbre booléenne $\leftrightarrow$ treillis booléen

1. Soit $(B, \wedge, \vee, -, 0, 1)$. On définit une relation d'ordre sur $B$ par :
$$\begin{aligned} a \leq b \quad &\Leftrightarrow \quad a \wedge b = a \\ &\Leftrightarrow \quad a \vee b = b\,. \end{aligned} \tag{5}$$
On définit également $\inf(a, b) := a \wedge b$ et $\sup(a, b) := a \vee b$. On peut alors montrer que $(B, \leq, \inf, \sup, 0, 1, -)$ est un treillis booléen.
2. Réciproquement, soit $(L, \leq, \inf, \sup, \bot, \top, -)$ un treillis booléen. On définit $a \wedge b := \inf(a, b)$ et $a \vee b := \sup(a, b)$. On peut montrer que $(L, \wedge, \vee, -, \bot, \top)$ est une algèbre booléenne.

# Algèbre booléenne $\leftrightarrow$ treillis booléen

1. Soit $(B, \wedge, \vee, -, 0, 1)$. On définit une relation d'ordre sur $B$ par :

$$\begin{aligned} a \leq b &\Leftrightarrow a \wedge b = a \\ &\Leftrightarrow a \vee b = b\,. \end{aligned} \tag{5}$$

On définit également $\inf(a, b) := a \wedge b$ et $\sup(a, b) := a \vee b$. On peut alors montrer que $(B, \leq, \inf, \sup, 0, 1, -)$ est un treillis booléen.

2. Réciproquement, soit $(L, \leq, \inf, \sup, \bot, \top, -)$ un treillis booléen. On définit $a \wedge b := \inf(a, b)$ et $a \vee b := \sup(a, b)$. On peut montrer que $(L, \wedge, \vee, -, \bot, \top)$ est une algèbre booléenne.

# Algèbre booléenne $\leftrightarrow$ treillis booléen





1. Soit $(B, \wedge, \vee, -, 0, 1)$. On définit une relation d'ordre sur $B$ par :

$$\begin{aligned} a \leq b \quad &\Leftrightarrow \quad a \wedge b = a \\ &\Leftrightarrow \quad a \vee b = b\,. \end{aligned} \tag{5}$$

On définit également $\inf(a, b) := a \wedge b$ et $\sup(a, b) := a \vee b$. On peut alors montrer que $(B, \leq, \inf, \sup, 0, 1, -)$ est un treillis booléen.

2. Réciproquement, soit $(L, \leq, \inf, \sup, \bot, \top, -)$ un treillis booléen. On définit $a \wedge b := \inf(a, b)$ et $a \vee b := \sup(a, b)$. On peut montrer que $(L, \wedge, \vee, -, \bot, \top)$ est une algèbre booléenne.

# Algèbre booléenne $\leftrightarrow$ treillis booléen



1. Soit $(B, \wedge, \vee, -, 0, 1)$. On définit une relation d'ordre sur $B$ par :
$$\begin{aligned} a \leq b &\Leftrightarrow a \wedge b = a \\ &\Leftrightarrow a \vee b = b\ . \end{aligned} \tag{5}$$
On définit également $\inf(a, b) := a \wedge b$ et $\sup(a, b) := a \vee b$. On peut alors montrer que $(B, \leq, \inf, \sup, 0, 1, -)$ est un treillis booléen.

2. Réciproquement, soit $(L, \leq, \inf, \sup, \bot, \top, -)$ un treillis booléen. On définit $a \wedge b := \inf(a, b)$ et $a \vee b := \sup(a, b)$. On peut montrer que $(L, \wedge, \vee, -, \bot, \top)$ est une algèbre booléenne.

# Algèbre booléenne $\leftrightarrow$ treillis booléen



1. Soit $(B, \wedge, \vee, -, 0, 1)$. On définit une relation d'ordre sur $B$ par :
$$\begin{aligned} a \leq b \quad &\Leftrightarrow \quad a \wedge b = a \\ &\Leftrightarrow \quad a \vee b = b \ . \end{aligned} \tag{5}$$
On définit également $\inf(a, b) := a \wedge b$ et $\sup(a, b) := a \vee b$. On peut alors montrer que $(B, \leq, \inf, \sup, 0, 1, -)$ est un treillis booléen.
2. Réciproquement, soit $(L, \leq, \inf, \sup, \bot, \top, -)$ un treillis booléen. On définit $a \wedge b := \inf(a, b)$ et $a \vee b := \sup(a, b)$. On peut montrer que $(L, \wedge, \vee, -, \bot, \top)$ est une algèbre booléenne.

# Algèbre booléenne $\leftrightarrow$ treillis booléen



1. Soit $(B, \wedge, \vee, -, 0, 1)$. On définit une relation d'ordre sur $B$ par :

$$\begin{aligned} a \leq b &\Leftrightarrow a \wedge b = a \\ &\Leftrightarrow a \vee b = b\,. \end{aligned} \tag{5}$$

   On définit également $\inf(a, b) := a \wedge b$ et $\sup(a, b) := a \vee b$. On peut alors montrer que $(B, \leq, \inf, \sup, 0, 1, -)$ est un treillis booléen.

2. Réciproquement, soit $(L, \leq, \inf, \sup, \bot, \top, -)$ un treillis booléen. On définit $a \wedge b := \inf(a, b)$ et $a \vee b := \sup(a, b)$. On peut montrer que $(L, \wedge, \vee, -, \bot, \top)$ est une algèbre booléenne.

# Algèbre booléenne $\leftrightarrow$ treillis booléen



1. Soit $(B, \wedge, \vee, -, 0, 1)$. On définit une relation d'ordre sur $B$ par :
$$\begin{aligned} a \leq b \quad &\Leftrightarrow \quad a \wedge b = a \\ &\Leftrightarrow \quad a \vee b = b \,. \end{aligned} \tag{5}$$
On définit également $\inf(a, b) := a \wedge b$ et $\sup(a, b) := a \vee b$. On peut alors montrer que $(B, \leq, \inf, \sup, 0, 1, -)$ est un treillis booléen.
2. Réciproquement, soit $(L, \leq, \inf, \sup, \perp, \top, -)$ un treillis booléen. On définit $a \wedge b := \inf(a, b)$ et $a \vee b := \sup(a, b)$. On peut montrer que $(L, \wedge, \vee, -, \perp, \top)$ est une algèbre booléenne.

# Algèbre booléenne $\leftrightarrow$ treillis booléen



1. Soit $(B, \wedge, \vee, -, 0, 1)$. On définit une relation d'ordre sur $B$ par :
$$\begin{aligned} a \leq b \quad &\Leftrightarrow \quad a \wedge b = a \\ &\Leftrightarrow \quad a \vee b = b\ . \end{aligned} \tag{5}$$
On définit également $\inf(a, b) := a \wedge b$ et $\sup(a, b) := a \vee b$. On peut alors montrer que $(B, \leq, \inf, \sup, 0, 1, -)$ est un treillis booléen.
2. Réciproquement, soit $(L, \leq, \inf, \sup, \bot, \top, -)$ un treillis booléen. On définit $a \wedge b := \inf(a, b)$ et $a \vee b := \sup(a, b)$. On peut montrer que $(L, \wedge, \vee, -, \bot, \top)$ est une algèbre booléenne.

# Anneaux booléens

Un anneau $R$ (avec ou sans unité) est dit anneau booléen si, et seulement si tous les éléments de $R$ sont idempotents, *i.e.*, quel que soit $a \in R$, $a^2 = a$.

# Anneaux booléens



Un anneau $R$ (avec ou sans unité) est dit anneau booléen si, et seulement si tous les éléments de $R$ sont idempotents, *i.e.*, quel que soit $a \in R$, $a^2 = a$.

# Anneaux booléens

Un anneau $R$ (avec ou sans unité) est dit anneau booléen si, et seulement si tous les éléments de $R$ sont idempotents, *i.e.*, quel que soit $a \in R$, $a^2 = a$.

# Propriétés des anneaux booléens (caractéristique 2)



Soit $R$ un anneau booléen. Alors $R$ est de caractéristique deux. En effet, soit $a \in R$. On a

$$\begin{aligned} (a+a) &= (a+a)^2 \\ &= a^2+a^2+a^2+a^2 \\ &= (a+a)+(a+a)\,. \end{aligned} \qquad (6)$$

Donc $a+a=0$. En particulier, $-a=a$ quel que soit $a \in R$.

# Propriétés des anneaux booléens (caractéristique 2)



Soit $R$ un anneau booléen. Alors $R$ est de caractéristique deux. En effet, soit $a \in R$. On a

$$\begin{aligned} (a+a) &= (a+a)^2 \\ &= a^2+a^2+a^2+a^2 \\ &= (a+a)+(a+a)\,. \end{aligned} \tag{6}$$

Donc $a+a=0$. En particulier, $-a=a$ quel que soit $a \in R$.

# Propriétés des anneaux booléens (caractéristique 2)

Soit $R$ un anneau booléen. Alors $R$ est de caractéristique deux. En effet, soit $a \in R$. On a

$$\begin{aligned} (a+a) &= (a+a)^2 \\ &= a^2+a^2+a^2+a^2 \\ &= (a+a)+(a+a)\,. \end{aligned} \tag{6}$$

Donc $a+a=0$. En particulier, $-a=a$ quel que soit $a \in R$.

# Propriétés des anneaux booléens (caractéristique 2)



Soit $R$ un anneau booléen. Alors $R$ est de caractéristique deux. En effet, soit $a \in R$. On a

$$\begin{aligned} (a+a) &= (a+a)^2 \\ &= a^2+a^2+a^2+a^2 \\ &= (a+a)+(a+a)\ . \end{aligned} \tag{6}$$

Donc $a+a=0$. En particulier, $-a=a$ quel que soit $a \in R$.

# Propriétés des anneaux booléens (caractéristique 2)



Soit $R$ un anneau booléen. Alors $R$ est de caractéristique deux. En effet, soit $a \in R$. On a

$$\begin{aligned}(a+a) &= (a+a)^2 \\ &= a^2+a^2+a^2+a^2 \\ &= (a+a)+(a+a)\,. \end{aligned} \tag{6}$$

Donc $a+a=0$. En particulier, $-a=a$ quel que soit $a \in R$.

# Propriétés des anneaux booléens (caractéristique 2)



Soit $R$ un anneau booléen. Alors $R$ est de caractéristique deux. En effet, soit $a \in R$. On a

$$\begin{aligned} (a+a) &= (a+a)^2 \\ &= a^2+a^2+a^2+a^2 \\ &= (a+a)+(a+a)\,. \end{aligned} \tag{6}$$

Donc $a+a=0$. En particulier, $-a=a$ quel que soit $a \in R$.

# Propriétés des anneaux booléens (caractéristique 2)



Soit $R$ un anneau booléen. Alors $R$ est de caractéristique deux. En effet, soit $a \in R$. On a

$$\begin{aligned}(a+a) &= (a+a)^2 \\ &= a^2+a^2+a^2+a^2 \\ &= (a+a)+(a+a)\,.\end{aligned} \tag{6}$$

Donc $a+a=0$. En particulier, $-a=a$ quel que soit $a \in R$.

# Propriétés des anneaux booléens (caractéristique 2)



Soit $R$ un anneau booléen. Alors $R$ est de caractéristique deux. En effet, soit $a \in R$. On a

$$\begin{aligned} (a+a) &= (a+a)^2 \\ &= a^2+a^2+a^2+a^2 \\ &= (a+a)+(a+a)\,. \end{aligned} \tag{6}$$

Donc $a+a=0$. En particulier, $-a=a$ quel que soit $a \in R$.

# Propriétés des anneaux booléens (caractéristique 2)



Soit $R$ un anneau booléen. Alors $R$ est de caractéristique deux. En effet, soit $a \in R$. On a

$$\begin{aligned}(a+a) &= (a+a)^2 \\ &= a^2+a^2+a^2+a^2 \\ &= (a+a)+(a+a)\ .\end{aligned} \tag{6}$$

Donc $a+a=0$. En particulier, $-a=a$ quel que soit $a \in R$.

# Propriétés des anneaux booléens (caractéristique 2)

Soit $R$ un anneau booléen. Alors $R$ est de caractéristique deux. En effet, soit $a \in R$. On a

$$\begin{aligned}(a+a) &= (a+a)^2 \\ &= a^2+a^2+a^2+a^2 \\ &= (a+a)+(a+a)\ .\end{aligned} \tag{6}$$

Donc $a+a=0$. En particulier, $-a=a$ quel que soit $a \in R$.

# Propriétés des anneaux booléens (caractéristique 2)

Soit $R$ un anneau booléen. Alors $R$ est de caractéristique deux. En effet, soit $a \in R$. On a

$$\begin{aligned} (a+a) &= (a+a)^2 \\ &= a^2+a^2+a^2+a^2 \\ &= (a+a)+(a+a)\,. \end{aligned} \tag{6}$$

Donc $a+a=0$. En particulier, $-a=a$ quel que soit $a \in R$.

# Propriétés des anneaux booléens (extension unitaire)

Soit $R$ un anneau booléen sans unité. On définit l'extension de Dorroh (ou extension unitaire) $R'$ de $R$ par $\mathbb{Z}_2$ : $R' := \mathbb{Z}_2 \times R$, avec les lois

$$\begin{aligned} (n_1, a_1) + (n_2, a_2) &:= (n_1 + n_2, a_1 + a_2) \\ (n_1, a_1) \times (n_2, a_2) &:= (n_1 n_2, n_1 a_2 + n_2 a_1 + a_1 a_2) \end{aligned} \tag{7}$$

1. $R'$ est un anneau avec unité $(1, 0)$.
2. $R$ identifié à $(0) \times R$ est un idéal de $R'$.
3. $R'$ est un anneau de caractéristique deux.
4. $R'$ est un anneau booléen.

# Propriétés des anneaux booléens (extension unitaire)



Soit $R$ un anneau booléen sans unité. On définit l'extension de Dorroh (ou extension unitaire) $R'$ de $R$ par $\mathbb{Z}_2$ : $R' := \mathbb{Z}_2 \times R$, avec les lois

$$\begin{aligned} (n_1, a_1) + (n_2, a_2) &:= (n_1 + n_2, a_1 + a_2) \\ (n_1, a_1) \times (n_2, a_2) &:= (n_1 n_2, n_1 a_2 + n_2 a_1 + a_1 a_2) \end{aligned} \tag{7}$$

1. $R'$ est un anneau avec unité $(1, 0)$.
2. $R$ identifié à $(0) \times R$ est un idéal de $R'$.
3. $R'$ est un anneau de caractéristique deux.
4. $R'$ est un anneau booléen.

# Propriétés des anneaux booléens (extension unitaire)



Soit $R$ un anneau booléen sans unité. On définit l'extension de Dorroh (ou extension unitaire) $R'$ de $R$ par $\mathbb{Z}_2$ :
$R' := \mathbb{Z}_2 \times R$, avec les lois

$$\begin{aligned} (n_1, a_1) + (n_2, a_2) &:= (n_1 + n_2, a_1 + a_2) \\ (n_1, a_1) \times (n_2, a_2) &:= (n_1 n_2, n_1 a_2 + n_2 a_1 + a_1 a_2) \end{aligned} \tag{7}$$

1. $R'$ est un anneau avec unité $(1, 0)$.
2. $R$ identifié à $(0) \times R$ est un idéal de $R'$.
3. $R'$ est un anneau de caractéristique deux.
4. $R'$ est un anneau booléen.

# Propriétés des anneaux booléens (extension unitaire)



Soit $R$ un anneau booléen sans unité. On définit l'extension de Dorroh (ou extension unitaire) $R'$ de $R$ par $\mathbb{Z}_2$ :
$R' := \mathbb{Z}_2 \times R$, avec les lois

$$\begin{aligned} (n_1, a_1) + (n_2, a_2) &:= (n_1 + n_2, a_1 + a_2) \\ (n_1, a_1) \times (n_2, a_2) &:= (n_1 n_2, n_1 a_2 + n_2 a_1 + a_1 a_2) \end{aligned} \tag{7}$$

1. $R'$ est un anneau avec unité $(1, 0)$.
2. $R$ identifié à $(0) \times R$ est un idéal de $R'$.
3. $R'$ est un anneau de caractéristique deux.
4. $R'$ est un anneau booléen.

# Propriétés des anneaux booléens (extension unitaire)



Soit $R$ un anneau booléen sans unité. On définit l'extension de Dorroh (ou extension unitaire) $R'$ de $R$ par $\mathbb{Z}_2$ :
$R' := \mathbb{Z}_2 \times R$, avec les lois

$$\begin{aligned}(n_1, a_1) + (n_2, a_2) &:= (n_1 + n_2, a_1 + a_2) \\ (n_1, a_1) \times (n_2, a_2) &:= (n_1 n_2, n_1 a_2 + n_2 a_1 + a_1 a_2)\end{aligned} \tag{7}$$

1. $R'$ est un anneau avec unité $(1, 0)$.
2. $R$ identifié à $(0) \times R$ est un idéal de $R'$.
3. $R'$ est un anneau de caractéristique deux.
4. $R'$ est un anneau booléen.

# Propriétés des anneaux booléens (extension unitaire)



Soit $R$ un anneau booléen sans unité. On définit l'extension de Dorroh (ou extension unitaire) $R'$ de $R$ par $\mathbb{Z}_2$ :
$R' := \mathbb{Z}_2 \times R$, avec les lois

$$\begin{aligned} (n_1, a_1) + (n_2, a_2) &:= (n_1 + n_2, a_1 + a_2) \\ (n_1, a_1) \times (n_2, a_2) &:= (n_1 n_2, n_1 a_2 + n_2 a_1 + a_1 a_2) \end{aligned} \tag{7}$$

1. $R'$ est un anneau avec unité $(1, 0)$.
2. $R$ identifié à $(0) \times R$ est un idéal de $R'$.
3. $R'$ est un anneau de caractéristique deux.
4. $R'$ est un anneau booléen.

# Propriétés des anneaux booléens (extension unitaire)



Soit $R$ un anneau booléen sans unité. On définit l'extension de Dorroh (ou extension unitaire) $R'$ de $R$ par $\mathbb{Z}_2$ :
$R' := \mathbb{Z}_2 \times R$, avec les lois

$$\begin{aligned} (n_1, a_1) + (n_2, a_2) &:= (n_1 + n_2, a_1 + a_2) \\ (n_1, a_1) \times (n_2, a_2) &:= (n_1 n_2, n_1 a_2 + n_2 a_1 + a_1 a_2) \end{aligned} \tag{7}$$

1. $R'$ est un anneau avec unité $(1, 0)$.
2. $R$ identifié à $(0) \times R$ est un idéal de $R'$.
3. $R'$ est un anneau de caractéristique deux.
4. $R'$ est un anneau booléen.

# Propriétés des anneaux booléens (extension unitaire)



Soit $R$ un anneau booléen sans unité. On définit l'extension de Dorroh (ou extension unitaire) $R'$ de $R$ par $\mathbb{Z}_2$ :
$R' := \mathbb{Z}_2 \times R$, avec les lois

$$\begin{aligned} (n_1, a_1) + (n_2, a_2) &:= (n_1 + n_2, a_1 + a_2) \\ (n_1, a_1) \times (n_2, a_2) &:= (n_1 n_2, n_1 a_2 + n_2 a_1 + a_1 a_2) \end{aligned} \tag{7}$$

1. $R'$ est un anneau avec unité $(1, 0)$.
2. $R$ identifié à $(0) \times R$ est un idéal de $R'$.
3. $R'$ est un anneau de caractéristique deux.
4. $R'$ est un anneau booléen.

# Propriétés des anneaux booléens (extension unitaire)



Soit $R$ un anneau booléen sans unité. On définit l'extension de Dorroh (ou extension unitaire) $R'$ de $R$ par $\mathbb{Z}_2$ :
$R' := \mathbb{Z}_2 \times R$, avec les lois

$$\begin{array}{lll} (n_1, a_1) + (n_2, a_2) & := & (n_1 + n_2, a_1 + a_2) \\ (n_1, a_1) \times (n_2, a_2) & := & (n_1 n_2, n_1 a_2 + n_2 a_1 + a_1 a_2) \end{array} \tag{7}$$

1. $R'$ est un anneau avec unité $(1, 0)$.
2. $R$ identifié à $(0) \times R$ est un idéal de $R'$.
3. $R'$ est un anneau de caractéristique deux.
4. $R'$ est un anneau booléen.

# Propriétés des anneaux booléens (extension unitaire)



Soit $R$ un anneau booléen sans unité. On définit l'extension de Dorroh (ou extension unitaire) $R'$ de $R$ par $\mathbb{Z}_2$ :
$R' := \mathbb{Z}_2 \times R$, avec les lois

$$\begin{aligned} (n_1, a_1) + (n_2, a_2) &:= (n_1 + n_2, a_1 + a_2) \\ (n_1, a_1) \times (n_2, a_2) &:= (n_1 n_2, n_1 a_2 + n_2 a_1 + a_1 a_2) \end{aligned} \tag{7}$$

1. $R'$ est un anneau avec unité $(1, 0)$.
2. $R$ identifié à $(0) \times R$ est un idéal de $R'$.
3. $R'$ est un anneau de caractéristique deux.
4. $R'$ est un anneau booléen.

# Propriétés des anneaux booléens (extension unitaire)



Soit $R$ un anneau booléen sans unité. On définit l'extension de Dorroh (ou extension unitaire) $R'$ de $R$ par $\mathbb{Z}_2$ :
$R' := \mathbb{Z}_2 \times R$, avec les lois

$$\begin{array}{rcl} (n_1, a_1) + (n_2, a_2) & := & (n_1 + n_2, a_1 + a_2) \\ (n_1, a_1) \times (n_2, a_2) & := & (n_1 n_2, n_1 a_2 + n_2 a_1 + a_1 a_2) \end{array} \tag{7}$$

1. $R'$ est un anneau avec unité $(1, 0)$.
2. $R$ identifié à $(0) \times R$ est un idéal de $R'$.
3. $R'$ est un anneau de caractéristique deux.
4. $R'$ est un anneau booléen.

# Propriétés des anneaux booléens (groupes booléens)



Un groupe booléen est un groupe $(G, +, 0)$ dans lequel tout élément non nul est d'ordre deux : $x + x = 0$ quel que soit $x \in G$.

Un tel groupe est nécessairement abélien : $(x + y) + (y + x) = x + (y + y) + x = x + x = 0$ donc $x + y = -(y + x) = (y + x)$.

# Propriétés des anneaux booléens (groupes booléens)



Un groupe booléen est un groupe $(G, +, 0)$ dans lequel tout élément non nul est d'ordre deux : $x + x = 0$ quel que soit $x \in G$.

Un tel groupe est nécessairement abélien : $(x + y) + (y + x) = x + (y + y) + x = x + x = 0$ donc $x + y = -(y + x) = (y + x)$.

# Propriétés des anneaux booléens (groupes booléens)



Un groupe booléen est un groupe $(G, +, 0)$ dans lequel tout élément non nul est d'ordre deux : $x + x = 0$ quel que soit $x \in G$.

Un tel groupe est nécessairement abélien : $(x + y) + (y + x) = x + (y + y) + x = x + x = 0$ donc $x + y = -(y + x) = (y + x)$.

# Propriétés des anneaux booléens (groupes booléens)



Un groupe booléen est un groupe $(G, +, 0)$ dans lequel tout élément non nul est d'ordre deux : $x + x = 0$ quel que soit $x \in G$.

Un tel groupe est nécessairement abélien :

$(x + y) + (y + x) = x + (y + y) + x = x + x = 0$ donc $x + y = -(y + x) = (y + x)$.

## Propriétés des anneaux booléens (groupes booléens)



Un groupe booléen est un groupe $(G, +, 0)$ dans lequel tout élément non nul est d'ordre deux : $x + x = 0$ quel que soit $x \in G$.

Un tel groupe est nécessairement abélien :
$(x + y) + (y + x) = x + (y + y) + x = x + x = 0$ donc $x + y = -(y + x) = (y + x)$.

# Propriétés des anneaux booléens (groupes booléens)



Un groupe booléen est un groupe $(G, +, 0)$ dans lequel tout élément non nul est d'ordre deux : $x + x = 0$ quel que soit $x \in G$.
Un tel groupe est nécessairement abélien :
$(x + y) + (y + x) = x + (y + y) + x = x + x = 0$ donc
$x + y = -(y + x) = (y + x)$.

## Propriétés des anneaux booléens (groupes booléens)



Un groupe booléen est un groupe $(G, +, 0)$ dans lequel tout élément non nul est d'ordre deux : $x + x = 0$ quel que soit $x \in G$.

Un tel groupe est nécessairement abélien :

$(x + y) + (y + x) = x + (y + y) + x = x + x = 0$ donc $x + y = -(y + x) = (y + x)$.

# Propriétés des anneaux booléens (groupes booléens)



Un groupe booléen est un groupe $(G, +, 0)$ dans lequel tout élément non nul est d'ordre deux : $x + x = 0$ quel que soit $x \in G$.

Un tel groupe est nécessairement abélien :

$(x + y) + (y + x) = x + (y + y) + x = x + x = 0$ donc $x + y = -(y + x) = (y + x)$.

# Propriétés des anneaux booléens (groupes booléens)



Un groupe booléen est un groupe $(G, +, 0)$ dans lequel tout élément non nul est d'ordre deux : $x + x = 0$ quel que soit $x \in G$.

Un tel groupe est nécessairement abélien :
$(x + y) + (y + x) = x + (y + y) + x = x + x = 0$ donc
$x + y = -(y + x) = (y + x)$.

# Propriétés des anneaux booléens (groupes booléens)



Un groupe booléen est un groupe $(G, +, 0)$ dans lequel tout élément non nul est d'ordre deux : $x + x = 0$ quel que soit $x \in G$.

Un tel groupe est nécessairement abélien :

$(x + y) + (y + x) = x + (y + y) + x = x + x = 0$ donc $x + y = -(y + x) = (y + x)$.

# Propriétés des anneaux booléens (groupes booléens)



Un groupe booléen est un groupe $(G, +, 0)$ dans lequel tout élément non nul est d'ordre deux : $x + x = 0$ quel que soit $x \in G$.

Un tel groupe est nécessairement abélien : $(x + y) + (y + x) = x + (y + y) + x = x + x = 0$ donc $x + y = -(y + x) = (y + x)$.

# Propriétés des anneaux booléens (groupes booléens)



**Proposition**

Soit $(G, +, 0)$ un groupe booléen. Alors $G$ est le groupe additif d'un anneau booléen.

# Propriétés des anneaux booléens (groupes booléens)



**Proposition**

Soit $(G, +, 0)$ un groupe booléen. Alors $G$ est le groupe additif d'un anneau booléen.

# Propriétés des anneaux booléens (groupes booléens)



**Proposition**

Soit $(G, +, 0)$ un groupe booléen. Alors $G$ est le groupe additif d'un anneau booléen.

# Propriétés des anneaux booléens (groupes booléens)

## (Idée de la) preuve

1. Soit $(e_i)_{i\in I}$ une $\mathbb{Z}_2$-base de $G$.
2. Quel que soit $x \in G$, on définit $I(x) \subseteq I$ tel que $x = \sum_{i\in I(x)} e_i$.
3. Soit $\mathcal{P}_{\text{fin}}(I)$ l'ensemble des parties finies de $I$. On définit la différence symétrique $A\Delta B := (A \setminus B) \vee (B \setminus A)$. Alors $(\mathcal{P}_{\text{fin}}(I), \Delta, \wedge, \emptyset)$ est un anneau booléen (avec unité si, et seulement si $I$ est fini).
4. $(G, +, 0)$ est isomorphe à $I(G) = (\mathcal{P}_{\text{fin}}(I), \Delta, \emptyset)$.

# Propriétés des anneaux booléens (groupes booléens)



## (Idée de la) preuve

1. Soit $(e_i)_{i \in I}$ une $\mathbb{Z}_2$-base de $G$.
2. Quel que soit $x \in G$, on définit $I(x) \subseteq I$ tel que $x = \sum_{i \in I(x)} e_i$.
3. Soit $\mathcal{P}_{\text{fin}}(I)$ l'ensemble des parties finies de $I$. On définit la différence symétrique $A \Delta B := (A \setminus B) \vee (B \setminus A)$. Alors $(\mathcal{P}_{\text{fin}}(I), \Delta, \wedge, \emptyset)$ est un anneau booléen (avec unité si, et seulement si $I$ est fini).
4. $(G, +, 0)$ est isomorphe à $I(G) = (\mathcal{P}_{\text{fin}}(I), \Delta, \emptyset)$.

# Propriétés des anneaux booléens (groupes booléens)



## (Idée de la) preuve

1. Soit $(e_i)_{i \in I}$ une $\mathbb{Z}_2$-base de $G$.
2. Quel que soit $x \in G$, on définit $I(x) \subseteq I$ tel que $x = \sum_{i \in I(x)} e_i$.
3. Soit $\mathcal{P}_{\text{fin}}(I)$ l'ensemble des parties finies de $I$. On définit la différence symétrique $A \Delta B := (A \setminus B) \vee (B \setminus A)$. Alors $(\mathcal{P}_{\text{fin}}(I), \Delta, \wedge, \emptyset)$ est un anneau booléen (avec unité si, et seulement si $I$ est fini).
4. $(G, +, 0)$ est isomorphe à $I(G) = (\mathcal{P}_{\text{fin}}(I), \Delta, \emptyset)$.

# Propriétés des anneaux booléens (groupes booléens)



## (Idée de la) preuve

1. Soit $(e_i)_{i\in I}$ une $\mathbb{Z}_2$-base de $G$.
2. Quel que soit $x \in G$, on définit $I(x) \subseteq I$ tel que $x = \sum_{i\in I(x)} e_i$.
3. Soit $\mathcal{P}_{\text{fin}}(I)$ l'ensemble des parties finies de $I$. On définit la différence symétrique $A\Delta B := (A \setminus B) \vee (B \setminus A)$. Alors $(\mathcal{P}_{\text{fin}}(I), \Delta, \wedge, \emptyset)$ est un anneau booléen (avec unité si, et seulement si $I$ est fini).
4. $(G, +, 0)$ est isomorphe à $I(G) = (\mathcal{P}_{\text{fin}}(I), \Delta, \emptyset)$.

# Propriétés des anneaux booléens (groupes booléens)



## (Idée de la) preuve

1. Soit $(e_i)_{i\in I}$ une $\mathbb{Z}_2$-base de $G$.
2. Quel que soit $x \in G$, on définit $I(x) \subseteq I$ tel que $x = \sum_{i\in I(x)} e_i$.
3. Soit $\mathcal{P}_{\text{fin}}(I)$ l'ensemble des parties finies de $I$. On définit la différence symétrique $A\Delta B := (A \setminus B) \vee (B \setminus A)$. Alors $(\mathcal{P}_{\text{fin}}(I), \Delta, \wedge, \emptyset)$ est un anneau booléen (avec unité si, et seulement si $I$ est fini).
4. $(G, +, 0)$ est isomorphe à $I(G) = (\mathcal{P}_{\text{fin}}(I), \Delta, \emptyset)$.

# Propriétés des anneaux booléens (groupes booléens)



## (Idée de la) preuve

1. Soit $(e_i)_{i \in I}$ une $\mathbb{Z}_2$-base de $G$.
2. Quel que soit $x \in G$, on définit $I(x) \subseteq I$ tel que
$$x = \sum_{i \in I(x)} e_i.$$
3. Soit $\mathcal{P}_{\text{fin}}(I)$ l'ensemble des parties finies de $I$. On définit la différence symétrique $A \Delta B := (A \setminus B) \vee (B \setminus A)$. Alors $(\mathcal{P}_{\text{fin}}(I), \Delta, \wedge, \emptyset)$ est un anneau booléen (avec unité si, et seulement si $I$ est fini).
4. $(G, +, 0)$ est isomorphe à $I(G) = (\mathcal{P}_{\text{fin}}(I), \Delta, \emptyset)$.

# Propriétés des anneaux booléens (groupes booléens)



## (Idée de la) preuve

1. Soit $(e_i)_{i \in I}$ une $\mathbb{Z}_2$-base de $G$.
2. Quel que soit $x \in G$, on définit $I(x) \subseteq I$ tel que
$$x = \sum_{i \in I(x)} e_i.$$
3. Soit $\mathcal{P}_{\text{fin}}(I)$ l'ensemble des parties finies de $I$. On définit la différence symétrique $A \Delta B := (A \setminus B) \vee (B \setminus A)$. Alors $(\mathcal{P}_{\text{fin}}(I), \Delta, \wedge, \emptyset)$ est un anneau booléen (avec unité si, et seulement si $I$ est fini).
4. $(G, +, 0)$ est isomorphe à $I(G) = (\mathcal{P}_{\text{fin}}(I), \Delta, \emptyset)$.

# Propriétés des anneaux booléens (groupes booléens)



## (Idée de la) preuve

1. Soit $(e_i)_{i \in I}$ une $\mathbb{Z}_2$-base de $G$.
2. Quel que soit $x \in G$, on définit $I(x) \subseteq I$ tel que $x = \sum_{i \in I(x)} e_i$.
3. Soit $\mathcal{P}_{\text{fin}}(I)$ l'ensemble des parties finies de $I$. On définit la différence symétrique $A \Delta B := (A \setminus B) \vee (B \setminus A)$. Alors $(\mathcal{P}_{\text{fin}}(I), \Delta, \wedge, \emptyset)$ est un anneau booléen (avec unité si, et seulement si $I$ est fini).
4. $(G, +, 0)$ est isomorphe à $I(G) = (\mathcal{P}_{\text{fin}}(I), \Delta, \emptyset)$.

# Algèbre booléenne $\leftrightarrow$ anneau booléen



1. Soit $(B, \wedge, \vee, -, 0, 1)$ une algèbre booléenne. Posons $ab := a \wedge b$ et $a + b := (a \wedge -b) \vee (-a \wedge b)$. Alors $(B, +, ., 0, 1)$ est un anneau booléen.
2. Réciproquement, soit $(B, +, ., 0, 1)$ un anneau booléen. Posons $a \wedge b := ab$, $a \vee b := a + b + ab$ et $-a := 1 + a$. Alors $(B, \wedge, \vee, -, 0, 1)$ est une algèbre booléenne.

# Algèbre booléenne $\leftrightarrow$ anneau booléen



1. Soit $(B, \wedge, \vee, -, 0, 1)$ une algèbre booléenne. Posons $ab := a \wedge b$ et $a + b := (a \wedge -b) \vee (-a \wedge b)$. Alors $(B, +, ., 0, 1)$ est un anneau booléen.
2. Réciproquement, soit $(B, +, ., 0, 1)$ un anneau booléen. Posons $a \wedge b := ab$, $a \vee b := a + b + ab$ et $-a := 1 + a$. Alors $(B, \wedge, \vee, -, 0, 1)$ est une algèbre booléenne.

# Algèbre booléenne $\leftrightarrow$ anneau booléen

1. Soit $(B, \wedge, \vee, -, 0, 1)$ une algèbre booléenne. Posons $ab := a \wedge b$ et $a + b := (a \wedge -b) \vee (-a \wedge b)$. Alors $(B, +, ., 0, 1)$ est un anneau booléen.
2. Réciproquement, soit $(B, +, ., 0, 1)$ un anneau booléen. Posons $a \wedge b := ab$, $a \vee b := a + b + ab$ et $-a := 1 + a$. Alors $(B, \wedge, \vee, -, 0, 1)$ est une algèbre booléenne.

# Algèbre booléenne $\leftrightarrow$ anneau booléen



1. Soit $(B, \wedge, \vee, -, 0, 1)$ une algèbre booléenne. Posons $ab := a \wedge b$ et $a + b := (a \wedge -b) \vee (-a \wedge b)$. Alors $(B, +, ., 0, 1)$ est un anneau booléen.
2. Réciproquement, soit $(B, +, ., 0, 1)$ un anneau booléen. Posons $a \wedge b := ab$, $a \vee b := a + b + ab$ et $-a := 1 + a$. Alors $(B, \wedge, \vee, -, 0, 1)$ est une algèbre booléenne.

# Algèbre booléenne $\leftrightarrow$ anneau booléen



1. Soit $(B, \wedge, \vee, -, 0, 1)$ une algèbre booléenne. Posons $ab := a \wedge b$ et $a + b := (a \wedge -b) \vee (-a \wedge b)$. Alors $(B, +, ., 0, 1)$ est un anneau booléen.
2. Réciproquement, soit $(B, +, ., 0, 1)$ un anneau booléen. Posons $a \wedge b := ab$, $a \vee b := a + b + ab$ et $-a := 1 + a$. Alors $(B, \wedge, \vee, -, 0, 1)$ est une algèbre booléenne.

# Algèbre booléenne $\leftrightarrow$ anneau booléen



1. Soit $(B, \wedge, \vee, -, 0, 1)$ une algèbre booléenne. Posons $ab := a \wedge b$ et $a + b := (a \wedge -b) \vee (-a \wedge b)$. Alors $(B, +, ., 0, 1)$ est un anneau booléen.
2. Réciproquement, soit $(B, +, ., 0, 1)$ un anneau booléen. Posons $a \wedge b := ab$, $a \vee b := a + b + ab$ et $-a := 1 + a$. Alors $(B, \wedge, \vee, -, 0, 1)$ est une algèbre booléenne.

# Algèbre booléenne $\leftrightarrow$ anneau booléen

1. Soit $(B, \wedge, \vee, -, 0, 1)$ une algèbre booléenne. Posons $ab := a \wedge b$ et $a + b := (a \wedge -b) \vee (-a \wedge b)$. Alors $(B, +, ., 0, 1)$ est un anneau booléen.
2. Réciproquement, soit $(B, +, ., 0, 1)$ un anneau booléen. Posons $a \wedge b := ab$, $a \vee b := a + b + ab$ et $-a := 1 + a$. Alors $(B, \wedge, \vee, -, 0, 1)$ est une algèbre booléenne.

# Atomes

Soit $B$ une algèbre booléenne. Un élément $\alpha \in B$ est un **atome** si, et seulement si, $\alpha \neq 0$ et quel que soit $a \in A$, si $a \leq \alpha$, alors $a = 0$ ou $a = \alpha$.

Soit $a \in B$. On note $A(a)$ l'ensemble de tous les atomes $\alpha$ de $B$ tels que $\alpha \leq a$. En particulier, $A(1)$ est l'ensemble de tous les atomes de $B$.

Supposons que $B$ soit fini. Les propriétés suivantes sont vérifiées :

1. $A(0) = \emptyset$ ;
2. $A(a) \neq \emptyset$ si, et seulement si, $a \neq 0$ ;
3. $A(a \wedge b) = A(a) \cap A(b)$ ;
4. $A(-a) = A(1) \setminus A(a)$ ;
5. $A(a) = A(b)$ si, et seulement si, $a = b$ ;
6. Si $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ sont des atomes distincts, alors $A(\alpha_1 \vee \alpha_2 \vee \cdots \vee \alpha_n) = \{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n\}$.

# Atomes

Soit $B$ une algèbre booléenne. Un élément $\alpha \in B$ est un **atome** si, et seulement si, $\alpha \neq 0$ et quel que soit $a \in A$, si $a \leq \alpha$, alors $a = 0$ ou $a = \alpha$.

Soit $a \in B$. On note $A(a)$ l'ensemble de tous les atomes $\alpha$ de $B$ tels que $\alpha \leq a$. En particulier, $A(1)$ est l'ensemble de tous les atomes de $B$.

Supposons que $B$ soit fini. Les propriétés suivantes sont vérifiées :

1. $A(0) = \emptyset$ ;
2. $A(a) \neq \emptyset$ si, et seulement si, $a \neq 0$ ;
3. $A(a \wedge b) = A(a) \cap A(b)$ ;
4. $A(-a) = A(1) \setminus A(a)$ ;
5. $A(a) = A(b)$ si, et seulement si, $a = b$ ;
6. Si $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ sont des atomes distincts, alors $A(\alpha_1 \vee \alpha_2 \vee \cdots \vee \alpha_n) = \{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n\}$.

# Atomes

Soit $B$ une algèbre booléenne. Un élément $\alpha \in B$ est un **atome** si, et seulement si, $\alpha \neq 0$ et quel que soit $a \in A$, si $a \leq \alpha$, alors $a = 0$ ou $a = \alpha$.

Soit $a \in B$. On note $A(a)$ l'ensemble de tous les atomes $\alpha$ de $B$ tels que $\alpha \leq a$. En particulier, $A(1)$ est l'ensemble de tous les atomes de $B$.

Supposons que $B$ soit fini. Les propriétés suivantes sont vérifiées :

1. $A(0) = \emptyset$ ;
2. $A(a) \neq \emptyset$ si, et seulement si, $a \neq 0$ ;
3. $A(a \wedge b) = A(a) \cap A(b)$ ;
4. $A(-a) = A(1) \setminus A(a)$ ;
5. $A(a) = A(b)$ si, et seulement si, $a = b$ ;
6. Si $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ sont des atomes distincts, alors $A(\alpha_1 \vee \alpha_2 \vee \cdots \vee \alpha_n) = \{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n\}$.

# Atomes

Soit $B$ une algèbre booléenne. Un élément $\alpha \in B$ est un **atome** si, et seulement si, $\alpha \neq 0$ et quel que soit $a \in A$, si $a \leq \alpha$, alors $a = 0$ ou $a = \alpha$.

Soit $a \in B$. On note $A(a)$ l'ensemble de tous les atomes $\alpha$ de $B$ tels que $\alpha \leq a$. En particulier, $A(1)$ est l'ensemble de tous les atomes de $B$.

Supposons que $B$ soit fini. Les propriétés suivantes sont vérifiées :

1. $A(0) = \emptyset$ ;
2. $A(a) \neq \emptyset$ si, et seulement si, $a \neq 0$ ;
3. $A(a \wedge b) = A(a) \cap A(b)$ ;
4. $A(-a) = A(1) \setminus A(a)$ ;
5. $A(a) = A(b)$ si, et seulement si, $a = b$ ;
6. Si $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ sont des atomes distincts, alors $A(\alpha_1 \vee \alpha_2 \vee \cdots \vee \alpha_n) = \{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n\}$.

# Atomes



Soit $B$ une algèbre booléenne. Un élément $\alpha \in B$ est un atome si, et seulement si, $\alpha \neq 0$ et quel que soit $a \in A$, si $a \leq \alpha$, alors $a = 0$ ou $a = \alpha$.

Soit $a \in B$. On note $A(a)$ l'ensemble de tous les atomes $\alpha$ de $B$ tels que $\alpha \leq a$. En particulier, $A(1)$ est l'ensemble de tous les atomes de $B$.

Supposons que $B$ soit fini. Les propriétés suivantes sont vérifiées :

1. $A(0) = \emptyset$ ;
2. $A(a) \neq \emptyset$ si, et seulement si, $a \neq 0$ ;
3. $A(a \wedge b) = A(a) \cap A(b)$ ;
4. $A(-a) = A(1) \setminus A(a)$ ;
5. $A(a) = A(b)$ si, et seulement si, $a = b$ ;
6. Si $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ sont des atomes distincts, alors $A(\alpha_1 \vee \alpha_2 \vee \cdots \vee \alpha_n) = \{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n\}$.

# Atomes

Soit $B$ une algèbre booléenne. Un élément $\alpha \in B$ est un atome si, et seulement si, $\alpha \neq 0$ et quel que soit $a \in A$, si $a \leq \alpha$, alors $a = 0$ ou $a = \alpha$.

Soit $a \in B$. On note $A(a)$ l'ensemble de tous les atomes $\alpha$ de $B$ tels que $\alpha \leq a$. En particulier, $A(1)$ est l'ensemble de tous les atomes de $B$.

Supposons que $B$ soit fini. Les propriétés suivantes sont vérifiées :

1. $A(0) = \emptyset$ ;
2. $A(a) \neq \emptyset$ si, et seulement si, $a \neq 0$ ;
3. $A(a \wedge b) = A(a) \cap A(b)$ ;
4. $A(-a) = A(1) \setminus A(a)$ ;
5. $A(a) = A(b)$ si, et seulement si, $a = b$ ;
6. Si $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ sont des atomes distincts, alors $A(\alpha_1 \vee \alpha_2 \vee \cdots \vee \alpha_n) = \{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n\}$.

# Atomes

Soit $B$ une algèbre booléenne. Un élément $\alpha \in B$ est un atome si, et seulement si, $\alpha \neq 0$ et quel que soit $a \in A$, si $a \leq \alpha$, alors $a = 0$ ou $a = \alpha$.

Soit $a \in B$. On note $A(a)$ l'ensemble de tous les atomes $\alpha$ de $B$ tels que $\alpha \leq a$. En particulier, $A(1)$ est l'ensemble de tous les atomes de $B$.

Supposons que $B$ soit fini. Les propriétés suivantes sont vérifiées :

1. $A(0) = \emptyset$ ;
2. $A(a) \neq \emptyset$ si, et seulement si, $a \neq 0$ ;
3. $A(a \wedge b) = A(a) \cap A(b)$ ;
4. $A(-a) = A(1) \setminus A(a)$ ;
5. $A(a) = A(b)$ si, et seulement si, $a = b$ ;
6. Si $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ sont des atomes distincts, alors $A(\alpha_1 \vee \alpha_2 \vee \cdots \vee \alpha_n) = \{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n\}$.

# Atomes

Soit $B$ une algèbre booléenne. Un élément $\alpha \in B$ est un **atome** si, et seulement si, $\alpha \neq 0$ et quel que soit $a \in A$, si $a \leq \alpha$, alors $a = 0$ ou $a = \alpha$.

Soit $a \in B$. On note $A(a)$ l'ensemble de tous les atomes $\alpha$ de $B$ tels que $\alpha \leq a$. En particulier, $A(1)$ est l'ensemble de tous les atomes de $B$.

Supposons que $B$ soit fini. Les propriétés suivantes sont vérifiées :

1. $A(0) = \emptyset$ ;
2. $A(a) \neq \emptyset$ si, et seulement si, $a \neq 0$ ;
3. $A(a \wedge b) = A(a) \cap A(b)$ ;
4. $A(-a) = A(1) \setminus A(a)$ ;
5. $A(a) = A(b)$ si, et seulement si, $a = b$ ;
6. Si $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ sont des atomes distincts, alors $A(\alpha_1 \vee \alpha_2 \vee \cdots \vee \alpha_n) = \{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n\}$.

# Atomes

Soit $B$ une algèbre booléenne. Un élément $\alpha \in B$ est un atome si, et seulement si, $\alpha \neq 0$ et quel que soit $a \in A$, si $a \leq \alpha$, alors $a = 0$ ou $a = \alpha$.

Soit $a \in B$. On note $A(a)$ l'ensemble de tous les atomes $\alpha$ de $B$ tels que $\alpha \leq a$. En particulier, $A(1)$ est l'ensemble de tous les atomes de $B$.

Supposons que $B$ soit fini. Les propriétés suivantes sont vérifiées :

1. $A(0) = \emptyset$ ;
2. $A(a) \neq \emptyset$ si, et seulement si, $a \neq 0$ ;
3. $A(a \wedge b) = A(a) \cap A(b)$ ;
4. $A(-a) = A(1) \setminus A(a)$ ;
5. $A(a) = A(b)$ si, et seulement si, $a = b$ ;
6. Si $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ sont des atomes distincts, alors $A(\alpha_1 \vee \alpha_2 \vee \cdots \vee \alpha_n) = \{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n\}$.

# Atomes

Soit $B$ une algèbre booléenne. Un élément $\alpha \in B$ est un atome si, et seulement si, $\alpha \neq 0$ et quel que soit $a \in A$, si $a \leq \alpha$, alors $a = 0$ ou $a = \alpha$.
Soit $a \in B$. On note $A(a)$ l'ensemble de tous les atomes $\alpha$ de $B$ tels que $\alpha \leq a$. En particulier, $A(1)$ est l'ensemble de tous les atomes de $B$.
Supposons que $B$ soit fini. Les propriétés suivantes sont vérifiées :

1. $A(0) = \emptyset$ ;
2. $A(a) \neq \emptyset$ si, et seulement si, $a \neq 0$ ;
3. $A(a \wedge b) = A(a) \cap A(b)$ ;
4. $A(-a) = A(1) \setminus A(a)$ ;
5. $A(a) = A(b)$ si, et seulement si, $a = b$ ;
6. Si $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ sont des atomes distincts, alors $A(\alpha_1 \vee \alpha_2 \vee \cdots \vee \alpha_n) = \{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n\}$.

# Atomes

Soit $B$ une algèbre booléenne. Un élément $\alpha \in B$ est un atome si, et seulement si, $\alpha \neq 0$ et quel que soit $a \in A$, si $a \leq \alpha$, alors $a = 0$ ou $a = \alpha$.

Soit $a \in B$. On note $A(a)$ l'ensemble de tous les atomes $\alpha$ de $B$ tels que $\alpha \leq a$. En particulier, $A(1)$ est l'ensemble de tous les atomes de $B$.

Supposons que $B$ soit fini. Les propriétés suivantes sont vérifiées :

1. $A(0) = \emptyset$ ;
2. $A(a) \neq \emptyset$ si, et seulement si, $a \neq 0$ ;
3. $A(a \wedge b) = A(a) \cap A(b)$ ;
4. $A(-a) = A(1) \setminus A(a)$ ;
5. $A(a) = A(b)$ si, et seulement si, $a = b$ ;
6. Si $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ sont des atomes distincts, alors $A(\alpha_1 \vee \alpha_2 \vee \cdots \vee \alpha_n) = \{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n\}$.

# Atomes

Soit $B$ une algèbre booléenne. Un élément $\alpha \in B$ est un atome si, et seulement si, $\alpha \neq 0$ et quel que soit $a \in A$, si $a \leq \alpha$, alors $a = 0$ ou $a = \alpha$.

Soit $a \in B$. On note $A(a)$ l'ensemble de tous les atomes $\alpha$ de $B$ tels que $\alpha \leq a$. En particulier, $A(1)$ est l'ensemble de tous les atomes de $B$.

Supposons que $B$ soit fini. Les propriétés suivantes sont vérifiées :

1. $A(0) = \emptyset$ ;
2. $A(a) \neq \emptyset$ si, et seulement si, $a \neq 0$ ;
3. $A(a \wedge b) = A(a) \cap A(b)$ ;
4. $A(-a) = A(1) \setminus A(a)$ ;
5. $A(a) = A(b)$ si, et seulement si, $a = b$ ;
6. Si $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ sont des atomes distincts, alors $A(\alpha_1 \vee \alpha_2 \vee \cdots \vee \alpha_n) = \{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n\}$.

# Atomes



Soit $B$ une algèbre booléenne. Un élément $\alpha \in B$ est un atome si, et seulement si, $\alpha \neq 0$ et quel que soit $a \in A$, si $a \leq \alpha$, alors $a = 0$ ou $a = \alpha$.
Soit $a \in B$. On note $A(a)$ l'ensemble de tous les atomes $\alpha$ de $B$ tels que $\alpha \leq a$. En particulier, $A(1)$ est l'ensemble de tous les atomes de $B$.
Supposons que $B$ soit fini. Les propriétés suivantes sont vérifiées :

1. $A(0) = \emptyset$ ;
2. $A(a) \neq \emptyset$ si, et seulement si, $a \neq 0$ ;
3. $A(a \wedge b) = A(a) \cap A(b)$ ;
4. $A(-a) = A(1) \setminus A(a)$ ;
5. $A(a) = A(b)$ si, et seulement si, $a = b$ ;
6. Si $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ sont des atomes distincts, alors $A(\alpha_1 \vee \alpha_2 \vee \cdots \vee \alpha_n) = \{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n\}$.

# Atomes

Soit $B$ une algèbre booléenne. Un élément $\alpha \in B$ est un atome si, et seulement si, $\alpha \neq 0$ et quel que soit $a \in A$, si $a \leq \alpha$, alors $a = 0$ ou $a = \alpha$.
Soit $a \in B$. On note $A(a)$ l'ensemble de tous les atomes $\alpha$ de $B$ tels que $\alpha \leq a$. En particulier, $A(1)$ est l'ensemble de tous les atomes de $B$.
Supposons que $B$ soit fini. Les propriétés suivantes sont vérifiées :

1. $A(0) = \emptyset$ ;
2. $A(a) \neq \emptyset$ si, et seulement si, $a \neq 0$ ;
3. $A(a \wedge b) = A(a) \cap A(b)$ ;
4. $A(-a) = A(1) \setminus A(a)$ ;
5. $A(a) = A(b)$ si, et seulement si, $a = b$ ;
6. Si $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ sont des atomes distincts, alors $A(\alpha_1 \vee \alpha_2 \vee \cdots \vee \alpha_n) = \{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n\}$.

# Atomes

Soit $B$ une algèbre booléenne. Un élément $\alpha \in B$ est un atome si, et seulement si, $\alpha \neq 0$ et quel que soit $a \in A$, si $a \leq \alpha$, alors $a = 0$ ou $a = \alpha$.
Soit $a \in B$. On note $A(a)$ l'ensemble de tous les atomes $\alpha$ de $B$ tels que $\alpha \leq a$. En particulier, $A(1)$ est l'ensemble de tous les atomes de $B$.
Supposons que $B$ soit fini. Les propriétés suivantes sont vérifiées :

1. $A(0) = \emptyset$ ;
2. $A(a) \neq \emptyset$ si, et seulement si, $a \neq 0$ ;
3. $A(a \wedge b) = A(a) \cap A(b)$ ;
4. $A(-a) = A(1) \setminus A(a)$ ;
5. $A(a) = A(b)$ si, et seulement si, $a = b$ ;
6. Si $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ sont des atomes distincts, alors $A(\alpha_1 \vee \alpha_2 \vee \cdots \vee \alpha_n) = \{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n\}$.

# Atomes



Soit $B$ une algèbre booléenne. Un élément $\alpha \in B$ est un atome si, et seulement si, $\alpha \neq 0$ et quel que soit $a \in A$, si $a \leq \alpha$, alors $a = 0$ ou $a = \alpha$.
Soit $a \in B$. On note $A(a)$ l'ensemble de tous les atomes $\alpha$ de $B$ tels que $\alpha \leq a$. En particulier, $A(1)$ est l'ensemble de tous les atomes de $B$.
Supposons que $B$ soit fini. Les propriétés suivantes sont vérifiées :

1. $A(0) = \emptyset$ ;
2. $A(a) \neq \emptyset$ si, et seulement si, $a \neq 0$ ;
3. $A(a \wedge b) = A(a) \cap A(b)$ ;
4. $A(-a) = A(1) \setminus A(a)$ ;
5. $A(a) = A(b)$ si, et seulement si, $a = b$ ;
6. Si $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ sont des atomes distincts, alors $A(\alpha_1 \vee \alpha_2 \vee \cdots \vee \alpha_n) = \{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n\}$.

# Théorème de représentation (cas fini)

Soit $B$ une algèbre booléenne finie. Alors l'application

$$\begin{array}{rccc} A: & B & \longrightarrow & \mathcal{P}(A(1)) \\ & a & \longmapsto & A(a) \end{array} \tag{8}$$

est un isomorphisme d'algèbres booléennes.

# Théorème de représentation (cas fini)



Soit $B$ une algèbre booléenne finie. Alors l'application

$$\begin{array}{rccc} A: & B & \rightarrow & \mathcal{P}(A(1)) \\ & a & \mapsto & A(a) \end{array} \tag{8}$$

est un isomorphisme d'algèbres booléennes.

# Théorème de représentation (cas fini)



Soit $B$ une algèbre booléenne finie. Alors l'application

$$\begin{array}{rccc} A: & B & \longrightarrow & \mathcal{P}(A(1)) \\ & a & \longmapsto & A(a) \end{array} \tag{8}$$

est un isomorphisme d'algèbres booléennes.

# Algèbre booléenne complète



Une algèbre booléenne $B$ est complète si, et seulement si,
quel que soit $S \subseteq B$, $\inf(S)$ et $\sup(S)$ existent.

# Algèbre booléenne complète



Une algèbre booléenne $B$ est complète si, et seulement si, quel que soit $S \subseteq B$, $\inf(S)$ et $\sup(S)$ existent.

# Théorème de représentation (cas complet)



Soit $B$ une algèbre booléenne complète. Alors l'application

$$\begin{array}{rccc} A: & B & \longrightarrow & \mathcal{P}(A(1)) \\ & a & \longmapsto & A(a) \end{array} \tag{9}$$

est un isomorphisme d'algèbres booléennes.

# Théorème de représentation (cas complet)

Soit $B$ une algèbre booléenne complète. Alors l'application

$$\begin{array}{rccl} A: & B & \rightarrow & \mathcal{P}(A(1)) \\ & a & \mapsto & A(a) \end{array} \tag{9}$$

est un isomorphisme d'algèbres booléennes.

# Théorème de représentation (cas complet)



Soit $B$ une algèbre booléenne complète. Alors l'application

$$\begin{array}{rccc} A: & B & \longrightarrow & \mathcal{P}(A(1)) \\ & a & \longmapsto & A(a) \end{array} \tag{9}$$

est un isomorphisme d'algèbres booléennes.

Une algèbre booléenne généralisée $(B, \wedge, \vee, \setminus, 0)$ est une algèbre booléenne qui n'a pas nécessairement d'élément neutre 1 pour $\wedge$. L'opération unaire $-$ des algèbres booléennes usuelles est remplacée par l'opération binaire $\setminus$ dite complémentaire relafif définie de la façon suivante : $a \setminus b$ est l'unique $x$ tel que $(a \wedge b) \vee x = a$ et $(a \wedge b) \wedge x = 0$.

Une algèbre booléenne généralisée $(B, \wedge, \vee, \setminus, 0)$ est une algèbre booléenne qui n'a pas nécessairement d'élément neutre 1 pour $\wedge$. L'opération unaire $-$ des algèbres booléennes usuelles est remplacée par l'opération binaire $\setminus$ dite complémentaire relafif définie de la façon suivante :

$a \setminus b$ est l'unique $x$ tel que $(a \wedge b) \vee x = a$ et $(a \wedge b) \wedge x = 0$.

Une algèbre booléenne généralisée $(B, \wedge, \vee, \setminus, 0)$ est une algèbre booléenne qui n'a pas nécessairement d'élément neutre 1 pour $\wedge$. L'opération unaire $-$ des algèbres booléennes usuelles est remplacée par l'opération binaire $\setminus$ dite complémentaire relafif définie de la façon suivante : $a \setminus b$ est l'unique $x$ tel que $(a \wedge b) \vee x = a$ et $(a \wedge b) \wedge x = 0$.

# Exemple

Soit $S$ un ensemble quelconque. Alors $(\mathcal{P}_{\text{fin}}(S), \cap, \cup, \setminus, \emptyset)$ est une algèbre booléenne généralisée. (Remarquons que cette algèbre booléenne n'admet pas d'élément neutre pour $\cap$ lorsque $S$ est un ensemble infini.)

# Exemple



Soit $S$ un ensemble quelconque. Alors $(\mathcal{P}_{\text{fin}}(S), \cap, \cup, \setminus, \emptyset)$ est une algèbre booléenne généralisée. (Remarquons que cette algèbre booléenne n'admet pas d'élément neutre pour $\cap$ lorsque $S$ est un ensemble infini.)

# Exemple

Soit $S$ un ensemble quelconque. Alors $(\mathcal{P}_{\text{fin}}(S), \cap, \cup, \setminus, \emptyset)$ est une algèbre booléenne généralisée. (Remarquons que cette algèbre booléenne n'admet pas d'élément neutre pour $\cap$ lorsque $S$ est un ensemble infini.)

# Exemple

Soit $S$ un ensemble quelconque. Alors $(\mathcal{P}_{\text{fin}}(S), \cap, \cup, \setminus, \emptyset)$ est une algèbre booléenne généralisée. (Remarquons que cette algèbre booléenne n'admet pas d'élément neutre pour $\cap$ lorsque $S$ est un ensemble infini.)

# Algèbre booléenne généralisée $\leftrightarrow$ anneau booléen sans unité



1. Soit $(B, \wedge, \vee, \setminus, 0)$ une algèbre booléenne généralisée. Alors $(B, \Delta, \vee, 0)$ est un anneau booléen (qui n'a pas nécessairement d'unité) avec $a \Delta b := (a \setminus b) \vee (b \setminus a)$ ;
2. Réciproquement, soit $(B, +, \times, 0)$ un anneau booléen. Alors $(B, \times, \vee, \setminus, 0)$, avec $a \vee b := a + b + ab$ et $a \setminus b := a + ab$, est une algèbre booléenne généralisée.

# Algèbre booléenne généralisée $\leftrightarrow$ anneau booléen sans unité

1. Soit $(B, \wedge, \vee, \setminus, 0)$ une algèbre booléenne généralisée. Alors $(B, \Delta, \vee, 0)$ est un anneau booléen (qui n'a pas nécessairement d'unité) avec $a \Delta b := (a \setminus b) \vee (b \setminus a)$ ;
2. Réciproquement, soit $(B, +, \times, 0)$ un anneau booléen. Alors $(B, \times, \vee, \setminus, 0)$, avec $a \vee b := a + b + ab$ et $a \setminus b := a + ab$, est une algèbre booléenne généralisée.

# Algèbre booléenne généralisée $\leftrightarrow$ anneau booléen sans unité



1. Soit $(B, \wedge, \vee, \setminus, 0)$ une algèbre booléenne généralisée. Alors $(B, \Delta, \vee, 0)$ est un anneau booléen (qui n'a pas nécessairement d'unité) avec $a\Delta b := (a \setminus b) \vee (b \setminus a)$ ;
2. Réciproquement, soit $(B, +, \times, 0)$ un anneau booléen. Alors $(B, \times, \vee, \setminus, 0)$, avec $a \vee b := a + b + ab$ et $a \setminus b := a + ab$, est une algèbre booléenne généralisée.

# Algèbre booléenne généralisée $\leftrightarrow$ anneau booléen sans unité



1. Soit $(B, \wedge, \vee, \setminus, 0)$ une algèbre booléenne généralisée. Alors $(B, \Delta, \vee, 0)$ est un anneau booléen (qui n'a pas nécessairement d'unité) avec $a \Delta b := (a \setminus b) \vee (b \setminus a)$ ;
2. Réciproquement, soit $(B, +, \times, 0)$ un anneau booléen. Alors $(B, \times, \vee, \setminus, 0)$, avec $a \vee b := a + b + ab$ et $a \setminus b := a + ab$, est une algèbre booléenne généralisée.

**Proposition (Stone, 1935)**

Soit $(B, \wedge, \vee, \setminus, 0)$ une algèbre booléenne généralisée. Si le cardinal de $B$ est fini, alors $B$ est une algèbre booléenne usuelle.

**Proposition (Stone, 1935)**

Soit $(B, \wedge, \vee, \setminus, 0)$ une algèbre booléenne généralisée. Si le cardinal de $B$ est fini, alors $B$ est une algèbre booléenne usuelle.

# Algèbres booléennes généralisées localement finies



Soit $(B, \wedge, \vee, \setminus, 0)$ une algèbre booléenne généralisée. $B$ est localement finie si, et seulement si, quel que soit $a \in B$, l'idéal d'ordre principal engendré par $a$, à savoir $[0, a] := \{x \in B : x \leq a\}$, est fini.

**Remarque :** Rota a introduit la notion de finitude locale pour un ensemble partiellement ordonné $P$ de la façon suivante : $P$ est localement fini si, et seulement si, quels que soient $x, y \in P$, $[x, y]$ est fini.

Dans le cas où $P$ admet un minimum, les deux notions sont équivalentes.

# Algèbres booléennes généralisées localement finies



Soit $(B, \wedge, \vee, \setminus, 0)$ une algèbre booléenne généralisée. $B$ est localement finie si, et seulement si, quel que soit $a \in B$, l'idéal d'ordre principal engendré par $a$, à savoir $[0, a] := \{x \in B : x \leq a\}$, est fini.

**Remarque :** Rota a introduit la notion de finitude locale pour un ensemble partiellement ordonné $P$ de la façon suivante : $P$ est localement fini si, et seulement si, quels que soient $x, y \in P$, $[x, y]$ est fini.
Dans le cas où $P$ admet un minimum, les deux notions sont équivalentes.

# Algèbres booléennes généralisées localement finies

Soit $(B, \wedge, \vee, \setminus, 0)$ une algèbre booléenne généralisée. $B$ est localement finie si, et seulement si, quel que soit $a \in B$, l'idéal d'ordre principal engendré par $a$, à savoir $[0, a] := \{x \in B : x \leq a\}$, est fini.

**Remarque :** Rota a introduit la notion de finitude locale pour un ensemble partiellement ordonné $P$ de la façon suivante : $P$ est localement fini si, et seulement si, quels que soient $x, y \in P$, $[x, y]$ est fini.

Dans le cas où $P$ admet un minimum, les deux notions sont équivalentes.

# Algèbres booléennes généralisées localement finies

Soit $(B, \wedge, \vee, \setminus, 0)$ une algèbre booléenne généralisée. $B$ est localement finie si, et seulement si, quel que soit $a \in B$, l'idéal d'ordre principal engendré par $a$, à savoir $[0, a] := \{x \in B : x \leq a\}$, est fini.

**Remarque :** Rota a introduit la notion de finitude locale pour un ensemble partiellement ordonné $P$ de la façon suivante : $P$ est localement fini si, et seulement si, quels que soient $x, y \in P$, $[x, y]$ est fini.

Dans le cas où $P$ admet un minimum, les deux notions sont équivalentes.

# Exemple

$\mathcal{P}_{\text{fin}}(S)$ est une algèbre booléenne (généralisée) localement finie. En effet, soit $E$ une partie finie de $S$. Par définition, $F \in [\emptyset, E]$ si, et seulement si, $F \subseteq E$, soit encore $F \in \mathcal{P}(E)$.

# Exemple



$\mathcal{P}_{\text{fin}}(S)$ est une algèbre booléenne (généralisée) localement finie. En effet, soit $E$ une partie finie de $S$. Par définition, $F \in [\emptyset, E]$ si, et seulement si, $F \subseteq E$, soit encore $F \in \mathcal{P}(E)$.

## Représentation des algèbres booléennes généralisée localement finies



Soit $(B, \wedge, \vee, \setminus, 0)$ une algèbre booléenne généralisée localement finie. Soit $A$ l'ensemble des atomes de $B$. Alors l'application

$$\begin{array}{rccc} A: & B & \longrightarrow & \mathcal{P}_{fin}(A) \\ & a & \mapsto & A(a) \end{array} \tag{10}$$

est un isomorphisme d'algèbres booléennes généralisées.

# Représentation des algèbres booléennes généralisée localement finies

Soit $(B, \wedge, \vee, \setminus, 0)$ une algèbre booléenne généralisée localement finie. Soit $A$ l'ensemble des atomes de $B$. Alors l'application

$$\begin{array}{rccc} A: & B & \rightarrow & \mathcal{P}_{fin}(A) \\ & a & \mapsto & A(a) \end{array} \tag{10}$$

est un isomorphisme d'algèbres booléennes généralisées.

# Définitions



Soit $S$ un ensemble, $D \subseteq S^2$ et une application $* : D \to S$.

La donnée de $(S, *)$ est un semigroupe partiel si, et seulement si, la loi $*$ est *associative* au sens où si $a * b$ et $(a * b) * c$ sont définis, alors $(b * c)$ et $a * (b * c)$ le sont également, et dans ce cas, $(a * b) * c = a * (b * c)$.

$(S, *)$ est un monoïde partiel si, et seulement s'il admet un élément neutre (total) 1, c'est-à-dire quel que soit $a \in S$, $1 * a$ et $a * 1$ sont définis, et $1 * a = a = a * 1$.

Un semigroupe est $S$ commutatif, si et seulement si, quels que soient $a, b \in S$, si $a * b$ est défini, alors $b * a$ l'est également, et dans ce cas, $a * b = b * a$.

# Définitions

Soit $S$ un ensemble, $D \subseteq S^2$ et une application $* : D \to S$. La donnée de $(S, *)$ est un **semigroupe partiel** si, et seulement si, la loi $*$ est *associative* au sens où si $a * b$ et $(a * b) * c$ sont définis, alors $(b * c)$ et $a * (b * c)$ le sont également, et dans ce cas, $(a * b) * c = a * (b * c)$.
$(S, *)$ est un **monoïde partiel** si, et seulement s'il admet un élément neutre (total) 1, c'est-à-dire quel que soit $a \in S$, $1 * a$ et $a * 1$ sont définis, et $1 * a = a = a * 1$.
Un semigroupe est $S$ **commutatif**, si et seulement si, quels que soient $a, b \in S$, si $a * b$ est défini, alors $b * a$ l'est également, et dans ce cas, $a * b = b * a$.

# Définitions

Soit $S$ un ensemble, $D \subseteq S^2$ et une application $* : D \to S$. La donnée de $(S, *)$ est un semigroupe partiel si, et seulement si, la loi $*$ est *associative* au sens où si $a * b$ et $(a * b) * c$ sont définis, alors $(b * c)$ et $a * (b * c)$ le sont également, et dans ce cas, $(a * b) * c = a * (b * c)$.

$(S, *)$ est un monoïde partiel si, et seulement s'il admet un élément neutre (total) 1, c'est-à-dire quel que soit $a \in S$, $1 * a$ et $a * 1$ sont définis, et $1 * a = a = a * 1$.

Un semigroupe est $S$ commutatif, si et seulement si, quels que soient $a, b \in S$, si $a * b$ est défini, alors $b * a$ l'est également, et dans ce cas, $a * b = b * a$.

# Définitions

Soit $S$ un ensemble, $D \subseteq S^2$ et une application $* : D \to S$. La donnée de $(S, *)$ est un semigroupe partiel si, et seulement si, la loi $*$ est *associative* au sens où si $a * b$ et $(a * b) * c$ sont définis, alors $(b * c)$ et $a * (b * c)$ le sont également, et dans ce cas, $(a * b) * c = a * (b * c)$.
$(S, *)$ est un monoïde partiel si, et seulement s'il admet un élément neutre (total) 1, c'est-à-dire quel que soit $a \in S$, $1 * a$ et $a * 1$ sont définis, et $1 * a = a = a * 1$.
Un semigroupe est $S$ commutatif, si et seulement si, quels que soient $a, b \in S$, si $a * b$ est défini, alors $b * a$ l'est également, et dans ce cas, $a * b = b * a$.

# Définitions

Soit $S$ un ensemble, $D \subseteq S^2$ et une application $* : D \to S$. La donnée de $(S, *)$ est un semigroupe partiel si, et seulement si, la loi $*$ est *associative* au sens où si $a * b$ et $(a * b) * c$ sont définis, alors $(b * c)$ et $a * (b * c)$ le sont également, et dans ce cas, $(a * b) * c = a * (b * c)$.

$(S, *)$ est un monoïde partiel si, et seulement s'il admet un élément neutre (total) 1, c'est-à-dire quel que soit $a \in S$, $1 * a$ et $a * 1$ sont définis, et $1 * a = a = a * 1$.

Un semigroupe est $S$ commutatif, si et seulement si, quels que soient $a, b \in S$, si $a * b$ est défini, alors $b * a$ l'est également, et dans ce cas, $a * b = b * a$.

## Définitions



Soit $S$ un ensemble, $D \subseteq S^2$ et une application $* : D \to S$. La donnée de $(S, *)$ est un semigroupe partiel si, et seulement si, la loi $*$ est *associative* au sens où si $a * b$ et $(a * b) * c$ sont définis, alors $(b * c)$ et $a * (b * c)$ le sont également, et dans ce cas, $(a * b) * c = a * (b * c)$.
$(S, *)$ est un monoïde partiel si, et seulement s'il admet un élément neutre (total) 1, c'est-à-dire quel que soit $a \in S$, $1 * a$ et $a * 1$ sont définis, et $1 * a = a = a * 1$.
Un semigroupe est $S$ commutatif, si et seulement si, quels que soient $a, b \in S$, si $a * b$ est défini, alors $b * a$ l'est également, et dans ce cas, $a * b = b * a$.

# Exemple

1. Les flêches d'une (petite) catégorie forment un semigroupe (non commutatif) pour la composition. Ce n'est pas un monoïde (s'il y a plus d'un objet) car il n'y a pas d'élément neutre total.
2. Soit $\mathrm{Esfc} \subseteq \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ l'ensemble des entiers sans facteur carré. Soit $m, n \in \mathrm{Esfc}$. On définit $m * n := mn$ si, et seulement si, $\mathrm{pgcd}(m, n) = 1$. $(\mathrm{Isfc}, *)$ est un semigroupe partiel (commutatif). De plus, $(\mathrm{Esfc} \sqcup \{1\}, *, 1)$ est un monoïde partiel (commutatif).

# Exemple

1. Les flêches d'une (petite) catégorie forment un semigroupe (non commutatif) pour la composition. Ce n'est pas un monoïde (s'il y a plus d'un objet) car il n'y a pas d'élément neutre total.
2. Soit $\mathrm{Esfc} \subseteq \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ l'ensemble des entiers sans facteur carré. Soit $m, n \in \mathrm{Esfc}$. On définit $m * n := mn$ si, et seulement si, $\mathrm{pgcd}(m, n) = 1$. $(\mathrm{Isfc}, *)$ est un semigroupe partiel (commutatif). De plus, $(\mathrm{Esfc} \sqcup \{1\}, *, 1)$ est un monoïde partiel (commutatif).

# Exemple

1. Les flêches d'une (petite) catégorie forment un semigroupe (non commutatif) pour la composition. Ce n'est pas un monoïde (s'il y a plus d'un objet) car il n'y a pas d'élément neutre total.
2. Soit $\mathrm{Esfc} \subseteq \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ l'ensemble des entiers sans facteur carré. Soit $m, n \in \mathrm{Esfc}$. On définit $m * n := mn$ si, et seulement si, $\mathrm{pgcd}(m, n) = 1$. $(\mathrm{Isfc}, *)$ est un semigroupe partiel (commutatif). De plus, $(\mathrm{Esfc} \sqcup \{1\}, *, 1)$ est un monoïde partiel (commutatif).

# Exemple

1. Les flêches d'une (petite) catégorie forment un semigroupe (non commutatif) pour la composition. Ce n'est pas un monoïde (s'il y a plus d'un objet) car il n'y a pas d'élément neutre total.
2. Soit $\mathrm{Esfc} \subseteq \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ l'ensemble des entiers sans facteur carré. Soit $m, n \in \mathrm{Esfc}$. On définit $m * n := mn$ si, et seulement si, $\mathrm{pgcd}(m, n) = 1$. $(\mathrm{Isfc}, *)$ est un semigroupe partiel (commutatif). De plus, $(\mathrm{Esfc} \sqcup \{1\}, *, 1)$ est un monoïde partiel (commutatif).

# Exemple

1. Les flêches d'une (petite) catégorie forment un semigroupe (non commutatif) pour la composition. Ce n'est pas un monoïde (s'il y a plus d'un objet) car il n'y a pas d'élément neutre total.
2. Soit $\mathrm{Esfc} \subseteq \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ l'ensemble des entiers sans facteur carré. Soit $m, n \in \mathrm{Esfc}$. On définit $m * n := mn$ si, et seulement si, $\mathrm{pgcd}(m, n) = 1$. $(\mathrm{Isfc}, *)$ est un semigroupe partiel (commutatif). De plus, $(\mathrm{Esfc} \sqcup \{1\}, *, 1)$ est un monoïde partiel (commutatif).

# Exemple

1. Les flêches d'une (petite) catégorie forment un semigroupe (non commutatif) pour la composition. Ce n'est pas un monoïde (s'il y a plus d'un objet) car il n'y a pas d'élément neutre total.
2. Soit $\mathrm{Esfc} \subseteq \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ l'ensemble des entiers sans facteur carré. Soit $m, n \in \mathrm{Esfc}$. On définit $m * n := mn$ si, et seulement si, $\mathrm{pgcd}(m, n) = 1$. $(\mathrm{Isfc}, *)$ est un semigroupe partiel (commutatif). De plus, $(\mathrm{Esfc} \sqcup \{1\}, *, 1)$ est un monoïde partiel (commutatif).

# Exemple



1. Les flêches d'une (petite) catégorie forment un semigroupe (non commutatif) pour la composition. Ce n'est pas un monoïde (s'il y a plus d'un objet) car il n'y a pas d'élément neutre total.
2. Soit $\mathrm{Esfc} \subseteq \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ l'ensemble des entiers sans facteur carré. Soit $m, n \in \mathrm{Esfc}$. On définit $m * n := mn$ si, et seulement si, $\mathrm{pgcd}(m, n) = 1$. $(\mathrm{Isfc}, *)$ est un semigroupe partiel (commutatif). De plus, $(\mathrm{Esfc} \sqcup \{1\}, *, 1)$ est un monoïde partiel (commutatif).

# Extension d'un semigroupe partiel par adjonction d'un élément absorbant





Soit $(S,*)$ un semigroupe partiel. Soit $\uparrow \notin S$ (par exemple, $\uparrow := \{S\}$, si l'on suppose vrai l'axiome de fondation). Soit $S_\uparrow := S \sqcup \{\uparrow\}$. On étend l'opération $*$ à $S_\uparrow$ tout entier par $x * y := \uparrow$ si, et seulement si, $(x,y) \notin D$, avec $D$ le domaine de définition de $*$. En particulier, $x* \uparrow = \uparrow = \uparrow * x$ quel que soit $x \in S$.

**Proposition**

$(S_\uparrow, *)$ est un semigroupe (total).

# Extension d'un semigroupe partiel par adjonction d'un élément absorbant



Soit $(S, *)$ un semigroupe partiel. Soit $\uparrow \not\in S$ (par exemple, $\uparrow := \{S\}$, si l'on suppose vrai l'axiome de fondation). Soit $S_\uparrow := S \sqcup \{\uparrow\}$. On étend l'opération $*$ à $S_\uparrow$ tout entier par $x * y := \uparrow$ si, et seulement si, $(x, y) \not\in D$, avec $D$ le domaine de définition de $*$. En particulier, $x * \uparrow = \uparrow = \uparrow * x$ quel que soit $x \in S$.

**Proposition**

$(S_\uparrow, *)$ est un semigroupe (total).

# Extension d'un semigroupe partiel par adjonction d'un élément absorbant



Soit $(S, *)$ un semigroupe partiel. Soit $\uparrow \notin S$ (par exemple, $\uparrow := \{S\}$, si l'on suppose vrai l'axiome de fondation). Soit $S_\uparrow := S \sqcup \{\uparrow\}$. On étend l'opération $*$ à $S_\uparrow$ tout entier par $x * y := \uparrow$ si, et seulement si, $(x, y) \notin D$, avec $D$ le domaine de définition de $*$. En particulier, $x * \uparrow = \uparrow = \uparrow * x$ quel que soit $x \in S$.

**Proposition**

$(S_\uparrow, *)$ est un semigroupe (total).

# Extension d'un semigroupe partiel par adjonction d'un élément absorbant



Soit $(S, *)$ un semigroupe partiel. Soit $\uparrow \not\in S$ (par exemple, $\uparrow := \{S\}$, si l'on suppose vrai l'axiome de fondation). Soit $S_\uparrow := S \sqcup \{\uparrow\}$. On étend l'opération $*$ à $S_\uparrow$ tout entier par $x * y := \uparrow$ si, et seulement si, $(x, y) \not\in D$, avec $D$ le domaine de définition de $*$. En particulier, $x * \uparrow = \uparrow = \uparrow * x$ quel que soit $x \in S$.

**Proposition**

$(S_\uparrow, *)$ est un semigroupe (total).

# Extension d'un semigroupe partiel par adjonction d'un élément absorbant



Soit $(S, *)$ un semigroupe partiel. Soit $\uparrow \not\in S$ (par exemple, $\uparrow := \{S\}$, si l'on suppose vrai l'axiome de fondation). Soit $S_\uparrow := S \sqcup \{\uparrow\}$. On étend l'opération $*$ à $S_\uparrow$ tout entier par $x * y := \uparrow$ si, et seulement si, $(x, y) \not\in D$, avec $D$ le domaine de définition de $*$. En particulier, $x * \uparrow = \uparrow = \uparrow * x$ quel que soit $x \in S$.

**Proposition**

$(S_\uparrow, *)$ est un semigroupe (total).

# Extension d'un semigroupe partiel par adjonction d'un élément absorbant



Soit $(S, *)$ un semigroupe partiel. Soit $\uparrow \not\in S$ (par exemple, $\uparrow := \{S\}$, si l'on suppose vrai l'axiome de fondation). Soit $S_\uparrow := S \sqcup \{\uparrow\}$. On étend l'opération $*$ à $S_\uparrow$ tout entier par $x * y := \uparrow$ si, et seulement si, $(x, y) \not\in D$, avec $D$ le domaine de définition de $*$. En particulier, $x* \uparrow = \uparrow = \uparrow *x$ quel que soit $x \in S$.

**Proposition**

$(S_\uparrow, *)$ est un semigroupe (total).

# Extension d'un semigroupe partiel par adjonction d'un élément absorbant



Soit $(S, *)$ un semigroupe partiel. Soit $\uparrow \not\in S$ (par exemple, $\uparrow := \{S\}$, si l'on suppose vrai l'axiome de fondation). Soit $S_\uparrow := S \sqcup \{\uparrow\}$. On étend l'opération $*$ à $S_\uparrow$ tout entier par $x * y := \uparrow$ si, et seulement si, $(x, y) \not\in D$, avec $D$ le domaine de définition de $*$. En particulier, $x * \uparrow = \uparrow = \uparrow * x$ quel que soit $x \in S$.

## Proposition

$(S_\uparrow, *)$ est un semigroupe (total).

# Relation de divisibilité



Soient $(M, *, 1)$ un monoïde partiel commutatif, et $x, y \in M$. On dit que $y$ est un diviseur (resp. diviseur propre) de $x$ si, et seulement, si $x = y * z$ pour un $z \in M$ (resp. $z \in M$, $z \neq 1$). Le monoïde partiel $M$ est nœthérien si, et seulement si, la relation de divisibilité est une relation bien fondée, *i.e.*, il n'y a aucune suite infinie décroissante $x_0 * x_1 * x_2 * \cdots$ où $x_{i+1}$ est un diviseur propre de $x_i$ pour tout $i \geq 0$.

# Relation de divisibilité



Soient $(M, *, 1)$ un monoïde partiel commutatif, et $x, y \in M$. On dit que $y$ est un diviseur (resp. diviseur propre) de $x$ si, et seulement, si $x = y * z$ pour un $z \in M$ (resp. $z \in M$, $z \neq 1$). Le monoïde partiel $M$ est nœthérien si, et seulement si, la relation de divisibilité est une relation bien fondée, *i.e.*, il n'y a aucune suite infinie décroissante $x_0 * x_1 * x_2 * \cdots$ où $x_{i+1}$ est un diviseur propre de $x_i$ pour tout $i \geq 0$.

# Relation de divisibilité



Soient $(M, *, 1)$ un monoïde partiel commutatif, et $x, y \in M$. On dit que $y$ est un diviseur (resp. diviseur propre) de $x$ si, et seulement, si $x = y * z$ pour un $z \in M$ (resp. $z \in M$, $z \neq 1$). Le monoïde partiel $M$ est nœthérien si, et seulement si, la relation de divisibilité est une relation bien fondée, *i.e.*, il n'y a aucune suite infinie décroissante $x_0 * x_1 * x_2 * \cdots$ où $x_{i+1}$ est un diviseur propre de $x_i$ pour tout $i \geq 0$.

# Relation de divisibilité



Soient $(M, *, 1)$ un monoïde partiel commutatif, et $x, y \in M$. On dit que $y$ est un diviseur (resp. diviseur propre) de $x$ si, et seulement, si $x = y * z$ pour un $z \in M$ (resp. $z \in M$, $z \neq 1$). Le monoïde partiel $M$ est nœthérien si, et seulement si, la relation de divisibilité est une relation bien fondée, *i.e.*, il n'y a aucune suite infinie décroissante $x_0 * x_1 * x_2 * \cdots$ où $x_{i+1}$ est un diviseur propre de $x_i$ pour tout $i \geq 0$.

# Atomes

Un atome est un élément $x \neq 1$ qui ne peut être divisé, soit formellement,

$$x = y * z \ \Rightarrow \ 1 \in \{y, z\} \ . \qquad (11)$$

Si l'on note $(M \setminus \{1\})^2$ l'ensemble des éléments de la forme $x * y$ avec $x, y \neq 1$, alors on peut vérifier que l'ensemble des atomes de $M$ est $(M \setminus \{1\}) \setminus (M \setminus \{1\})^2$.

On dénote par $\mathcal{A}(M)$ l'ensemble des atomes du monoïde partiel commutatif $M$.

**Remarque :** Si $M$ est nœthérien, alors $\mathcal{A}(M) \neq \emptyset$.

# Atomes

Un atome est un élément $x \neq 1$ qui ne peut être divisé, soit formellement,

$$x = y * z \ \Rightarrow \ 1 \in \{y, z\} \ . \tag{11}$$

Si l'on note $(M \setminus \{1\})^2$ l'ensemble des éléments de la forme $x * y$ avec $x, y \neq 1$, alors on peut vérifier que l'ensemble des atomes de $M$ est $(M \setminus \{1\}) \setminus (M \setminus \{1\})^2$.

On dénote par $\mathcal{A}(M)$ l'ensemble des atomes du monoïde partiel commutatif $M$.

**Remarque :** Si $M$ est nœthérien, alors $\mathcal{A}(M) \neq \emptyset$.

# Atomes



Un atome est un élément $x \neq 1$ qui ne peut être divisé, soit formellement,

$$x = y * z \;\Rightarrow\; 1 \in \{y, z\}\ . \tag{11}$$

Si l'on note $(M \setminus \{1\})^2$ l'ensemble des éléments de la forme $x * y$ avec $x, y \neq 1$, alors on peut vérifier que l'ensemble des atomes de $M$ est $(M \setminus \{1\}) \setminus (M \setminus \{1\})^2$.

On dénote par $\mathcal{A}(M)$ l'ensemble des atomes du monoïde partiel commutatif $M$.

**Remarque :** Si $M$ est nœthérien, alors $\mathcal{A}(M) \neq \emptyset$.

# Atomes



Un atome est un élément $x \neq 1$ qui ne peut être divisé, soit formellement,

$$x = y * z \ \Rightarrow \ 1 \in \{y, z\} \ . \tag{11}$$

Si l'on note $(M \setminus \{1\})^2$ l'ensemble des éléments de la forme $x * y$ avec $x, y \neq 1$, alors on peut vérifier que l'ensemble des atomes de $M$ est $(M \setminus \{1\}) \setminus (M \setminus \{1\})^2$.
On dénote par $\mathcal{A}(M)$ l'ensemble des atomes du monoïde partiel commutatif $M$.
**Remarque :** Si $M$ est nœthérien, alors $\mathcal{A}(M) \neq \emptyset$.

# Atomes



Un atome est un élément $x \neq 1$ qui ne peut être divisé, soit formellement,

$$x = y * z \Rightarrow 1 \in \{y, z\} . \tag{11}$$

Si l'on note $(M \setminus \{1\})^2$ l'ensemble des éléments de la forme $x * y$ avec $x, y \neq 1$, alors on peut vérifier que l'ensemble des atomes de $M$ est $(M \setminus \{1\}) \setminus (M \setminus \{1\})^2$.
On dénote par $\mathcal{A}(M)$ l'ensemble des atomes du monoïde partiel commutatif $M$.
**Remarque :** Si $M$ est nœthérien, alors $\mathcal{A}(M) \neq \emptyset$.

# Atomes



Un atome est un élément $x \neq 1$ qui ne peut être divisé, soit formellement,

$$x = y * z \;\Rightarrow\; 1 \in \{y, z\}\ . \tag{11}$$

Si l'on note $(M \setminus \{1\})^2$ l'ensemble des éléments de la forme $x * y$ avec $x, y \neq 1$, alors on peut vérifier que l'ensemble des atomes de $M$ est $(M \setminus \{1\}) \setminus (M \setminus \{1\})^2$.
On dénote par $\mathcal{A}(M)$ l'ensemble des atomes du monoïde partiel commutatif $M$.
**Remarque :** Si $M$ est nœthérien, alors $\mathcal{A}(M) \neq \emptyset$.

# Proposition



Soit $M$ un monoïde partiel commutatif et nœthérien. Alors quel que soit $x \in M$, il existe un multi-ensemble d'atomes $\{x_1, \cdots, x_n\}$ tel que $x = x_1 * \cdots * x_n$.

# Proposition



Soit $M$ un monoïde partiel commutatif et nœthérien. Alors quel que soit $x \in M$, il existe un multi-ensemble d'atomes $\{x_1, \cdots, x_n\}$ tel que $x = x_1 * \cdots * x_n$.

# Propriété de Levi (PL)



Soit $(M, *, 1)$ un monoïde partiel commutatif. $M$ vérifie PL si, et seulement si, quel que soient $x_1, x_2, x^1, x^2 \in M$ tels que $x_1 * x_2 = x^1 * x^2$, il existe $x_i^j \in M$, $i = 1, 2$, $j = 1, 2$ tels que $x_i = x_i^1 * x_i^2$ et $x^j = x_1^j * x_2^j$ pour $i = 1, 2$, $j = 1, 2$.

# Propriété de Levi (PL)



Soit $(M, *, 1)$ un monoïde partiel commutatif. $M$ vérifie PL si, et seulement si, quel que soient $x_1, x_2, x^1, x^2 \in M$ tels que $x_1 * x_2 = x^1 * x^2$, il existe $x_i^j \in M$, $i = 1, 2$, $j = 1, 2$ tels que $x_i = x_i^1 * x_i^2$ et $x^j = x_1^j * x_2^j$ pour $i = 1, 2$, $j = 1, 2$.

# Propriété de Levi (PL)



Soit $(M, *, 1)$ un monoïde partiel commutatif. $M$ vérifie PL si, et seulement si, quel que soient $x_1, x_2, x^1, x^2 \in M$ tels que $x_1 * x_2 = x^1 * x^2$, il existe $x_i^j \in M$, $i = 1, 2$, $j = 1, 2$ tels que $x_i = x_i^1 * x_i^2$ et $x^j = x_1^j * x_2^j$ pour $i = 1, 2$, $j = 1, 2$.

# Proposition



Soit $(M, *, 1)$ un monoïde partiel commutatif, nœthérien et vérifiant PL. Alors quel que soit $x \in M$, il existe un unique multi-ensemble d'atomes $\{x_1, \cdots, x_n\}$ tel que $x = x_1 * \cdots * x_n$.

On note $\mathcal{A}(x)$ ce multi-ensemble. En particulier, $\mathcal{A}(x) = \emptyset$ si, et seulement si, $x = 1$.

# Proposition



Soit $(M, *, 1)$ un monoïde partiel commutatif, nœthérien et vérifiant PL. Alors quel que soit $x \in M$, il existe un unique multi-ensemble d'atomes $\{x_1, \cdots, x_n\}$ tel que $x = x_1 * \cdots * x_n$.

On note $\mathcal{A}(x)$ ce multi-ensemble. En particulier, $\mathcal{A}(x) = \emptyset$ si, et seulement si, $x = 1$.

# Proposition

Soit $(M, *, 1)$ un monoïde partiel commutatif, nœthérien et vérifiant PL. Alors quel que soit $x \in M$, il existe un unique multi-ensemble d'atomes $\{x_1, \cdots, x_n\}$ tel que $x = x_1 * \cdots * x_n$.

On note $\mathcal{A}(x)$ ce multi-ensemble. En particulier, $\mathcal{A}(x) = \emptyset$ si, et seulement si, $x = 1$.

# Proposition

Soit $(M, *, 1)$ un monoïde partiel commutatif, nœthérien et vérifiant PL. Alors quel que soit $x \in M$, il existe un unique multi-ensemble d'atomes $\{x_1, \cdots, x_n\}$ tel que $x = x_1 * \cdots * x_n$.

On note $\mathcal{A}(x)$ ce multi-ensemble. En particulier, $\mathcal{A}(x) = \emptyset$ si, et seulement si, $x = 1$.

# Monoïdes partiels sans facteur carré



Soit $(M, *, 1)$ un monoïde partiel commutatif, nœthérien et vérifiant PL. On dit que $M$ est sans facteur carré si, et seulement si, quel que soit $x \in M$, $\mathcal{A}(x)$ est un **ensemble**.

Dans ce cas, nous avons $\mathcal{A}(x * y) = \mathcal{A}(x) \sqcup \mathcal{A}(y)$.
Attention ! $\mathcal{A}(x) \cap \mathcal{A}(y) = \emptyset$ n'implique pas nécessairement que $x * y$ est défini. En particulier, le produit de deux atomes, mêmes distincts, n'est pas nécessairement défini. Par exemple, on ne peut pas effectuer la somme disjointe de deux graphes connexes s'ils ont un sommet en commun.

# Monoïdes partiels sans facteur carré



Soit $(M, *, 1)$ un monoïde partiel commutatif, nœthérien et vérifiant PL. On dit que $M$ est sans facteur carré si, et seulement si, quel que soit $x \in M$, $\mathcal{A}(x)$ est un **ensemble**.

Dans ce cas, nous avons $\mathcal{A}(x * y) = \mathcal{A}(x) \sqcup \mathcal{A}(y)$.

Attention ! $\mathcal{A}(x) \cap \mathcal{A}(y) = \emptyset$ n'implique pas nécessairement que $x * y$ est défini. En particulier, le produit de deux atomes, mêmes distincts, n'est pas nécessairement défini. Par exemple, on ne peut pas effectuer la somme disjointe de deux graphes connexes s'ils ont un sommet en commun.

# Monoïdes partiels sans facteur carré

Soit $(M, *, 1)$ un monoïde partiel commutatif, nœthérien et vérifiant PL. On dit que $M$ est sans facteur carré si, et seulement si, quel que soit $x \in M$, $\mathcal{A}(x)$ est un **ensemble**.

Dans ce cas, nous avons $\mathcal{A}(x * y) = \mathcal{A}(x) \sqcup \mathcal{A}(y)$. Attention ! $\mathcal{A}(x) \cap \mathcal{A}(y) = \emptyset$ n'implique pas nécessairement que $x * y$ est défini. En particulier, le produit de deux atomes, mêmes distincts, n'est pas nécessairement défini. Par exemple, on ne peut pas effectuer la somme disjointe de deux graphes connexes s'ils ont un sommet en commun.

# Monoïdes partiels sans facteur carré

Soit $(M, *, 1)$ un monoïde partiel commutatif, nœthérien et vérifiant PL. On dit que $M$ est sans facteur carré si, et seulement si, quel que soit $x \in M$, $\mathcal{A}(x)$ est un **ensemble**.

Dans ce cas, nous avons $\mathcal{A}(x * y) = \mathcal{A}(x) \sqcup \mathcal{A}(y)$.
Attention ! $\mathcal{A}(x) \cap \mathcal{A}(y) = \emptyset$ n'implique pas nécessairement que $x * y$ est défini. En particulier, le produit de deux atomes, mêmes distincts, n'est pas nécessairement défini. Par exemple, on ne peut pas effectuer la somme disjointe de deux graphes connexes s'ils ont un sommet en commun.

# Monoïdes partiels sans facteur carré



Soit $(M, *, 1)$ un monoïde partiel commutatif, nœthérien et vérifiant PL. On dit que $M$ est sans facteur carré si, et seulement si, quel que soit $x \in M$, $\mathcal{A}(x)$ est un **ensemble**.

Dans ce cas, nous avons $\mathcal{A}(x * y) = \mathcal{A}(x) \sqcup \mathcal{A}(y)$.
Attention ! $\mathcal{A}(x) \cap \mathcal{A}(y) = \emptyset$ n'implique pas nécessairement que $x * y$ est défini. En particulier, le produit de deux atomes, mêmes distincts, n'est pas nécessairement défini. Par exemple, on ne peut pas effectuer la somme disjointe de deux graphes connexes s'ils ont un sommet en commun.

# Monoïdes partiels sans facteur carré



Soit $(M, *, 1)$ un monoïde partiel commutatif, nœthérien et vérifiant PL. On dit que $M$ est sans facteur carré si, et seulement si, quel que soit $x \in M$, $\mathcal{A}(x)$ est un **ensemble**.

Dans ce cas, nous avons $\mathcal{A}(x * y) = \mathcal{A}(x) \sqcup \mathcal{A}(y)$.
Attention ! $\mathcal{A}(x) \cap \mathcal{A}(y) = \emptyset$ n'implique pas nécessairement que $x * y$ est défini. En particulier, le produit de deux atomes, mêmes distincts, n'est pas nécessairement défini.
Par exemple, on ne peut pas effectuer la somme disjointe de deux graphes connexes s'ils ont un sommet en commun.

# Monoïdes partiels sans facteur carré



Soit $(M, *, 1)$ un monoïde partiel commutatif, nœthérien et vérifiant PL. On dit que $M$ est sans facteur carré si, et seulement si, quel que soit $x \in M$, $\mathcal{A}(x)$ est un **ensemble**.

Dans ce cas, nous avons $\mathcal{A}(x * y) = \mathcal{A}(x) \sqcup \mathcal{A}(y)$.
Attention ! $\mathcal{A}(x) \cap \mathcal{A}(y) = \emptyset$ n'implique pas nécessairement que $x * y$ est défini. En particulier, le produit de deux atomes, mêmes distincts, n'est pas nécessairement défini. Par exemple, on ne peut pas effectuer la somme disjointe de deux graphes connexes s'ils ont un sommet en commun.

# Monoïde partiel booléen





Soit $(M, *, 1)$ un monoïde partiel commutatif vérifiant PL.
Soit $B$ une algèbre booléenne généralisée localement finie.
On suppose l'existence d'une application $\sigma : M \to B$ telle que

1. $\sigma(x) = 0$ si, et seulement si, $x = 1$ ;
2. Le domaine de $*$ est $\{(x, y) \in M^2 : \sigma(x) \wedge \sigma(y) = 0\}$ ;
3. $\sigma(x * y) = \sigma(x) \vee \sigma(y)$.

$M$ est alors un monoïde partiel sans facteur carré. En particulier, $M$ est nœthérien.
Une structure $(M, B, \sigma)$ est un monoïde partiel booléen.

# Monoïde partiel booléen

Soit $(M, *, 1)$ un monoïde partiel commutatif vérifiant PL.
Soit $B$ une algèbre booléenne généralisée localement finie.
On suppose l'existence d'une application $\sigma : M \to B$ telle que

1. $\sigma(x) = 0$ si, et seulement si, $x = 1$ ;
2. Le domaine de $*$ est $\{(x, y) \in M^2 : \sigma(x) \wedge \sigma(y) = 0\}$ ;
3. $\sigma(x * y) = \sigma(x) \vee \sigma(y)$.

$M$ est alors un monoïde partiel sans facteur carré. En particulier, $M$ est nœthérien.
Une structure $(M, B, \sigma)$ est un monoïde partiel booléen.

# Monoïde partiel booléen



Soit $(M, *, 1)$ un monoïde partiel commutatif vérifiant PL.
Soit $B$ une algèbre booléenne généralisée localement finie.
On suppose l'existence d'une application $\sigma : M \to B$ telle que

1. $\sigma(x) = 0$ si, et seulement si, $x = 1$ ;
2. Le domaine de $*$ est $\{(x, y) \in M^2 : \sigma(x) \wedge \sigma(y) = 0\}$ ;
3. $\sigma(x * y) = \sigma(x) \vee \sigma(y)$.

$M$ est alors un monoïde partiel sans facteur carré. En particulier, $M$ est nœthérien.
Une structure $(M, B, \sigma)$ est un monoïde partiel booléen.

# Monoïde partiel booléen



Soit $(M, *, 1)$ un monoïde partiel commutatif vérifiant PL.
Soit $B$ une algèbre booléenne généralisée localement finie.
On suppose l'existence d'une application $\sigma : M \to B$ telle que

1. $\sigma(x) = 0$ si, et seulement si, $x = 1$ ;
2. Le domaine de $*$ est $\{(x, y) \in M^2 : \sigma(x) \wedge \sigma(y) = 0\}$ ;
3. $\sigma(x * y) = \sigma(x) \vee \sigma(y)$.

$M$ est alors un monoïde partiel sans facteur carré. En particulier, $M$ est nœthérien.
Une structure $(M, B, \sigma)$ est un monoïde partiel booléen.

# Monoïde partiel booléen



Soit $(M, *, 1)$ un monoïde partiel commutatif vérifiant PL.
Soit $B$ une algèbre booléenne généralisée localement finie.
On suppose l'existence d'une application $\sigma : M \to B$ telle que

1. $\sigma(x) = 0$ si, et seulement si, $x = 1$ ;
2. Le domaine de $*$ est $\{(x, y) \in M^2 : \sigma(x) \wedge \sigma(y) = 0\}$ ;
3. $\sigma(x * y) = \sigma(x) \vee \sigma(y)$.

$M$ est alors un monoïde partiel sans facteur carré. En particulier, $M$ est nœthérien.
Une structure $(M, B, \sigma)$ est un monoïde partiel booléen.

# Monoïde partiel booléen



Soit $(M, *, 1)$ un monoïde partiel commutatif vérifiant PL. Soit $B$ une algèbre booléenne généralisée localement finie. On suppose l'existence d'une application $\sigma : M \to B$ telle que

1. $\sigma(x) = 0$ si, et seulement si, $x = 1$ ;
2. Le domaine de $*$ est $\{(x, y) \in M^2 : \sigma(x) \wedge \sigma(y) = 0\}$ ;
3. $\sigma(x * y) = \sigma(x) \vee \sigma(y)$.

$M$ est alors un monoïde partiel sans facteur carré. En particulier, $M$ est nœthérien.
Une structure $(M, B, \sigma)$ est un monoïde partiel booléen.

# Monoïde partiel booléen



Soit $(M, *, 1)$ un monoïde partiel commutatif vérifiant PL. Soit $B$ une algèbre booléenne généralisée localement finie. On suppose l'existence d'une application $\sigma : M \to B$ telle que

1. $\sigma(x) = 0$ si, et seulement si, $x = 1$ ;
2. Le domaine de $*$ est $\{(x, y) \in M^2 : \sigma(x) \wedge \sigma(y) = 0\}$ ;
3. $\sigma(x * y) = \sigma(x) \vee \sigma(y)$.

$M$ est alors un monoïde partiel sans facteur carré. En particulier, $M$ est nœthérien.

Une structure $(M, B, \sigma)$ est un monoïde partiel booléen.

# Monoïde partiel booléen



Soit $(M, *, 1)$ un monoïde partiel commutatif vérifiant PL. Soit $B$ une algèbre booléenne généralisée localement finie. On suppose l'existence d'une application $\sigma : M \to B$ telle que

1. $\sigma(x) = 0$ si, et seulement si, $x = 1$ ;
2. Le domaine de $*$ est $\{(x, y) \in M^2 : \sigma(x) \wedge \sigma(y) = 0\}$ ;
3. $\sigma(x * y) = \sigma(x) \vee \sigma(y)$.

$M$ est alors un monoïde partiel sans facteur carré. En particulier, $M$ est nœthérien.

Une structure $(M, B, \sigma)$ est un monoïde partiel booléen.

# Monoïde partiel booléen



Soit $(M, *, 1)$ un monoïde partiel commutatif vérifiant PL.
Soit $B$ une algèbre booléenne généralisée localement finie.
On suppose l'existence d'une application $\sigma : M \to B$ telle que

1. $\sigma(x) = 0$ si, et seulement si, $x = 1$ ;
2. Le domaine de $*$ est $\{(x, y) \in M^2 : \sigma(x) \wedge \sigma(y) = 0\}$ ;
3. $\sigma(x * y) = \sigma(x) \vee \sigma(y)$.

$M$ est alors un monoïde partiel sans facteur carré. En particulier, $M$ est nœthérien.
Une structure $(M, B, \sigma)$ est un monoïde partiel booléen.

# Anneaux booléens $\to$ monoïdes partiels sans facteur carré





Soit $(B, +, \times, 0)$ un anneau booléen localement fini. Alors $B$ avec l'addition $+$ restreinte à $\{(x, y) \in B^2 : xy = 0\}$ (appelée *somme disjointe*) est un monoïde partiel sans facteur carré.

Les atomes de l'algèbre booléenne généralisée sont exactement les atomes du monoïde.

# Anneaux booléens → monoïdes partiels sans facteur carré



Soit $(B, +, \times, 0)$ un anneau booléen localement fini. Alors $B$ avec l'addition $+$ restreinte à $\{(x, y) \in B^2 : xy = 0\}$ (appelée *somme disjointe*) est un monoïde partiel sans facteur carré.

Les atomes de l'algèbre booléenne généralisée sont exactement les atomes du monoïde.

# Anneaux booléens → monoïdes partiels sans facteur carré



Soit $(B, +, \times, 0)$ un anneau booléen localement fini. Alors $B$ avec l'addition $+$ restreinte à $\{(x, y) \in B^2 : xy = 0\}$ (appelée *somme disjointe*) est un monoïde partiel sans facteur carré.

Les atomes de l'algèbre booléenne généralisée sont exactement les atomes du monoïde.

# Anneaux booléens → monoïdes partiels sans facteur carré



Soit $(B, +, \times, 0)$ un anneau booléen localement fini. Alors $B$ avec l'addition $+$ restreinte à $\{(x, y) \in B^2 : xy = 0\}$ (appelée *somme disjointe*) est un monoïde partiel sans facteur carré.

Les atomes de l'algèbre booléenne généralisée sont exactement les atomes du monoïde.

# Anneaux booléens $\rightarrow$ monoïdes partiels sans facteur carré



Soit $(B, +, \times, 0)$ un anneau booléen localement fini. Soit $M \subseteq B$ tel que

1. $0 \in M$ ;
2. Quels que soient $x, y \in M$, si $xy = 0$, alors $x + y \in M$.

Alors $M$ avec l'addition restreinte à $\{(x, y) \in M^2 : xy = 0\}$ est un monoïde partiel sans facteur carré. $M$ est un monoïde partiel booléen avec $\sigma$ l'inclusion naturelle.

**Remarque :** Les atomes de $M$ (en tant que monoïde nœthérien) ne sont pas nécessairement des atomes de $B$.

# Anneaux booléens $\rightarrow$ monoïdes partiels sans facteur carré



Soit $(B, +, \times, 0)$ un anneau booléen localement fini. Soit $M \subseteq B$ tel que

1. $0 \in M$ ;
2. Quels que soient $x, y \in M$, si $xy = 0$, alors $x + y \in M$.

Alors $M$ avec l'addition restreinte à $\{(x, y) \in M^2 : xy = 0\}$ est un monoïde partiel sans facteur carré. $M$ est un monoïde partiel booléen avec $\sigma$ l'inclusion naturelle.

**Remarque :** Les atomes de $M$ (en tant que monoïde nœthérien) ne sont pas nécessairement des atomes de $B$.

# Anneaux booléens → monoïdes partiels sans facteur carré



Soit $(B, +, \times, 0)$ un anneau booléen localement fini. Soit $M \subseteq B$ tel que

1. $0 \in M$ ;
2. Quels que soient $x, y \in M$, si $xy = 0$, alors $x + y \in M$.

Alors $M$ avec l'addition restreinte à $\{(x, y) \in M^2 : xy = 0\}$ est un monoïde partiel sans facteur carré. $M$ est un monoïde partiel booléen avec $\sigma$ l'inclusion naturelle.

**Remarque :** Les atomes de $M$ (en tant que monoïde nœthérien) ne sont pas nécessairement des atomes de $B$.

# Anneaux booléens → monoïdes partiels sans facteur carré



Soit $(B, +, \times, 0)$ un anneau booléen localement fini. Soit $M \subseteq B$ tel que

1. $0 \in M$ ;
2. Quels que soient $x, y \in M$, si $xy = 0$, alors $x + y \in M$.

Alors $M$ avec l'addition restreinte à $\{(x, y) \in M^2 : xy = 0\}$ est un monoïde partiel sans facteur carré. $M$ est un monoïde partiel booléen avec $\sigma$ l'inclusion naturelle.

**Remarque :** Les atomes de $M$ (en tant que monoïde nœthérien) ne sont pas nécessairement des atomes de $B$.

# Anneaux booléens $\to$ monoïdes partiels sans facteur carré



Soit $(B, +, \times, 0)$ un anneau booléen localement fini. Soit $M \subseteq B$ tel que

1. $0 \in M$ ;
2. Quels que soient $x, y \in M$, si $xy = 0$, alors $x + y \in M$.

Alors $M$ avec l'addition restreinte à $\{(x, y) \in M^2 : xy = 0\}$ est un monoïde partiel sans facteur carré. $M$ est un monoïde partiel booléen avec $\sigma$ l'inclusion naturelle.

**Remarque :** Les atomes de $M$ (en tant que monoïde nœthérien) ne sont pas nécessairement des atomes de $B$.

# Anneaux booléens → monoïdes partiels sans facteur carré



Soit $(B, +, \times, 0)$ un anneau booléen localement fini. Soit $M \subseteq B$ tel que

1. $0 \in M$ ;
2. Quels que soient $x, y \in M$, si $xy = 0$, alors $x + y \in M$.

Alors $M$ avec l'addition restreinte à $\{(x, y) \in M^2 : xy = 0\}$ est un monoïde partiel sans facteur carré. $M$ est un monoïde partiel booléen avec $\sigma$ l'inclusion naturelle.

**Remarque :** Les atomes de $M$ (en tant que monoïde nœthérien) ne sont pas nécessairement des atomes de $B$.

# Anneaux booléens $\to$ monoïdes partiels sans facteur carré



Soit $(B, +, \times, 0)$ un anneau booléen localement fini. Soit $M \subseteq B$ tel que

1. $0 \in M$ ;
2. Quels que soient $x, y \in M$, si $xy = 0$, alors $x + y \in M$.

Alors $M$ avec l'addition restreinte à $\{(x, y) \in M^2 : xy = 0\}$ est un monoïde partiel sans facteur carré. $M$ est un monoïde partiel booléen avec $\sigma$ l'inclusion naturelle.

**Remarque :** Les atomes de $M$ (en tant que monoïde nœthérien) ne sont pas nécessairement des atomes de $B$.

# Anneaux booléens $\to$ monoïdes partiels sans facteur carré

Soit $(B, +, \times, 0)$ un anneau booléen localement fini. Soit $M \subseteq B$ tel que

1. $0 \in M$ ;
2. Quels que soient $x, y \in M$, si $xy = 0$, alors $x + y \in M$.

Alors $M$ avec l'addition restreinte à $\{(x, y) \in M^2 : xy = 0\}$ est un monoïde partiel sans facteur carré. $M$ est un monoïde partiel booléen avec $\sigma$ l'inclusion naturelle.

**Remarque :** Les atomes de $M$ (en tant que monoïde nœthérien) ne sont pas nécessairement des atomes de $B$.

# Application aux classes combinatoires



On suppose maintenant que l'ensemble sous-jacent $M$ au monoïde partiel sans facteur carré $(M, \oplus, 0)$ est une *classe combinatoire*, *i.e.* quel que soit $x \in M$, $x$ est une structure finie. En particulier, les atomes de $M$ ne sont pas nécessairement réduits à un singleton.

**Exemple**

Si l'on considère $M$ l'ensemble des graphes (avec la somme disjointe), alors les atomes sont les graphes connexes. On voit bien dans ce cas qu'un atome est lui-même une structure plus complexe qu'un singleton.

# Application aux classes combinatoires

On suppose maintenant que l'ensemble sous-jacent $M$ au monoïde partiel sans facteur carré $(M, \oplus, 0)$ est une *classe combinatoire*, *i.e.* quel que soit $x \in M$, $x$ est une structure finie. En particulier, les atomes de $M$ ne sont pas nécessairement réduits à un singleton.

**Exemple**

Si l'on considère $M$ l'ensemble des graphes (avec la somme disjointe), alors les atomes sont les graphes connexes. On voit bien dans ce cas qu'un atome est lui-même une structure plus complexe qu'un singleton.

# Application aux classes combinatoires



On suppose maintenant que l'ensemble sous-jacent $M$ au monoïde partiel sans facteur carré $(M, \oplus, 0)$ est une *classe combinatoire*, *i.e.* quel que soit $x \in M$, $x$ est une structure finie. En particulier, les atomes de $M$ ne sont pas nécessairement réduits à un singleton.

**Exemple**

Si l'on considère $M$ l'ensemble des graphes (avec la somme disjointe), alors les atomes sont les graphes connexes. On voit bien dans ce cas qu'un atome est lui-même une structure plus complexe qu'un singleton.

# Application aux classes combinatoires

On suppose maintenant que l'ensemble sous-jacent $M$ au monoïde partiel sans facteur carré $(M, \oplus, 0)$ est une *classe combinatoire*, *i.e.* quel que soit $x \in M$, $x$ est une structure finie. En particulier, les atomes de $M$ ne sont pas nécessairement réduits à un singleton.

## Exemple

Si l'on considère $M$ l'ensemble des graphes (avec la somme disjointe), alors les atomes sont les graphes connexes. On voit bien dans ce cas qu'un atome est lui-même une structure plus complexe qu'un singleton.

# Formalisation : support



À tout élément $x$ de $M$, on associe son support $\sigma(x)$ de façon à conserver la structure de monoïde partiel sans facteur carré. Soit $(M, \oplus, 0)$ un monoïde partiel commutatif vérifiant PL. Soit $C$ un ensemble dénombrable. Alors $\mathcal{P}_{\text{fin}}(C)$ est une algèbre booléenne généralisée localement finie. Soit enfin

$$\begin{array}{rccc} \sigma : & M & \rightarrow & \mathcal{P}_{\text{fin}}(C) \\ & x & \mapsto & \sigma(x) \end{array} \qquad (12)$$

telle que $(M, \sigma)$ soit un monoïde partiel booléen.

# Formalisation : support

À tout élément $x$ de $M$, on associe son support $\sigma(x)$ de façon à conserver la structure de monoïde partiel sans facteur carré. Soit $(M, \oplus, 0)$ un monoïde partiel commutatif vérifiant PL. Soit $C$ un ensemble dénombrable. Alors $\mathcal{P}_{\text{fin}}(C)$ est une algèbre booléenne généralisée localement finie. Soit enfin

$$\begin{array}{rrcl} \sigma : & M & \rightarrow & \mathcal{P}_{\text{fin}}(C) \\ & x & \mapsto & \sigma(x) \end{array} \tag{12}$$

telle que $(M, \sigma)$ soit un monoïde partiel booléen.

# Formalisation : support



À tout élément $x$ de $M$, on associe son support $\sigma(x)$ de façon à conserver la structure de monoïde partiel sans facteur carré. Soit $(M, \oplus, 0)$ un monoïde partiel commutatif vérifiant PL. Soit $C$ un ensemble dénombrable. Alors $\mathcal{P}_{\text{fin}}(C)$ est une algèbre booléenne généralisée localement finie. Soit enfin

$$\begin{array}{rrcl} \sigma : & M & \rightarrow & \mathcal{P}_{\text{fin}}(C) \\ & x & \mapsto & \sigma(x) \end{array} \tag{12}$$

telle que $(M, \sigma)$ soit un monoïde partiel booléen.

# Formalisation : support



À tout élément $x$ de $M$, on associe son support $\sigma(x)$ de façon à conserver la structure de monoïde partiel sans facteur carré. Soit $(M, \oplus, 0)$ un monoïde partiel commutatif vérifiant PL. Soit $C$ un ensemble dénombrable. Alors $\mathcal{P}_{\text{fin}}(C)$ est une algèbre booléenne généralisée localement finie. Soit enfin

$$\begin{array}{rccc} \sigma : & M & \rightarrow & \mathcal{P}_{\text{fin}}(C) \\ & x & \mapsto & \sigma(x) \end{array} \tag{12}$$

telle que $(M, \sigma)$ soit un monoïde partiel booléen.

# Formalisation : support



À tout élément $x$ de $M$, on associe son support $\sigma(x)$ de façon à conserver la structure de monoïde partiel sans facteur carré. Soit $(M, \oplus, 0)$ un monoïde partiel commutatif vérifiant PL. Soit $C$ un ensemble dénombrable. Alors $\mathcal{P}_{\text{fin}}(C)$ est une algèbre booléenne généralisée localement finie. Soit enfin

$$\begin{array}{rccl} \sigma : & M & \rightarrow & \mathcal{P}_{\text{fin}}(C) \\ & x & \mapsto & \sigma(x) \end{array} \tag{12}$$

telle que $(M, \sigma)$ soit un monoïde partiel booléen.

# Remarques



1. La fonction de support $\sigma$ ne sépare pas les atomes, *i.e.*, si $x$ et $y$ sont deux atomes distincts, on peut tout de même avoir $\sigma(x) \cap \sigma(y) \neq \emptyset$. Par contre si $x$ et $y$ sont deux atomes pour lesquels $x \oplus y$ est défini, alors $\sigma(x) \neq \sigma(y)$ ;
2. Les atomes de $M$ sont des éléments dont le support est minimal (pour l'inclusion ensembliste restreinte à $\sigma(M \setminus \{0\})$). Ces atomes ne sont pas nécessairement des singletons de $C$ ;
3. On suppose $C$ dénombrable, car, potentiellement, les supports des structures considérées sont des ensembles finis quelconques.

# Remarques

1. La fonction de support $\sigma$ ne sépare pas les atomes, *i.e.*, si $x$ et $y$ sont deux atomes distincts, on peut tout de même avoir $\sigma(x) \cap \sigma(y) \neq \emptyset$. Par contre si $x$ et $y$ sont deux atomes pour lesquels $x \oplus y$ est défini, alors $\sigma(x) \neq \sigma(y)$ ;
2. Les atomes de $M$ sont des éléments dont le support est minimal (pour l'inclusion ensembliste restreinte à $\sigma(M \setminus \{0\})$). Ces atomes ne sont pas nécessairement des singletons de $C$ ;
3. On suppose $C$ dénombrable, car, potentiellement, les supports des structures considérées sont des ensembles finis quelconques.

## Remarques

1. La fonction de support $\sigma$ ne sépare pas les atomes, *i.e.*, si $x$ et $y$ sont deux atomes distincts, on peut tout de même avoir $\sigma(x) \cap \sigma(y) \neq \emptyset$. Par contre si $x$ et $y$ sont deux atomes pour lesquels $x \oplus y$ est défini, alors $\sigma(x) \neq \sigma(y)$ ;
2. Les atomes de $M$ sont des éléments dont le support est minimal (pour l'inclusion ensembliste restreinte à $\sigma(M \setminus \{0\})$). Ces atomes ne sont pas nécessairement des singletons de $C$ ;
3. On suppose $C$ dénombrable, car, potentiellement, les supports des structures considérées sont des ensembles finis quelconques.

# Remarques

1. La fonction de support $\sigma$ ne sépare pas les atomes, *i.e.*, si $x$ et $y$ sont deux atomes distincts, on peut tout de même avoir $\sigma(x) \cap \sigma(y) \neq \emptyset$. Par contre si $x$ et $y$ sont deux atomes pour lesquels $x \oplus y$ est défini, alors $\sigma(x) \neq \sigma(y)$ ;
2. Les atomes de $M$ sont des éléments dont le support est minimal (pour l'inclusion ensembliste restreinte à $\sigma(M \setminus \{0\})$). Ces atomes ne sont pas nécessairement des singletons de $C$ ;
3. On suppose $C$ dénombrable, car, potentiellement, les supports des structures considérées sont des ensembles finis quelconques.

# Remarques

1. La fonction de support $\sigma$ ne sépare pas les atomes, *i.e.*, si $x$ et $y$ sont deux atomes distincts, on peut tout de même avoir $\sigma(x) \cap \sigma(y) \neq \emptyset$. Par contre si $x$ et $y$ sont deux atomes pour lesquels $x \oplus y$ est défini, alors $\sigma(x) \neq \sigma(y)$ ;
2. Les atomes de $M$ sont des éléments dont le support est minimal (pour l'inclusion ensembliste restreinte à $\sigma(M \setminus \{0\})$). Ces atomes ne sont pas nécessairement des singletons de $C$ ;
3. On suppose $C$ dénombrable, car, potentiellement, les supports des structures considérées sont des ensembles finis quelconques.

# Formalisation : Classes combinatoires localement finies



Soit $(M, C, \sigma)$ un monoïde partiel booléen. Quel que soient $N \subseteq M$ et $S \subset C$, $S$ fini, on définit

$$N_S := \{x \in N : \sigma(x) = S\} . \tag{13}$$

$N_S$ est l'ensemble des éléments de $N$ dont le support est $S$. On restreint notre étude au cas localement fini, *i.e.*, quel que soit $S \subset C$, $S$ fini, $M_S$ est fini, c'est-à-dire il n'y a qu'un nombre fini d'éléments de $M$ supportés par $S$.

Soit $(M, C, \sigma)$ un monoïde partiel booléen. Quel que soient $N \subseteq M$ et $S \subset C$, $S$ fini, on définit

$$N_S := \{x \in N : \sigma(x) = S\} . \qquad (13)$$

$N_S$ est l'ensemble des éléments de $N$ dont le support est $S$. On restreint notre étude au cas localement fini, *i.e.*, quel que soit $S \subset C$, $S$ fini, $M_S$ est fini, c'est-à-dire il n'y a qu'un nombre fini d'éléments de $M$ supportés par $S$.

# Formalisation : Classes combinatoires localement finies

Soit $(M, C, \sigma)$ un monoïde partiel booléen. Quel que soient $N \subseteq M$ et $S \subset C$, $S$ fini, on définit

$$N_S := \{x \in N : \sigma(x) = S\} . \tag{13}$$

$N_S$ est l'ensemble des éléments de $N$ dont le support est $S$. On restreint notre étude au cas localement fini, *i.e.*, quel que soit $S \subset C$, $S$ fini, $M_S$ est fini, c'est-à-dire il n'y a qu'un nombre fini d'éléments de $M$ supportés par $S$.

# Formalisation : Classes combinatoires localement finies

Soit $(M, C, \sigma)$ un monoïde partiel booléen. Quel que soient $N \subseteq M$ et $S \subset C$, $S$ fini, on définit

$$N_S := \{x \in N : \sigma(x) = S\} \ . \tag{13}$$

$N_S$ est l'ensemble des éléments de $N$ dont le support est $S$. On restreint notre étude au cas localement fini, *i.e.*, quel que soit $S \subset C$, $S$ fini, $M_S$ est fini, c'est-à-dire il n'y a qu'un nombre fini d'éléments de $M$ supportés par $S$.

# Formalisation : Classes combinatoires localement finies



Soit $(M, C, \sigma)$ un monoïde partiel booléen. Quel que soient $N \subseteq M$ et $S \subset C$, $S$ fini, on définit

$$N_S := \{x \in N : \sigma(x) = S\} \ . \tag{13}$$

$N_S$ est l'ensemble des éléments de $N$ dont le support est $S$. On restreint notre étude au cas localement fini, *i.e.*, quel que soit $S \subset C$, $S$ fini, $M_S$ est fini, c'est-à-dire il n'y a qu'un nombre fini d'éléments de $M$ supportés par $S$.

# Formalisation : Classes combinatoires localement finies



Soit $(M, C, \sigma)$ un monoïde partiel booléen. Quel que soient $N \subseteq M$ et $S \subset C$, $S$ fini, on définit

$$N_S := \{x \in N : \sigma(x) = S\} . \tag{13}$$

$N_S$ est l'ensemble des éléments de $N$ dont le support est $S$. On restreint notre étude au cas localement fini, *i.e.*, quel que soit $S \subset C$, $S$ fini, $M_S$ est fini, c'est-à-dire il n'y a qu'un nombre fini d'éléments de $M$ supportés par $S$.

# Formalisation : Classes combinatoires localement finies



Soit $(M, C, \sigma)$ un monoïde partiel booléen. Quel que soient $N \subseteq M$ et $S \subset C$, $S$ fini, on définit

$$N_S := \{x \in N : \sigma(x) = S\} \ . \tag{13}$$

$N_S$ est l'ensemble des éléments de $N$ dont le support est $S$. On restreint notre étude au cas localement fini, *i.e.*, quel que soit $S \subset C$, $S$ fini, $M_S$ est fini, c'est-à-dire il n'y a qu'un nombre fini d'éléments de $M$ supportés par $S$.

# Formalisation : Classes combinatoires localement finies



Soit $(M, C, \sigma)$ un monoïde partiel booléen. Quel que soient $N \subseteq M$ et $S \subset C$, $S$ fini, on définit

$$N_S := \{x \in N : \sigma(x) = S\} . \tag{13}$$

$N_S$ est l'ensemble des éléments de $N$ dont le support est $S$. On restreint notre étude au cas localement fini, *i.e.*, quel que soit $S \subset C$, $S$ fini, $M_S$ est fini, c'est-à-dire il n'y a qu'un nombre fini d'éléments de $M$ supportés par $S$.

Les structures localement finies nous permettent de considérer les sommes suivantes : soient $\phi : M \to \mathfrak{M}$, où $\mathfrak{M}$ est un monoïde (total) commutatif (en notation additive), $N \subseteq M$ et $S \subset C$, $S$ fini. La somme suivante

$$\phi(N_S) := \sum_{x \in N_S} \phi(x) \tag{14}$$

est bien définie (puisque $N_S \subseteq M_S$ est fini). De même si $N$ est une partie finie de $M$, on définit

$$\phi(N) := \sum_{x \in N} \phi(x) . \tag{15}$$

En particulier, $\phi(\emptyset) = 0$.

Les structures localement finies nous permettent de considérer les sommes suivantes : soient $\phi : M \to \mathfrak{M}$, où $\mathfrak{M}$ est un monoïde (total) commutatif (en notation additive), $N \subseteq M$ et $S \subset C$, $S$ fini. La somme suivante

$$\phi(N_S) := \sum_{x \in N_S} \phi(x) \tag{14}$$

est bien définie (puisque $N_S \subseteq M_S$ est fini). De même si $N$ est une partie finie de $M$, on définit

$$\phi(N) := \sum_{x \in N} \phi(x) \ . \tag{15}$$

En particulier, $\phi(\emptyset) = 0$.

Les structures localement finies nous permettent de considérer les sommes suivantes : soient $\phi : M \to \mathfrak{M}$, où $\mathfrak{M}$ est un monoïde (total) commutatif (en notation additive), $N \subseteq M$ et $S \subset C$, $S$ fini. La somme suivante

$$\phi(N_S) := \sum_{x \in N_S} \phi(x) \tag{14}$$

est bien définie (puisque $N_S \subseteq M_S$ est fini). De même si $N$ est une partie finie de $M$, on définit

$$\phi(N) := \sum_{x \in N} \phi(x) . \tag{15}$$

En particulier, $\phi(\emptyset) = 0$.

Les structures localement finies nous permettent de considérer les sommes suivantes : soient $\phi : M \to \mathfrak{M}$, où $\mathfrak{M}$ est un monoïde (total) commutatif (en notation additive), $N \subseteq M$ et $S \subset C$, $S$ fini. La somme suivante

$$\phi(N_S) := \sum_{x \in N_S} \phi(x) \tag{14}$$

est bien définie (puisque $N_S \subseteq M_S$ est fini). De même si $N$ est une partie finie de $M$, on définit

$$\phi(N) := \sum_{x \in N} \phi(x)\ . \tag{15}$$

En particulier, $\phi(\emptyset) = 0$.

Les structures localement finies nous permettent de considérer les sommes suivantes : soient $\phi : M \to \mathfrak{M}$, où $\mathfrak{M}$ est un monoïde (total) commutatif (en notation additive), $N \subseteq M$ et $S \subset C$, $S$ fini. La somme suivante

$$\phi(N_S) := \sum_{x \in N_S} \phi(x) \tag{14}$$

est bien définie (puisque $N_S \subseteq M_S$ est fini). De même si $N$ est une partie finie de $M$, on définit

$$\phi(N) := \sum_{x \in N} \phi(x) \ . \tag{15}$$

En particulier, $\phi(\emptyset) = 0$.

# Formalisation : statistiques



D'un point de vue combinatoire, les éléments de $M$ doivent pouvoir être “ mesurés ” par certaines statistiques. Une statistique $\mu$ sur un monoïde partiel booléen et localement fini est une application de $M$ dans un anneau (unitaire) $R$ de caractéristique zéro telle que

1. $\mu$ est équivariante sur les ensembles d'atomes, *i.e.*, quelles que soient $S_1$, $S_2$ deux parties finies de $C$ de même cardinal, alors $\mu(\mathcal{A}_{S_1}) = \mu(\mathcal{A}_{S_2})$, où $\mathcal{A}_S$ est l'ensemble (fini) des atomes de $M$ portés par le même ensemble fini $S$. En d'autres termes, la mesure par $\mu$ d'un ensemble d'atomes de même support ne dépend que du cardinal du support. On note $\mu(\mathcal{A}[n])$ la valeur commune des $\mu(\mathcal{A}_S)$ pour toutes les parties $S$ de cardinal $n$.
2. $\mu$ est multiplicative, *i.e.*, $\mu(x \oplus y) = \mu(x)\mu(y)$.

## Formalisation : statistiques



D'un point de vue combinatoire, les éléments de $M$ doivent pouvoir être " mesurés " par certaines statistiques. Une statistique $\mu$ sur un monoïde partiel booléen et localement fini est une application de $M$ dans un anneau (unitaire) $R$ de caractéristique zéro telle que

1. $\mu$ est équivariante sur les ensembles d'atomes, *i.e.*, quelles que soient $S_1$, $S_2$ deux parties finies de $C$ de même cardinal, alors $\mu(\mathcal{A}_{S_1}) = \mu(\mathcal{A}_{S_2})$, où $\mathcal{A}_S$ est l'ensemble (fini) des atomes de $M$ portés par le même ensemble fini $S$. En d'autres termes, la mesure par $\mu$ d'un ensemble d'atomes de même support ne dépend que du cardinal du support. On note $\mu(\mathcal{A}[n])$ la valeur commune des $\mu(\mathcal{A}_S)$ pour toutes les parties $S$ de cardinal $n$.
2. $\mu$ est multiplicative, *i.e.*, $\mu(x \oplus y) = \mu(x)\mu(y)$.

# Formalisation : statistiques



D'un point de vue combinatoire, les éléments de $M$ doivent pouvoir être “ mesurés ” par certaines statistiques. Une statistique $\mu$ sur un monoïde partiel booléen et localement fini est une application de $M$ dans un anneau (unitaire) $R$ de caractéristique zéro telle que

1. $\mu$ est équivariante sur les ensembles d'atomes, *i.e.*, quelles que soient $S_1$, $S_2$ deux parties finies de $C$ de même cardinal, alors $\mu(\mathcal{A}_{S_1}) = \mu(\mathcal{A}_{S_2})$, où $\mathcal{A}_S$ est l'ensemble (fini) des atomes de $M$ portés par le même ensemble fini $S$. En d'autres termes, la mesure par $\mu$ d'un ensemble d'atomes de même support ne dépend que du cardinal du support. On note $\mu(\mathcal{A}[n])$ la valeur commune des $\mu(\mathcal{A}_S)$ pour toutes les parties $S$ de cardinal $n$.
2. $\mu$ est multiplicative, *i.e.*, $\mu(x \oplus y) = \mu(x)\mu(y)$.

# Formalisation : statistiques

D'un point de vue combinatoire, les éléments de $M$ doivent pouvoir être " mesurés " par certaines statistiques. Une statistique $\mu$ sur un monoïde partiel booléen et localement fini est une application de $M$ dans un anneau (unitaire) $R$ de caractéristique zéro telle que

1. $\mu$ est équivariante sur les ensembles d'atomes, *i.e.*, quelles que soient $S_1, S_2$ deux parties finies de $C$ de même cardinal, alors $\mu(\mathcal{A}_{S_1}) = \mu(\mathcal{A}_{S_2})$, où $\mathcal{A}_S$ est l'ensemble (fini) des atomes de $M$ portés par le même ensemble fini $S$. En d'autres termes, la mesure par $\mu$ d'un ensemble d'atomes de même support ne dépend que du cardinal du support. On note $\mu(\mathcal{A}[n])$ la valeur commune des $\mu(\mathcal{A}_S)$ pour toutes les parties $S$ de cardinal $n$.
2. $\mu$ est multiplicative, *i.e.*, $\mu(x \oplus y) = \mu(x)\mu(y)$.

# Formalisation : statistiques

D'un point de vue combinatoire, les éléments de $M$ doivent pouvoir être “ mesurés ” par certaines statistiques. Une statistique $\mu$ sur un monoïde partiel booléen et localement fini est une application de $M$ dans un anneau (unitaire) $R$ de caractéristique zéro telle que

1. $\mu$ est équivariante sur les ensembles d'atomes, *i.e.*, quelles que soient $S_1, S_2$ deux parties finies de $C$ de même cardinal, alors $\mu(\mathcal{A}_{S_1}) = \mu(\mathcal{A}_{S_2})$, où $\mathcal{A}_S$ est l'ensemble (fini) des atomes de $M$ portés par le même ensemble fini $S$. En d'autres termes, la mesure par $\mu$ d'un ensemble d'atomes de même support ne dépend que du cardinal du support. On note $\mu(\mathcal{A}[n])$ la valeur commune des $\mu(\mathcal{A}_S)$ pour toutes les parties $S$ de cardinal $n$.
2. $\mu$ est multiplicative, *i.e.*, $\mu(x \oplus y) = \mu(x)\mu(y)$.

# Formalisation : statistiques

D'un point de vue combinatoire, les éléments de $M$ doivent pouvoir être " mesurés " par certaines statistiques. Une statistique $\mu$ sur un monoïde partiel booléen et localement fini est une application de $M$ dans un anneau (unitaire) $R$ de caractéristique zéro telle que

1. $\mu$ est équivariante sur les ensembles d'atomes, *i.e.*, quelles que soient $S_1, S_2$ deux parties finies de $C$ de même cardinal, alors $\mu(\mathcal{A}_{S_1}) = \mu(\mathcal{A}_{S_2})$, où $\mathcal{A}_S$ est l'ensemble (fini) des atomes de $M$ portés par le même ensemble fini $S$. En d'autres termes, la mesure par $\mu$ d'un ensemble d'atomes de même support ne dépend que du cardinal du support. On note $\mu(\mathcal{A}[n])$ la valeur commune des $\mu(\mathcal{A}_S)$ pour toutes les parties $S$ de cardinal $n$.
2. $\mu$ est multiplicative, *i.e.*, $\mu(x \oplus y) = \mu(x)\mu(y)$.

# Formalisation : statistiques



D'un point de vue combinatoire, les éléments de $M$ doivent pouvoir être “ mesurés ” par certaines statistiques. Une statistique $\mu$ sur un monoïde partiel booléen et localement fini est une application de $M$ dans un anneau (unitaire) $R$ de caractéristique zéro telle que

1. $\mu$ est équivariante sur les ensembles d'atomes, *i.e.*, quelles que soient $S_1, S_2$ deux parties finies de $C$ de même cardinal, alors $\mu(\mathcal{A}_{S_1}) = \mu(\mathcal{A}_{S_2})$, où $\mathcal{A}_S$ est l'ensemble (fini) des atomes de $M$ portés par le même ensemble fini $S$. En d'autres termes, la mesure par $\mu$ d'un ensemble d'atomes de même support ne dépend que du cardinal du support. On note $\mu(\mathcal{A}[n])$ la valeur commune des $\mu(\mathcal{A}_S)$ pour toutes les parties $S$ de cardinal $n$.
2. $\mu$ est multiplicative, *i.e.*, $\mu(x \oplus y) = \mu(x)\mu(y)$.

# Formalisation : statistiques



D'un point de vue combinatoire, les éléments de $M$ doivent pouvoir être “ mesurés ” par certaines statistiques. Une statistique $\mu$ sur un monoïde partiel booléen et localement fini est une application de $M$ dans un anneau (unitaire) $R$ de caractéristique zéro telle que

1. $\mu$ est équivariante sur les ensembles d'atomes, *i.e.*, quelles que soient $S_1, S_2$ deux parties finies de $C$ de même cardinal, alors $\mu(\mathcal{A}_{S_1}) = \mu(\mathcal{A}_{S_2})$, où $\mathcal{A}_S$ est l'ensemble (fini) des atomes de $M$ portés par le même ensemble fini $S$. En d'autres termes, la mesure par $\mu$ d'un ensemble d'atomes de même support ne dépend que du cardinal du support. On note $\mu(\mathcal{A}[n])$ la valeur commune des $\mu(\mathcal{A}_S)$ pour toutes les parties $S$ de cardinal $n$.
2. $\mu$ est multiplicative, *i.e.*, $\mu(x \oplus y) = \mu(x)\mu(y)$.

# Formalisation : statistiques

D'un point de vue combinatoire, les éléments de $M$ doivent pouvoir être “ mesurés ” par certaines statistiques. Une statistique $\mu$ sur un monoïde partiel booléen et localement fini est une application de $M$ dans un anneau (unitaire) $R$ de caractéristique zéro telle que

1. $\mu$ est équivariante sur les ensembles d'atomes, *i.e.*, quelles que soient $S_1, S_2$ deux parties finies de $C$ de même cardinal, alors $\mu(\mathcal{A}_{S_1}) = \mu(\mathcal{A}_{S_2})$, où $\mathcal{A}_S$ est l'ensemble (fini) des atomes de $M$ portés par le même ensemble fini $S$. En d'autres termes, la mesure par $\mu$ d'un ensemble d'atomes de même support ne dépend que du cardinal du support. On note $\mu(\mathcal{A}[n])$ la valeur commune des $\mu(\mathcal{A}_S)$ pour toutes les parties $S$ de cardinal $n$.
2. $\mu$ est multiplicative, *i.e.*, $\mu(x \oplus y) = \mu(x)\mu(y)$.

# Statistique singulière

Une statistique multiplicative $\mu$ est singulière si, et seulement si, $\mu(0) = 0$. Dans ce cas, quel que soit $x \in M$, $\mu(x) = 0$. Une statistique est non singulière si $\mu(0) \neq 0$. Si $R$ est un anneau intègre et $\mu$ est non singulière, alors $\mu(0) = 1$.

# Statistique singulière



Une statistique multiplicative $\mu$ est singulière si, et seulement si, $\mu(0) = 0$. Dans ce cas, quel que soit $x \in M$, $\mu(x) = 0$. Une statistique est non singulière si $\mu(0) \neq 0$. Si $R$ est un anneau intègre et $\mu$ est non singulière, alors $\mu(0) = 1$.

# Statistique singulière



Une statistique multiplicative $\mu$ est singulière si, et seulement si, $\mu(0) = 0$. Dans ce cas, quel que soit $x \in M$, $\mu(x) = 0$. Une statistique est non singulière si $\mu(0) \neq 0$. Si $R$ est un anneau intègre et $\mu$ est non singulière, alors $\mu(0) = 1$.

# Statistique singulière



Une statistique multiplicative $\mu$ est singulière si, et seulement si, $\mu(0) = 0$. Dans ce cas, quel que soit $x \in M$, $\mu(x) = 0$. Une statistique est non singulière si $\mu(0) \neq 0$. Si $R$ est un anneau intègre et $\mu$ est non singulière, alors $\mu(0) = 1$.

# Statistique singulière

Une statistique multiplicative $\mu$ est singulière si, et seulement si, $\mu(0) = 0$. Dans ce cas, quel que soit $x \in M$, $\mu(x) = 0$. Une statistique est non singulière si $\mu(0) \neq 0$. Si $R$ est un anneau intègre et $\mu$ est non singulière, alors $\mu(0) = 1$.

# Proposition



Soit $M$ un monoïde partiel booléen localement fini et $\mu$ une statistique équivariante et multiplicative. Soient $S, S'$ deux parties finies de $C$ (de même cardinal $n$). Alors

$$\mu(M_S) = \mu(M_{S'}) \ . \tag{16}$$

# Proposition

Soit $M$ un monoïde partiel booléen localement fini et $\mu$ une statistique équivariante et multiplicative. Soient $S$, $S'$ deux parties finies de $C$ (de même cardinal $n$). Alors

$$\mu(M_S) = \mu(M_{S'}) \ . \qquad (16)$$

# Proposition

Soit $M$ un monoïde partiel booléen localement fini et $\mu$ une statistique équivariante et multiplicative. Soient $S$, $S'$ deux parties finies de $C$ (de même cardinal $n$). Alors

$$\mu(M_S) = \mu(M_{S'}) \ . \tag{16}$$

# Idée de la preuve

Notons $\Pi(S)$ l'ensemble de toutes les partitions de $S$ et $\Pi(n)$ pour $S := [1..n]$. Nous avons $M_S = \coprod_{\pi\in\Pi(S)} \bigoplus_{p\in\Pi} \mathcal{A}_p$. Ainsi

$$\begin{aligned}
\mu(M_S) &= \sum_{\pi\in\Pi(S)} \prod_{p\in\pi} \mu(\mathcal{A}_p) \\
&= \sum_{\pi\in\Pi(S)} \prod_{p\in\pi} \mu(\mathcal{A}[|p|]) \\
&= \sum_{\pi\in\Pi(n)} \prod_{p\in\pi} \mu(\mathcal{A}[|p|]) \\
&= \mu(M_{S'})\ .
\end{aligned} \tag{17}$$

# Idée de la preuve

Notons $\Pi(S)$ l'ensemble de toutes les partitions de $S$ et $\Pi(n)$ pour $S := [1..n]$. Nous avons $M_S = \displaystyle\coprod_{\pi\in\Pi(S)} \bigoplus_{p\in\Pi} \mathcal{A}_p$. Ainsi

$$\begin{aligned}
\mu(M_S) &= \sum_{\pi\in\Pi(S)} \prod_{p\in\pi} \mu(\mathcal{A}_p) \\
&= \sum_{\pi\in\Pi(S)} \prod_{p\in\pi} \mu(\mathcal{A}[|p|]) \\
&= \sum_{\pi\in\Pi(n)} \prod_{p\in\pi} \mu(\mathcal{A}[|p|]) \\
&= \mu(M_{S'})\,.
\end{aligned} \tag{17}$$

# Idée de la preuve

Notons $\Pi(S)$ l'ensemble de toutes les partitions de $S$ et $\Pi(n)$ pour $S := [1..n]$. Nous avons $M_S = \displaystyle\coprod_{\pi \in \Pi(S)} \bigoplus_{p \in \Pi} \mathcal{A}_p$. Ainsi

$$\begin{aligned} \mu(M_S) &= \sum_{\pi \in \Pi(S)} \prod_{p \in \pi} \mu(\mathcal{A}_p) \\ &= \sum_{\pi \in \Pi(S)} \prod_{p \in \pi} \mu(\mathcal{A}[|p|]) \\ &= \sum_{\pi \in \Pi(n)} \prod_{p \in \pi} \mu(\mathcal{A}[|p|]) \\ &= \mu(M_{S'}) \,. \end{aligned} \tag{17}$$

# Idée de la preuve



Notons $\Pi(S)$ l'ensemble de toutes les partitions de $S$ et $\Pi(n)$ pour $S := [1..n]$. Nous avons $M_S = \bigsqcup_{\pi \in \Pi(S)} \bigoplus_{p \in \Pi} \mathcal{A}_p$. Ainsi

$$\begin{aligned} \mu(M_S) &= \sum_{\pi \in \Pi(S)} \prod_{p \in \pi} \mu(\mathcal{A}_p) \\ &= \sum_{\pi \in \Pi(S)} \prod_{p \in \pi} \mu(\mathcal{A}[|p|]) \\ &= \sum_{\pi \in \Pi(n)} \prod_{p \in \pi} \mu(\mathcal{A}[|p|]) \\ &= \mu(M_{S'}) . \end{aligned} \tag{17}$$

# Idée de la preuve

Notons $\Pi(S)$ l'ensemble de toutes les partitions de $S$ et $\Pi(n)$ pour $S := [1..n]$. Nous avons $M_S = \bigsqcup_{\pi \in \Pi(S)} \bigoplus_{p \in \Pi} \mathcal{A}_p$. Ainsi

$$
\begin{aligned}
\mu(M_S) &= \sum_{\pi \in \Pi(S)} \prod_{p \in \pi} \mu(\mathcal{A}_p) \\
&= \sum_{\pi \in \Pi(S)} \prod_{p \in \pi} \mu(\mathcal{A}[|p|]) \\
&= \sum_{\pi \in \Pi(n)} \prod_{p \in \pi} \mu(\mathcal{A}[|p|]) \\
&= \mu(M_{S'}) \,.
\end{aligned}
\tag{17}
$$

# Idée de la preuve

Notons $\Pi(S)$ l'ensemble de toutes les partitions de $S$ et $\Pi(n)$ pour $S := [1..n]$. Nous avons $M_S = \bigsqcup_{\pi \in \Pi(S)} \bigoplus_{p \in \Pi} \mathcal{A}_p$. Ainsi

$$\begin{aligned}
\mu(M_S) &= \sum_{\pi \in \Pi(S)} \prod_{p \in \pi} \mu(\mathcal{A}_p) \\
&= \sum_{\pi \in \Pi(S)} \prod_{p \in \pi} \mu(\mathcal{A}[|p|]) \\
&= \sum_{\pi \in \Pi(n)} \prod_{p \in \pi} \mu(\mathcal{A}[|p|]) \\
&= \mu(M_{S'}) \, .
\end{aligned} \tag{17}$$

# Idée de la preuve





Notons $\Pi(S)$ l'ensemble de toutes les partitions de $S$ et $\Pi(n)$ pour $S := [1..n]$. Nous avons $M_S = \bigsqcup_{\pi\in\Pi(S)} \bigoplus_{p\in\Pi} \mathcal{A}_p$. Ainsi

$$\begin{aligned} \mu(M_S) &= \sum_{\pi\in\Pi(S)} \prod_{p\in\pi} \mu(\mathcal{A}_p) \\ &= \sum_{\pi\in\Pi(S)} \prod_{p\in\pi} \mu(\mathcal{A}[|p|]) \\ &= \sum_{\pi\in\Pi(n)} \prod_{p\in\pi} \mu(\mathcal{A}[|p|]) \\ &= \mu(M_{S'}) . \end{aligned} \tag{17}$$

# Idée de la preuve

Notons $\Pi(S)$ l'ensemble de toutes les partitions de $S$ et $\Pi(n)$ pour $S := [1..n]$. Nous avons $M_S = \coprod_{\pi \in \Pi(S)} \bigoplus_{p \in \Pi} \mathcal{A}_p$. Ainsi

$$
\begin{aligned}
\mu(M_S) &= \sum_{\pi \in \Pi(S)} \prod_{p \in \pi} \mu(\mathcal{A}_p) \\
&= \sum_{\pi \in \Pi(S)} \prod_{p \in \pi} \mu(\mathcal{A}[|p|]) \\
&= \sum_{\pi \in \Pi(n)} \prod_{p \in \pi} \mu(\mathcal{A}[|p|]) \\
&= \mu(M_{S'}) \; .
\end{aligned}
\tag{17}
$$

# Idée de la preuve

Notons $\Pi(S)$ l'ensemble de toutes les partitions de $S$ et $\Pi(n)$ pour $S := [1..n]$. Nous avons $M_S = \displaystyle\bigsqcup_{\pi\in\Pi(S)} \bigoplus_{p\in\Pi} \mathcal{A}_p$. Ainsi

$$\begin{aligned}
\mu(M_S) &= \sum_{\pi\in\Pi(S)} \prod_{p\in\pi} \mu(\mathcal{A}_p) \\
&= \sum_{\pi\in\Pi(S)} \prod_{p\in\pi} \mu(\mathcal{A}[|p|]) \\
&= \sum_{\pi\in\Pi(n)} \prod_{p\in\pi} \mu(\mathcal{A}[|p|]) \\
&= \mu(M_{S'}) \ .
\end{aligned} \tag{17}$$

La valeur commune à $\mu(M_S)$ pour toute partie finie $S$ de $C$ de cardinal $n$ est notée $\mu(M[n])$.

# Partie $\mu$-équivariante

Soient $M$ un monoïde partiel booléen localement fini et $\mu$ une statistique équivariante et multiplicative. Soit $N \subseteq M$ sur laquelle $\mu$ est équivariante, *i.e.* $\mu(N_S) = \mu(N_{S'}) =: \mu(N[n])$ pour toutes parties $S$, $S'$ de même cardinal $n$.

**Exemples :**

1. $M$ et $\mathcal{A}$ sont équivariantes ;
2. Soit $x \in M$ tel que $\mu(x) \neq 0$, alors $\{x\}$ n'est pas équivariant.

# Partie $\mu$-équivariante



Soient $M$ un monoïde partiel booléen localement fini et $\mu$ une statistique équivariante et multiplicative. Soit $N \subseteq M$ sur laquelle $\mu$ est équivariante, *i.e.* $\mu(N_S) = \mu(N_{S'}) =: \mu(N[n])$ pour toutes parties $S$, $S'$ de même cardinal $n$.

**Exemples :**

1. $M$ et $\mathcal{A}$ sont équivariantes ;
2. Soit $x \in M$ tel que $\mu(x) \neq 0$, alors $\{x\}$ n'est pas équivariant.

# Partie $\mu$-équivariante





Soient $M$ un monoïde partiel booléen localement fini et $\mu$ une statistique équivariante et multiplicative. Soit $N \subseteq M$ sur laquelle $\mu$ est équivariante, *i.e.* $\mu(N_S) = \mu(N_{S'}) =: \mu(N[n])$ pour toutes parties $S$, $S'$ de même cardinal $n$.

**Exemples :**

1. $M$ et $\mathcal{A}$ sont équivariantes ;
2. Soit $x \in M$ tel que $\mu(x) \neq 0$, alors $\{x\}$ n'est pas équivariant.

# Partie $\mu$-équivariante





Soient $M$ un monoïde partiel booléen localement fini et $\mu$ une statistique équivariante et multiplicative. Soit $N \subseteq M$ sur laquelle $\mu$ est équivariante, *i.e.* $\mu(N_S) = \mu(N_{S'}) =: \mu(N[n])$ pour toutes parties $S$, $S'$ de même cardinal $n$.

**Exemples :**

1. $M$ et $\mathcal{A}$ sont équivariantes ;
2. Soit $x \in M$ tel que $\mu(x) \neq 0$, alors $\{x\}$ n'est pas équivariant.

# Partie $\mu$-équivariante



Soient $M$ un monoïde partiel booléen localement fini et $\mu$ une statistique équivariante et multiplicative. Soit $N \subseteq M$ sur laquelle $\mu$ est équivariante, *i.e.* $\mu(N_S) = \mu(N_{S'}) =: \mu(N[n])$ pour toutes parties $S$, $S'$ de même cardinal $n$.

**Exemples :**

1. $M$ et $\mathcal{A}$ sont équivariantes ;
2. Soit $x \in M$ tel que $\mu(x) \neq 0$, alors $\{x\}$ n'est pas équivariant.

# Série génératrice exponentielle





Soient $M$ un monoïde partiel booléen localement fini et $\mu$ une statistique équivariante et multiplicative. Soit $N \subseteq M$ sur laquelle $\mu$ est équivariante. On définit la série génératrice exponentielle de $N$ par

$$\mathrm{EGS}(N; z) := \sum_{n=0}^{\infty} \mu(N[n]) \frac{z^n}{n!} \, . \tag{18}$$

Dans le prochain transparent, on considère $N \in \{M, \mathcal{A}\}$.

# Série génératrice exponentielle



Soient $M$ un monoïde partiel booléen localement fini et $\mu$ une statistique équivariante et multiplicative. Soit $N \subseteq M$ sur laquelle $\mu$ est équivariante. On définit la série génératrice exponentielle de $N$ par

$$\mathrm{EGS}(N; \mathrm{z}) := \sum_{n=0}^{\infty} \mu(N[n]) \frac{\mathrm{z}^n}{n!} \; . \tag{18}$$

Dans le prochain transparent, on considère $N \in \{M, \mathcal{A}\}$.

# Série génératrice exponentielle



Soient $M$ un monoïde partiel booléen localement fini et $\mu$ une statistique équivariante et multiplicative. Soit $N \subseteq M$ sur laquelle $\mu$ est équivariante. On définit la série génératrice exponentielle de $N$ par

$$\mathrm{EGS}(N; \mathrm{z}) := \sum_{n=0}^{\infty} \mu(N[n]) \frac{\mathrm{z}^n}{n!} . \tag{18}$$

Dans le prochain transparent, on considère $N \in \{M, \mathcal{A}\}$.

# Série génératrice exponentielle



Soient $M$ un monoïde partiel booléen localement fini et $\mu$ une statistique équivariante et multiplicative. Soit $N \subseteq M$ sur laquelle $\mu$ est équivariante. On définit la série génératrice exponentielle de $N$ par

$$\mathrm{EGS}(N; z) := \sum_{n=0}^{\infty} \mu(N[n]) \frac{z^n}{n!} \ . \tag{18}$$

Dans le prochain transparent, on considère $N \in \{M, \mathcal{A}\}$.

# Série génératrice exponentielle



Soient $M$ un monoïde partiel booléen localement fini et $\mu$ une statistique équivariante et multiplicative. Soit $N \subseteq M$ sur laquelle $\mu$ est équivariante. On définit la série génératrice exponentielle de $N$ par

$$\mathrm{EGS}(N; \mathrm{z}) := \sum_{n=0}^{\infty} \mu(N[n]) \frac{\mathrm{z}^n}{n!} \ . \tag{18}$$

Dans le prochain transparent, on considère $N \in \{M, \mathcal{A}\}$.

# Formule exponentielle pour $M$

Soient $M$ un monoïde partiel booléen localement fini et $\mu$ une statistique équivariante et multiplicative. Nous avons

$$\mathrm{EGS}(M; \mathrm{z}) = \mu(0) - 1 + e^{\mathrm{EGS}(\mathcal{A}; \mathrm{z})} . \tag{19}$$

En particulier, si $\mu(0) = 1$ (par exemple, si $\mu$ est non singulière et $R$ est un anneau intègre),

$$\mathrm{EGS}(M; \mathrm{z}) = e^{\mathrm{EGS}(\mathcal{A}; \mathrm{z})} . \tag{20}$$

# Formule exponentielle pour $M$

Soient $M$ un monoïde partiel booléen localement fini et $\mu$ une statistique équivariante et multiplicative. Nous avons

$$\mathrm{EGS}(M; \mathrm{z}) = \mu(0) - 1 + e^{\mathrm{EGS}(\mathcal{A}; \mathrm{z})} . \tag{19}$$

En particulier, si $\mu(0) = 1$ (par exemple, si $\mu$ est non singulière et $R$ est un anneau intègre),

$$\mathrm{EGS}(M; \mathrm{z}) = e^{\mathrm{EGS}(\mathcal{A}; \mathrm{z})} . \tag{20}$$

# Formule exponentielle pour $M$



Soient $M$ un monoïde partiel booléen localement fini et $\mu$ une statistique équivariante et multiplicative. Nous avons

$$\mathrm{EGS}(M; \mathrm{z}) = \mu(0) - 1 + e^{\mathrm{EGS}(\mathcal{A}; \mathrm{z})} . \tag{19}$$

En particulier, si $\mu(0) = 1$ (par exemple, si $\mu$ est non singulière et $R$ est un anneau intègre),

$$\mathrm{EGS}(M; \mathrm{z}) = e^{\mathrm{EGS}(\mathcal{A}; \mathrm{z})} . \tag{20}$$

# Formule exponentielle pour $M$



Soient $M$ un monoïde partiel booléen localement fini et $\mu$ une statistique équivariante et multiplicative. Nous avons

$$\mathsf{EGS}(M;\mathrm{z}) = \mu(0) - 1 + e^{\mathsf{EGS}(\mathcal{A};\mathrm{z})} . \tag{19}$$

En particulier, si $\mu(0) = 1$ (par exemple, si $\mu$ est non singulière et $R$ est un anneau intègre),

$$\mathsf{EGS}(M;\mathrm{z}) = e^{\mathsf{EGS}(\mathcal{A};\mathrm{z})} . \tag{20}$$