Le monoïde partiel libre

Laurent Poinsot

LIPN UMR 7030 - Université Paris 13 - Institut Galilée

Séminaire de l'Institut de Mathématiques de Toulon

Sommaire de la présentation

Sommaire de la présentation

1. Rappels sur les monoïdes
2. Rappels sur les catégories
3. Équivalence “ monoïdes partiels $\cong$ monoïdes à zéro ”
   - Monoïdes partiels
   - Monoïdes à zéro
4. Le monoïde partiel libre

Sommaire de la présentation

Sommaire de la présentation

Un monoïde est un ensemble non vide, muni d'un élément distingué 1_M, et d'une loi de composition interne $\times : M \times M \to M$ (la loi sera notée par juxtaposition comme un produit usuel) tels que

1. l'opération $\times$ est associative ;
2. 1_M est un élément neutre bilatère pour la loi $\times$ (l'élément neutre est évidemment unique).

Un monoïde M est commutatif si, et seulement si, quels que soient $x, y \in M$, $xy = yx$.

Un monoïde est un ensemble non vide, muni d'un élément distingué 1_M, et d'une loi de composition interne $\times : M \times M \to M$ (la loi sera notée par juxtaposition comme un produit usuel) tels que

1. l'opération $\times$ est associative ;
2. 1_M est un élément neutre bilatère pour la loi $\times$ (l'élément neutre est évidemment unique).

Un monoïde M est commutatif si, et seulement si, quels que soient $x, y \in M$, $xy = yx$.

Un monoïde est un ensemble non vide, muni d'un élément distingué 1_M, et d'une loi de composition interne $\times : M \times M \to M$ (la loi sera notée par juxtaposition comme un produit usuel) tels que

1. l'opération $\times$ est associative ;
2. 1_M est un élément neutre bilatère pour la loi $\times$ (l'élément neutre est évidemment unique).

Un monoïde M est commutatif si, et seulement si, quels que soient $x, y \in M$, $xy = yx$.

Un monoïde est un ensemble non vide, muni d'un élément distingué 1_M, et d'une loi de composition interne $\times : M \times M \to M$ (la loi sera notée par juxtaposition comme un produit usuel) tels que

1. l'opération $\times$ est associative ;
2. 1_M est un élément neutre bilatère pour la loi $\times$ (l'élément neutre est évidemment unique).

Un monoïde M est commutatif si, et seulement si, quels que soient $x, y \in M$, $xy = yx$.

Soient M et N deux monoïdes. Une application $\phi : M \to N$ est un morphisme de monoïdes si, et seulement si

1. $\phi(1_M) = 1_N$;
2. $\phi(xy) = \phi(x)\phi(y)$ quels que soient $x, y \in M$.

La composition de deux morphismes est un morphisme et l'application identique d'un monoïde est un morphisme.

Soient M et N deux monoïdes. Une application $\phi : M \to N$ est un morphisme de monoïdes si, et seulement si

1. $\phi(1_M) = 1_N$;
2. $\phi(xy) = \phi(x)\phi(y)$ quels que soient $x, y \in M$.

La composition de deux morphismes est un morphisme et l'application identique d'un monoïde est un morphisme.

Soient M et N deux monoïdes. Une application $\phi : M \to N$ est un morphisme de monoïdes si, et seulement si

1. $\phi(1_M) = 1_N$;
2. $\phi(xy) = \phi(x)\phi(y)$ quels que soient $x, y \in M$.

La composition de deux morphismes est un morphisme et l'application identique d'un monoïde est un morphisme.

Soient M et N deux monoïdes. Une application $\phi : M \to N$ est un morphisme de monoïdes si, et seulement si

1. $\phi(1_M) = 1_N$;
2. $\phi(xy) = \phi(x)\phi(y)$ quels que soient $x, y \in M$.

La composition de deux morphismes est un morphisme et l'application identique d'un monoïde est un morphisme.

Soient M et N deux monoïdes. Une application $\phi : M \to N$ est un morphisme de monoïdes si, et seulement si

1. $\phi(1_M) = 1_N$;
2. $\phi(xy) = \phi(x)\phi(y)$ quels que soient $x, y \in M$.

La composition de deux morphismes est un morphisme et l'application identique d'un monoïde est un morphisme.

Soient M et N deux monoïdes. Une application $\phi : M \to N$ est un morphisme de monoïdes si, et seulement si

1. $\phi(1_M) = 1_N$;
2. $\phi(xy) = \phi(x)\phi(y)$ quels que soient $x, y \in M$.

La composition de deux morphismes est un morphisme et l'application identique d'un monoïde est un morphisme.

Exemples

1. L'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N}$, avec l'addition, est un monoïde (commutatif) ;
2. L'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N} \setminus \{0\}$, avec la multiplication, est un monoïde (commutatif) ;
3. Tout groupe est un monoïde ;
4. Un anneau (associatif avec unité) muni de sa seule multiplication est un monoïde ;
5. Soit X un ensemble. Alors l'ensemble des applications de X dans $\mathbb{N}$, muni de l'addition terme à terme, est un monoïde.

Exemples

1. L'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N}$, avec l'addition, est un monoïde (commutatif) ;
2. L'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N} \setminus \{0\}$, avec la multiplication, est un monoïde (commutatif) ;
3. Tout groupe est un monoïde ;
4. Un anneau (associatif avec unité) muni de sa seule multiplication est un monoïde ;
5. Soit X un ensemble. Alors l'ensemble des applications de X dans $\mathbb{N}$, muni de l'addition terme à terme, est un monoïde.

Exemples

1. L'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N}$, avec l'addition, est un monoïde (commutatif) ;
2. L'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N} \setminus \{0\}$, avec la multiplication, est un monoïde (commutatif) ;
3. Tout groupe est un monoïde ;
4. Un anneau (associatif avec unité) muni de sa seule multiplication est un monoïde ;
5. Soit X un ensemble. Alors l'ensemble des applications de X dans $\mathbb{N}$, muni de l'addition terme à terme, est un monoïde.

Exemples

1. L'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N}$, avec l'addition, est un monoïde (commutatif) ;
2. L'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N} \setminus \{0\}$, avec la multiplication, est un monoïde (commutatif) ;
3. Tout groupe est un monoïde ;
4. Un anneau (associatif avec unité) muni de sa seule multiplication est un monoïde ;
5. Soit X un ensemble. Alors l'ensemble des applications de X dans $\mathbb{N}$, muni de l'addition terme à terme, est un monoïde.

Exemples

1. L'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N}$, avec l'addition, est un monoïde (commutatif) ;
2. L'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N} \setminus \{0\}$, avec la multiplication, est un monoïde (commutatif) ;
3. Tout groupe est un monoïde ;
4. Un anneau (associatif avec unité) muni de sa seule multiplication est un monoïde ;
5. Soit X un ensemble. Alors l'ensemble des applications de X dans $\mathbb{N}$, muni de l'addition terme à terme, est un monoïde.

Exemples

1. L'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N}$, avec l'addition, est un monoïde (commutatif) ;
2. L'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N} \setminus \{0\}$, avec la multiplication, est un monoïde (commutatif) ;
3. Tout groupe est un monoïde ;
4. Un anneau (associatif avec unité) muni de sa seule multiplication est un monoïde ;
5. Soit X un ensemble. Alors l'ensemble des applications de X dans $\mathbb{N}$, muni de l'addition terme à terme, est un monoïde.

Exemples importants

1. L’ensemble de toutes les fonctions à support fini d’un ensemble X dans $\mathbb{N}$ est un monoïde, appelé le monoïde commutatif libre sur X et noté $X^{\oplus}$;
2. Soit X un ensemble quelconque. On appelle suite finie d’éléments de X la donnée d’un entier naturel n et d’une application $\omega : \{1, \cdots, n\} \to X$ (en particulier, si $n = 0$, on obtient comme seule suite finie l’application vide ϵ). Cet entier n est la longueur de ω. On identifie généralement une telle suite ω de longueur n avec le mot $\omega_1\omega_2 \cdots \omega_n$, $\omega_i \in X$. Les éléments de X, identifiés à des mots de longueurs 1, sont appelés des lettres. L’ensemble de tous les mots est un monoïde pour l’opération de concaténation (avec ϵ comme élément neutre) : $(\omega_1 \cdots \omega_m) \cdot (\omega'_1 \cdots \omega'_n) = \omega_1 \cdots \omega_m\omega'_1 \cdots \omega'_n$. Il est appelé le monoïde libre sur X et noté X^*.

Exemples importants

1. L’ensemble de toutes les fonctions à support fini d’un ensemble X dans $\mathbb{N}$ est un monoïde, appelé le monoïde commutatif libre sur X et noté $X^{\oplus}$;
2. Soit X un ensemble quelconque. On appelle suite finie d’éléments de X la donnée d’un entier naturel n et d’une application $\omega : \{1, \cdots, n\} \to X$ (en particulier, si $n = 0$, on obtient comme seule suite finie l’application vide ϵ). Cet entier n est la longueur de ω. On identifie généralement une telle suite ω de longueur n avec le mot $\omega_1\omega_2 \cdots \omega_n$, $\omega_i \in X$. Les éléments de X, identifiés à des mots de longueurs 1, sont appelés des lettres. L’ensemble de tous les mots est un monoïde pour l’opération de concaténation (avec ϵ comme élément neutre) : $(\omega_1 \cdots \omega_m) \cdot (\omega'_1 \cdots \omega'_n) = \omega_1 \cdots \omega_m \omega'_1 \cdots \omega'_n$. Il est appelé le monoïde libre sur X et noté X^*.

Exemples importants

1. L’ensemble de toutes les fonctions à support fini d’un ensemble X dans $\mathbb{N}$ est un monoïde, appelé le monoïde commutatif libre sur X et noté $X^{\oplus}$;
2. Soit X un ensemble quelconque. On appelle suite finie d’éléments de X la donnée d’un entier naturel n et d’une application $\omega : \{1, \cdots, n\} \to X$ (en particulier, si $n = 0$, on obtient comme seule suite finie l’application vide ϵ). Cet entier n est la longueur de ω. On identifie généralement une telle suite ω de longueur n avec le mot $\omega_1\omega_2 \cdots \omega_n$, $\omega_i \in X$. Les éléments de X, identifiés à des mots de longueurs 1, sont appelés des lettres. L’ensemble de tous les mots est un monoïde pour l’opération de concaténation (avec ϵ comme élément neutre) : $(\omega_1 \cdots \omega_m) \cdot (\omega'_1 \cdots \omega'_n) = \omega_1 \cdots \omega_m \omega'_1 \cdots \omega'_n$. Il est appelé le monoïde libre sur X et noté X^*.

Exemples importants

1. L'ensemble de toutes les fonctions à support fini d'un ensemble X dans $\mathbb{N}$ est un monoïde, appelé le monoïde commutatif libre sur X et noté $X^{\oplus}$;
2. Soit X un ensemble quelconque. On appelle suite finie d'éléments de X la donnée d'un entier naturel n et d'une application $\omega : \{1, \cdots, n\} \rightarrow X$ (en particulier, si $n = 0$, on obtient comme seule suite finie l'application vide ϵ). Cet entier n est la longueur de ω. On identifie généralement une telle suite ω de longueur n avec le mot $\omega_1\omega_2 \cdots \omega_n$, $\omega_i \in X$. Les éléments de X, identifiés à des mots de longueurs 1, sont appelés des lettres. L'ensemble de tous les mots est un monoïde pour l'opération de concaténation (avec ϵ comme élément neutre) : $(\omega_1 \cdots \omega_m) \cdot (\omega'_1 \cdots \omega'_n) = \omega_1 \cdots \omega_m\omega'_1 \cdots \omega'_n$. Il est appelé le monoïde libre sur X et noté X^*.

Exemples importants

1. L'ensemble de toutes les fonctions à support fini d'un ensemble X dans $\mathbb{N}$ est un monoïde, appelé le monoïde commutatif libre sur X et noté $X^{\oplus}$;
2. Soit X un ensemble quelconque. On appelle suite finie d'éléments de X la donnée d'un entier naturel n et d'une application $\omega : \{1, \cdots, n\} \to X$ (en particulier, si $n = 0$, on obtient comme seule suite finie l'application vide ϵ). Cet entier n est la longueur de ω. On identifie généralement une telle suite ω de longueur n avec le mot $\omega_1\omega_2 \cdots \omega_n$, $\omega_i \in X$. Les éléments de X, identifiés à des mots de longueurs 1, sont appelés des lettres. L'ensemble de tous les mots est un monoïde pour l'opération de concaténation (avec ϵ comme élément neutre) : $(\omega_1 \cdots \omega_m) \cdot (\omega'_1 \cdots \omega'_n) = \omega_1 \cdots \omega_m \omega'_1 \cdots \omega'_n$. Il est appelé le monoïde libre sur X et noté X^*.

Exemples importants

1. L'ensemble de toutes les fonctions à support fini d'un ensemble X dans $\mathbb{N}$ est un monoïde, appelé le monoïde commutatif libre sur X et noté $X^{\oplus}$;
2. Soit X un ensemble quelconque. On appelle suite finie d'éléments de X la donnée d'un entier naturel n et d'une application $\omega : \{1, \cdots, n\} \to X$ (en particulier, si $n = 0$, on obtient comme seule suite finie l'application vide ϵ). Cet entier n est la longueur de ω. On identifie généralement une telle suite ω de longueur n avec le mot $\omega_1\omega_2 \cdots \omega_n$, $\omega_i \in X$. Les éléments de X, identifiés à des mots de longueurs 1, sont appelés des lettres. L'ensemble de tous les mots est un monoïde pour l'opération de concaténation (avec ϵ comme élément neutre) : $(\omega_1 \cdots \omega_m) \cdot (\omega'_1 \cdots \omega'_n) = \omega_1 \cdots \omega_m \omega'_1 \cdots \omega'_n$. Il est appelé le monoïde libre sur X et noté X^*.

Exemples importants

1. L'ensemble de toutes les fonctions à support fini d'un ensemble X dans $\mathbb{N}$ est un monoïde, appelé le monoïde commutatif libre sur X et noté $X^{\oplus}$;
2. Soit X un ensemble quelconque. On appelle suite finie d'éléments de X la donnée d'un entier naturel n et d'une application $\omega : \{1, \cdots, n\} \to X$ (en particulier, si $n = 0$, on obtient comme seule suite finie l'application vide ϵ). Cet entier n est la longueur de ω. On identifie généralement une telle suite ω de longueur n avec le mot $\omega_1\omega_2 \cdots \omega_n$, $\omega_i \in X$. Les éléments de X, identifiés à des mots de longueurs 1, sont appelés des lettres. L'ensemble de tous les mots est un monoïde pour l'opération de concaténation (avec ϵ comme élément neutre) : $(\omega_1 \cdots \omega_m) \cdot (\omega'_1 \cdots \omega'_n) = \omega_1 \cdots \omega_m\omega'_1 \cdots \omega'_n$. Il est appelé le monoïde libre sur X et noté X^*.

Exemples importants

1. L'ensemble de toutes les fonctions à support fini d'un ensemble X dans $\mathbb{N}$ est un monoïde, appelé le monoïde commutatif libre sur X et noté $X^{\oplus}$;
2. Soit X un ensemble quelconque. On appelle suite finie d'éléments de X la donnée d'un entier naturel n et d'une application $\omega : \{1, \cdots, n\} \to X$ (en particulier, si $n = 0$, on obtient comme seule suite finie l'application vide ϵ). Cet entier n est la longueur de ω. On identifie généralement une telle suite ω de longueur n avec le mot $\omega_1\omega_2\cdots\omega_n$, $\omega_i \in X$. Les éléments de X, identifiés à des mots de longueurs 1, sont appelés des lettres. L'ensemble de tous les mots est un monoïde pour l'opération de concaténation (avec ϵ comme élément neutre) : $(\omega_1\cdots\omega_m)\cdot(\omega'_1\cdots\omega'_n) = \omega_1\cdots\omega_m\omega'_1\cdots\omega'_n$. Il est appelé le monoïde libre sur X et noté X^*.

Exemples importants

1. L'ensemble de toutes les fonctions à support fini d'un ensemble X dans $\mathbb{N}$ est un monoïde, appelé le monoïde commutatif libre sur X et noté $X^{\oplus}$;
2. Soit X un ensemble quelconque. On appelle suite finie d'éléments de X la donnée d'un entier naturel n et d'une application $\omega : \{1, \cdots, n\} \to X$ (en particulier, si $n = 0$, on obtient comme seule suite finie l'application vide ϵ). Cet entier n est la longueur de ω. On identifie généralement une telle suite ω de longueur n avec le mot $\omega_1\omega_2\cdots\omega_n$, $\omega_i \in X$. Les éléments de X, identifiés à des mots de longueurs 1, sont appelés des lettres. L'ensemble de tous les mots est un monoïde pour l'opération de concaténation (avec ϵ comme élément neutre) : $(\omega_1\cdots\omega_m)\cdot(\omega'_1\cdots\omega'_n) = \omega_1\cdots\omega_m\omega'_1\cdots\omega'_n$. Il est appelé le monoïde libre sur X et noté X^*.

Exemples importants

1. L'ensemble de toutes les fonctions à support fini d'un ensemble X dans $\mathbb{N}$ est un monoïde, appelé le monoïde commutatif libre sur X et noté $X^{\oplus}$;
2. Soit X un ensemble quelconque. On appelle suite finie d'éléments de X la donnée d'un entier naturel n et d'une application $\omega : \{1, \cdots, n\} \to X$ (en particulier, si $n = 0$, on obtient comme seule suite finie l'application vide ϵ). Cet entier n est la longueur de ω. On identifie généralement une telle suite ω de longueur n avec le mot $\omega_1\omega_2 \cdots \omega_n$, $\omega_i \in X$. Les éléments de X, identifiés à des mots de longueurs 1, sont appelés des lettres. L'ensemble de tous les mots est un monoïde pour l'opération de concaténation (avec ϵ comme élément neutre) : $(\omega_1 \cdots \omega_m) \cdot (\omega'_1 \cdots \omega'_n) = \omega_1 \cdots \omega_m\omega'_1 \cdots \omega'_n$. Il est appelé le monoïde libre sur X et noté X^*.

Le monoïde X^* est commutatif si, et seulement si, $|X| \leq 1$ (si $X = \emptyset$, alors $X^* = \{\epsilon\}$, et si $X = \{x\}$, alors $X^* = \{x^n\}_{n\in\mathbb{N}}$).

Le monoïde X^* est commutatif si, et seulement si, $|X| \leq 1$ (si $X = \emptyset$, alors $X^* = \{\epsilon\}$, et si $X = \{x\}$, alors $X^* = \{x^n\}_{n\in\mathbb{N}}$).

Signification de l'expression “ libre ”

Soit X un ensemble et M un monoïde. Étant donné une application $f : X \to M$, il existe un et seul morphisme de monoïdes $\overline{f} : X^* \to M$ tel que $\overline{f}(x) = f(x)$ quel que soit $x \in M$. En d'autres termes, tout morphisme de monoïdes $\phi : X^* \to M$ est uniquement déterminé par ses valeurs sur les lettres de X. On peut construire $\overline{f}$ de la façon suivante :

- $\overline{f}(\epsilon) = 1_M$;
- $\overline{f}(x_1 \cdots x_n) = f(x_1) \times \cdots \times f(x_n)$ $(x_i \in X)$.

Le monoïde libre X^* est donc solution d'un problème universel. Il est alors unique à isomorphisme près (comme toute solution d'un problème universel).

Signification de l'expression " libre "

Soit X un ensemble et M un monoïde. Étant donné une application $f : X \to M$, il existe un et seul morphisme de monoïdes $\overline{f} : X^* \to M$ tel que $\overline{f}(x) = f(x)$ quel que soit $x \in M$. En d'autres termes, tout morphisme de monoïdes $\phi : X^* \to M$ est uniquement déterminé par ses valeurs sur les lettres de X. On peut construire $\overline{f}$ de la façon suivante :

- $\overline{f}(\epsilon) = 1_M$;
- $\overline{f}(x_1 \cdots x_n) = f(x_1) \times \cdots \times f(x_n)$ $(x_i \in X)$.

Le monoïde libre X^* est donc solution d'un problème universel. Il est alors unique à isomorphisme près (comme toute solution d'un problème universel).

Signification de l'expression “ libre ”

Soit X un ensemble et M un monoïde. Étant donné une application $f : X \to M$, il existe un et seul morphisme de monoïdes $\overline{f} : X^* \to M$ tel que $\overline{f}(x) = f(x)$ quel que soit $x \in M$. En d'autres termes, tout morphisme de monoïdes $\phi : X^* \to M$ est uniquement déterminé par ses valeurs sur les lettres de X. On peut construire $\overline{f}$ de la façon suivante :

- $\overline{f}(\epsilon) = 1_M$;
- $\overline{f}(x_1 \cdots x_n) = f(x_1) \times \cdots \times f(x_n)$ $(x_i \in X)$.

Le monoïde libre X^* est donc solution d'un problème universel. Il est alors unique à isomorphisme près (comme toute solution d'un problème universel).

Signification de l’expression “ libre ”

Soit X un ensemble et M un monoïde. Étant donné une application $f : X \to M$, il existe un et seul morphisme de monoïdes $\overline{f} : X^* \to M$ tel que $\overline{f}(x) = f(x)$ quel que soit $x \in M$. En d’autres termes, tout morphisme de monoïdes $\phi : X^* \to M$ est uniquement déterminé par ses valeurs sur les lettres de X. On peut construire $\overline{f}$ de la façon suivante :

- $\overline{f}(\epsilon) = 1_M$;
- $\overline{f}(x_1 \cdots x_n) = f(x_1) \times \cdots \times f(x_n)$ $(x_i \in X)$.

Le monoïde libre X^* est donc solution d’un problème universel. Il est alors unique à isomorphisme près (comme toute solution d’un problème universel).

Signification de l’expression “ libre ”

Soit X un ensemble et M un monoïde. Étant donné une application $f : X \to M$, il existe un et seul morphisme de monoïdes $\overline{f} : X^* \to M$ tel que $\overline{f}(x) = f(x)$ quel que soit $x \in M$. En d’autres termes, tout morphisme de monoïdes $\phi : X^* \to M$ est uniquement déterminé par ses valeurs sur les lettres de X. On peut construire $\overline{f}$ de la façon suivante :

- $\overline{f}(\epsilon) = 1_M$;
- $\overline{f}(x_1 \cdots x_n) = f(x_1) \times \cdots \times f(x_n)$ $(x_i \in X)$.

Le monoïde libre X^* est donc solution d’un problème universel. Il est alors unique à isomorphisme près (comme toute solution d’un problème universel).

Signification de l'expression “ libre ”

Soit X un ensemble et M un monoïde. Étant donné une application $f : X \to M$, il existe un et seul morphisme de monoïdes $\overline{f} : X^* \to M$ tel que $\overline{f}(x) = f(x)$ quel que soit $x \in M$. En d'autres termes, tout morphisme de monoïdes $\phi : X^* \to M$ est uniquement déterminé par ses valeurs sur les lettres de X. On peut construire $\overline{f}$ de la façon suivante :

- $\overline{f}(\epsilon) = 1_M$;
- $\overline{f}(x_1 \cdots x_n) = f(x_1) \times \cdots \times f(x_n)$ ($x_i \in X$).

Le monoïde libre X^* est donc solution d'un problème universel. Il est alors unique à isomorphisme près (comme toute solution d'un problème universel).

Signification de l’expression “ libre ”

Soit X un ensemble et M un monoïde. Étant donné une application $f : X \to M$, il existe un et seul morphisme de monoïdes $\overline{f} : X^* \to M$ tel que $\overline{f}(x) = f(x)$ quel que soit $x \in M$. En d’autres termes, tout morphisme de monoïdes $\phi : X^* \to M$ est uniquement déterminé par ses valeurs sur les lettres de X. On peut construire $\overline{f}$ de la façon suivante :

- $\overline{f}(\epsilon) = 1_M$;
- $\overline{f}(x_1 \cdots x_n) = f(x_1) \times \cdots \times f(x_n)$ $(x_i \in X)$.

Le monoïde libre X^* est donc solution d’un problème universel. Il est alors unique à isomorphisme près (comme toute solution d’un problème universel).

Signification de l'expression “ libre ”

Soit X un ensemble et M un monoïde. Étant donné une application $f : X \to M$, il existe un et seul morphisme de monoïdes $\overline{f} : X^* \to M$ tel que $\overline{f}(x) = f(x)$ quel que soit $x \in M$. En d'autres termes, tout morphisme de monoïdes $\phi : X^* \to M$ est uniquement déterminé par ses valeurs sur les lettres de X. On peut construire $\overline{f}$ de la façon suivante :

- $\overline{f}(\epsilon) = 1_M$;
- $\overline{f}(x_1 \cdots x_n) = f(x_1) \times \cdots \times f(x_n)$ $(x_i \in X)$.

Le monoïde libre X^* est donc solution d'un problème universel. Il est alors unique à isomorphisme près (comme toute solution d'un problème universel).

En effet, supposons l'existence d'une autre solution $X^{\#}$. Remplaçant M par $X^{\#}$ et f par l'inclusion naturelle $i_1 : X \hookrightarrow X^*$ telle que $i_1(x) = x$, on obtient l'existence du morphisme $\phi : X^* \to X^{\#}$ tel que $\phi(x) = i_1(x) = x$ pour $x \in X$. De même, on a $\psi : X^{\#} \to X^*$ avec $\psi(x) = x$ pour tout $x \in X$. Enfin $\psi \circ \phi : X^* \to X^*$ est un morphisme qui satsifait $\psi(\phi(x)) = \psi(x) = x$ pour chaque $x \in X$. Or l'application identique id_{X^*} de X^* doit être l'unique morphisme vérifiant cela (d'après le problème universel), donc $\psi \circ \phi = \mathsf{id}_{X^*}$.

En effet, supposons l'existence d'une autre solution $X^{\#}$. Remplaçant M par $X^{\#}$ et f par l'inclusion naturelle $i_1 : X \hookrightarrow X^*$ telle que $i_1(x) = x$, on obtient l'existence du morphisme $\phi : X^* \to X^{\#}$ tel que $\phi(x) = i_1(x) = x$ pour $x \in X$. De même, on a $\psi : X^{\#} \to X^*$ avec $\psi(x) = x$ pour tout $x \in X$. Enfin $\psi \circ \phi : X^* \to X^*$ est un morphisme qui satsifait $\psi(\phi(x)) = \psi(x) = x$ pour chaque $x \in X$. Or l'application identique id_{X^*} de X^* doit être l'unique morphisme vérifiant cela (d'après le problème universel), donc $\psi \circ \phi = \mathrm{id}_{X^*}$.

En effet, supposons l'existence d'une autre solution $X^{\#}$. Remplaçant M par $X^{\#}$ et f par l'inclusion naturelle $i_1 : X \hookrightarrow X^*$ telle que $i_1(x) = x$, on obtient l'existence du morphisme $\phi : X^* \to X^{\#}$ tel que $\phi(x) = i_1(x) = x$ pour $x \in X$. De même, on a $\psi : X^{\#} \to X^*$ avec $\psi(x) = x$ pour tout $x \in X$. Enfin $\psi \circ \phi : X^* \to X^*$ est un morphisme qui satsifait $\psi(\phi(x)) = \psi(x) = x$ pour chaque $x \in X$. Or l'application identique id_{X^*} de X^* doit être l'unique morphisme vérifiant cela (d'après le problème universel), donc $\psi \circ \phi = \mathsf{id}_{X^*}$.

En effet, supposons l'existence d'une autre solution $X^{\#}$. Remplaçant M par $X^{\#}$ et f par l'inclusion naturelle $i_1 : X \hookrightarrow X^*$ telle que $i_1(x) = x$, on obtient l'existence du morphisme $\phi : X^* \to X^{\#}$ tel que $\phi(x) = i_1(x) = x$ pour $x \in X$. De même, on a $\psi : X^{\#} \to X^*$ avec $\psi(x) = x$ pour tout $x \in X$. Enfin $\psi \circ \phi : X^* \to X^*$ est un morphisme qui satsifait $\psi(\phi(x)) = \psi(x) = x$ pour chaque $x \in X$. Or l'application identique id_{X^*} de X^* doit être l'unique morphisme vérifiant cela (d'après le problème universel), donc $\psi \circ \phi = \mathsf{id}_{X^*}$.

En effet, supposons l'existence d'une autre solution $X^{\#}$. Remplaçant M par $X^{\#}$ et f par l'inclusion naturelle $i_1 : X \hookrightarrow X^*$ telle que $i_1(x) = x$, on obtient l'existence du morphisme $\phi : X^* \to X^{\#}$ tel que $\phi(x) = i_1(x) = x$ pour $x \in X$. De même, on a $\psi : X^{\#} \to X^*$ avec $\psi(x) = x$ pour tout $x \in X$. Enfin $\psi \circ \phi : X^* \to X^*$ est un morphisme qui satsifait $\psi(\phi(x)) = \psi(x) = x$ pour chaque $x \in X$. Or l'application identique id_{X^*} de X^* doit être l'unique morphisme vérifiant cela (d'après le problème universel), donc $\psi \circ \phi = \mathsf{id}_{X^*}$.

En effet, supposons l'existence d'une autre solution $X^{\#}$. Remplaçant M par $X^{\#}$ et f par l'inclusion naturelle $i_1 : X \hookrightarrow X^*$ telle que $i_1(x) = x$, on obtient l'existence du morphisme $\phi : X^* \to X^{\#}$ tel que $\phi(x) = i_1(x) = x$ pour $x \in X$. De même, on a $\psi : X^{\#} \to X^*$ avec $\psi(x) = x$ pour tout $x \in X$. Enfin $\psi \circ \phi : X^* \to X^*$ est un morphisme qui satsifait $\psi(\phi(x)) = \psi(x) = x$ pour chaque $x \in X$. Or l'application identique id_{X^*} de X^* doit être l'unique morphisme vérifiant cela (d'après le problème universel), donc $\psi \circ \phi = \mathsf{id}_{X^*}$.

En effet, supposons l'existence d'une autre solution $X^{\#}$. Remplaçant M par $X^{\#}$ et f par l'inclusion naturelle $i_1 : X \hookrightarrow X^*$ telle que $i_1(x) = x$, on obtient l'existence du morphisme $\phi : X^* \rightarrow X^{\#}$ tel que $\phi(x) = i_1(x) = x$ pour $x \in X$. De même, on a $\psi : X^{\#} \rightarrow X^*$ avec $\psi(x) = x$ pour tout $x \in X$. Enfin $\psi \circ \phi : X^* \rightarrow X^*$ est un morphisme qui satsifait $\psi(\phi(x)) = \psi(x) = x$ pour chaque $x \in X$. Or l'application identique id_{X^*} de X^* doit être l'unique morphisme vérifiant cela (d'après le problème universel), donc $\psi \circ \phi = \mathsf{id}_{X^*}$.

Le monoïde commutatif libre $X^{\oplus}$ est également solution d'un problème universel : soit X un ensemble et M un monoïde *commutatif*. Étant donné $f : X \to M$, il existe un et un seul morphisme de monoïdes $\overline{f} : X^{\oplus} \to M$ tel que $\overline{f}(x) = f(x)$ quel que soit $x \in X$.

Le monoïde commutatif libre $X^{\oplus}$ est également solution d'un problème universel : soit X un ensemble et M un monoïde *commutatif*. Étant donné $f : X \to M$, il existe un et un seul morphisme de monoïdes $\overline{f} : X^{\oplus} \to M$ tel que $\overline{f}(x) = f(x)$ quel que soit $x \in X$.

Le monoïde commutatif libre $X^{\oplus}$ est également solution d'un problème universel : soit X un ensemble et M un monoïde *commutatif*. Étant donné $f : X \to M$, il existe un et un seul morphisme de monoïdes $\overline{f} : X^{\oplus} \to M$ tel que $\overline{f}(x) = f(x)$ quel que soit $x \in X$.

Définition

Une catégorie C est la donnée de $(\mathcal{O}_{\mathsf{C}}, \mathsf{hom}_{\mathsf{C}}, \mathsf{id}, \circ)$ où

1. $\mathcal{O}_{\mathsf{C}}$ est une classe, la *classe des objets de* C ;
2. Pour chaque paire (a, b) d'objets, $\mathsf{hom}_{\mathsf{C}}(a, b)$ est une classe dont les éléments sont appelés les C-*morphismes* (ou *flèches*) de a dans b. On écrit souvent $f : a \to b$ pour exprimer le fait que $f \in \mathsf{hom}_{\mathsf{C}}(a, b)$. Les classes $\mathsf{hom}_{\mathsf{C}}(a, b)$ sont deux à deux disjointes de sorte qu'une flèche f admet un unique domaine $a = \mathsf{dom}(f)$ et un unique codomaine $b = \mathsf{codom}(f)$, et donc $f : a \to b$. La classe de tous les C-morphismes est notée $\mathcal{F}_{\mathsf{C}}$;
3. id est une application de $\mathcal{O}_{\mathsf{C}}$ dans $\mathcal{F}_{\mathsf{C}}$ telle que pour chaque $a \in \mathcal{O}_{\mathsf{C}}$, on a $\mathsf{id}_a : a \to a$. Cette flèche est appelée l'*identité de* a ;
4. $\circ$ est une loi de composition partiellement définie sur $\mathcal{F}_{\mathsf{C}}$: si $f : a \to b$ et $g : b \to c$, alors $g \circ f : a \to c$.

Définition

Une catégorie C est la donnée de $(\mathcal{O}_{\mathsf{C}}, \mathsf{hom}_{\mathsf{C}}, \mathsf{id}, \circ)$ où

1. $\mathcal{O}_{\mathsf{C}}$ est une classe, la *classe des objets de* C ;
2. Pour chaque paire (a, b) d'objets, $\mathsf{hom}_{\mathsf{C}}(a, b)$ est une classe dont les éléments sont appelés les C-*morphismes* (ou *flèches*) de a dans b. On écrit souvent $f : a \to b$ pour exprimer le fait que $f \in \mathsf{hom}_{\mathsf{C}}(a, b)$. Les classes $\mathsf{hom}_{\mathsf{C}}(a, b)$ sont deux à deux disjointes de sorte qu'une flèche f admet un unique domaine $a = \mathsf{dom}(f)$ et un unique codomaine $b = \mathsf{codom}(f)$, et donc $f : a \to b$. La classe de tous les C-morphismes est notée $\mathcal{F}_{\mathsf{C}}$;
3. id est une application de $\mathcal{O}_{\mathsf{C}}$ dans $\mathcal{F}_{\mathsf{C}}$ telle que pour chaque $a \in \mathcal{O}_{\mathsf{C}}$, on a $\mathsf{id}_a : a \to a$. Cette flèche est appelée l'*identité de* a ;
4. $\circ$ est une loi de composition partiellement définie sur $\mathcal{F}_{\mathsf{C}}$: si $f : a \to b$ et $g : b \to c$, alors $g \circ f : a \to c$.

Définition

Une catégorie C est la donnée de $(\mathcal{O}_{\mathsf{C}}, \mathsf{hom}_{\mathsf{C}}, \mathsf{id}, \circ)$ où

1. $\mathcal{O}_{\mathsf{C}}$ est une classe, la *classe des objets de* C ;
2. Pour chaque paire (a, b) d'objets, $\mathsf{hom}_{\mathsf{C}}(a, b)$ est une classe dont les éléments sont appelés les C-*morphismes* (ou *flêches*) de a dans b. On écrit souvent $f : a \to b$ pour exprimer le fait que $f \in \mathsf{hom}_{\mathsf{C}}(a, b)$. Les classes $\mathsf{hom}_{\mathsf{C}}(a, b)$ sont deux à deux disjointes de sorte qu'une flêche f admet un unique domaine $a = \mathsf{dom}(f)$ et un unique codomaine $b = \mathsf{codom}(f)$, et donc $f : a \to b$. La classe de tous les C-morphismes est notée $\mathcal{F}_{\mathsf{C}}$;
3. id est une application de $\mathcal{O}_{\mathsf{C}}$ dans $\mathcal{F}_{\mathsf{C}}$ telle que pour chaque $a \in \mathcal{O}_{\mathsf{C}}$, on a $\mathsf{id}_a : a \to a$. Cette flêche est appelée l'*identité de* a ;
4. $\circ$ est une loi de composition partiellement définie sur $\mathcal{F}_{\mathsf{C}}$: si $f : a \to b$ et $g : b \to c$, alors $g \circ f : a \to c$.

Définition

Une catégorie C est la donnée de $(\mathcal{O}_{\mathsf{C}}, \mathsf{hom}_{\mathsf{C}}, \mathsf{id}, \circ)$ où

1. $\mathcal{O}_{\mathsf{C}}$ est une classe, la *classe des objets de* C ;
2. Pour chaque paire (a, b) d'objets, $\mathsf{hom}_{\mathsf{C}}(a, b)$ est une classe dont les éléments sont appelés les C-*morphismes* (ou *flêches*) de a dans b. On écrit souvent $f : a \to b$ pour exprimer le fait que $f \in \mathsf{hom}_{\mathsf{C}}(a, b)$. Les classes $\mathsf{hom}_{\mathsf{C}}(a, b)$ sont deux à deux disjointes de sorte qu'une flêche f admet un unique domaine $a = \mathsf{dom}(f)$ et un unique codomaine $b = \mathsf{codom}(f)$, et donc $f : a \to b$. La classe de tous les C-morphismes est notée $\mathcal{F}_{\mathsf{C}}$;
3. id est une application de $\mathcal{O}_{\mathsf{C}}$ dans $\mathcal{F}_{\mathsf{C}}$ telle que pour chaque $a \in \mathcal{O}_{\mathsf{C}}$, on a $\mathsf{id}_a : a \to a$. Cette flêche est appelée l'*identité de* a ;
4. $\circ$ est une loi de composition partiellement définie sur $\mathcal{F}_{\mathsf{C}}$: si $f : a \to b$ et $g : b \to c$, alors $g \circ f : a \to c$.

Définition

Une catégorie C est la donnée de $(\mathcal{O}_{\mathsf{C}}, \mathsf{hom}_{\mathsf{C}}, \mathsf{id}, \circ)$ où

1. $\mathcal{O}_{\mathsf{C}}$ est une classe, la *classe des objets de* C ;
2. Pour chaque paire (a, b) d'objets, $\mathsf{hom}_{\mathsf{C}}(a, b)$ est une classe dont les éléments sont appelés les C-*morphismes* (ou *flêches*) de a dans b. On écrit souvent $f : a \to b$ pour exprimer le fait que $f \in \mathsf{hom}_{\mathsf{C}}(a, b)$. Les classes $\mathsf{hom}_{\mathsf{C}}(a, b)$ sont deux à deux disjointes de sorte qu'une flêche f admet un unique domaine $a = \mathsf{dom}(f)$ et un unique codomaine $b = \mathsf{codom}(f)$, et donc $f : a \to b$. La classe de tous les C-morphismes est notée $\mathcal{F}_{\mathsf{C}}$;
3. id est une application de $\mathcal{O}_{\mathsf{C}}$ dans $\mathcal{F}_{\mathsf{C}}$ telle que pour chaque $a \in \mathcal{O}_{\mathsf{C}}$, on a $\mathsf{id}_a : a \to a$. Cette flêche est appelée l'*identité de* a ;
4. $\circ$ est une loi de composition partiellement définie sur $\mathcal{F}_{\mathsf{C}}$: si $f : a \to b$ et $g : b \to c$, alors $g \circ f : a \to c$.

Définition

Une catégorie C est la donnée de $(\mathcal{O}_{\mathsf{C}}, \mathsf{hom}_{\mathsf{C}}, \mathsf{id}, \circ)$ où

1. $\mathcal{O}_{\mathsf{C}}$ est une classe, la *classe des objets de* C ;
2. Pour chaque paire (a, b) d'objets, $\mathsf{hom}_{\mathsf{C}}(a, b)$ est une classe dont les éléments sont appelés les C-*morphismes* (ou *flêches*) de a dans b. On écrit souvent $f : a \to b$ pour exprimer le fait que $f \in \mathsf{hom}_{\mathsf{C}}(a, b)$. Les classes $\mathsf{hom}_{\mathsf{C}}(a, b)$ sont deux à deux disjointes de sorte qu'une flêche f admet un unique domaine $a = \mathsf{dom}(f)$ et un unique codomaine $b = \mathsf{codom}(f)$, et donc $f : a \to b$. La classe de tous les C-morphismes est notée $\mathcal{F}_{\mathsf{C}}$;
3. id est une application de $\mathcal{O}_{\mathsf{C}}$ dans $\mathcal{F}_{\mathsf{C}}$ telle que pour chaque $a \in \mathcal{O}_{\mathsf{C}}$, on a $\mathsf{id}_a : a \to a$. Cette flêche est appelée l'*identité de* a ;
4. $\circ$ est une loi de composition partiellement définie sur $\mathcal{F}_{\mathsf{C}}$: si $f : a \to b$ et $g : b \to c$, alors $g \circ f : a \to c$.

Définition

Une catégorie C est la donnée de $(\mathcal{O}_{\mathsf{C}}, \mathsf{hom}_{\mathsf{C}}, \mathsf{id}, \circ)$ où

1. $\mathcal{O}_{\mathsf{C}}$ est une classe, la *classe des objets de* C ;
2. Pour chaque paire (a, b) d'objets, $\mathsf{hom}_{\mathsf{C}}(a, b)$ est une classe dont les éléments sont appelés les C-*morphismes* (ou *flêches*) de a dans b. On écrit souvent $f : a \to b$ pour exprimer le fait que $f \in \mathsf{hom}_{\mathsf{C}}(a, b)$. Les classes $\mathsf{hom}_{\mathsf{C}}(a, b)$ sont deux à deux disjointes de sorte qu'une flêche f admet un unique domaine $a = \mathsf{dom}(f)$ et un unique codomaine $b = \mathsf{codom}(f)$, et donc $f : a \to b$. La classe de tous les C-morphismes est notée $\mathcal{F}_{\mathsf{C}}$;
3. id est une application de $\mathcal{O}_{\mathsf{C}}$ dans $\mathcal{F}_{\mathsf{C}}$ telle que pour chaque $a \in \mathcal{O}_{\mathsf{C}}$, on a $\mathsf{id}_a : a \to a$. Cette flêche est appelée l'*identité de* a ;
4. $\circ$ est une loi de composition partiellement définie sur $\mathcal{F}_{\mathsf{C}}$: si $f : a \to b$ et $g : b \to c$, alors $g \circ f : a \to c$.

Définition

Une catégorie C est la donnée de $(\mathcal{O}_{\mathsf{C}}, \mathsf{hom}_{\mathsf{C}}, \mathsf{id}, \circ)$ où

1. $\mathcal{O}_{\mathsf{C}}$ est une classe, la *classe des objets de* C ;
2. Pour chaque paire (a, b) d'objets, $\mathsf{hom}_{\mathsf{C}}(a, b)$ est une classe dont les éléments sont appelés les C-*morphismes* (ou *flêches*) de a dans b. On écrit souvent $f : a \to b$ pour exprimer le fait que $f \in \mathsf{hom}_{\mathsf{C}}(a, b)$. Les classes $\mathsf{hom}_{\mathsf{C}}(a, b)$ sont deux à deux disjointes de sorte qu'une flêche f admet un unique domaine $a = \mathsf{dom}(f)$ et un unique codomaine $b = \mathsf{codom}(f)$, et donc $f : a \to b$. La classe de tous les C-morphismes est notée $\mathcal{F}_{\mathsf{C}}$;
3. id est une application de $\mathcal{O}_{\mathsf{C}}$ dans $\mathcal{F}_{\mathsf{C}}$ telle que pour chaque $a \in \mathcal{O}_{\mathsf{C}}$, on a $\mathsf{id}_a : a \to a$. Cette flêche est appelée l'*identité de* a ;
4. $\circ$ est une loi de composition partiellement définie sur $\mathcal{F}_{\mathsf{C}}$: si $f : a \to b$ et $g : b \to c$, alors $g \circ f : a \to c$.

Définition

Une catégorie C est la donnée de $(\mathcal{O}_{\mathsf{C}}, \mathsf{hom}_{\mathsf{C}}, \mathsf{id}, \circ)$ où

1. $\mathcal{O}_{\mathsf{C}}$ est une classe, la *classe des objets de* C ;
2. Pour chaque paire (a, b) d'objets, $\mathsf{hom}_{\mathsf{C}}(a, b)$ est une classe dont les éléments sont appelés les C-*morphismes* (ou *flêches*) de a dans b. On écrit souvent $f : a \rightarrow b$ pour exprimer le fait que $f \in \mathsf{hom}_{\mathsf{C}}(a, b)$. Les classes $\mathsf{hom}_{\mathsf{C}}(a, b)$ sont deux à deux disjointes de sorte qu'une flêche f admet un unique domaine $a = \mathsf{dom}(f)$ et un unique codomaine $b = \mathsf{codom}(f)$, et donc $f : a \rightarrow b$. La classe de tous les C-morphismes est notée $\mathcal{F}_{\mathsf{C}}$;
3. id est une application de $\mathcal{O}_{\mathsf{C}}$ dans $\mathcal{F}_{\mathsf{C}}$ telle que pour chaque $a \in \mathcal{O}_{\mathsf{C}}$, on a $\mathsf{id}_a : a \rightarrow a$. Cette flêche est appelée l'*identité de* a ;
4. $\circ$ est une loi de composition partiellement définie sur $\mathcal{F}_{\mathsf{C}}$: si $f : a \rightarrow b$ et $g : b \rightarrow c$, alors $g \circ f : a \rightarrow c$.

Définition

Une catégorie C est la donnée de $(\mathcal{O}_{\mathsf{C}}, \mathsf{hom}_{\mathsf{C}}, \mathsf{id}, \circ)$ où

1. $\mathcal{O}_{\mathsf{C}}$ est une classe, la *classe des objets de* C ;
2. Pour chaque paire (a, b) d'objets, $\mathsf{hom}_{\mathsf{C}}(a, b)$ est une classe dont les éléments sont appelés les C-*morphismes* (ou *flêches*) de a dans b. On écrit souvent $f : a \to b$ pour exprimer le fait que $f \in \mathsf{hom}_{\mathsf{C}}(a, b)$. Les classes $\mathsf{hom}_{\mathsf{C}}(a, b)$ sont deux à deux disjointes de sorte qu'une flêche f admet un unique domaine $a = \mathsf{dom}(f)$ et un unique codomaine $b = \mathsf{codom}(f)$, et donc $f : a \to b$. La classe de tous les C-morphismes est notée $\mathcal{F}_{\mathsf{C}}$;
3. id est une application de $\mathcal{O}_{\mathsf{C}}$ dans $\mathcal{F}_{\mathsf{C}}$ telle que pour chaque $a \in \mathcal{O}_{\mathsf{C}}$, on a $\mathsf{id}_a : a \to a$. Cette flêche est appelée l'*identité de* a ;
4. $\circ$ est une loi de composition partiellement définie sur $\mathcal{F}_{\mathsf{C}}$: si $f : a \to b$ et $g : b \to c$, alors $g \circ f : a \to c$.

L'opération de composition $\circ$ vérifie en outre :

- Associativité : si $f : a \to b$, $g : b \to c$ et $h : c \to d$, alors $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$;
- Élément neutre : si $f : a \to b$, alors $f \circ \mathsf{id}_a = f$ et $\mathsf{id}_b \circ f = f$.

Un isomorphisme f d'une catégorie C est une flêche $f : a \to b$ pour laquelle il existe une autre flêche $g : b \to a$ avec $g \circ f = \mathsf{id}_a$ et $f \circ g = \mathsf{id}_b$. Les objets a et b sont alors dits isomorphes et on écrit $a \cong b$.

L'opération de composition $\circ$ vérifie en outre :

- Associativité : si $f : a \to b$, $g : b \to c$ et $h : c \to d$, alors $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$;
- Élément neutre : si $f : a \to b$, alors $f \circ \mathsf{id}_a = f$ et $\mathsf{id}_b \circ f = f$.

Un isomorphisme f d'une catégorie C est une flêche $f : a \to b$ pour laquelle il existe une autre flêche $g : b \to a$ avec $g \circ f = \mathsf{id}_a$ et $f \circ g = \mathsf{id}_b$. Les objets a et b sont alors dits isomorphes et on écrit $a \cong b$.

L'opération de composition $\circ$ vérifie en outre :

- Associativité : si $f : a \to b$, $g : b \to c$ et $h : c \to d$, alors $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$;
- Élément neutre : si $f : a \to b$, alors $f \circ \mathsf{id}_a = f$ et $\mathsf{id}_b \circ f = f$.

Un isomorphisme f d'une catégorie C est une flèche $f : a \to b$ pour laquelle il existe une autre flèche $g : b \to a$ avec $g \circ f = \mathsf{id}_a$ et $f \circ g = \mathsf{id}_b$. Les objets a et b sont alors dits isomorphes et on écrit $a \cong b$.

L'opération de composition $\circ$ vérifie en outre :

- Associativité : si $f : a \to b$, $g : b \to c$ et $h : c \to d$, alors $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$;
- Élément neutre : si $f : a \to b$, alors $f \circ \mathsf{id}_a = f$ et $\mathsf{id}_b \circ f = f$.

Un isomorphisme f d'une catégorie C est une flêche $f : a \to b$ pour laquelle il existe une autre flêche $g : b \to a$ avec $g \circ f = \mathsf{id}_a$ et $f \circ g = \mathsf{id}_b$. Les objets a et b sont alors dits isomorphes et on écrit $a \cong b$.

L'opération de composition $\circ$ vérifie en outre :

- Associativité : si $f : a \to b$, $g : b \to c$ et $h : c \to d$, alors $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$;
- Élément neutre : si $f : a \to b$, alors $f \circ \mathsf{id}_a = f$ et $\mathsf{id}_b \circ f = f$.

Un isomorphisme f d'une catégorie C est une flêche $f : a \to b$ pour laquelle il existe une autre flêche $g : b \to a$ avec $g \circ f = \mathsf{id}_a$ et $f \circ g = \mathsf{id}_b$. Les objets a et b sont alors dits isomorphes et on écrit $a \cong b$.

Exemples

- La catégorie Ens des ensembles avec les applications ensemblistes comme flêches ;
- La catégorie Mon des monoïdes avec les homomorphismes de monoïdes comme flêches ;
- Les catégories usuelles des groupes abéliens, des groupes, des anneaux commutatifs, des anneaux, des modules sur un anneau commutatif R, des espaces vectoriels sur un corps $\mathbb{K}$, des R-algèbres, des espaces topologiques, des espaces métriques, *etc.*, avec leurs classes de morphismes respectives ;
- Soit $M \in \mathcal{O}_{\mathsf{Mon}}$, alors M est une catégorie : elle n'a qu'un seul objet M, et ses flêches sont les éléments de M : $x \circ y = xy$. Les isomorphismes de cette catégorie sont les éléments inversibles de M.

On peut remarquer qu'une flêche $f : a \to b$ n'est pas nécessairement une application de a dans b.

Exemples

- La catégorie Ens des ensembles avec les applications ensemblistes comme flêches ;
- La catégorie Mon des monoïdes avec les homomorphismes de monoïdes comme flêches ;
- Les catégories usuelles des groupes abéliens, des groupes, des anneaux commutatifs, des anneaux, des modules sur un anneau commutatif R, des espaces vectoriels sur un corps $\mathbb{K}$, des R-algèbres, des espaces topologiques, des espaces métriques, *etc.*, avec leurs classes de morphismes respectives ;
- Soit $M \in \mathcal{O}_{\mathsf{Mon}}$, alors M est une catégorie : elle n'a qu'un seul objet M, et ses flêches sont les éléments de M : $x \circ y = xy$. Les isomorphismes de cette catégorie sont les éléments inversibles de M.

On peut remarquer qu'une flêche $f : a \to b$ n'est pas nécessairement une application de a dans b.

Exemples

- La catégorie Ens des ensembles avec les applications ensemblistes comme flêches ;
- La catégorie Mon des monoïdes avec les homomorphismes de monoïdes comme flêches ;
- Les catégories usuelles des groupes abéliens, des groupes, des anneaux commutatifs, des anneaux, des modules sur un anneau commutatif R, des espaces vectoriels sur un corps $\mathbb{K}$, des R-algèbres, des espaces topologiques, des espaces métriques, *etc.*, avec leurs classes de morphismes respectives ;
- Soit $M \in \mathcal{O}_{\mathsf{Mon}}$, alors M est une catégorie : elle n'a qu'un seul objet M, et ses flêches sont les éléments de M : $x \circ y = xy$. Les isomorphismes de cette catégorie sont les éléments inversibles de M.

On peut remarquer qu'une flêche $f : a \to b$ n'est pas nécessairement une application de a dans b.

Exemples

- La catégorie Ens des ensembles avec les applications ensemblistes comme flêches ;
- La catégorie Mon des monoïdes avec les homomorphismes de monoïdes comme flêches ;
- Les catégories usuelles des groupes abéliens, des groupes, des anneaux commutatifs, des anneaux, des modules sur un anneau commutatif R, des espaces vectoriels sur un corps $\mathbb{K}$, des R-algèbres, des espaces topologiques, des espaces métriques, *etc.*, avec leurs classes de morphismes respectives ;
- Soit $M \in \mathcal{O}_{\mathsf{Mon}}$, alors M est une catégorie : elle n'a qu'un seul objet M, et ses flêches sont les éléments de M : $x \circ y = xy$. Les isomorphismes de cette catégorie sont les éléments inversibles de M.

On peut remarquer qu'une flêche $f : a \to b$ n'est pas nécessairement une application de a dans b.

Exemples

- La catégorie Ens des ensembles avec les applications ensemblistes comme flêches ;
- La catégorie Mon des monoïdes avec les homomorphismes de monoïdes comme flêches ;
- Les catégories usuelles des groupes abéliens, des groupes, des anneaux commutatifs, des anneaux, des modules sur un anneau commutatif R, des espaces vectoriels sur un corps $\mathbb{K}$, des R-algèbres, des espaces topologiques, des espaces métriques, *etc.*, avec leurs classes de morphismes respectives ;
- Soit $M \in \mathcal{O}_{\mathsf{Mon}}$, alors M est une catégorie : elle n'a qu'un seul objet M, et ses flêches sont les éléments de M : $x \circ y = xy$. Les isomorphismes de cette catégorie sont les éléments inversibles de M.

On peut remarquer qu'une flêche $f : a \to b$ n'est pas nécessairement une application de a dans b.

Exemples

- La catégorie Ens des ensembles avec les applications ensemblistes comme flêches ;
- La catégorie Mon des monoïdes avec les homomorphismes de monoïdes comme flêches ;
- Les catégories usuelles des groupes abéliens, des groupes, des anneaux commutatifs, des anneaux, des modules sur un anneau commutatif R, des espaces vectoriels sur un corps $\mathbb{K}$, des R-algèbres, des espaces topologiques, des espaces métriques, *etc.*, avec leurs classes de morphismes respectives ;
- Soit $M \in \mathcal{O}_{\mathsf{Mon}}$, alors M est une catégorie : elle n'a qu'un seul objet M, et ses flêches sont les éléments de M : $x \circ y = xy$. Les isomorphismes de cette catégorie sont les éléments inversibles de M.

On peut remarquer qu'une flêche $f : a \to b$ n'est pas nécessairement une application de a dans b.

Exemples

- La catégorie Ens des ensembles avec les applications ensemblistes comme flêches ;
- La catégorie Mon des monoïdes avec les homomorphismes de monoïdes comme flêches ;
- Les catégories usuelles des groupes abéliens, des groupes, des anneaux commutatifs, des anneaux, des modules sur un anneau commutatif R, des espaces vectoriels sur un corps $\mathbb{K}$, des R-algèbres, des espaces topologiques, des espaces métriques, *etc.*, avec leurs classes de morphismes respectives ;
- Soit $M \in \mathcal{O}_{\mathsf{Mon}}$, alors M est une catégorie : elle n'a qu'un seul objet M, et ses flêches sont les éléments de M : $x \circ y = xy$. Les isomorphismes de cette catégorie sont les éléments inversibles de M.

On peut remarquer qu'une flêche $f : a \to b$ n'est pas nécessairement une application de a dans b.

Exemples

- La catégorie Ens des ensembles avec les applications ensemblistes comme flêches ;
- La catégorie Mon des monoïdes avec les homomorphismes de monoïdes comme flêches ;
- Les catégories usuelles des groupes abéliens, des groupes, des anneaux commutatifs, des anneaux, des modules sur un anneau commutatif R, des espaces vectoriels sur un corps $\mathbb{K}$, des R-algèbres, des espaces topologiques, des espaces métriques, *etc.*, avec leurs classes de morphismes respectives ;
- Soit $M \in \mathcal{O}_{\mathsf{Mon}}$, alors M est une catégorie : elle n'a qu'un seul objet M, et ses flêches sont les éléments de M : $x \circ y = xy$. Les isomorphismes de cette catégorie sont les éléments inversibles de M.

On peut remarquer qu'une flêche $f : a \to b$ n'est pas nécessairement une application de a dans b.

Exemples

- La catégorie Ens des ensembles avec les applications ensemblistes comme flêches ;
- La catégorie Mon des monoïdes avec les homomorphismes de monoïdes comme flêches ;
- Les catégories usuelles des groupes abéliens, des groupes, des anneaux commutatifs, des anneaux, des modules sur un anneau commutatif R, des espaces vectoriels sur un corps $\mathbb{K}$, des R-algèbres, des espaces topologiques, des espaces métriques, *etc.*, avec leurs classes de morphismes respectives ;
- Soit $M \in \mathcal{O}_{\mathsf{Mon}}$, alors M est une catégorie : elle n'a qu'un seul objet M, et ses flêches sont les éléments de M : $x \circ y = xy$. Les isomorphismes de cette catégorie sont les éléments inversibles de M.

On peut remarquer qu'une flêche $f : a \to b$ n'est pas nécessairement une application de a dans b.

Derniers exemples

- Soit R un anneau commutatif (avec unité) et Mat_R la catégorie dont les objets sont les éléments de $\mathbb{N}$ et $\mathsf{hom}_{\mathsf{Mat}_R}(m,n)$ est l'ensemble de toutes les matrices de taille $m \times n$ à coefficients dans R. Les isomorphismes de Mat_R sont les matrices inversibles, et $m \cong n$ si, et seulement si, $m = n$.
- Soit $(P, \leq)$ un ensemble (non vide) partiellement ordonné (*i.e.*, $\leq$ est une relation binaire réflexive, transitive et antisymétrique sur P). Soit $x \leq y$. On définit l'*intervalle* (borné) $[x,y] = \{z \in P : x \leq z \leq y\}$. Soit une composition (partiellement définie) entre intervalles : $[x,z] \cdot [z,y] = [x,y]$. On obtient une catégorie dont les objets sont les éléments de P et les flèches sont les intervalles. La flèche identité de x n'est rien d'autre que l'intervalle $[x,x]$ réduit au seul élément x. Les flèches identités sont les seuls isomorphismes.

Derniers exemples

- Soit R un anneau commutatif (avec unité) et Mat_R la catégorie dont les objets sont les éléments de $\mathbb{N}$ et $\hom_{\mathsf{Mat}_R}(m, n)$ est l'ensemble de toutes les matrices de taille $m \times n$ à coefficients dans R. Les isomorphismes de Mat_R sont les matrices inversibles, et $m \cong n$ si, et seulement si, $m = n$.
- Soit $(P, \leq)$ un ensemble (non vide) partiellement ordonné (*i.e.*, $\leq$ est une relation binaire réflexive, transitive et antisymétrique sur P). Soit $x \leq y$. On définit l'*intervalle* (borné) $[x, y] = \{z \in P : x \leq z \leq y\}$. Soit une composition (partiellement définie) entre intervalles : $[x, z] \cdot [z, y] = [x, y]$. On obtient une catégorie dont les objets sont les éléments de P et les flèches sont les intervalles. La flèche identité de x n'est rien d'autre que l'intervalle $[x, x]$ réduit au seul élément x. Les flèches identités sont les seuls isomorphismes.

Derniers exemples

- Soit R un anneau commutatif (avec unité) et Mat_R la catégorie dont les objets sont les éléments de $\mathbb{N}$ et $\mathsf{hom}_{\mathsf{Mat}_R}(m,n)$ est l'ensemble de toutes les matrices de taille $m \times n$ à coefficients dans R. Les isomorphismes de Mat_R sont les matrices inversibles, et $m \cong n$ si, et seulement si, $m = n$.
- Soit $(P, \leq)$ un ensemble (non vide) partiellement ordonné (*i.e.*, $\leq$ est une relation binaire réflexive, transitive et antisymétrique sur P). Soit $x \leq y$. On définit l'*intervalle* (borné) $[x,y] = \{z \in P : x \leq z \leq y\}$. Soit une composition (partiellement définie) entre intervalles : $[x,z] \cdot [z,y] = [x,y]$. On obtient une catégorie dont les objets sont les éléments de P et les flèches sont les intervalles. La flèche identité de x n'est rien d'autre que l'intervalle $[x,x]$ réduit au seul élément x. Les flèches identités sont les seuls isomorphismes.

Derniers exemples

- Soit R un anneau commutatif (avec unité) et Mat_R la catégorie dont les objets sont les éléments de $\mathbb{N}$ et $\mathsf{hom}_{\mathsf{Mat}_R}(m,n)$ est l'ensemble de toutes les matrices de taille $m \times n$ à coefficients dans R. Les isomorphismes de Mat_R sont les matrices inversibles, et $m \cong n$ si, et seulement si, $m = n$.
- Soit $(P, \leq)$ un ensemble (non vide) partiellement ordonné (*i.e.*, $\leq$ est une relation binaire réflexive, transitive et antisymétrique sur P). Soit $x \leq y$. On définit l'*intervalle* (borné) $[x,y] = \{z \in P : x \leq z \leq y\}$. Soit une composition (partiellement définie) entre intervalles : $[x,z] \cdot [z,y] = [x,y]$. On obtient une catégorie dont les objets sont les éléments de P et les flèches sont les intervalles. La flèche identité de x n'est rien d'autre que l'intervalle $[x,x]$ réduit au seul élément x. Les flèches identités sont les seuls isomorphismes.

Derniers exemples

- Soit R un anneau commutatif (avec unité) et Mat_R la catégorie dont les objets sont les éléments de $\mathbb{N}$ et $\mathsf{hom}_{\mathsf{Mat}_R}(m,n)$ est l'ensemble de toutes les matrices de taille $m \times n$ à coefficients dans R. Les isomorphismes de Mat_R sont les matrices inversibles, et $m \cong n$ si, et seulement si, $m = n$.
- Soit $(P, \leq)$ un ensemble (non vide) partiellement ordonné (*i.e.*, $\leq$ est une relation binaire réflexive, transitive et antisymétrique sur P). Soit $x \leq y$. On définit l'*intervalle* (borné) $[x,y] = \{z \in P : x \leq z \leq y\}$. Soit une composition (partiellement définie) entre intervalles : $[x,z] \cdot [z,y] = [x,y]$. On obtient une catégorie dont les objets sont les éléments de P et les flèches sont les intervalles. La flèche identité de x n'est rien d'autre que l'intervalle $[x,x]$ réduit au seul élément x. Les flèches identités sont les seuls isomorphismes.

Derniers exemples

- Soit R un anneau commutatif (avec unité) et Mat_R la catégorie dont les objets sont les éléments de $\mathbb{N}$ et $\mathsf{hom}_{\mathsf{Mat}_R}(m, n)$ est l'ensemble de toutes les matrices de taille $m \times n$ à coefficients dans R. Les isomorphismes de Mat_R sont les matrices inversibles, et $m \cong n$ si, et seulement si, $m = n$.
- Soit $(P, \leq)$ un ensemble (non vide) partiellement ordonné (*i.e.*, $\leq$ est une relation binaire réflexive, transitive et antisymétrique sur P). Soit $x \leq y$. On définit l'*intervalle* (borné) $[x, y] = \{z \in P : x \leq z \leq y\}$. Soit une composition (partiellement définie) entre intervalles : $[x, z] \cdot [z, y] = [x, y]$. On obtient une catégorie dont les objets sont les éléments de P et les flèches sont les intervalles. La flèche identité de x n'est rien d'autre que l'intervalle $[x, x]$ réduit au seul élément x. Les flèches identités sont les seuls isomorphismes.

Derniers exemples

- Soit R un anneau commutatif (avec unité) et Mat_R la catégorie dont les objets sont les éléments de $\mathbb{N}$ et $\mathsf{hom}_{\mathsf{Mat}_R}(m,n)$ est l'ensemble de toutes les matrices de taille $m \times n$ à coefficients dans R. Les isomorphismes de Mat_R sont les matrices inversibles, et $m \cong n$ si, et seulement si, $m = n$.
- Soit $(P, \leq)$ un ensemble (non vide) partiellement ordonné (*i.e.*, $\leq$ est une relation binaire réflexive, transitive et antisymétrique sur P). Soit $x \leq y$. On définit l'*intervalle* (borné) $[x,y] = \{z \in P : x \leq z \leq y\}$. Soit une composition (partiellement définie) entre intervalles : $[x,z] \cdot [z,y] = [x,y]$. On obtient une catégorie dont les objets sont les éléments de P et les flêches sont les intervalles. La flêche identité de x n'est rien d'autre que l'intervalle $[x,x]$ réduit au seul élément x. Les flêches identités sont les seuls isomorphismes.

Derniers exemples

- Soit R un anneau commutatif (avec unité) et Mat_R la catégorie dont les objets sont les éléments de $\mathbb{N}$ et $\mathsf{hom}_{\mathsf{Mat}_R}(m,n)$ est l'ensemble de toutes les matrices de taille $m \times n$ à coefficients dans R. Les isomorphismes de Mat_R sont les matrices inversibles, et $m \cong n$ si, et seulement si, $m = n$.
- Soit $(P, \leq)$ un ensemble (non vide) partiellement ordonné (*i.e.*, $\leq$ est une relation binaire réflexive, transitive et antisymétrique sur P). Soit $x \leq y$. On définit l'*intervalle* (borné) $[x, y] = \{z \in P : x \leq z \leq y\}$. Soit une composition (partiellement définie) entre intervalles : $[x, z] \cdot [z, y] = [x, y]$. On obtient une catégorie dont les objets sont les éléments de P et les flêches sont les intervalles. La flêche identité de x n'est rien d'autre que l'intervalle $[x, x]$ réduit au seul élément x. Les flêches identités sont les seuls isomorphismes.

Derniers exemples

- Soit R un anneau commutatif (avec unité) et Mat_R la catégorie dont les objets sont les éléments de $\mathbb{N}$ et $\mathsf{hom}_{\mathsf{Mat}_R}(m,n)$ est l'ensemble de toutes les matrices de taille $m \times n$ à coefficients dans R. Les isomorphismes de Mat_R sont les matrices inversibles, et $m \cong n$ si, et seulement si, $m = n$.
- Soit $(P, \leq)$ un ensemble (non vide) partiellement ordonné (*i.e.*, $\leq$ est une relation binaire réflexive, transitive et antisymétrique sur P). Soit $x \leq y$. On définit l'*intervalle* (borné) $[x,y] = \{z \in P : x \leq z \leq y\}$. Soit une composition (partiellement définie) entre intervalles : $[x,z] \cdot [z,y] = [x,y]$. On obtient une catégorie dont les objets sont les éléments de P et les flêches sont les intervalles. La flêche identité de x n'est rien d'autre que l'intervalle $[x,x]$ réduit au seul élément x. Les flêches identités sont les seuls isomorphismes.

Foncteurs

Soient A et B deux catégories. On définit un foncteur $F : \mathsf{A} \to \mathsf{B}$ comme la donnée de deux applications, notées abusivement F également, $F : \mathcal{O}_{\mathsf{A}} \to \mathcal{O}_{\mathsf{B}}$ et $F : \mathcal{F}_{\mathsf{A}} \to \mathcal{F}_{\mathsf{B}}$, qui “ respectent les structures de catégories ” au sens où

1. Si $f : a \to b$, alors $F(f) : F(a) \to F(b)$;
2. Si $f : a \to b$ et $g : b \to c$, alors $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$;
3. $F(\mathsf{id}_a) = \mathsf{id}_{F(a)}$.

Moralement, un foncteur est un morphisme entre catégories.

Foncteurs

Soient A et B deux catégories. On définit un foncteur $F : \mathsf{A} \to \mathsf{B}$ comme la donnée de deux applications, notées abusivement F également, $F : \mathcal{O}_{\mathsf{A}} \to \mathcal{O}_{\mathsf{B}}$ et $F : \mathcal{F}_{\mathsf{A}} \to \mathcal{F}_{\mathsf{B}}$, qui “ respectent les structures de catégories ” au sens où

1. Si $f : a \to b$, alors $F(f) : F(a) \to F(b)$;
2. Si $f : a \to b$ et $g : b \to c$, alors $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$;
3. $F(\mathsf{id}_a) = \mathsf{id}_{F(a)}$.

Moralement, un foncteur est un morphisme entre catégories.

Foncteurs

Soient A et B deux catégories. On définit un foncteur $F : \mathsf{A} \to \mathsf{B}$ comme la donnée de deux applications, notées abusivement F également, $F : \mathcal{O}_{\mathsf{A}} \to \mathcal{O}_{\mathsf{B}}$ et $F : \mathcal{F}_{\mathsf{A}} \to \mathcal{F}_{\mathsf{B}}$, qui “ respectent les structures de catégories ” au sens où

1. Si $f : a \to b$, alors $F(f) : F(a) \to F(b)$;
2. Si $f : a \to b$ et $g : b \to c$, alors $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$;
3. $F(\mathsf{id}_a) = \mathsf{id}_{F(a)}$.

Moralement, un foncteur est un morphisme entre catégories.

Foncteurs

Soient A et B deux catégories. On définit un foncteur $F : \mathsf{A} \to \mathsf{B}$ comme la donnée de deux applications, notées abusivement F également, $F : \mathcal{O}_{\mathsf{A}} \to \mathcal{O}_{\mathsf{B}}$ et $F : \mathcal{F}_{\mathsf{A}} \to \mathcal{F}_{\mathsf{B}}$, qui “ respectent les structures de catégories ” au sens où

1. Si $f : a \to b$, alors $F(f) : F(a) \to F(b)$;
2. Si $f : a \to b$ et $g : b \to c$, alors $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$;
3. $F(\mathsf{id}_a) = \mathsf{id}_{F(a)}$.

Moralement, un foncteur est un morphisme entre catégories.

Foncteurs

Soient A et B deux catégories. On définit un foncteur $F : \mathsf{A} \rightarrow \mathsf{B}$ comme la donnée de deux applications, notées abusivement F également, $F : \mathcal{O}_{\mathsf{A}} \rightarrow \mathcal{O}_{\mathsf{B}}$ et $F : \mathcal{F}_{\mathsf{A}} \rightarrow \mathcal{F}_{\mathsf{B}}$, qui “ respectent les structures de catégories ” au sens où

1. Si $f : a \rightarrow b$, alors $F(f) : F(a) \rightarrow F(b)$;
2. Si $f : a \rightarrow b$ et $g : b \rightarrow c$, alors $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$;
3. $F(\mathsf{id}_a) = \mathsf{id}_{F(a)}$.

Moralement, un foncteur est un morphisme entre catégories.

Foncteurs

Soient A et B deux catégories. On définit un foncteur $F : \mathsf{A} \to \mathsf{B}$ comme la donnée de deux applications, notées abusivement F également, $F : \mathcal{O}_{\mathsf{A}} \to \mathcal{O}_{\mathsf{B}}$ et $F : \mathcal{F}_{\mathsf{A}} \to \mathcal{F}_{\mathsf{B}}$, qui “ respectent les structures de catégories ” au sens où

1. Si $f : a \to b$, alors $F(f) : F(a) \to F(b)$;
2. Si $f : a \to b$ et $g : b \to c$, alors $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$;
3. $F(\mathsf{id}_a) = \mathsf{id}_{F(a)}$.

Moralement, un foncteur est un morphisme entre catégories.

Exemples

- Soit A une catégorie parmi les groupes abéliens, les groupes, les anneaux commutatifs, les anneaux, les modules sur un anneau commutatif R, les espaces vectoriels sur un corps $\mathbb{K}$, les R-algèbres, les espaces topologiques, les espaces métriques, *etc*. Alors l'application $F : \mathsf{A} \to \mathsf{Ens}$ qui à un objet associe son ensemble sous-jacent et à un morphisme associe l'application ensembliste sous-jacente est un foncteur ;
- Soient $\mathsf{EV}_{\mathbb{K}}$ la catégorie des espaces vectoriels sur un corps $\mathbb{K}$, et GrpAb la catégorie des groupes abéliens. L'application $F : \mathsf{EV}_{\mathbb{K}} \to \mathsf{GrpAb}$ qui associe à un espace vectoriel son groupe additif sous-jacent, et à une application linéaire, le morphisme de groupes additifs sous-jacents, est un foncteur.

Exemples

- Soit A une catégorie parmi les groupes abéliens, les groupes, les anneaux commutatifs, les anneaux, les modules sur un anneau commutatif R, les espaces vectoriels sur un corps $\mathbb{K}$, les R-algèbres, les espaces topologiques, les espaces métriques, *etc*. Alors l'application $F : \mathsf{A} \to \mathsf{Ens}$ qui à un objet associe son ensemble sous-jacent et à un morphisme associe l'application ensembliste sous-jacente est un foncteur ;
- Soient $\mathsf{EV}_{\mathbb{K}}$ la catégorie des espaces vectoriels sur un corps $\mathbb{K}$, et GrpAb la catégorie des groupes abéliens. L'application $F : \mathsf{EV}_{\mathbb{K}} \to \mathsf{GrpAb}$ qui associe à un espace vectoriel son groupe additif sous-jacent, et à une application linéaire, le morphisme de groupes additifs sous-jacents, est un foncteur.

Exemples

- Soit A une catégorie parmi les groupes abéliens, les groupes, les anneaux commutatifs, les anneaux, les modules sur un anneau commutatif R, les espaces vectoriels sur un corps $\mathbb{K}$, les R-algèbres, les espaces topologiques, les espaces métriques, *etc*. Alors l'application $F : \mathsf{A} \to \mathsf{Ens}$ qui à un objet associe son ensemble sous-jacent et à un morphisme associe l'application ensembliste sous-jacente est un foncteur ;
- Soient $\mathsf{EV}_{\mathbb{K}}$ la catégorie des espaces vectoriels sur un corps $\mathbb{K}$, et GrpAb la catégorie des groupes abéliens. L'application $F : \mathsf{EV}_{\mathbb{K}} \to \mathsf{GrpAb}$ qui associe à un espace vectoriel son groupe additif sous-jacent, et à une application linéaire, le morphisme de groupes additifs sous-jacents, est un foncteur.

Exemples

- Soit A une catégorie parmi les groupes abéliens, les groupes, les anneaux commutatifs, les anneaux, les modules sur un anneau commutatif R, les espaces vectoriels sur un corps $\mathbb{K}$, les R-algèbres, les espaces topologiques, les espaces métriques, *etc.* Alors l'application $F : \mathsf{A} \to \mathsf{Ens}$ qui à un objet associe son ensemble sous-jacent et à un morphisme associe l'application ensembliste sous-jacente est un foncteur ;
- Soient $\mathsf{EV}_{\mathbb{K}}$ la catégorie des espaces vectoriels sur un corps $\mathbb{K}$, et GrpAb la catégorie des groupes abéliens. L'application $F : \mathsf{EV}_{\mathbb{K}} \to \mathsf{GrpAb}$ qui associe à un espace vectoriel son groupe additif sous-jacent, et à une application linéaire, le morphisme de groupes additifs sous-jacents, est un foncteur.

- Soient An la catégorie des anneaux (avec unité). Soit le foncteur $F : \mathsf{An} \to \mathsf{Mon}$ qui associe à un anneau sa structure multiplicative ;
- Soient EspMet et EspTop les catégories des espaces métriques et topologiques. Soit le foncteur F qui envoie un espace métrique sur l'espace topologique sous-jacent. Ces quatres exemples sont des foncteurs d'oublis (on “ oublie ” une partie d'une structure) ;
- Soit $F : \mathsf{Ens} \to \mathsf{Ens}$ tel que $F(X) = 2^X$ et pour $f : X \to Y$, $F(f) : 2^X \to 2^Y$ tel que $F(f)(A) = \{f(x) : x \in A\}$ quel que soit $A \subseteq X$;
- Soit $\mathbb{K}$ un corps. On peut définir le foncteur $T : \mathsf{EV}_{\mathbb{K}} \to \mathsf{Alg}_{\mathbb{K}}$ qui transforme un espace vectoriel V en son algèbre tensorielle $T(V)$;
- Soit $F : \mathsf{EspMet} \to \mathsf{EspMet}$ tel que $F(E) = \widehat{E}$ et qui transforme une application uniformément continue de (E, d) dans (E', d') en son extension continue $\widehat{f} : \widehat{E} \to \widehat{E'}$.

- Soient An la catégorie des anneaux (avec unité). Soit le foncteur $F : \mathsf{An} \to \mathsf{Mon}$ qui associe à un anneau sa structure multiplicative ;
- Soient EspMet et EspTop les catégories des espaces métriques et topologiques. Soit le foncteur F qui envoie un espace métrique sur l'espace topologique sous-jacent. Ces quatres exemples sont des foncteurs d'oublis (on “ oublie ” une partie d'une structure) ;
- Soit $F : \mathsf{Ens} \to \mathsf{Ens}$ tel que $F(X) = 2^X$ et pour $f : X \to Y$, $F(f) : 2^X \to 2^Y$ tel que $F(f)(A) = \{f(x) : x \in A\}$ quel que soit $A \subseteq X$;
- Soit $\mathbb{K}$ un corps. On peut définir le foncteur $T : \mathsf{EV}_{\mathbb{K}} \to \mathsf{Alg}_{\mathbb{K}}$ qui transforme un espace vectoriel V en son algèbre tensorielle $T(V)$;
- Soit $F : \mathsf{EspMet} \to \mathsf{EspMet}$ tel que $F(E) = \widehat{E}$ et qui transforme une application uniformément continue de (E, d) dans (E', d') en son extension continue $\widehat{f} : \widehat{E} \to \widehat{E'}$.

- Soient An la catégorie des anneaux (avec unité). Soit le foncteur $F : \mathsf{An} \to \mathsf{Mon}$ qui associe à un anneau sa structure multiplicative ;
- Soient EspMet et EspTop les catégories des espaces métriques et topologiques. Soit le foncteur F qui envoie un espace métrique sur l'espace topologique sous-jacent. Ces quatres exemples sont des foncteurs d'oublis (on “ oublie ” une partie d'une structure) ;
- Soit $F : \mathsf{Ens} \to \mathsf{Ens}$ tel que $F(X) = 2^X$ et pour $f : X \to Y$, $F(f) : 2^X \to 2^Y$ tel que $F(f)(A) = \{f(x) : x \in A\}$ quel que soit $A \subseteq X$;
- Soit $\mathbb{K}$ un corps. On peut définir le foncteur $T : \mathsf{EV}_{\mathbb{K}} \to \mathsf{Alg}_{\mathbb{K}}$ qui transforme un espace vectoriel V en son algèbre tensorielle $T(V)$;
- Soit $F : \mathsf{EspMet} \to \mathsf{EspMet}$ tel que $F(E) = \widehat{E}$ et qui transforme une application uniformément continue de (E, d) dans (E', d') en son extension continue $\widehat{f} : \widehat{E} \to \widehat{E'}$.

- Soient An la catégorie des anneaux (avec unité). Soit le foncteur $F : \mathsf{An} \to \mathsf{Mon}$ qui associe à un anneau sa structure multiplicative ;
- Soient EspMet et EspTop les catégories des espaces métriques et topologiques. Soit le foncteur F qui envoie un espace métrique sur l'espace topologique sous-jacent. Ces quatres exemples sont des foncteurs d'oublis (on “ oublie ” une partie d'une structure) ;
- Soit $F : \mathsf{Ens} \to \mathsf{Ens}$ tel que $F(X) = 2^X$ et pour $f : X \to Y$, $F(f) : 2^X \to 2^Y$ tel que $F(f)(A) = \{f(x) : x \in A\}$ quel que soit $A \subseteq X$;
- Soit $\mathbb{K}$ un corps. On peut définir le foncteur $T : \mathsf{EV}_{\mathbb{K}} \to \mathsf{Alg}_{\mathbb{K}}$ qui transforme un espace vectoriel V en son algèbre tensorielle $T(V)$;
- Soit $F : \mathsf{EspMet} \to \mathsf{EspMet}$ tel que $F(E) = \widehat{E}$ et qui transforme une application uniformément continue de (E, d) dans (E', d') en son extension continue $\widehat{f} : \widehat{E} \to \widehat{E'}$.

- Soient An la catégorie des anneaux (avec unité). Soit le foncteur $F : \mathsf{An} \to \mathsf{Mon}$ qui associe à un anneau sa structure multiplicative ;
- Soient EspMet et EspTop les catégories des espaces métriques et topologiques. Soit le foncteur F qui envoie un espace métrique sur l'espace topologique sous-jacent. Ces quatres exemples sont des foncteurs d'oublis (on “ oublie ” une partie d'une structure) ;
- Soit $F : \mathsf{Ens} \to \mathsf{Ens}$ tel que $F(X) = 2^X$ et pour $f : X \to Y$, $F(f) : 2^X \to 2^Y$ tel que $F(f)(A) = \{f(x) : x \in A\}$ quel que soit $A \subseteq X$;
- Soit $\mathbb{K}$ un corps. On peut définir le foncteur $T : \mathsf{EV}_{\mathbb{K}} \to \mathsf{Alg}_{\mathbb{K}}$ qui transforme un espace vectoriel V en son algèbre tensorielle $T(V)$;
- Soit $F : \mathsf{EspMet} \to \mathsf{EspMet}$ tel que $F(E) = \widehat{E}$ et qui transforme une application uniformément continue de (E, d) dans (E', d') en son extension continue $\widehat{f} : \widehat{E} \to \widehat{E'}$.

- Soient An la catégorie des anneaux (avec unité). Soit le foncteur $F : \mathsf{An} \to \mathsf{Mon}$ qui associe à un anneau sa structure multiplicative ;
- Soient EspMet et EspTop les catégories des espaces métriques et topologiques. Soit le foncteur F qui envoie un espace métrique sur l'espace topologique sous-jacent. Ces quatres exemples sont des foncteurs d'oublis (on “ oublie ” une partie d'une structure) ;
- Soit $F : \mathsf{Ens} \to \mathsf{Ens}$ tel que $F(X) = 2^X$ et pour $f : X \to Y$, $F(f) : 2^X \to 2^Y$ tel que $F(f)(A) = \{f(x) : x \in A\}$ quel que soit $A \subseteq X$;
- Soit $\mathbb{K}$ un corps. On peut définir le foncteur $T : \mathsf{EV}_{\mathbb{K}} \to \mathsf{Alg}_{\mathbb{K}}$ qui transforme un espace vectoriel V en son algèbre tensorielle $T(V)$;
- Soit $F : \mathsf{EspMet} \to \mathsf{EspMet}$ tel que $F(E) = \widehat{E}$ et qui transforme une application uniformément continue de (E, d) dans (E', d') en son extension continue $\widehat{f} : \widehat{E} \to \widehat{E}'$.

- Soient An la catégorie des anneaux (avec unité). Soit le foncteur $F : \mathsf{An} \to \mathsf{Mon}$ qui associe à un anneau sa structure multiplicative ;
- Soient EspMet et EspTop les catégories des espaces métriques et topologiques. Soit le foncteur F qui envoie un espace métrique sur l'espace topologique sous-jacent. Ces quatres exemples sont des foncteurs d'oublis (on “ oublie ” une partie d'une structure) ;
- Soit $F : \mathsf{Ens} \to \mathsf{Ens}$ tel que $F(X) = 2^X$ et pour $f : X \to Y$, $F(f) : 2^X \to 2^Y$ tel que $F(f)(A) = \{f(x) : x \in A\}$ quel que soit $A \subseteq X$;
- Soit $\mathbb{K}$ un corps. On peut définir le foncteur $T : \mathsf{EV}_{\mathbb{K}} \to \mathsf{Alg}_{\mathbb{K}}$ qui transforme un espace vectoriel V en son algèbre tensorielle $T(V)$;
- Soit $F : \mathsf{EspMet} \to \mathsf{EspMet}$ tel que $F(E) = \widehat{E}$ et qui transforme une application uniformément continue de (E, d) dans (E', d') en son extension continue $\widehat{f} : \widehat{E} \to \widehat{E'}$.

- Soient An la catégorie des anneaux (avec unité). Soit le foncteur $F : \mathsf{An} \to \mathsf{Mon}$ qui associe à un anneau sa structure multiplicative ;
- Soient EspMet et EspTop les catégories des espaces métriques et topologiques. Soit le foncteur F qui envoie un espace métrique sur l'espace topologique sous-jacent. Ces quatres exemples sont des foncteurs d'oublis (on “ oublie ” une partie d'une structure) ;
- Soit $F : \mathsf{Ens} \to \mathsf{Ens}$ tel que $F(X) = 2^X$ et pour $f : X \to Y$, $F(f) : 2^X \to 2^Y$ tel que $F(f)(A) = \{f(x) : x \in A\}$ quel que soit $A \subseteq X$;
- Soit $\mathbb{K}$ un corps. On peut définir le foncteur $T : \mathsf{EV}_{\mathbb{K}} \to \mathsf{Alg}_{\mathbb{K}}$ qui transforme un espace vectoriel V en son algèbre tensorielle $T(V)$;
- Soit $F : \mathsf{EspMet} \to \mathsf{EspMet}$ tel que $F(E) = \widehat{E}$ et qui transforme une application uniformément continue de (E, d) dans (E', d') en son extension continue $\widehat{f} : \widehat{E} \to \widehat{E'}$.

- Soient An la catégorie des anneaux (avec unité). Soit le foncteur $F : \mathsf{An} \to \mathsf{Mon}$ qui associe à un anneau sa structure multiplicative ;
- Soient EspMet et EspTop les catégories des espaces métriques et topologiques. Soit le foncteur F qui envoie un espace métrique sur l'espace topologique sous-jacent. Ces quatres exemples sont des foncteurs d'oublis (on “ oublie ” une partie d'une structure) ;
- Soit $F : \mathsf{Ens} \to \mathsf{Ens}$ tel que $F(X) = 2^X$ et pour $f : X \to Y$, $F(f) : 2^X \to 2^Y$ tel que $F(f)(A) = \{f(x) : x \in A\}$ quel que soit $A \subseteq X$;
- Soit $\mathbb{K}$ un corps. On peut définir le foncteur $T : \mathsf{EV}_{\mathbb{K}} \to \mathsf{Alg}_{\mathbb{K}}$ qui transforme un espace vectoriel V en son algèbre tensorielle $T(V)$;
- Soit $F : \mathsf{EspMet} \to \mathsf{EspMet}$ tel que $F(E) = \widehat{E}$ et qui transforme une application uniformément continue de (E, d) dans (E', d') en son extension continue $\widehat{f} : \widehat{E} \to \widehat{E'}$.

- Soient An la catégorie des anneaux (avec unité). Soit le foncteur $F : \mathsf{An} \to \mathsf{Mon}$ qui associe à un anneau sa structure multiplicative ;
- Soient EspMet et EspTop les catégories des espaces métriques et topologiques. Soit le foncteur F qui envoie un espace métrique sur l'espace topologique sous-jacent. Ces quatres exemples sont des foncteurs d'oublis (on “ oublie ” une partie d'une structure) ;
- Soit $F : \mathsf{Ens} \to \mathsf{Ens}$ tel que $F(X) = 2^X$ et pour $f : X \to Y$, $F(f) : 2^X \to 2^Y$ tel que $F(f)(A) = \{f(x) : x \in A\}$ quel que soit $A \subseteq X$;
- Soit $\mathbb{K}$ un corps. On peut définir le foncteur $T : \mathsf{EV}_{\mathbb{K}} \to \mathsf{Alg}_{\mathbb{K}}$ qui transforme un espace vectoriel V en son algèbre tensorielle $T(V)$;
- Soit $F : \mathsf{EspMet} \to \mathsf{EspMet}$ tel que $F(E) = \widehat{E}$ et qui transforme une application uniformément continue de (E, d) dans (E', d') en son extension continue $\widehat{f} : \widehat{E} \to \widehat{E'}$.

Équivalence

Deux catégories A et B sont dites équivalentes si, et seulement si, il existe deux foncteurs $F : \mathsf{A} \to \mathsf{B}$ et $G : \mathsf{B} \to \mathsf{A}$ tels que quel que soit l'objet a de A, a et $G(F(a))$ sont isomorphes et quel que soit l'objet b de B, b et $F(G(b))$ sont isomorphes. On peut alors identifier les deux catégories (elles sont essentiellement identiques).

Équivalence

Deux catégories A et B sont dites équivalentes si, et seulement si, il existe deux foncteurs $F : \mathsf{A} \to \mathsf{B}$ et $G : \mathsf{B} \to \mathsf{A}$ tels que quel que soit l'objet a de A, a et $G(F(a))$ sont isomorphes et quel que soit l'objet b de B, b et $F(G(b))$ sont isomorphes. On peut alors identifier les deux catégories (elles sont essentiellement identiques).

Équivalence

Deux catégories A et B sont dites équivalentes si, et seulement si, il existe deux foncteurs $F : \mathsf{A} \to \mathsf{B}$ et $G : \mathsf{B} \to \mathsf{A}$ tels que quel que soit l'objet a de A, a et $G(F(a))$ sont isomorphes et quel que soit l'objet b de B, b et $F(G(b))$ sont isomorphes. On peut alors identifier les deux catégories (elles sont essentiellement identiques).

Équivalence

Deux catégories A et B sont dites équivalentes si, et seulement si, il existe deux foncteurs $F : \mathsf{A} \to \mathsf{B}$ et $G : \mathsf{B} \to \mathsf{A}$ tels que quel que soit l'objet a de A, a et $G(F(a))$ sont isomorphes et quel que soit l'objet b de B, b et $F(G(b))$ sont isomorphes. On peut alors identifier les deux catégories (elles sont essentiellement identiques).

Exemples

- Les catégories $\mathsf{Mat}_{\mathbb{K}}$ et des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies (avec une base fixée) sont équivalentes. Soit $A(n) = (\mathbb{K}^n, \mathbf{can}_n)$, où $\mathbf{can}_n$ est la base canonique, et $A(M_{m,n}) : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$. Soit $B(V, b) = \mathsf{dim}(V)$, et $A(f) = [f]_{b,b'}$. Alors $B(A(n)) = n$ et $A(B(V, b)) = (\mathbb{K}^{\mathsf{dim}(V)}, \mathbf{can}_{\mathsf{dim}(V)}) \cong (V, b)$;
- Les catégories des $\mathbb{Z}$-modules et groupes abéliens sont équivalentes ;
- Les catégories des $\mathbb{Z}$-algèbres et des anneaux sont équivalentes.

Exemples

- Les catégories $\mathsf{Mat}_{\mathbb{K}}$ et des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies (avec une base fixée) sont équivalentes. Soit $A(n) = (\mathbb{K}^n, \mathbf{can}_n)$, où $\mathbf{can}_n$ est la base canonique, et $A(M_{m,n}) : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$. Soit $B(V, b) = \mathsf{dim}(V)$, et $A(f) = [f]_{b,b'}$. Alors $B(A(n)) = n$ et $A(B(V, b)) = (\mathbb{K}^{\mathsf{dim}(V)}, \mathbf{can}_{\mathsf{dim}(V)}) \cong (V, b)$;
- Les catégories des $\mathbb{Z}$-modules et groupes abéliens sont équivalentes ;
- Les catégories des $\mathbb{Z}$-algèbres et des anneaux sont équivalentes.

Exemples

- Les catégories $\mathsf{Mat}_{\mathbb{K}}$ et des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies (avec une base fixée) sont équivalentes. Soit $A(n) = (\mathbb{K}^n, \mathbf{can}_n)$, où $\mathbf{can}_n$ est la base canonique, et $A(M_{m,n}) : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$. Soit $B(V, b) = \mathsf{dim}(V)$, et $A(f) = [f]_{b,b'}$. Alors $B(A(n)) = n$ et $A(B(V, b)) = (\mathbb{K}^{\mathsf{dim}(V)}, \mathbf{can}_{\mathsf{dim}(V)}) \cong (V, b)$;
- Les catégories des $\mathbb{Z}$-modules et groupes abéliens sont équivalentes ;
- Les catégories des $\mathbb{Z}$-algèbres et des anneaux sont équivalentes.

Exemples

- Les catégories $\mathsf{Mat}_{\mathbb{K}}$ et des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies (avec une base fixée) sont équivalentes. Soit $A(n) = (\mathbb{K}^n, \mathbf{can}_n)$, où $\mathbf{can}_n$ est la base canonique, et $A(M_{m,n}) : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$. Soit $B(V, b) = \mathsf{dim}(V)$, et $A(f) = [f]_{b,b'}$.
  Alors $B(A(n)) = n$ et $A(B(V, b)) = (\mathbb{K}^{\mathsf{dim}(V)}, \mathbf{can}_{\mathsf{dim}(V)}) \cong (V, b)$;
- Les catégories des $\mathbb{Z}$-modules et groupes abéliens sont équivalentes ;
- Les catégories des $\mathbb{Z}$-algèbres et des anneaux sont équivalentes.

Exemples

- Les catégories $\mathsf{Mat}_{\mathbb{K}}$ et des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies (avec une base fixée) sont équivalentes. Soit $A(n) = (\mathbb{K}^n, \mathbf{can}_n)$, où $\mathbf{can}_n$ est la base canonique, et $A(M_{m,n}) : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$. Soit $B(V, b) = \mathsf{dim}(V)$, et $A(f) = [f]_{b,b'}$. Alors $B(A(n)) = n$ et $A(B(V, b)) = (\mathbb{K}^{\mathsf{dim}(V)}, \mathbf{can}_{\mathsf{dim}(V)}) \cong (V, b)$;
- Les catégories des $\mathbb{Z}$-modules et groupes abéliens sont équivalentes ;
- Les catégories des $\mathbb{Z}$-algèbres et des anneaux sont équivalentes.

Exemples

- Les catégories $\mathsf{Mat}_{\mathbb{K}}$ et des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies (avec une base fixée) sont équivalentes. Soit $A(n) = (\mathbb{K}^n, \mathbf{can}_n)$, où $\mathbf{can}_n$ est la base canonique, et $A(M_{m,n}) : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$. Soit $B(V,b) = \mathsf{dim}(V)$, et $A(f) = [f]_{b,b'}$. Alors $B(A(n)) = n$ et $A(B(V,b)) = (\mathbb{K}^{\mathsf{dim}(V)}, \mathbf{can}_{\mathsf{dim}(V)}) \cong (V,b)$;
- Les catégories des $\mathbb{Z}$-modules et groupes abéliens sont équivalentes ;
- Les catégories des $\mathbb{Z}$-algèbres et des anneaux sont équivalentes.

Exemples

- Les catégories $\mathsf{Mat}_{\mathbb{K}}$ et des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies (avec une base fixée) sont équivalentes. Soit $A(n) = (\mathbb{K}^n, \mathbf{can}_n)$, où $\mathbf{can}_n$ est la base canonique, et $A(M_{m,n}) : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$. Soit $B(V, b) = \mathsf{dim}(V)$, et $A(f) = [f]_{b,b'}$. Alors $B(A(n)) = n$ et $A(B(V, b)) = (\mathbb{K}^{\mathsf{dim}(V)}, \mathbf{can}_{\mathsf{dim}(V)}) \cong (V, b)$;
- Les catégories des $\mathbb{Z}$-modules et groupes abéliens sont équivalentes ;
- Les catégories des $\mathbb{Z}$-algèbres et des anneaux sont équivalentes.

Exemples

- Les catégories $\mathsf{Mat}_{\mathbb{K}}$ et des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies (avec une base fixée) sont équivalentes. Soit $A(n) = (\mathbb{K}^n, \mathbf{can}_n)$, où $\mathbf{can}_n$ est la base canonique, et $A(M_{m,n}) : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$. Soit $B(V,b) = \mathsf{dim}(V)$, et $A(f) = [f]_{b,b'}$. Alors $B(A(n)) = n$ et $A(B(V,b)) = (\mathbb{K}^{\mathsf{dim}(V)}, \mathbf{can}_{\mathsf{dim}(V)}) \cong (V,b)$;
- Les catégories des $\mathbb{Z}$-modules et groupes abéliens sont équivalentes ;
- Les catégories des $\mathbb{Z}$-algèbres et des anneaux sont équivalentes.

Un monoïde partiel est la donnée de $(M, D_M, \times, 1_M)$ où

- M est un ensemble non vide ;
- $D_M \subseteq M \times M$;
- $\times : D_M \to M$ et D_M est le domaine de l'opération $\times$;
- $1_M \in M$

tels que

1. $(x, 1_M), (1_M, x) \in D_M$ pour tout $x \in M$, et $x \times 1_M = x \times 1_M = x$;
2. Quels que soient $x, y, z \in M$, $(x, y) \in D_M$ et $(x \times y, z) \in D_M$ si, et seulement si, $(y, z) \in D_M$ et $(x, y \times z) \in D_M$. Dans chacun de ces cas, $(x \times y) \times z = x \times (y \times z)$.

Le monoïde partiel M est commutatif si, et seulement, $(x, y) \in D_M$ si, et seulement si, $(y, x) \in D_M$ et dans chacun de ces cas, $x \times y = y \times x$.

Un monoïde partiel est la donnée de $(M, D_M, \times, 1_M)$ où

- M est un ensemble non vide ;
- $D_M \subseteq M \times M$;
- $\times : D_M \to M$ et D_M est le domaine de l'opération $\times$;
- $1_M \in M$

tels que

1. $(x, 1_M), (1_M, x) \in D_M$ pour tout $x \in M$, et $x \times 1_M = x \times 1_M = x$;
2. Quels que soient $x, y, z \in M$, $(x, y) \in D_M$ et $(x \times y, z) \in D_M$ si, et seulement si, $(y, z) \in D_M$ et $(x, y \times z) \in D_M$. Dans chacun de ces cas, $(x \times y) \times z = x \times (y \times z)$.

Le monoïde partiel M est commutatif si, et seulement, $(x, y) \in D_M$ si, et seulement si, $(y, x) \in D_M$ et dans chacun de ces cas, $x \times y = y \times x$.

Un monoïde partiel est la donnée de $(M, D_M, \times, 1_M)$ où

- M est un ensemble non vide ;
- $D_M \subseteq M \times M$;
- $\times : D_M \to M$ et D_M est le domaine de l'opération $\times$;
- $1_M \in M$

tels que

1. $(x, 1_M), (1_M, x) \in D_M$ pour tout $x \in M$, et $x \times 1_M = x \times 1_M = x$;
2. Quels que soient $x, y, z \in M$, $(x, y) \in D_M$ et $(x \times y, z) \in D_M$ si, et seulement si, $(y, z) \in D_M$ et $(x, y \times z) \in D_M$. Dans chacun de ces cas, $(x \times y) \times z = x \times (y \times z)$.

Le monoïde partiel M est commutatif si, et seulement, $(x, y) \in D_M$ si, et seulement si, $(y, x) \in D_M$ et dans chacun de ces cas, $x \times y = y \times x$.

Un monoïde partiel est la donnée de $(M, D_M, \times, 1_M)$ où

- M est un ensemble non vide ;
- $D_M \subseteq M \times M$;
- $\times : D_M \to M$ et D_M est le domaine de l'opération $\times$;
- $1_M \in M$

tels que

1. $(x, 1_M), (1_M, x) \in D_M$ pour tout $x \in M$, et $x \times 1_M = x \times 1_M = x$;
2. Quels que soient $x, y, z \in M$, $(x, y) \in D_M$ et $(x \times y, z) \in D_M$ si, et seulement si, $(y, z) \in D_M$ et $(x, y \times z) \in D_M$. Dans chacun de ces cas, $(x \times y) \times z = x \times (y \times z)$.

Le monoïde partiel M est commutatif si, et seulement, $(x, y) \in D_M$ si, et seulement si, $(y, x) \in D_M$ et dans chacun de ces cas, $x \times y = y \times x$.

Un monoïde partiel est la donnée de $(M, D_M, \times, 1_M)$ où

- M est un ensemble non vide ;
- $D_M \subseteq M \times M$;
- $\times : D_M \to M$ et D_M est le domaine de l'opération $\times$;
- $1_M \in M$

tels que

1. $(x, 1_M), (1_M, x) \in D_M$ pour tout $x \in M$, et $x \times 1_M = x \times 1_M = x$;
2. Quels que soient $x, y, z \in M$, $(x, y) \in D_M$ et $(x \times y, z) \in D_M$ si, et seulement si, $(y, z) \in D_M$ et $(x, y \times z) \in D_M$. Dans chacun de ces cas, $(x \times y) \times z = x \times (y \times z)$.

Le monoïde partiel M est commutatif si, et seulement, $(x, y) \in D_M$ si, et seulement si, $(y, x) \in D_M$ et dans chacun de ces cas, $x \times y = y \times x$.

Un monoïde partiel est la donnée de $(M, D_M, \times, 1_M)$ où

- M est un ensemble non vide ;
- $D_M \subseteq M \times M$;
- $\times : D_M \to M$ et D_M est le domaine de l'opération $\times$;
- $1_M \in M$

tels que

1. $(x, 1_M), (1_M, x) \in D_M$ pour tout $x \in M$, et $x \times 1_M = x \times 1_M = x$;
2. Quels que soient $x, y, z \in M$, $(x, y) \in D_M$ et $(x \times y, z) \in D_M$ si, et seulement si, $(y, z) \in D_M$ et $(x, y \times z) \in D_M$. Dans chacun de ces cas, $(x \times y) \times z = x \times (y \times z)$.

Le monoïde partiel M est commutatif si, et seulement, $(x, y) \in D_M$ si, et seulement si, $(y, x) \in D_M$ et dans chacun de ces cas, $x \times y = y \times x$.

Un monoïde partiel est la donnée de $(M, D_M, \times, 1_M)$ où

- M est un ensemble non vide ;
- $D_M \subseteq M \times M$;
- $\times : D_M \to M$ et D_M est le domaine de l'opération $\times$;
- $1_M \in M$

tels que

1. $(x, 1_M), (1_M, x) \in D_M$ pour tout $x \in M$, et $x \times 1_M = x \times 1_M = x$;
2. Quels que soient $x, y, z \in M$, $(x, y) \in D_M$ et $(x \times y, z) \in D_M$ si, et seulement si, $(y, z) \in D_M$ et $(x, y \times z) \in D_M$. Dans chacun de ces cas, $(x \times y) \times z = x \times (y \times z)$.

Le monoïde partiel M est commutatif si, et seulement, $(x, y) \in D_M$ si, et seulement si, $(y, x) \in D_M$ et dans chacun de ces cas, $x \times y = y \times x$.

Un monoïde partiel est la donnée de $(M, D_M, \times, 1_M)$ où

- M est un ensemble non vide ;
- $D_M \subseteq M \times M$;
- $\times : D_M \to M$ et D_M est le domaine de l'opération $\times$;
- $1_M \in M$

tels que

1. $(x, 1_M), (1_M, x) \in D_M$ pour tout $x \in M$, et $x \times 1_M = x \times 1_M = x$;
2. Quels que soient $x, y, z \in M$, $(x, y) \in D_M$ et $(x \times y, z) \in D_M$ si, et seulement si, $(y, z) \in D_M$ et $(x, y \times z) \in D_M$. Dans chacun de ces cas, $(x \times y) \times z = x \times (y \times z)$.

Le monoïde partiel M est commutatif si, et seulement, $(x, y) \in D_M$ si, et seulement si, $(y, x) \in D_M$ et dans chacun de ces cas, $x \times y = y \times x$.

Un monoïde partiel est la donnée de $(M, D_M, \times, 1_M)$ où

- M est un ensemble non vide ;
- $D_M \subseteq M \times M$;
- $\times : D_M \to M$ et D_M est le domaine de l'opération $\times$;
- $1_M \in M$

tels que

1. $(x, 1_M), (1_M, x) \in D_M$ pour tout $x \in M$, et $x \times 1_M = x \times 1_M = x$;
2. Quels que soient $x, y, z \in M$, $(x, y) \in D_M$ et $(x \times y, z) \in D_M$ si, et seulement si, $(y, z) \in D_M$ et $(x, y \times z) \in D_M$. Dans chacun de ces cas, $(x \times y) \times z = x \times (y \times z)$.

Le monoïde partiel M est commutatif si, et seulement, $(x, y) \in D_M$ si, et seulement si, $(y, x) \in D_M$ et dans chacun de ces cas, $x \times y = y \times x$.

Un monoïde partiel est la donnée de $(M, D_M, \times, 1_M)$ où

- M est un ensemble non vide ;
- $D_M \subseteq M \times M$;
- $\times : D_M \to M$ et D_M est le domaine de l'opération $\times$;
- $1_M \in M$

tels que

1. $(x, 1_M), (1_M, x) \in D_M$ pour tout $x \in M$, et $x \times 1_M = x \times 1_M = x$;
2. Quels que soient $x, y, z \in M$, $(x, y) \in D_M$ et $(x \times y, z) \in D_M$ si, et seulement si, $(y, z) \in D_M$ et $(x, y \times z) \in D_M$. Dans chacun de ces cas, $(x \times y) \times z = x \times (y \times z)$.

Le monoïde partiel M est commutatif si, et seulement, $(x, y) \in D_M$ si, et seulement si, $(y, x) \in D_M$ et dans chacun de ces cas, $x \times y = y \times x$.

Un monoïde partiel est la donnée de $(M, D_M, \times, 1_M)$ où

- M est un ensemble non vide ;
- $D_M \subseteq M \times M$;
- $\times : D_M \to M$ et D_M est le domaine de l'opération $\times$;
- $1_M \in M$

tels que

1. $(x, 1_M), (1_M, x) \in D_M$ pour tout $x \in M$, et $x \times 1_M = x \times 1_M = x$;
2. Quels que soient $x, y, z \in M$, $(x, y) \in D_M$ et $(x \times y, z) \in D_M$ si, et seulement si, $(y, z) \in D_M$ et $(x, y \times z) \in D_M$. Dans chacun de ces cas, $(x \times y) \times z = x \times (y \times z)$.

Le monoïde partiel M est commutatif si, et seulement, $(x, y) \in D_M$ si, et seulement si, $(y, x) \in D_M$ et dans chacun de ces cas, $x \times y = y \times x$.

Un monoïde partiel est la donnée de $(M, D_M, \times, 1_M)$ où

- M est un ensemble non vide ;
- $D_M \subseteq M \times M$;
- $\times : D_M \rightarrow M$ et D_M est le domaine de l'opération $\times$;
- $1_M \in M$

tels que

1. $(x, 1_M), (1_M, x) \in D_M$ pour tout $x \in M$, et $x \times 1_M = x \times 1_M = x$;
2. Quels que soient $x, y, z \in M$, $(x, y) \in D_M$ et $(x \times y, z) \in D_M$ si, et seulement si, $(y, z) \in D_M$ et $(x, y \times z) \in D_M$. Dans chacun de ces cas, $(x \times y) \times z = x \times (y \times z)$.

Le monoïde partiel M est commutatif si, et seulement, $(x, y) \in D_M$ si, et seulement si, $(y, x) \in D_M$ et dans chacun de ces cas, $x \times y = y \times x$.

Un monoïde partiel est la donnée de $(M, D_M, \times, 1_M)$ où

- M est un ensemble non vide ;
- $D_M \subseteq M \times M$;
- $\times : D_M \to M$ et D_M est le domaine de l'opération $\times$;
- $1_M \in M$

tels que

1. $(x, 1_M), (1_M, x) \in D_M$ pour tout $x \in M$, et $x \times 1_M = x \times 1_M = x$;
2. Quels que soient $x, y, z \in M$, $(x, y) \in D_M$ et $(x \times y, z) \in D_M$ si, et seulement si, $(y, z) \in D_M$ et $(x, y \times z) \in D_M$. Dans chacun de ces cas, $(x \times y) \times z = x \times (y \times z)$.

Le monoïde partiel M est commutatif si, et seulement, $(x, y) \in D_M$ si, et seulement si, $(y, x) \in D_M$ et dans chacun de ces cas, $x \times y = y \times x$.

Exemples

- Un monoïde (usuel) est un monoïde partiel ;
- Soit X un ensemble. Alors 2^X munit de l'opération $\sqcup$ de somme disjointe est un monoïde partiel commutatif ;
- Soit $S \subseteq \mathbb{N}^*$ l'ensemble de tous les entiers sans facteurs premiers carrés. Alors S est un monoïde partiel commutatif pour la multiplication (qui n'est définie qu'entre entiers sans facteurs premiers communs).

Exemples

- Un monoïde (usuel) est un monoïde partiel ;
- Soit X un ensemble. Alors 2^X munit de l'opération $\sqcup$ de somme disjointe est un monoïde partiel commutatif ;
- Soit $S \subseteq \mathbb{N}^*$ l'ensemble de tous les entiers sans facteurs premiers carrés. Alors S est un monoïde partiel commutatif pour la multiplication (qui n'est définie qu'entre entiers sans facteurs premiers communs).

Exemples

- Un monoïde (usuel) est un monoïde partiel ;
- Soit X un ensemble. Alors 2^X munit de l'opération $\sqcup$ de somme disjointe est un monoïde partiel commutatif ;
- Soit $S \subseteq \mathbb{N}^*$ l'ensemble de tous les entiers sans facteurs premiers carrés. Alors S est un monoïde partiel commutatif pour la multiplication (qui n'est définie qu'entre entiers sans facteurs premiers communs).

Les monoïdes partiels, pour quoi ?

Ce types d'objets est apparu dans les domaines suivants :

- Topologie algébrique (homotopie) : G. Segal (1973) ;
- Étude des généralisations communes aux anneaux booléens et groupes ordonnés : M. H. Stone (1935) et G. Birkhoff (1942) ;
- Étude théorique de la propriété d'associativité : R. Bruck (1971), E. S. Ljapin et A. E. Evseev (1997) ;
- Fondements mathématiques de structures quantiques : A. Wilce (1995) et S. Pulmannovà (1997) ;
- Informatique théorique (sémantique des programmes) : E. G. Manes et M. A. Arbib (1986) ;
- Combinatoire algébrique : G. H. E. Duchamp, L. Poinsot *et al.* (2009).

Les monoïdes partiels, pour quoi ?

Ce types d'objets est apparu dans les domaines suivants :

- Topologie algébrique (homotopie) : G. Segal (1973) ;
- Étude des généralisations communes aux anneaux booléens et groupes ordonnés : M. H. Stone (1935) et G. Birkhoff (1942) ;
- Étude théorique de la propriété d'associativité : R. Bruck (1971), E. S. Ljapin et A. E. Evseev (1997) ;
- Fondements mathématiques de structures quantiques : A. Wilce (1995) et S. Pulmannovà (1997) ;
- Informatique théorique (sémantique des programmes) : E. G. Manes et M. A. Arbib (1986) ;
- Combinatoire algébrique : G. H. E. Duchamp, L. Poinsot *et al.* (2009).

Les monoïdes partiels, pour quoi ?

Ce types d'objets est apparu dans les domaines suivants :

- Topologie algébrique (homotopie) : G. Segal (1973) ;
- Étude des généralisations communes aux anneaux booléens et groupes ordonnés : M. H. Stone (1935) et G. Birkhoff (1942) ;
- Étude théorique de la propriété d'associativité : R. Bruck (1971), E. S. Ljapin et A. E. Evseev (1997) ;
- Fondements mathématiques de structures quantiques : A. Wilce (1995) et S. Pulmannovà (1997) ;
- Informatique théorique (sémantique des programmes) : E. G. Manes et M. A. Arbib (1986) ;
- Combinatoire algébrique : G. H. E. Duchamp, L. Poinsot *et al.* (2009).

Les monoïdes partiels, pour quoi ?

Ce types d'objets est apparu dans les domaines suivants :

- Topologie algébrique (homotopie) : G. Segal (1973) ;
- Étude des généralisations communes aux anneaux booléens et groupes ordonnés : M. H. Stone (1935) et G. Birkhoff (1942) ;
- Étude théorique de la propriété d'associativité : R. Bruck (1971), E. S. Ljapin et A. E. Evseev (1997) ;
- Fondements mathématiques de structures quantiques : A. Wilce (1995) et S. Pulmannovà (1997) ;
- Informatique théorique (sémantique des programmes) : E. G. Manes et M. A. Arbib (1986) ;
- Combinatoire algébrique : G. H. E. Duchamp, L. Poinsot *et al.* (2009).

Les monoïdes partiels, pour quoi ?

Ce types d'objets est apparu dans les domaines suivants :

- Topologie algébrique (homotopie) : G. Segal (1973) ;
- Étude des généralisations communes aux anneaux booléens et groupes ordonnés : M. H. Stone (1935) et G. Birkhoff (1942) ;
- Étude théorique de la propriété d'associativité : R. Bruck (1971), E. S. Ljapin et A. E. Evseev (1997) ;
- Fondements mathématiques de structures quantiques : A. Wilce (1995) et S. Pulmannovà (1997) ;
- Informatique théorique (sémantique des programmes) : E. G. Manes et M. A. Arbib (1986) ;
- Combinatoire algébrique : G. H. E. Duchamp, L. Poinsot *et al.* (2009).

Les monoïdes partiels, pour quoi ?

Ce types d'objets est apparu dans les domaines suivants :

- Topologie algébrique (homotopie) : G. Segal (1973) ;
- Étude des généralisations communes aux anneaux booléens et groupes ordonnés : M. H. Stone (1935) et G. Birkhoff (1942) ;
- Étude théorique de la propriété d'associativité : R. Bruck (1971), E. S. Ljapin et A. E. Evseev (1997) ;
- Fondements mathématiques de structures quantiques : A. Wilce (1995) et S. Pulmannovà (1997) ;
- Informatique théorique (sémantique des programmes) : E. G. Manes et M. A. Arbib (1986) ;
- Combinatoire algébrique : G. H. E. Duchamp, L. Poinsot *et al.* (2009).

Les monoïdes partiels, pour quoi ?

Ce types d'objets est apparu dans les domaines suivants :

- Topologie algébrique (homotopie) : G. Segal (1973) ;
- Étude des généralisations communes aux anneaux booléens et groupes ordonnés : M. H. Stone (1935) et G. Birkhoff (1942) ;
- Étude théorique de la propriété d'associativité : R. Bruck (1971), E. S. Ljapin et A. E. Evseev (1997) ;
- Fondements mathématiques de structures quantiques : A. Wilce (1995) et S. Pulmannovà (1997) ;
- Informatique théorique (sémantique des programmes) : E. G. Manes et M. A. Arbib (1986) ;
- Combinatoire algébrique : G. H. E. Duchamp, L. Poinsot *et al.* (2009).

Les monoïdes partiels, pour quoi ?

Ce types d’objets est apparu dans les domaines suivants :

- Topologie algébrique (homotopie) : G. Segal (1973) ;
- Étude des généralisations communes aux anneaux booléens et groupes ordonnés : M. H. Stone (1935) et G. Birkhoff (1942) ;
- Étude théorique de la propriété d’associativité : R. Bruck (1971), E. S. Ljapin et A. E. Evseev (1997) ;
- Fondements mathématiques de structures quantiques : A. Wilce (1995) et S. Pulmannovà (1997) ;
- Informatique théorique (sémantique des programmes) : E. G. Manes et M. A. Arbib (1986) ;
- Combinatoire algébrique : G. H. E. Duchamp, L. Poinsot *et al.* (2009).

Morphismes de monoïdes partiels

Soient $(M, D_M, \times, 1_M)$ et $(N, D_N, \times, 1_N)$ deux monoïdes partiels. Une application $\phi : M \to N$ est un *morphisme de monoïdes partiels* si, et seulement si,

1. $\phi(1_M) = 1_N$;
2. Quels que soient $x, y \in M$, si $(x, y) \in D_M$, alors $(\phi(x), \phi(y)) \in D_N$ et $\phi(x \times y) = \phi(x) \times \phi(y)$.

Remarquons qu'un morphisme de monoïdes partiels est une application, donc une fonction **totale**.

La classe de tous les monoïdes partiels avec les morphismes de monoïdes partiels forme une catégorie notée MonP. On peut également définir la catégorie de tous les monoïdes partiels commutatifs CMonP.

Morphismes de monoïdes partiels

Soient $(M, D_M, \times, 1_M)$ et $(N, D_N, \times, 1_N)$ deux monoïdes partiels. Une application $\phi : M \to N$ est un *morphisme de monoïdes partiels* si, et seulement si,

1. $\phi(1_M) = 1_N$;
2. Quels que soient $x, y \in M$, si $(x, y) \in D_M$, alors $(\phi(x), \phi(y)) \in D_N$ et $\phi(x \times y) = \phi(x) \times \phi(y)$.

Remarquons qu'un morphisme de monoïdes partiels est une application, donc une fonction **totale**.
La classe de tous les monoïdes partiels avec les morphismes de monoïdes partiels forme une catégorie notée MonP. On peut également définir la catégorie de tous les monoïdes partiels commutatifs CMonP.

Morphismes de monoïdes partiels

Soient $(M, D_M, \times, 1_M)$ et $(N, D_N, \times, 1_N)$ deux monoïdes partiels. Une application $\phi : M \to N$ est un *morphisme de monoïdes partiels* si, et seulement si,

1. $\phi(1_M) = 1_N$;
2. Quels que soient $x, y \in M$, si $(x, y) \in D_M$, alors $(\phi(x), \phi(y)) \in D_N$ et $\phi(x \times y) = \phi(x) \times \phi(y)$.

Remarquons qu'un morphisme de monoïdes partiels est une application, donc une fonction **totale**.

La classe de tous les monoïdes partiels avec les morphismes de monoïdes partiels forme une catégorie notée MonP. On peut également définir la catégorie de tous les monoïdes partiels commutatifs CMonP.

Morphismes de monoïdes partiels

Soient $(M, D_M, \times, 1_M)$ et $(N, D_N, \times, 1_N)$ deux monoïdes partiels. Une application $\phi : M \to N$ est un *morphisme de monoïdes partiels* si, et seulement si,

1. $\phi(1_M) = 1_N$;
2. Quels que soient $x, y \in M$, si $(x, y) \in D_M$, alors $(\phi(x), \phi(y)) \in D_N$ et $\phi(x \times y) = \phi(x) \times \phi(y)$.

Remarquons qu'un morphisme de monoïdes partiels est une application, donc une fonction **totale**.

La classe de tous les monoïdes partiels avec les morphismes de monoïdes partiels forme une catégorie notée MonP. On peut également définir la catégorie de tous les monoïdes partiels commutatifs CMonP.

Morphismes de monoïdes partiels

Soient $(M, D_M, \times, 1_M)$ et $(N, D_N, \times, 1_N)$ deux monoïdes partiels. Une application $\phi : M \to N$ est un *morphisme de monoïdes partiels* si, et seulement si,

1. $\phi(1_M) = 1_N$;
2. Quels que soient $x, y \in M$, si $(x, y) \in D_M$, alors $(\phi(x), \phi(y)) \in D_N$ et $\phi(x \times y) = \phi(x) \times \phi(y)$.

Remarquons qu'un morphisme de monoïdes partiels est une application, donc une fonction **totale**.

La classe de tous les monoïdes partiels avec les morphismes de monoïdes partiels forme une catégorie notée MonP. On peut également définir la catégorie de tous les monoïdes partiels commutatifs CMonP.

Morphismes de monoïdes partiels

Soient $(M, D_M, \times, 1_M)$ et $(N, D_N, \times, 1_N)$ deux monoïdes partiels. Une application $\phi : M \to N$ est un *morphisme de monoïdes partiels* si, et seulement si,

1. $\phi(1_M) = 1_N$;
2. Quels que soient $x, y \in M$, si $(x, y) \in D_M$, alors $(\phi(x), \phi(y)) \in D_N$ et $\phi(x \times y) = \phi(x) \times \phi(y)$.

Remarquons qu'un morphisme de monoïdes partiels est une application, donc une fonction **totale**.
La classe de tous les monoïdes partiels avec les morphismes de monoïdes partiels forme une catégorie notée MonP. On peut également définir la catégorie de tous les monoïdes partiels commutatifs CMonP.

Morphismes de monoïdes partiels

Soient $(M, D_M, \times, 1_M)$ et $(N, D_N, \times, 1_N)$ deux monoïdes partiels. Une application $\phi : M \to N$ est un *morphisme de monoïdes partiels* si, et seulement si,

1. $\phi(1_M) = 1_N$;
2. Quels que soient $x, y \in M$, si $(x, y) \in D_M$, alors $(\phi(x), \phi(y)) \in D_N$ et $\phi(x \times y) = \phi(x) \times \phi(y)$.

Remarquons qu'un morphisme de monoïdes partiels est une application, donc une fonction **totale**.
La classe de tous les monoïdes partiels avec les morphismes de monoïdes partiels forme une catégorie notée MonP. On peut également définir la catégorie de tous les monoïdes partiels commutatifs CMonP.

Remarque

Il existe d'autres choix possibles de définitions pour les morphismes de monoïdes partiels : soit $f : M \to N$

1. f est un morphisme (à droite) si, et seulement si, quels que soient $x, y \in M$, si $(f(x), f(y)) \in D_N$, alors $(x, y) \in D_M$ et $\phi(x \times y) = \phi(x) \times \phi(y)$;
2. f est un morphisme (bilatère) si, et seulement si, quels que soient $x, y \in M$, $(x, y) \in D_M \Leftrightarrow (x, y) \in D_N$, et $\phi(x \times y) = \phi(x) \times \phi(y)$. Un application est un morphisme bilatère si, et seulement si, elle est à la fois un morphisme à gauche et à droite.

Remarque

Il existe d'autres choix possibles de définitions pour les morphismes de monoïdes partiels : soit $f : M \to N$

1. f est un morphisme (à droite) si, et seulement si, quels que soient $x, y \in M$, si $(f(x), f(y)) \in D_N$, alors $(x, y) \in D_M$ et $\phi(x \times y) = \phi(x) \times \phi(y)$;
2. f est un morphisme (bilatère) si, et seulement si, quels que soient $x, y \in M$, $(x, y) \in D_M \Leftrightarrow (x, y) \in D_N$, et $\phi(x \times y) = \phi(x) \times \phi(y)$. Un application est un morphisme bilatère si, et seulement si, elle est à la fois un morphisme à gauche et à droite.

Remarque

Il existe d'autres choix possibles de définitions pour les morphismes de monoïdes partiels : soit $f : M \to N$

1. f est un morphisme (à droite) si, et seulement si, quels que soient $x, y \in M$, si $(f(x), f(y)) \in D_N$, alors $(x, y) \in D_M$ et $\phi(x \times y) = \phi(x) \times \phi(y)$;
2. f est un morphisme (bilatère) si, et seulement si, quels que soient $x, y \in M$, $(x, y) \in D_M \Leftrightarrow (x, y) \in D_N$, et $\phi(x \times y) = \phi(x) \times \phi(y)$.
   Un application est un morphisme bilatère si, et seulement si, elle est à la fois un morphisme à gauche et à droite.

Remarque

Il existe d'autres choix possibles de définitions pour les morphismes de monoïdes partiels : soit $f : M \to N$

1. f est un morphisme (à droite) si, et seulement si, quels que soient $x, y \in M$, si $(f(x), f(y)) \in D_N$, alors $(x, y) \in D_M$ et $\phi(x \times y) = \phi(x) \times \phi(y)$;
2. f est un morphisme (bilatère) si, et seulement si, quels que soient $x, y \in M$, $(x, y) \in D_M \Leftrightarrow (x, y) \in D_N$, et $\phi(x \times y) = \phi(x) \times \phi(y)$. Un application est un morphisme bilatère si, et seulement si, elle est à la fois un morphisme à gauche et à droite.

Un monoïde M est un *monoïde à zéro* si, et seulement si, il existe $0_M \in M$ tel que

1. $0_M \neq 1_M$;
2. Quel que soit $x \in M$, $x \times 0_M = 0_M = 0_M \times x$ (c'est-à-dire que 0_M est absorbant à gauche et à droite).

Par définition, $|M| \geq 2$.
Il est facile de voir que le zéro est nécessairement unique.
Un monoïde ordinaire auquel on adjoint un zéro est un monoïde à zéro dit *trivial* (ou *sans diviseurs de zéro*).
Le monoïde multiplicatif d'un anneau associatif avec unité est un monoïde à zéro. Le monoïde multiplicatif d'un corps est un monoïde à zéro trivial.

Un monoïde M est un *monoïde à zéro* si, et seulement si, il existe $0_M \in M$ tel que

1. $0_M \neq 1_M$;
2. Quel que soit $x \in M$, $x \times 0_M = 0_M = 0_M \times x$ (c'est-à-dire que 0_M est absorbant à gauche et à droite).

Par définition, $|M| \geq 2$.

Il est facile de voir que le zéro est nécessairement unique.

Un monoïde ordinaire auquel on adjoint un zéro est un monoïde à zéro dit *trivial* (ou *sans diviseurs de zéro*).

Le monoïde multiplicatif d'un anneau associatif avec unité est un monoïde à zéro. Le monoïde multiplicatif d'un corps est un monoïde à zéro trivial.

Un monoïde M est un *monoïde à zéro* si, et seulement si, il existe $0_M \in M$ tel que

1. $0_M \neq 1_M$;
2. Quel que soit $x \in M$, $x \times 0_M = 0_M = 0_M \times x$ (c'est-à-dire que 0_M est absorbant à gauche et à droite).

Par définition, $|M| \geq 2$.

Il est facile de voir que le zéro est nécessairement unique.

Un monoïde ordinaire auquel on adjoint un zéro est un monoïde à zéro dit *trivial* (ou *sans diviseurs de zéro*).

Le monoïde multiplicatif d'un anneau associatif avec unité est un monoïde à zéro. Le monoïde multiplicatif d'un corps est un monoïde à zéro trivial.

Un monoïde M est un *monoïde à zéro* si, et seulement si, il existe $0_M \in M$ tel que

1. $0_M \neq 1_M$;
2. Quel que soit $x \in M$, $x \times 0_M = 0_M = 0_M \times x$ (c'est-à-dire que 0_M est absorbant à gauche et à droite).

Par définition, $|M| \geq 2$.

Il est facile de voir que le zéro est nécessairement unique.

Un monoïde ordinaire auquel on adjoint un zéro est un monoïde à zéro dit *trivial* (ou *sans diviseurs de zéro*).

Le monoïde multiplicatif d'un anneau associatif avec unité est un monoïde à zéro. Le monoïde multiplicatif d'un corps est un monoïde à zéro trivial.

Un monoïde M est un *monoïde à zéro* si, et seulement si, il existe $0_M \in M$ tel que

1. $0_M \neq 1_M$;
2. Quel que soit $x \in M$, $x \times 0_M = 0_M = 0_M \times x$ (c'est-à-dire que 0_M est absorbant à gauche et à droite).

Par définition, $|M| \geq 2$.
Il est facile de voir que le zéro est nécessairement unique.
Un monoïde ordinaire auquel on adjoint un zéro est un monoïde à zéro dit *trivial* (ou *sans diviseurs de zéro*).
Le monoïde multiplicatif d'un anneau associatif avec unité est un monoïde à zéro. Le monoïde multiplicatif d'un corps est un monoïde à zéro trivial.

Un monoïde M est un *monoïde à zéro* si, et seulement si, il existe $0_M \in M$ tel que

1. $0_M \neq 1_M$;
2. Quel que soit $x \in M$, $x \times 0_M = 0_M = 0_M \times x$ (c'est-à-dire que 0_M est absorbant à gauche et à droite).

Par définition, $|M| \geq 2$.
Il est facile de voir que le zéro est nécessairement unique.
Un monoïde ordinaire auquel on adjoint un zéro est un monoïde à zéro dit *trivial* (ou *sans diviseurs de zéro*).
Le monoïde multiplicatif d'un anneau associatif avec unité est un monoïde à zéro. Le monoïde multiplicatif d'un corps est un monoïde à zéro trivial.

Un monoïde M est un *monoïde à zéro* si, et seulement si, il existe $0_M \in M$ tel que

1. $0_M \neq 1_M$;
2. Quel que soit $x \in M$, $x \times 0_M = 0_M = 0_M \times x$ (c'est-à-dire que 0_M est absorbant à gauche et à droite).

Par définition, $|M| \geq 2$.
Il est facile de voir que le zéro est nécessairement unique.
Un monoïde ordinaire auquel on adjoint un zéro est un monoïde à zéro dit *trivial* (ou *sans diviseurs de zéro*).
Le monoïde multiplicatif d'un anneau associatif avec unité est un monoïde à zéro. Le monoïde multiplicatif d'un corps est un monoïde à zéro trivial.

Un monoïde M est un *monoïde à zéro* si, et seulement si, il existe $0_M \in M$ tel que

1. $0_M \neq 1_M$;
2. Quel que soit $x \in M$, $x \times 0_M = 0_M = 0_M \times x$ (c'est-à-dire que 0_M est absorbant à gauche et à droite).

Par définition, $|M| \geq 2$.
Il est facile de voir que le zéro est nécessairement unique.
Un monoïde ordinaire auquel on adjoint un zéro est un monoïde à zéro dit *trivial* (ou *sans diviseurs de zéro*).
Le monoïde multiplicatif d'un anneau associatif avec unité est un monoïde à zéro. Le monoïde multiplicatif d'un corps est un monoïde à zéro trivial.

Les monoïdes à zéro, pour quoi ?

Ce types d’objets est apparu dans les domaines suivants :

- Étude des extensions des semigroupes par des idéaux : A. H. Clifford et G. B. Preston (1961) ;
- Homologie et cohomologie : B. V. Novikov (2008) ;
- Combinatoire algébrique : L. Poinsot *et al.* (2009).

Les monoïdes à zéro, pour quoi ?

Ce types d'objets est apparu dans les domaines suivants :

- Étude des extensions des semigroupes par des idéaux : A. H. Clifford et G. B. Preston (1961) ;
- Homologie et cohomologie : B. V. Novikov (2008) ;
- Combinatoire algébrique : L. Poinsot *et al.* (2009).

Les monoïdes à zéro, pour quoi ?

Ce types d'objets est apparu dans les domaines suivants :

- Étude des extensions des semigroupes par des idéaux : A. H. Clifford et G. B. Preston (1961) ;
- Homologie et cohomologie : B. V. Novikov (2008) ;
- Combinatoire algébrique : L. Poinsot *et al.* (2009).

Les monoïdes à zéro, pour quoi ?

Ce types d’objets est apparu dans les domaines suivants :

- Étude des extensions des semigroupes par des idéaux : A. H. Clifford et G. B. Preston (1961) ;
- Homologie et cohomologie : B. V. Novikov (2008) ;
- Combinatoire algébrique : L. Poinsot *et al.* (2009).

Les monoïdes à zéro, pour quoi ?

Ce types d'objets est apparu dans les domaines suivants :

- Étude des extensions des semigroupes par des idéaux : A. H. Clifford et G. B. Preston (1961) ;
- Homologie et cohomologie : B. V. Novikov (2008) ;
- Combinatoire algébrique : L. Poinsot *et al.* (2009).

Morphismes de monoïdes à zéro

Soient M, N deux monoïdes à zéro. Soit $\phi : M \to N$. Alors ϕ est un *morphisme de monoïdes à zéro* si, et seulement si,

1. $\phi(1_M) = 1_N$;
2. $\phi(0_M) = 0_N$;
3. quels que soient $x, y \in M$, si $x \times y \neq 0_M$, alors $\phi(x) \times \phi(y) \neq 0_M$, et dans ce cas, $\phi(x \times y) = \phi(x) \times \phi(y)$.

La classe de tous les monoïdes à zéro avec les morphismes entre ces structures forme une catégorie notée MonZ. On peut également définir la catégorie des monoïdes à zéro commutatifs, CMonZ.

Morphismes de monoïdes à zéro

Soient M, N deux monoïdes à zéro. Soit $\phi : M \to N$. Alors ϕ est un *morphisme de monoïdes à zéro* si, et seulement si,

1. $\phi(1_M) = 1_N$;
2. $\phi(0_M) = 0_N$;
3. quels que soient $x, y \in M$, si $x \times y \neq 0_M$, alors $\phi(x) \times \phi(y) \neq 0_M$, et dans ce cas, $\phi(x \times y) = \phi(x) \times \phi(y)$.

La classe de tous les monoïdes à zéro avec les morphismes entre ces structures forme une catégorie notée MonZ. On peut également définir la catégorie des monoïdes à zéro commutatifs, CMonZ.

Morphismes de monoïdes à zéro

Soient M, N deux monoïdes à zéro. Soit $\phi : M \to N$. Alors ϕ est un *morphisme de monoïdes à zéro* si, et seulement si,

1. $\phi(1_M) = 1_N$;
2. $\phi(0_M) = 0_N$;
3. quels que soient $x, y \in M$, si $x \times y \neq 0_M$, alors $\phi(x) \times \phi(y) \neq 0_M$, et dans ce cas, $\phi(x \times y) = \phi(x) \times \phi(y)$.

La classe de tous les monoïdes à zéro avec les morphismes entre ces structures forme une catégorie notée MonZ. On peut également définir la catégorie des monoïdes à zéro commutatifs, CMonZ.

Morphismes de monoïdes à zéro

Soient M, N deux monoïdes à zéro. Soit $\phi : M \to N$. Alors ϕ est un *morphisme de monoïdes à zéro* si, et seulement si,

1. $\phi(1_M) = 1_N$;
2. $\phi(0_M) = 0_N$;
3. quels que soient $x, y \in M$, si $x \times y \neq 0_M$, alors $\phi(x) \times \phi(y) \neq 0_M$, et dans ce cas, $\phi(x \times y) = \phi(x) \times \phi(y)$.

La classe de tous les monoïdes à zéro avec les morphismes entre ces structures forme une catégorie notée MonZ. On peut également définir la catégorie des monoïdes à zéro commutatifs, CMonZ.

Morphismes de monoïdes à zéro

Soient M, N deux monoïdes à zéro. Soit $\phi : M \to N$. Alors ϕ est un *morphisme de monoïdes à zéro* si, et seulement si,

1. $\phi(1_M) = 1_N$;
2. $\phi(0_M) = 0_N$;
3. quels que soient $x, y \in M$, si $x \times y \neq 0_M$, alors $\phi(x) \times \phi(y) \neq 0_M$, et dans ce cas, $\phi(x \times y) = \phi(x) \times \phi(y)$.

La classe de tous les monoïdes à zéro avec les morphismes entre ces structures forme une catégorie notée MonZ. On peut également définir la catégorie des monoïdes à zéro commutatifs, CMonZ.

Morphismes de monoïdes à zéro

Soient M, N deux monoïdes à zéro. Soit $\phi : M \to N$. Alors ϕ est un *morphisme de monoïdes à zéro* si, et seulement si,

1. $\phi(1_M) = 1_N$;
2. $\phi(0_M) = 0_N$;
3. quels que soient $x, y \in M$, si $x \times y \neq 0_M$, alors $\phi(x) \times \phi(y) \neq 0_M$, et dans ce cas, $\phi(x \times y) = \phi(x) \times \phi(y)$.

La classe de tous les monoïdes à zéro avec les morphismes entre ces structures forme une catégorie notée MonZ. On peut également définir la catégorie des monoïdes à zéro commutatifs, CMonZ.

Morphismes de monoïdes à zéro

Soient M, N deux monoïdes à zéro. Soit $\phi : M \to N$. Alors ϕ est un *morphisme de monoïdes à zéro* si, et seulement si,

1. $\phi(1_M) = 1_N$;
2. $\phi(0_M) = 0_N$;
3. quels que soient $x, y \in M$, si $x \times y \neq 0_M$, alors $\phi(x) \times \phi(y) \neq 0_M$, et dans ce cas, $\phi(x \times y) = \phi(x) \times \phi(y)$.

La classe de tous les monoïdes à zéro avec les morphismes entre ces structures forme une catégorie notée MonZ. On peut également définir la catégorie des monoïdes à zéro commutatifs, CMonZ.

Morphismes de monoïdes à zéro

Soient M, N deux monoïdes à zéro. Soit $\phi : M \longrightarrow N$. Alors ϕ est un *morphisme de monoïdes à zéro* si, et seulement si,

1. $\phi(1_M) = 1_N$;
2. $\phi(0_M) = 0_N$;
3. quels que soient $x, y \in M$, si $x \times y \neq 0_M$, alors $\phi(x) \times \phi(y) \neq 0_M$, et dans ce cas, $\phi(x \times y) = \phi(x) \times \phi(y)$.

La classe de tous les monoïdes à zéro avec les morphismes entre ces structures forme une catégorie notée MonZ. On peut également définir la catégorie des monoïdes à zéro commutatifs, CMonZ.

Remarque

Un monoïde à zéro possède une structure sous-jacente de monoïde usuel (il suffit d'oublier le zéro, c'est-à-dire $\langle M, \times, 1_M, 0_M \rangle \mapsto \langle M, \times, 1_M \rangle$). Néanmoins on n'a pas là un foncteur d'oubli de la catégorie MonZ dans la catégorie Mon car un morphisme de monoïdes à zéro, même en oubliant le fait qu'il respecte les zéros, n'est pas nécessairement un morphisme de monoïdes.

Remarque

Un monoïde à zéro possède une structure sous-jacente de monoïde usuel (il suffit d'oublier le zéro, c'est-à-dire $\langle M, \times, 1_M, 0_M \rangle \mapsto \langle M, \times, 1_M \rangle$). Néanmoins on n'a pas là un foncteur d'oubli de la catégorie MonZ dans la catégorie Mon car un morphisme de monoïdes à zéro, même en oubliant le fait qu'il respecte les zéros, n'est pas nécessairement un morphisme de monoïdes.

Remarque (suite)

Considérons l'exemple suivant : soit X un ensemble dénombrable et $\mathcal{P}_{fin}(X)$ l'ensemble des parties finies. On munit $\mathcal{P}_{fin}(X) \sqcup \{X\}$ d'une structure de monoïde à zéro (commutatif) pour l'opération d'union disjointe $A \sqcup B = A \cup B$ si $A \cap B = \emptyset$ et $A \sqcup B = X$ dans le cas contraire. Soit également le monoïde à zéro $(\mathbb{N}, +, 0) \sqcup \{\aleph_0\}$ où $\aleph_0$ joue le rôle du zéro. Soit $\mathsf{card} : \mathcal{P}_{fin}(X) \to \mathbb{N} \sqcup \{\aleph_0\}$ définie comme de coutume. Alors card est un morphisme de monoïdes à zéro puisque $\mathsf{card}(\emptyset) = 0$, $\mathsf{card}(X) = \aleph_0$ et si $A \cap B = \emptyset$, *i.e.*, $A \sqcup B = A \cup B \neq X$, alors $\mathsf{card}(A \sqcup B) = \mathsf{card}(A) + \mathsf{card}(B) \neq \aleph_0$. Par contre, si $A \cap B \neq \emptyset$, *i.e.*, $A \sqcup B = X$, on a $\mathsf{card}(A \sqcup B) = \mathsf{card}(X) = \aleph_0$ mais $\mathsf{card}(A) + \mathsf{card}(B) \neq \aleph_0$.

Remarque (suite)

Considérons l'exemple suivant : soit X un ensemble dénombrable et $\mathcal{P}_{fin}(X)$ l'ensemble des parties finies. On munit $\mathcal{P}_{fin}(X) \sqcup \{X\}$ d'une structure de monoïde à zéro (commutatif) pour l'opération d'union disjointe $A \sqcup B = A \cup B$ si $A \cap B = \emptyset$ et $A \sqcup B = X$ dans le cas contraire. Soit également le monoïde à zéro $(\mathbb{N}, +, 0) \sqcup \{\aleph_0\}$ où $\aleph_0$ joue le rôle du zéro. Soit $\mathsf{card} : \mathcal{P}_{fin}(X) \to \mathbb{N} \sqcup \{\aleph_0\}$ définie comme de coutume. Alors card est un morphisme de monoïdes à zéro puisque $\mathsf{card}(\emptyset) = 0$, $\mathsf{card}(X) = \aleph_0$ et si $A \cap B = \emptyset$, *i.e.*, $A \sqcup B = A \cup B \neq X$, alors $\mathsf{card}(A \sqcup B) = \mathsf{card}(A) + \mathsf{card}(B) \neq \aleph_0$. Par contre, si $A \cap B \neq \emptyset$, *i.e.*, $A \sqcup B = X$, on a $\mathsf{card}(A \sqcup B) = \mathsf{card}(X) = \aleph_0$ mais $\mathsf{card}(A) + \mathsf{card}(B) \neq \aleph_0$.

Remarque (suite)

Considérons l'exemple suivant : soit X un ensemble dénombrable et $\mathcal{P}_{fin}(X)$ l'ensemble des parties finies. On munit $\mathcal{P}_{fin}(X) \sqcup \{X\}$ d'une structure de monoïde à zéro (commutatif) pour l'opération d'union disjointe $A \sqcup B = A \cup B$ si $A \cap B = \emptyset$ et $A \sqcup B = X$ dans le cas contraire. Soit également le monoïde à zéro $(\mathbb{N}, +, 0) \sqcup \{\aleph_0\}$ où $\aleph_0$ joue le rôle du zéro. Soit $\mathsf{card} : \mathcal{P}_{fin}(X) \to \mathbb{N} \sqcup \{\aleph_0\}$ définie comme de coutume. Alors card est un morphisme de monoïdes à zéro puisque $\mathsf{card}(\emptyset) = 0$, $\mathsf{card}(X) = \aleph_0$ et si $A \cap B = \emptyset$, *i.e.*, $A \sqcup B = A \cup B \neq X$, alors $\mathsf{card}(A \sqcup B) = \mathsf{card}(A) + \mathsf{card}(B) \neq \aleph_0$. Par contre, si $A \cap B \neq \emptyset$, *i.e.*, $A \sqcup B = X$, on a $\mathsf{card}(A \sqcup B) = \mathsf{card}(X) = \aleph_0$ mais $\mathsf{card}(A) + \mathsf{card}(B) \neq \aleph_0$.

Remarque (suite)

Considérons l'exemple suivant : soit X un ensemble dénombrable et $\mathcal{P}_{fin}(X)$ l'ensemble des parties finies. On munit $\mathcal{P}_{fin}(X) \sqcup \{X\}$ d'une structure de monoïde à zéro (commutatif) pour l'opération d'union disjointe $A \sqcup B = A \cup B$ si $A \cap B = \emptyset$ et $A \sqcup B = X$ dans le cas contraire. Soit également le monoïde à zéro $(\mathbb{N}, +, 0) \sqcup \{\aleph_0\}$ où $\aleph_0$ joue le rôle du zéro. Soit $\mathsf{card} : \mathcal{P}_{fin}(X) \to \mathbb{N} \sqcup \{\aleph_0\}$ définie comme de coutume. Alors card est un morphisme de monoïdes à zéro puisque $\mathsf{card}(\emptyset) = 0$, $\mathsf{card}(X) = \aleph_0$ et si $A \cap B = \emptyset$, *i.e.*, $A \sqcup B = A \cup B \neq X$, alors $\mathsf{card}(A \sqcup B) = \mathsf{card}(A) + \mathsf{card}(B) \neq \aleph_0$. Par contre, si $A \cap B \neq \emptyset$, *i.e.*, $A \sqcup B = X$, on a $\mathsf{card}(A \sqcup B) = \mathsf{card}(X) = \aleph_0$ mais $\mathsf{card}(A) + \mathsf{card}(B) \neq \aleph_0$.

Remarque (suite)

Considérons l'exemple suivant : soit X un ensemble dénombrable et $\mathcal{P}_{fin}(X)$ l'ensemble des parties finies. On munit $\mathcal{P}_{fin}(X) \sqcup \{X\}$ d'une structure de monoïde à zéro (commutatif) pour l'opération d'union disjointe $A \sqcup B = A \cup B$ si $A \cap B = \emptyset$ et $A \sqcup B = X$ dans le cas contraire. Soit également le monoïde à zéro $(\mathbb{N}, +, 0) \sqcup \{\aleph_0\}$ où $\aleph_0$ joue le rôle du zéro. Soit $\mathsf{card} : \mathcal{P}_{fin}(X) \to \mathbb{N} \sqcup \{\aleph_0\}$ définie comme de coutume. Alors card est un morphisme de monoïdes à zéro puisque $\mathsf{card}(\emptyset) = 0$, $\mathsf{card}(X) = \aleph_0$ et si $A \cap B = \emptyset$, *i.e.*, $A \sqcup B = A \cup B \neq X$, alors $\mathsf{card}(A \sqcup B) = \mathsf{card}(A) + \mathsf{card}(B) \neq \aleph_0$. Par contre, si $A \cap B \neq \emptyset$, *i.e.*, $A \sqcup B = X$, on a $\mathsf{card}(A \sqcup B) = \mathsf{card}(X) = \aleph_0$ mais $\mathsf{card}(A) + \mathsf{card}(B) \neq \aleph_0$.

Remarque (suite)

Considérons l'exemple suivant : soit X un ensemble dénombrable et $\mathcal{P}_{fin}(X)$ l'ensemble des parties finies. On munit $\mathcal{P}_{fin}(X) \sqcup \{X\}$ d'une structure de monoïde à zéro (commutatif) pour l'opération d'union disjointe $A \sqcup B = A \cup B$ si $A \cap B = \emptyset$ et $A \sqcup B = X$ dans le cas contraire. Soit également le monoïde à zéro $(\mathbb{N}, +, 0) \sqcup \{\aleph_0\}$ où $\aleph_0$ joue le rôle du zéro. Soit $\mathsf{card} : \mathcal{P}_{fin}(X) \to \mathbb{N} \sqcup \{\aleph_0\}$ définie comme de coutume. Alors card est un morphisme de monoïdes à zéro puisque $\mathsf{card}(\emptyset) = 0$, $\mathsf{card}(X) = \aleph_0$ et si $A \cap B = \emptyset$, *i.e.*, $A \sqcup B = A \cup B \neq X$, alors $\mathsf{card}(A \sqcup B) = \mathsf{card}(A) + \mathsf{card}(B) \neq \aleph_0$. Par contre, si $A \cap B \neq \emptyset$, *i.e.*, $A \sqcup B = X$, on a $\mathsf{card}(A \sqcup B) = \mathsf{card}(X) = \aleph_0$ mais $\mathsf{card}(A) + \mathsf{card}(B) \neq \aleph_0$.

Remarque (suite)

Considérons l'exemple suivant : soit X un ensemble dénombrable et $\mathcal{P}_{fin}(X)$ l'ensemble des parties finies. On munit $\mathcal{P}_{fin}(X) \sqcup \{X\}$ d'une structure de monoïde à zéro (commutatif) pour l'opération d'union disjointe $A \sqcup B = A \cup B$ si $A \cap B = \emptyset$ et $A \sqcup B = X$ dans le cas contraire. Soit également le monoïde à zéro $(\mathbb{N}, +, 0) \sqcup \{\aleph_0\}$ où $\aleph_0$ joue le rôle du zéro. Soit $\mathsf{card} : \mathcal{P}_{fin}(X) \to \mathbb{N} \sqcup \{\aleph_0\}$ définie comme de coutume. Alors card est un morphisme de monoïdes à zéro puisque $\mathsf{card}(\emptyset) = 0$, $\mathsf{card}(X) = \aleph_0$ et si $A \cap B = \emptyset$, *i.e.*, $A \sqcup B = A \cup B \neq X$, alors $\mathsf{card}(A \sqcup B) = \mathsf{card}(A) + \mathsf{card}(B) \neq \aleph_0$. Par contre, si $A \cap B \neq \emptyset$, *i.e.*, $A \sqcup B = X$, on a $\mathsf{card}(A \sqcup B) = \mathsf{card}(X) = \aleph_0$ mais $\mathsf{card}(A) + \mathsf{card}(B) \neq \aleph_0$.

Monoïde quotient de Rees

Soit M un monoïde (usuel) et I un idéal bilatère propre de M (*i.e.*, $I \neq M$). Soit $0 \notin M \setminus I$, alors l'ensemble $M/I = (M \setminus I) \sqcup \{0\}$ possède une structure de monoïde à zéro pour l'opération :

$$x \cdot y = \begin{cases} xy & \text{si} \quad xy \notin I \ , \\ 0 & \text{si} \quad xy \in I \end{cases}$$

et $z \cdot 0 = 0 \cdot z = 0$ quel que soit $x, y \in M \setminus I$ et $z \in (M \setminus I) \sqcup \{0\}$. On peut étendre la construction précédente au cas où $I = \emptyset$. De cette façon, on obtient un monoïde à zéro trivial.

Monoïde quotient de Rees

Soit M un monoïde (usuel) et I un idéal bilatère propre de M (*i.e.*, $I \neq M$). Soit $0 \notin M \setminus I$, alors l'ensemble $M/I = (M \setminus I) \sqcup \{0\}$ possède une structure de monoïde à zéro pour l'opération :

$$x \cdot y = \begin{cases} xy & \text{si} \quad xy \notin I \,, \\ 0 & \text{si} \quad xy \in I \end{cases}$$

et $z \cdot 0 = 0 \cdot z = 0$ quel que soit $x, y \in M \setminus I$ et $z \in (M \setminus I) \sqcup \{0\}$. On peut étendre la construction précédente au cas où $I = \emptyset$. De cette façon, on obtient un monoïde à zéro trivial.

Monoïde quotient de Rees

Soit M un monoïde (usuel) et I un idéal bilatère propre de M (*i.e.*, $I \neq M$). Soit $0 \notin M \setminus I$, alors l'ensemble $M/I = (M \setminus I) \sqcup \{0\}$ possède une structure de monoïde à zéro pour l'opération :

$$x \cdot y = \begin{cases} xy & \text{si} \quad xy \notin I\,, \\ 0 & \text{si} \quad xy \in I \end{cases}$$

et $z \cdot 0 = 0 \cdot z = 0$ quel que soit $x, y \in M \setminus I$ et $z \in (M \setminus I) \sqcup \{0\}$. On peut étendre la construction précédente au cas où $I = \emptyset$. De cette façon, on obtient un monoïde à zéro trivial.

Monoïde quotient de Rees

Soit M un monoïde (usuel) et I un idéal bilatère propre de M (*i.e.*, $I \neq M$). Soit $0 \notin M \setminus I$, alors l'ensemble $M/I = (M \setminus I) \sqcup \{0\}$ possède une structure de monoïde à zéro pour l'opération :

$$x \cdot y = \begin{cases} xy & \text{si} \quad xy \notin I\ , \\ 0 & \text{si} \quad xy \in I \end{cases}$$

et $z \cdot 0 = 0 \cdot z = 0$ quel que soit $x, y \in M \setminus I$ et $z \in (M \setminus I) \sqcup \{0\}$. On peut étendre la construction précédente au cas où $I = \emptyset$. De cette façon, on obtient un monoïde à zéro trivial.

Monoïde quotient de Rees

Soit M un monoïde (usuel) et I un idéal bilatère propre de M (*i.e.*, $I \neq M$). Soit $0 \notin M \setminus I$, alors l'ensemble $M/I = (M \setminus I) \sqcup \{0\}$ possède une structure de monoïde à zéro pour l'opération :

$$x \cdot y = \begin{cases} xy & \text{si} \quad xy \notin I , \\ 0 & \text{si} \quad xy \in I \end{cases}$$

et $z \cdot 0 = 0 \cdot z = 0$ quel que soit $x, y \in M \setminus I$ et $z \in (M \setminus I) \sqcup \{0\}$. On peut étendre la construction précédente au cas où $I = \emptyset$. De cette façon, on obtient un monoïde à zéro trivial.

Monoïde quotient de Rees

Soit M un monoïde (usuel) et I un idéal bilatère propre de M (*i.e.*, $I \neq M$). Soit $0 \notin M \setminus I$, alors l'ensemble $M/I = (M \setminus I) \sqcup \{0\}$ possède une structure de monoïde à zéro pour l'opération :

$$x \cdot y = \begin{cases} xy & \text{si} \quad xy \notin I \ , \\ 0 & \text{si} \quad xy \in I \end{cases}$$

et $z \cdot 0 = 0 \cdot z = 0$ quel que soit $x, y \in M \setminus I$ et $z \in (M \setminus I) \sqcup \{0\}$.
On peut étendre la construction précédente au cas où $I = \emptyset$. De cette façon, on obtient un monoïde à zéro trivial.

Monoïde quotient de Rees

Soit M un monoïde (usuel) et I un idéal bilatère propre de M (*i.e.*, $I \neq M$). Soit $0 \notin M \setminus I$, alors l'ensemble $M/I = (M \setminus I) \sqcup \{0\}$ possède une structure de monoïde à zéro pour l'opération :

$$x \cdot y = \begin{cases} xy & \text{si} \quad xy \notin I \,, \\ 0 & \text{si} \quad xy \in I \end{cases}$$

et $z \cdot 0 = 0 \cdot z = 0$ quel que soit $x, y \in M \setminus I$ et $z \in (M \setminus I) \sqcup \{0\}$. On peut étendre la construction précédente au cas où $I = \emptyset$. De cette façon, on obtient un monoïde à zéro trivial.

Monoïde quotient de Rees

Soit M un monoïde (usuel) et I un idéal bilatère propre de M (*i.e.*, $I \neq M$). Soit $0 \notin M \setminus I$, alors l'ensemble $M/I = (M \setminus I) \sqcup \{0\}$ possède une structure de monoïde à zéro pour l'opération :

$$x \cdot y = \begin{cases} xy & \text{si} \quad xy \notin I \ , \\ 0 & \text{si} \quad xy \in I \end{cases}$$

et $z \cdot 0 = 0 \cdot z = 0$ quel que soit $x, y \in M \setminus I$ et $z \in (M \setminus I) \sqcup \{0\}$. On peut étendre la construction précédente au cas où $I = \emptyset$. De cette façon, on obtient un monoïde à zéro trivial.

Proposition

Les catégories MonZ et MonP sont naturellement équivalentes. De même, les catégories CMonZ et CMonP sont naturellement équivalentes.

Idée de la démonstration : À tout monoïde partiel $\langle M, D_M, \times, 1_M\rangle$, on associe le monoïde à zéro $M^0 = M \cup \{0_M\}$ (avec $0_M = \{M\}$ de sorte que $0_M \not\in M$ d'après l'axiome de fondation de la théorie des ensembles usuelle) obtenu par adjonction d'un zéro. On pose alors

$$x \times y = \begin{cases} xy & \text{si} \quad (x, y) \in D_M\ , \\ 0_M & \text{si} \quad (x, y) \not\in D_M\ . \end{cases}$$

Réciproquement, on transforme un monoïde à zéro $\langle M, \times, 1_M, 0_M\rangle$ en un monoïde partiel $M_0 = M \setminus \{0_M\}$, en posant $D_{M_0} = \{(x, y) \in M_0 \times M_0 : xy \neq 0_M\}$ et $x \times y = xy$ si, et seulement si, $(x, y) \in D_{M_0}$.

On a alors $(M^0)_0 = M$ et $(M_0)^0 \cong M$.

Proposition

Les catégories MonZ et MonP sont naturellement équivalentes. De même, les catégories CMonZ et CMonP sont naturellement équivalentes.

Idée de la démonstration : À tout monoïde partiel $\langle M, D_M, \times, 1_M\rangle$, on associe le monoïde à zéro $M^0 = M \cup \{0_M\}$ (avec $0_M = \{M\}$ de sorte que $0_M \notin M$ d'après l'axiome de fondation de la théorie des ensembles usuelle) obtenu par adjonction d'un zéro. On pose alors

$$x \times y = \begin{cases} xy & \text{si} \quad (x, y) \in D_M\ , \\ 0_M & \text{si} \quad (x, y) \notin D_M\ . \end{cases}$$

Réciproquement, on transforme un monoïde à zéro $\langle M, \times, 1_M, 0_M\rangle$ en un monoïde partiel $M_0 = M \setminus \{0_M\}$, en posant $D_{M_0} = \{(x, y) \in M_0 \times M_0 : xy \neq 0_M\}$ et $x \times y = xy$ si, et seulement si, $(x, y) \in D_{M_0}$.

On a alors $(M^0)_0 = M$ et $(M_0)^0 \cong M$.

Proposition

Les catégories MonZ et MonP sont naturellement équivalentes. De même, les catégories CMonZ et CMonP sont naturellement équivalentes.

Idée de la démonstration : À tout monoïde partiel $\langle M, D_M, \times, 1_M \rangle$, on associe le monoïde à zéro $M^0 = M \cup \{0_M\}$ (avec $0_M = \{M\}$ de sorte que $0_M \notin M$ d'après l'axiome de fondation de la théorie des ensembles usuelle) obtenu par adjonction d'un zéro. On pose alors

$$x \times y = \begin{cases} xy & \text{si} \quad (x, y) \in D_M \,, \\ 0_M & \text{si} \quad (x, y) \notin D_M \,. \end{cases}$$

Réciproquement, on transforme un monoïde à zéro $\langle M, \times, 1_M, 0_M \rangle$ en un monoïde partiel $M_0 = M \setminus \{0_M\}$, en posant $D_{M_0} = \{(x, y) \in M_0 \times M_0 : xy \neq 0_M\}$ et $x \times y = xy$ si, et seulement si, $(x, y) \in D_{M_0}$.

On a alors $(M^0)_0 = M$ et $(M_0)^0 \cong M$.

Proposition

Les catégories MonZ et MonP sont naturellement équivalentes. De même, les catégories CMonZ et CMonP sont naturellement équivalentes.

Idée de la démonstration : À tout monoïde partiel $\langle M, D_M, \times, 1_M\rangle$, on associe le monoïde à zéro $M^0 = M \cup \{0_M\}$ (avec $0_M = \{M\}$ de sorte que $0_M \notin M$ d'après l'axiome de fondation de la théorie des ensembles usuelle) obtenu par adjonction d'un zéro. On pose alors

$$x \times y = \begin{cases} xy & \text{si} \quad (x, y) \in D_M \ , \\ 0_M & \text{si} \quad (x, y) \notin D_M \ . \end{cases}$$

Réciproquement, on transforme un monoïde à zéro $\langle M, \times, 1_M, 0_M\rangle$ en un monoïde partiel $M_0 = M \setminus \{0_M\}$, en posant $D_{M_0} = \{(x, y) \in M_0 \times M_0 : xy \neq 0_M\}$ et $x \times y = xy$ si, et seulement si, $(x, y) \in D_{M_0}$.

On a alors $(M^0)_0 = M$ et $(M_0)^0 \cong M$.

Proposition

Les catégories MonZ et MonP sont naturellement équivalentes. De même, les catégories CMonZ et CMonP sont naturellement équivalentes.

Idée de la démonstration : À tout monoïde partiel $\langle M, D_M, \times, 1_M \rangle$, on associe le monoïde à zéro $M^0 = M \cup \{0_M\}$ (avec $0_M = \{M\}$ de sorte que $0_M \notin M$ d'après l'axiome de fondation de la théorie des ensembles usuelle) obtenu par adjonction d'un zéro. On pose alors

$$x \times y = \begin{cases} xy & \text{si} \quad (x,y) \in D_M\ , \\ 0_M & \text{si} \quad (x,y) \notin D_M\ . \end{cases}$$

Réciproquement, on transforme un monoïde à zéro $\langle M, \times, 1_M, 0_M \rangle$ en un monoïde partiel $M_0 = M \setminus \{0_M\}$, en posant $D_{M_0} = \{(x,y) \in M_0 \times M_0 : xy \neq 0_M\}$ et $x \times y = xy$ si, et seulement si, $(x,y) \in D_{M_0}$.

On a alors $(M^0)_0 = M$ et $(M_0)^0 \cong M$.

Proposition

Les catégories MonZ et MonP sont naturellement équivalentes. De même, les catégories CMonZ et CMonP sont naturellement équivalentes.

Idée de la démonstration : À tout monoïde partiel $\langle M, D_M, \times, 1_M \rangle$, on associe le monoïde à zéro $M^0 = M \cup \{0_M\}$ (avec $0_M = \{M\}$ de sorte que $0_M \notin M$ d'après l'axiome de fondation de la théorie des ensembles usuelle) obtenu par adjonction d'un zéro. On pose alors

$$x \times y = \begin{cases} xy & \text{si} \quad (x, y) \in D_M \ , \\ 0_M & \text{si} \quad (x, y) \notin D_M \ . \end{cases}$$

Réciproquement, on transforme un monoïde à zéro $\langle M, \times, 1_M, 0_M \rangle$ en un monoïde partiel $M_0 = M \setminus \{0_M\}$, en posant $D_{M_0} = \{(x, y) \in M_0 \times M_0 : xy \neq 0_M\}$ et $x \times y = xy$ si, et seulement si, $(x, y) \in D_{M_0}$.

On a alors $(M^0)_0 = M$ et $(M_0)^0 \cong M$.

Proposition

Les catégories MonZ et MonP sont naturellement équivalentes. De même, les catégories CMonZ et CMonP sont naturellement équivalentes.

Idée de la démonstration : À tout monoïde partiel $\langle M, D_M, \times, 1_M \rangle$, on associe le monoïde à zéro $M^0 = M \cup \{0_M\}$ (avec $0_M = \{M\}$ de sorte que $0_M \notin M$ d'après l'axiome de fondation de la théorie des ensembles usuelle) obtenu par adjonction d'un zéro. On pose alors

$$x \times y = \begin{cases} xy & \text{si} \quad (x,y) \in D_M \ , \\ 0_M & \text{si} \quad (x,y) \notin D_M \ . \end{cases}$$

Réciproquement, on transforme un monoïde à zéro $\langle M, \times, 1_M, 0_M \rangle$ en un monoïde partiel $M_0 = M \setminus \{0_M\}$, en posant $D_{M_0} = \{(x,y) \in M_0 \times M_0 : xy \neq 0_M\}$ et $x \times y = xy$ si, et seulement si, $(x,y) \in D_{M_0}$.

On a alors $(M^0)_0 = M$ et $(M_0)^0 \cong M$.

Proposition

Les catégories MonZ et MonP sont naturellement équivalentes. De même, les catégories CMonZ et CMonP sont naturellement équivalentes.

Idée de la démonstration : À tout monoïde partiel $\langle M, D_M, \times, 1_M\rangle$, on associe le monoïde à zéro $M^0 = M \cup \{0_M\}$ (avec $0_M = \{M\}$ de sorte que $0_M \notin M$ d'après l'axiome de fondation de la théorie des ensembles usuelle) obtenu par adjonction d'un zéro. On pose alors

$$x \times y = \begin{cases} xy & \text{si} \quad (x, y) \in D_M\ , \\ 0_M & \text{si} \quad (x, y) \notin D_M\ . \end{cases}$$

Réciproquement, on transforme un monoïde à zéro $\langle M, \times, 1_M, 0_M\rangle$ en un monoïde partiel $M_0 = M \setminus \{0_M\}$, en posant $D_{M_0} = \{(x, y) \in M_0 \times M_0 : xy \neq 0_M\}$ et $x \times y = xy$ si, et seulement si, $(x, y) \in D_{M_0}$.

On a alors $(M^0)_0 = M$ et $(M_0)^0 \cong M$.

Alphabet de Rees

On appelle alphabet de Rees la donnée (X, I) où

1. X est un ensemble ;
2. I est soit un idéal bilatère propre de X^* ($IX^* \subseteq I \supseteq X^*I$ et $I \neq X^*$), en particulier $X \not\subseteq I$ (mais on peut avoir $X \cap I \neq \emptyset$), soit l'ensemble vide.

On peut également définir les alphabets de Rees commutatifs (X, I) où I est un idéal bilatère propre de $X^{\oplus}$ ou l'ensemble vide.
Dans la suite, on note $i_X : X \hookrightarrow X^*$ (resp. $i_X : X \hookrightarrow X^{\oplus}$) l'injection canonique qui permet d'identifier une lettre avec un mot de longueur 1 (resp. la masse de Dirac en x).

Alphabet de Rees

On appelle alphabet de Rees la donnée (X, I) où

1. X est un ensemble ;
2. I est soit un idéal bilatère propre de X^* ($IX^* \subseteq I \supseteq X^*I$ et $I \neq X^*$), en particulier $X \not\subseteq I$ (mais on peut avoir $X \cap I \neq \emptyset$), soit l'ensemble vide.

On peut également définir les alphabets de Rees commutatifs (X, I) où I est un idéal bilatère propre de $X^{\oplus}$ ou l'ensemble vide.
Dans la suite, on note $i_X : X \hookrightarrow X^*$ (resp. $i_X : X \hookrightarrow X^{\oplus}$) l'injection canonique qui permet d'identifier une lettre avec un mot de longueur 1 (resp. la masse de Dirac en x).

Alphabet de Rees

On appelle alphabet de Rees la donnée (X, I) où

1. X est un ensemble ;
2. I est soit un idéal bilatère propre de X^* ($IX^* \subseteq I \supseteq X^*I$ et $I \neq X^*$), en particulier $X \not\subseteq I$ (mais on peut avoir $X \cap I \neq \emptyset$), soit l'ensemble vide.

On peut également définir les alphabets de Rees commutatifs (X, I) où I est un idéal bilatère propre de $X^{\oplus}$ ou l'ensemble vide.
Dans la suite, on note $i_X : X \hookrightarrow X^*$ (resp. $i_X : X \hookrightarrow X^{\oplus}$) l'injection canonique qui permet d'identifier une lettre avec un mot de longueur 1 (resp. la masse de Dirac en x).

Alphabet de Rees

On appelle alphabet de Rees la donnée (X, I) où

1. X est un ensemble ;
2. I est soit un idéal bilatère propre de X^* ($IX^* \subseteq I \supseteq X^*I$ et $I \neq X^*$), en particulier $X \not\subseteq I$ (mais on peut avoir $X \cap I \neq \emptyset$), soit l'ensemble vide.

On peut également définir les alphabets de Rees commutatifs (X, I) où I est un idéal bilatère propre de $X^{\oplus}$ ou l'ensemble vide.
Dans la suite, on note $i_X : X \hookrightarrow X^*$ (resp. $i_X : X \hookrightarrow X^{\oplus}$) l'injection canonique qui permet d'identifier une lettre avec un mot de longueur 1 (resp. la masse de Dirac en x).

Alphabet de Rees

On appelle alphabet de Rees la donnée (X, I) où

1. X est un ensemble ;
2. I est soit un idéal bilatère propre de X^* ($IX^* \subseteq I \supseteq X^*I$ et $I \neq X^*$), en particulier $X \not\subseteq I$ (mais on peut avoir $X \cap I \neq \emptyset$), soit l'ensemble vide.

On peut également définir les alphabets de Rees commutatifs (X, I) où I est un idéal bilatère propre de $X^{\oplus}$ ou l'ensemble vide.

Dans la suite, on note $i_X : X \hookrightarrow X^*$ (resp. $i_X : X \hookrightarrow X^{\oplus}$) l'injection canonique qui permet d'identifier une lettre avec un mot de longueur 1 (resp. la masse de Dirac en x).

Alphabet de Rees

On appelle alphabet de Rees la donnée (X, I) où

1. X est un ensemble ;
2. I est soit un idéal bilatère propre de X^* ($IX^* \subseteq I \supseteq X^*I$ et $I \neq X^*$), en particulier $X \not\subseteq I$ (mais on peut avoir $X \cap I \neq \emptyset$), soit l'ensemble vide.

On peut également définir les alphabets de Rees commutatifs (X, I) où I est un idéal bilatère propre de $X^{\oplus}$ ou l'ensemble vide.
Dans la suite, on note $i_X : X \hookrightarrow X^*$ (resp. $i_X : X \hookrightarrow X^{\oplus}$) l'injection canonique qui permet d'identifier une lettre avec un mot de longueur 1 (resp. la masse de Dirac en x).

Flêches d'alphabets de Rees

Soient (X, I) et (Y, J) deux alphabets de Rees. Soit $\phi : X \to Y$ une application. La composition $i_Y \circ \phi : X \to Y^*$ se prolonge donc de façon unique en un morphisme de monoïdes $\psi : X^* \to Y^*$ tel que $\psi \circ i_X = i_Y \circ \phi$ (d'après le problème universel dont X^* est solution). On définit alors une *flêche* $\phi : (X, I) \to (Y, J)$ comme une application $\phi : X \to Y$ telle que

1. $\phi(X \cap I) \subseteq Y \cap J$;
2. $\psi^{-1}(J) \subseteq I$.

Les alphabets de Rees forment une catégorie AR. En remplaçant X^* par $X^{\oplus}$ et Y^* par $Y^{\oplus}$ on obtient la catégorie des alphabets de Rees commutatifs ARC.

Flêches d'alphabets de Rees

Soient (X, I) et (Y, J) deux alphabets de Rees. Soit $\phi : X \to Y$ une application. La composition $i_Y \circ \phi : X \to Y^*$ se prolonge donc de façon unique en un morphisme de monoïdes $\psi : X^* \to Y^*$ tel que $\psi \circ i_X = i_Y \circ \phi$ (d'après le problème universel dont X^* est solution). On définit alors une *flêche* $\phi : (X, I) \to (Y, J)$ comme une application $\phi : X \to Y$ telle que

1. $\phi(X \cap I) \subseteq Y \cap J$;
2. $\psi^{-1}(J) \subseteq I$.

Les alphabets de Rees forment une catégorie AR. En remplaçant X^* par $X^{\oplus}$ et Y^* par $Y^{\oplus}$ on obtient la catégorie des alphabets de Rees commutatifs ARC.

Flêches d'alphabets de Rees

Soient (X, I) et (Y, J) deux alphabets de Rees. Soit $\phi : X \to Y$ une application. La composition $i_Y \circ \phi : X \to Y^*$ se prolonge donc de façon unique en un morphisme de monoïdes $\psi : X^* \to Y^*$ tel que $\psi \circ i_X = i_Y \circ \phi$ (d'après le problème universel dont X^* est solution). On définit alors une *flêche* $\phi : (X, I) \to (Y, J)$ comme une application $\phi : X \to Y$ telle que

1. $\phi(X \cap I) \subseteq Y \cap J$;
2. $\psi^{-1}(J) \subseteq I$.

Les alphabets de Rees forment une catégorie AR. En remplaçant X^* par $X^{\oplus}$ et Y^* par $Y^{\oplus}$ on obtient la catégorie des alphabets de Rees commutatifs ARC.

Flêches d'alphabets de Rees

Soient (X, I) et (Y, J) deux alphabets de Rees. Soit $\phi : X \to Y$ une application. La composition $i_Y \circ \phi : X \to Y^*$ se prolonge donc de façon unique en un morphisme de monoïdes $\psi : X^* \to Y^*$ tel que $\psi \circ i_X = i_Y \circ \phi$ (d'après le problème universel dont X^* est solution). On définit alors une *flêche* $\phi : (X, I) \to (Y, J)$ comme une application $\phi : X \to Y$ telle que

1. $\phi(X \cap I) \subseteq Y \cap J$;
2. $\psi^{-1}(J) \subseteq I$.

Les alphabets de Rees forment une catégorie AR. En remplaçant X^* par $X^{\oplus}$ et Y^* par $Y^{\oplus}$ on obtient la catégorie des alphabets de Rees commutatifs ARC.

Flêches d'alphabets de Rees

Soient (X, I) et (Y, J) deux alphabets de Rees. Soit $\phi : X \to Y$ une application. La composition $i_Y \circ \phi : X \to Y^*$ se prolonge donc de façon unique en un morphisme de monoïdes $\psi : X^* \to Y^*$ tel que $\psi \circ i_X = i_Y \circ \phi$ (d'après le problème universel dont X^* est solution). On définit alors une *flêche* $\phi : (X, I) \to (Y, J)$ comme une application $\phi : X \to Y$ telle que

1. $\phi(X \cap I) \subseteq Y \cap J$;
2. $\psi^{-1}(J) \subseteq I$.

Les alphabets de Rees forment une catégorie AR. En remplaçant X^* par $X^{\oplus}$ et Y^* par $Y^{\oplus}$ on obtient la catégorie des alphabets de Rees commutatifs ARC.

Flêches d'alphabets de Rees

Soient (X, I) et (Y, J) deux alphabets de Rees. Soit $\phi : X \to Y$ une application. La composition $i_Y \circ \phi : X \to Y^*$ se prolonge donc de façon unique en un morphisme de monoïdes $\psi : X^* \to Y^*$ tel que $\psi \circ i_X = i_Y \circ \phi$ (d'après le problème universel dont X^* est solution). On définit alors une *flêche* $\phi : (X, I) \to (Y, J)$ comme une application $\phi : X \to Y$ telle que

1. $\phi(X \cap I) \subseteq Y \cap J$;
2. $\psi^{-1}(J) \subseteq I$.

Les alphabets de Rees forment une catégorie AR. En remplaçant X^* par $X^{\oplus}$ et Y^* par $Y^{\oplus}$ on obtient la catégorie des alphabets de Rees commutatifs ARC.

Flêches d'alphabets de Rees

Soient (X, I) et (Y, J) deux alphabets de Rees. Soit $\phi : X \to Y$ une application. La composition $i_Y \circ \phi : X \to Y^*$ se prolonge donc de façon unique en un morphisme de monoïdes $\psi : X^* \to Y^*$ tel que $\psi \circ i_X = i_Y \circ \phi$ (d'après le problème universel dont X^* est solution). On définit alors une *flêche* $\phi : (X, I) \to (Y, J)$ comme une application $\phi : X \to Y$ telle que

1. $\phi(X \cap I) \subseteq Y \cap J$;
2. $\psi^{-1}(J) \subseteq I$.

Les alphabets de Rees forment une catégorie AR. En remplaçant X^* par $X^\oplus$ et Y^* par $Y^\oplus$ on obtient la catégorie des alphabets de Rees commutatifs ARC.

Flêches d'alphabets de Rees

Soient (X, I) et (Y, J) deux alphabets de Rees. Soit $\phi : X \rightarrow Y$ une application. La composition $i_Y \circ \phi : X \rightarrow Y^*$ se prolonge donc de façon unique en un morphisme de monoïdes $\psi : X^* \rightarrow Y^*$ tel que $\psi \circ i_X = i_Y \circ \phi$ (d'après le problème universel dont X^* est solution). On définit alors une *flêche* $\phi : (X, I) \rightarrow (Y, J)$ comme une application $\phi : X \rightarrow Y$ telle que

1. $\phi(X \cap I) \subseteq Y \cap J$;
2. $\psi^{-1}(J) \subseteq I$.

Les alphabets de Rees forment une catégorie AR. En remplaçant X^* par $X^{\oplus}$ et Y^* par $Y^{\oplus}$ on obtient la catégorie des alphabets de Rees commutatifs ARC.

De façon moins rigoureuse, $\phi : (X, I) \to (Y, J)$ est une flêche de AR (resp. ARC) si, et seulement si,

1. quel que soit $x \in X \cap I$, alors $\phi(x) \in J$;
2. quels que soient $x_1, \cdots, x_n \in X$, si $x_1 \cdots x_n \notin I$, alors $\phi(x_1) \cdots \phi(x_n) \notin J$.

De façon moins rigoureuse, $\phi : (X, I) \to (Y, J)$ est une flêche de AR (resp. ARC) si, et seulement si,

1. quel que soit $x \in X \cap I$, alors $\phi(x) \in J$;
2. quels que soient $x_1, \cdots, x_n \in X$, si $x_1 \cdots x_n \notin I$, alors $\phi(x_1) \cdots \phi(x_n) \notin J$.

De façon moins rigoureuse, $\phi : (X, I) \to (Y, J)$ est une flêche de AR (resp. ARC) si, et seulement si,

1. quel que soit $x \in X \cap I$, alors $\phi(x) \in J$;
2. quels que soient $x_1, \cdots, x_n \in X$, si $x_1 \cdots x_n \notin I$, alors $\phi(x_1) \cdots \phi(x_n) \notin J$.

Soit M un monoïde à zéro (resp. commutatif). On peut prolonger l'application identique $\mathsf{id}_M : M \to M$ en un morphisme de monoïdes (ordinaires) $\pi_M : M* \to M$ (resp. $\pi_M : M\oplus \to M$) tel que $\pi_M(i_M(m)) = \mathsf{id}_M(m) = m$ pour $m \in M$ (où $i_M : M \hookrightarrow M^*$ est l'injection canonique). En d'autres termes, on considère M à la fois comme un alphabet (pour construire M^*) et comme un monoïde. L'application π_M associe à un mot $\omega = m_1 \cdots m_n$ (où $m_i \in M$), le produit (dans M) $\pi_M(\omega) = m_1 \times \cdots \times m_n$. À tout monoïde à zéro M (resp. commutatif), on peut alors associer de façon naturelle l'alphabet de Rees $(M, \pi_M^{-1}(\{0_M\}))$. Remarquons que si M est un monoïde à zéro trivial, $\pi_M^{-1}(\{0_M\}) = \emptyset$.

Soit M un monoïde à zéro (resp. commutatif). On peut prolonger l'application identique $\mathsf{id}_M : M \to M$ en un morphisme de monoïdes (ordinaires) $\pi_M : M* \to M$ (resp. $\pi_M : M\oplus \to M$) tel que $\pi_M(i_M(m)) = \mathsf{id}_M(m) = m$ pour $m \in M$ (où $i_M : M \hookrightarrow M^*$ est l'injection canonique). En d'autres termes, on considère M à la fois comme un alphabet (pour construire M^*) et comme un monoïde. L'application π_M associe à un mot $\omega = m_1 \cdots m_n$ (où $m_i \in M$), le produit (dans M) $\pi_M(\omega) = m_1 \times \cdots \times m_n$. À tout monoïde à zéro M (resp. commutatif), on peut alors associer de façon naturelle l'alphabet de Rees $(M, \pi_M^{-1}(\{0_M\}))$. Remarquons que si M est un monoïde à zéro trivial, $\pi_M^{-1}(\{0_M\}) = \emptyset$.

Soit M un monoïde à zéro (resp. commutatif). On peut prolonger l'application identique $\mathsf{id}_M : M \to M$ en un morphisme de monoïdes (ordinaires) $\pi_M : M* \to M$ (resp. $\pi_M : M\oplus \to M$) tel que $\pi_M(i_M(m)) = \mathsf{id}_M(m) = m$ pour $m \in M$ (où $i_M : M \hookrightarrow M^*$ est l'injection canonique). En d'autres termes, on considère M à la fois comme un alphabet (pour construire M^*) et comme un monoïde.

L'application π_M associe à un mot $\omega = m_1 \cdots m_n$ (où $m_i \in M$), le produit (dans M) $\pi_M(\omega) = m_1 \times \cdots \times m_n$. À tout monoïde à zéro M (resp. commutatif), on peut alors associer de façon naturelle l'alphabet de Rees $(M, \pi_M^{-1}(\{0_M\}))$. Remarquons que si M est un monoïde à zéro trivial, $\pi_M^{-1}(\{0_M\}) = \emptyset$.

Soit M un monoïde à zéro (resp. commutatif). On peut prolonger l'application identique $\mathsf{id}_M : M \to M$ en un morphisme de monoïdes (ordinaires) $\pi_M : M* \to M$ (resp. $\pi_M : M\oplus \to M$) tel que $\pi_M(i_M(m)) = \mathsf{id}_M(m) = m$ pour $m \in M$ (où $i_M : M \hookrightarrow M^*$ est l'injection canonique). En d'autres termes, on considère M à la fois comme un alphabet (pour construire M^*) et comme un monoïde. L'application π_M associe à un mot $\omega = m_1 \cdots m_n$ (où $m_i \in M$), le produit (dans M) $\pi_M(\omega) = m_1 \times \cdots \times m_n$. À tout monoïde à zéro M (resp. commutatif), on peut alors associer de façon naturelle l'alphabet de Rees $(M, \pi_M^{-1}(\{0_M\}))$. Remarquons que si M est un monoïde à zéro trivial, $\pi_M^{-1}(\{0_M\}) = \emptyset$.

Soit M un monoïde à zéro (resp. commutatif). On peut prolonger l'application identique $\mathsf{id}_M : M \to M$ en un morphisme de monoïdes (ordinaires) $\pi_M : M* \to M$ (resp. $\pi_M : M\oplus \to M$) tel que $\pi_M(i_M(m)) = \mathsf{id}_M(m) = m$ pour $m \in M$ (où $i_M : M \hookrightarrow M^*$ est l'injection canonique). En d'autres termes, on considère M à la fois comme un alphabet (pour construire M^*) et comme un monoïde. L'application π_M associe à un mot $\omega = m_1 \cdots m_n$ (où $m_i \in M$), le produit (dans M) $\pi_M(\omega) = m_1 \times \cdots \times m_n$. À tout monoïde à zéro M (resp. commutatif), on peut alors associer de façon naturelle l'alphabet de Rees $(M, \pi_M^{-1}(\{0_M\}))$. Remarquons que si M est un monoïde à zéro trivial, $\pi_M^{-1}(\{0_M\}) = \emptyset$.

Soit M un monoïde à zéro (resp. commutatif). On peut prolonger l'application identique $\mathsf{id}_M : M \to M$ en un morphisme de monoïdes (ordinaires) $\pi_M : M* \to M$ (resp. $\pi_M : M\oplus \to M$) tel que $\pi_M(i_M(m)) = \mathsf{id}_M(m) = m$ pour $m \in M$ (où $i_M : M \hookrightarrow M^*$ est l'injection canonique). En d'autres termes, on considère M à la fois comme un alphabet (pour construire M^*) et comme un monoïde. L'application π_M associe à un mot $\omega = m_1 \cdots m_n$ (où $m_i \in M$), le produit (dans M) $\pi_M(\omega) = m_1 \times \cdots \times m_n$. À tout monoïde à zéro M (resp. commutatif), on peut alors associer de façon naturelle l'alphabet de Rees $(M, \pi_M^{-1}(\{0_M\}))$. Remarquons que si M est un monoïde à zéro trivial, $\pi_M^{-1}(\{0_M\}) = \emptyset$.

De même à tout morphisme de monoïdes à zéro (resp. commutatifs) $\phi : M \to N$, on associe $\phi \circ i_{M_0} : (M_0, \pi_M^{-1}(\{0_M\})) \to (N_0, \pi_N^{-1}(\{0_N\}))$ qui est une flêche de AR (resp. ARC). De cette façon on obtient un foncteur d'oubli $U : \mathsf{MonZ} \to \mathsf{AR}$ (resp. $U : \mathsf{CMonZ} \to \mathsf{ARC}$).

De même à tout morphisme de monoïdes à zéro (resp. commutatifs) $\phi : M \to N$, on associe $\phi \circ i_{M_0} : (M_0, \pi_M^{-1}(\{0_M\})) \to (N_0, \pi_N^{-1}(\{0_N\}))$ qui est une flêche de AR (resp. ARC). De cette façon on obtient un foncteur d'oubli $U : \mathsf{MonZ} \to \mathsf{AR}$ (resp. $U : \mathsf{CMonZ} \to \mathsf{ARC}$).

Monoïde partiel (commutatif) libre

Quel que soit (X, I) un alphabet de Rees (resp. commutatif), il existe un unique monoïde à zéro $Z(X, I)$ (resp. commutatif) et une unique flêche d'alphabets de Rees (resp. commutatifs) $i_{(X,I)} : (X, I) \to U(Z(X, I))$ tels que quel que soit le monoïde à zéro M (resp. commutatif) et la flêche d'alphabets de Rees (resp. commutatifs) $\phi : (X, I) \to UM$, il existe un unique morphisme de monoïdes à zéro (resp. commutatifs) $\tilde{\phi} : Z(X, I) \to M$ tel que

$$U(\tilde{\phi}) \circ i_{(X,I)} = \phi \; .$$

(On dit que le foncteur U admet un adjoint à gauche).

Monoïde partiel (commutatif) libre

Quel que soit (X,I) un alphabet de Rees (resp. commutatif), il existe un unique monoïde à zéro $Z(X,I)$ (resp. commutatif) et une unique flêche d'alphabets de Rees (resp. commutatifs) $i_{(X,I)} : (X,I) \to U(Z(X,I))$ tels que quel que soit le monoïde à zéro M (resp. commutatif) et la flêche d'alphabets de Rees (resp. commutatifs) $\phi : (X,I) \to UM$, il existe un unique morphisme de monoïdes à zéro (resp. commutatifs) $\tilde{\phi} : Z(X,I) \to M$ tel que

$$U(\tilde{\phi}) \circ i_{(X,I)} = \phi \; .$$

(On dit que le foncteur U admet un adjoint à gauche).

Monoïde partiel (commutatif) libre

Quel que soit (X, I) un alphabet de Rees (resp. commutatif), il existe un unique monoïde à zéro $Z(X, I)$ (resp. commutatif) et une unique flêche d'alphabets de Rees (resp. commutatifs) $i_{(X,I)} : (X, I) \to U(Z(X, I))$ tels que quel que soit le monoïde à zéro M (resp. commutatif) et la flêche d'alphabets de Rees (resp. commutatifs) $\phi : (X, I) \to UM$, il existe un unique morphisme de monoïdes à zéro (resp. commutatifs) $\tilde{\phi} : Z(X, I) \to M$ tel que

$$U(\tilde{\phi}) \circ i_{(X,I)} = \phi \ .$$

(On dit que le foncteur U admet un adjoint à gauche).

Monoïde partiel (commutatif) libre

Quel que soit (X, I) un alphabet de Rees (resp. commutatif), il existe un unique monoïde à zéro $Z(X, I)$ (resp. commutatif) et une unique flêche d'alphabets de Rees (resp. commutatifs) $i_{(X,I)} : (X, I) \to U(Z(X, I))$ tels que quel que soit le monoïde à zéro M (resp. commutatif) et la flêche d'alphabets de Rees (resp. commutatifs) $\phi : (X, I) \to UM$, il existe un unique morphisme de monoïdes à zéro (resp. commutatifs) $\tilde{\phi} : Z(X, I) \to M$ tel que

$$U(\tilde{\phi}) \circ i_{(X,I)} = \phi \; .$$

(On dit que le foncteur U admet un adjoint à gauche).

Construction

1. Cas commutatif : $Z(X,I) = X^{\oplus}/I$. L'application $i_{(X,I)}$ identifie toute lettre avec un mot de longueur 1 ;
2. Cas non commutatif : $Z(X,I) = X^{*}/I$. L'application $i_{(X,I)}$ identifie toute lettre avec la masse de Dirac centrée en cette lettre.

L'application $\tilde{\phi} : Z(X,I) \to M$ est donnée par

$$\tilde{\phi}(\omega) = \begin{cases} \pi_M \circ \psi(\omega) & \text{si} \quad \omega \notin I \ , \\ 0_M & \text{si} \quad \omega \in I \end{cases}$$

où $\psi : X^{*} \to M$ (resp. $\psi : X^{\oplus} \to M$) est le morphisme de monoïdes qui étend $i_{M_0} \circ \phi : X \to M$ (rappelons que $\phi : X \to M_0$ et $i_{M_0} : M_0 \hookrightarrow M$), c'est-à-dire $\psi \circ i_X = i_{M_0} \circ \phi$.

Construction

1. Cas commutatif : $Z(X, I) = X^{\oplus}/I$. L'application $i_{(X,I)}$ identifie toute lettre avec un mot de longueur 1 ;
2. Cas non commutatif : $Z(X, I) = X^{*}/I$. L'application $i_{(X,I)}$ identifie toute lettre avec la masse de Dirac centrée en cette lettre.

L'application $\tilde{\phi} : Z(X, I) \to M$ est donnée par

$$\tilde{\phi}(\omega) = \begin{cases} \pi_M \circ \psi(\omega) & \text{si} \quad \omega \notin I \, , \\ 0_M & \text{si} \quad \omega \in I \end{cases}$$

où $\psi : X^{*} \to M$ (resp. $\psi : X^{\oplus} \to M$) est le morphisme de monoïdes qui étend $i_{M_0} \circ \phi : X \to M$ (rappelons que $\phi : X \to M_0$ et $i_{M_0} : M_0 \hookrightarrow M$), c'est-à-dire $\psi \circ i_X = i_{M_0} \circ \phi$.

Construction

1. Cas commutatif : $Z(X,I) = X^{\oplus}/I$. L'application $i_{(X,I)}$ identifie toute lettre avec un mot de longueur 1 ;
2. Cas non commutatif : $Z(X,I) = X^{*}/I$. L'application $i_{(X,I)}$ identifie toute lettre avec la masse de Dirac centrée en cette lettre.

L'application $\tilde{\phi} : Z(X,I) \to M$ est donnée par

$$\tilde{\phi}(\omega) = \begin{cases} \pi_M \circ \psi(\omega) & \text{si} \quad \omega \notin I\,, \\ 0_M & \text{si} \quad \omega \in I \end{cases}$$

où $\psi : X^* \to M$ (resp. $\psi : X^{\oplus} \to M$) est le morphisme de monoïdes qui étend $i_{M_0} \circ \phi : X \to M$ (rappelons que $\phi : X \to M_0$ et $i_{M_0} : M_0 \hookrightarrow M$), c'est-à-dire $\psi \circ i_X = i_{M_0} \circ \phi$.

Construction

1. Cas commutatif : $Z(X,I) = X^{\oplus}/I$. L'application $i_{(X,I)}$ identifie toute lettre avec un mot de longueur 1 ;
2. Cas non commutatif : $Z(X,I) = X^{*}/I$. L'application $i_{(X,I)}$ identifie toute lettre avec la masse de Dirac centrée en cette lettre.

L'application $\tilde{\phi} : Z(X,I) \to M$ est donnée par

$$\tilde{\phi}(\omega) = \begin{cases} \pi_M \circ \psi(\omega) & \text{si} \quad \omega \notin I \,, \\ 0_M & \text{si} \quad \omega \in I \end{cases}$$

où $\psi : X^{*} \to M$ (resp. $\psi : X^{\oplus} \to M$) est le morphisme de monoïdes qui étend $i_{M_0} \circ \phi : X \to M$ (rappelons que $\phi : X \to M_0$ et $i_{M_0} : M_0 \hookrightarrow M$), c'est-à-dire $\psi \circ i_X = i_{M_0} \circ \phi$.

Construction

1. Cas commutatif : $Z(X, I) = X^{\oplus}/I$. L'application $i_{(X,I)}$ identifie toute lettre avec un mot de longueur 1 ;
2. Cas non commutatif : $Z(X, I) = X^{*}/I$. L'application $i_{(X,I)}$ identifie toute lettre avec la masse de Dirac centrée en cette lettre.

L'application $\tilde{\phi} : Z(X, I) \to M$ est donnée par

$$\tilde{\phi}(\omega) = \begin{cases} \pi_M \circ \psi(\omega) & \text{si} \quad \omega \notin I\,, \\ 0_M & \text{si} \quad \omega \in I \end{cases}$$

où $\psi : X^* \to M$ (resp. $\psi : X^{\oplus} \to M$) est le morphisme de monoïdes qui étend $i_{M_0} \circ \phi : X \to M$ (rappelons que $\phi : X \to M_0$ et $i_{M_0} : M_0 \hookrightarrow M$), c'est-à-dire $\psi \circ i_X = i_{M_0} \circ \phi$.

Construction

1. Cas commutatif : $Z(X, I) = X^{\oplus}/I$. L'application $i_{(X,I)}$ identifie toute lettre avec un mot de longueur 1 ;
2. Cas non commutatif : $Z(X, I) = X^{*}/I$. L'application $i_{(X,I)}$ identifie toute lettre avec la masse de Dirac centrée en cette lettre.

L'application $\tilde{\phi} : Z(X, I) \to M$ est donnée par

$$\tilde{\phi}(\omega) = \begin{cases} \pi_M \circ \psi(\omega) & \text{si} \quad \omega \notin I\,, \\ 0_M & \text{si} \quad \omega \in I \end{cases}$$

où $\psi : X^* \to M$ (resp. $\psi : X^{\oplus} \to M$) est le morphisme de monoïdes qui étend $i_{M_0} \circ \phi : X \to M$ (rappelons que $\phi : X \to M_0$ et $i_{M_0} : M_0 \hookrightarrow M$), c'est-à-dire $\psi \circ i_X = i_{M_0} \circ \phi$.

Construction

1. Cas commutatif : $Z(X,I) = X^{\oplus}/I$. L'application $i_{(X,I)}$ identifie toute lettre avec un mot de longueur 1 ;
2. Cas non commutatif : $Z(X,I) = X^{*}/I$. L'application $i_{(X,I)}$ identifie toute lettre avec la masse de Dirac centrée en cette lettre.

L'application $\tilde{\phi} : Z(X,I) \to M$ est donnée par

$$\tilde{\phi}(\omega) = \begin{cases} \pi_M \circ \psi(\omega) & \text{si} \quad \omega \notin I \,, \\ 0_M & \text{si} \quad \omega \in I \end{cases}$$

où $\psi : X^{*} \to M$ (resp. $\psi : X^{\oplus} \to M$) est le morphisme de monoïdes qui étend $i_{M_0} \circ \phi : X \to M$ (rappelons que $\phi : X \to M_0$ et $i_{M_0} : M_0 \hookrightarrow M$), c'est-à-dire $\psi \circ i_X = i_{M_0} \circ \phi$.

Construction

1. Cas commutatif : $Z(X,I) = X^{\oplus}/I$. L'application $i_{(X,I)}$ identifie toute lettre avec un mot de longueur 1 ;
2. Cas non commutatif : $Z(X,I) = X^{*}/I$. L'application $i_{(X,I)}$ identifie toute lettre avec la masse de Dirac centrée en cette lettre.

L'application $\tilde{\phi} : Z(X,I) \to M$ est donnée par

$$\tilde{\phi}(\omega) = \begin{cases} \pi_M \circ \psi(\omega) & \text{si} \quad \omega \notin I \ , \\ 0_M & \text{si} \quad \omega \in I \end{cases}$$

où $\psi : X^{*} \to M$ (resp. $\psi : X^{\oplus} \to M$) est le morphisme de monoïdes qui étend $i_{M_0} \circ \phi : X \to M$ (rappelons que $\phi : X \to M_0$ et $i_{M_0} : M_0 \hookrightarrow M$), c'est-à-dire $\psi \circ i_X = i_{M_0} \circ \phi$.

Construction

1. Cas commutatif : $Z(X,I) = X^{\oplus}/I$. L'application $i_{(X,I)}$ identifie toute lettre avec un mot de longueur 1 ;
2. Cas non commutatif : $Z(X,I) = X^{*}/I$. L'application $i_{(X,I)}$ identifie toute lettre avec la masse de Dirac centrée en cette lettre.

L'application $\tilde{\phi} : Z(X,I) \to M$ est donnée par

$$\tilde{\phi}(\omega) = \begin{cases} \pi_M \circ \psi(\omega) & \text{si} \quad \omega \notin I \,, \\ 0_M & \text{si} \quad \omega \in I \end{cases}$$

où $\psi : X^{*} \to M$ (resp. $\psi : X^{\oplus} \to M$) est le morphisme de monoïdes qui étend $i_{M_0} \circ \phi : X \to M$ (rappelons que $\phi : X \to M_0$ et $i_{M_0} : M_0 \hookrightarrow M$), c'est-à-dire $\psi \circ i_X = i_{M_0} \circ \phi$.

Exemple

Soit $M = \{0, 1, a, b, ab, ba\}$ (les seuls produits non nuls sont $a \times b = ab$, $b \times a = ba$, $1 \times x = x = x \times 1$ pour $x \neq 0$). Considérons $X = \{a, b, c\}$ et $I = \{\omega \in X^* : \exists x \in \{a, b\}$ tel que $|\omega_x| \geq 1\}$ où $|\omega|_x$ est le nombre d'occurrences de la lettre x dans le mot ω. Il en résulte que $Z(X, I) = \{0, 1, a, b\} \cup \{\omega \in X^* : \forall x \in \{a, b\},\ |\omega|_a + |\omega|_b \leq 1\}$ (donc les éléments de $Z(X, I)$ sont tous les mots sur l'alphabet X contenant au plus une occurrence d'un élément de $\{a, b\}$). Considérons $\phi : X \to M_0$ définie par $\phi(a) = a$, $\phi(b) = b$ et $\phi(c) = 1$. Alors on peut étendre de façon unique ϕ en un morphisme de monoïdes à zéro $\tilde{\phi} : Z(X, I) \to M$. Il vérifie en particulier

$$\tilde{\phi}(c^m x c^n) = \underbrace{\phi(c) \times \cdots \times \phi(c)}_{m \text{ facteurs}} \times \phi(x) \times \underbrace{\phi(c) \times \cdots \times \phi(c)}_{n \text{ facteurs}} = x$$

quel que soit $x \in \{a, b\}$.

Exemple

Soit $M = \{0, 1, a, b, ab, ba\}$ (les seuls produits non nuls sont $a \times b = ab$, $b \times a = ba$, $1 \times x = x = x \times 1$ pour $x \neq 0$). Considérons $X = \{a, b, c\}$ et $I = \{\omega \in X^* : \exists x \in \{a, b\}$ tel que $|\omega_x| \geq 1\}$ où $|\omega|_x$ est le nombre d'occurrences de la lettre x dans le mot ω. Il en résulte que $Z(X, I) = \{0, 1, a, b\} \cup \{\omega \in X^* : \forall x \in \{a, b\},\ |\omega|_a + |\omega|_b \leq 1\}$ (donc les éléments de $Z(X, I)$ sont tous les mots sur l'alphabet X contenant au plus une occurrence d'un élément de $\{a, b\}$).
Considérons $\phi : X \to M_0$ définie par $\phi(a) = a$, $\phi(b) = b$ et $\phi(c) = 1$. Alors on peut étendre de façon unique ϕ en un morphisme de monoïdes à zéro $\tilde{\phi} : Z(X, I) \to M$. Il vérifie en particulier

$$\tilde{\phi}(c^m x c^n) = \underbrace{\phi(c) \times \cdots \times \phi(c)}_{m \text{ facteurs}} \times \phi(x) \times \underbrace{\phi(c) \times \cdots \times \phi(c)}_{n \text{ facteurs}} = x$$

quel que soit $x \in \{a, b\}$.

Exemple

Soit $M = \{0, 1, a, b, ab, ba\}$ (les seuls produits non nuls sont $a \times b = ab$, $b \times a = ba$, $1 \times x = x = x \times 1$ pour $x \neq 0$). Considérons $X = \{a, b, c\}$ et $I = \{\omega \in X^* : \exists x \in \{a, b\}$ tel que $|\omega_x| \geq 1\}$ où $|\omega|_x$ est le nombre d'occurrences de la lettre x dans le mot ω. Il en résulte que $Z(X, I) = \{0, 1, a, b\} \cup \{\omega \in X^* : \forall x \in \{a, b\},\ |\omega|_a + |\omega|_b \leq 1\}$ (donc les éléments de $Z(X, I)$ sont tous les mots sur l'alphabet X contenant au plus une occurrence d'un élément de $\{a, b\}$). Considérons $\phi : X \to M_0$ définie par $\phi(a) = a$, $\phi(b) = b$ et $\phi(c) = 1$. Alors on peut étendre de façon unique ϕ en un morphisme de monoïdes à zéro $\tilde{\phi} : Z(X, I) \to M$. Il vérifie en particulier

$$\tilde{\phi}(c^m x c^n) = \underbrace{\phi(c) \times \cdots \times \phi(c)}_{m \text{ facteurs}} \times \phi(x) \times \underbrace{\phi(c) \times \cdots \times \phi(c)}_{n \text{ facteurs}} = x$$

quel que soit $x \in \{a, b\}$.

Exemple

Soit $M = \{0, 1, a, b, ab, ba\}$ (les seuls produits non nuls sont $a \times b = ab$, $b \times a = ba$, $1 \times x = x = x \times 1$ pour $x \neq 0$). Considérons $X = \{a, b, c\}$ et $I = \{\omega \in X^* : \exists x \in \{a, b\}$ tel que $|\omega_x| \geq 1\}$ où $|\omega|_x$ est le nombre d'occurrences de la lettre x dans le mot ω. Il en résulte que $Z(X, I) = \{0, 1, a, b\} \cup \{\omega \in X^* : \forall x \in \{a, b\},\ |\omega|_a + |\omega|_b \leq 1\}$ (donc les éléments de $Z(X, I)$ sont tous les mots sur l'alphabet X contenant au plus une occurrence d'un élément de $\{a, b\}$).

Considérons $\phi : X \to M_0$ définie par $\phi(a) = a$, $\phi(b) = b$ et $\phi(c) = 1$. Alors on peut étendre de façon unique ϕ en un morphisme de monoïdes à zéro $\tilde{\phi} : Z(X, I) \to M$. Il vérifie en particulier

$$\tilde{\phi}(c^m x c^n) = \underbrace{\phi(c) \times \cdots \times \phi(c)}_{m \text{ facteurs}} \times \phi(x) \times \underbrace{\phi(c) \times \cdots \times \phi(c)}_{n \text{ facteurs}} = x$$

quel que soit $x \in \{a, b\}$.

Exemple

Soit $M = \{0, 1, a, b, ab, ba\}$ (les seuls produits non nuls sont $a \times b = ab$, $b \times a = ba$, $1 \times x = x = x \times 1$ pour $x \neq 0$). Considérons $X = \{a, b, c\}$ et $I = \{\omega \in X^* : \exists x \in \{a, b\}$ tel que $|\omega_x| \geq 1\}$ où $|\omega|_x$ est le nombre d'occurrences de la lettre x dans le mot ω. Il en résulte que $Z(X, I) = \{0, 1, a, b\} \cup \{\omega \in X^* : \forall x \in \{a, b\},\ |\omega|_a + |\omega|_b \leq 1\}$ (donc les éléments de $Z(X, I)$ sont tous les mots sur l'alphabet X contenant au plus une occurrence d'un élément de $\{a, b\}$).

Considérons $\phi : X \to M_0$ définie par $\phi(a) = a$, $\phi(b) = b$ et $\phi(c) = 1$.

Alors on peut étendre de façon unique ϕ en un morphisme de monoïdes à zéro $\tilde{\phi} : Z(X, I) \to M$. Il vérifie en particulier

$$\tilde{\phi}(c^m x c^n) = \underbrace{\phi(c) \times \cdots \times \phi(c)}_{m \text{ facteurs}} \times \phi(x) \times \underbrace{\phi(c) \times \cdots \times \phi(c)}_{n \text{ facteurs}} = x$$

quel que soit $x \in \{a, b\}$.

Exemple

Soit $M = \{0, 1, a, b, ab, ba\}$ (les seuls produits non nuls sont $a \times b = ab$, $b \times a = ba$, $1 \times x = x = x \times 1$ pour $x \neq 0$). Considérons $X = \{a, b, c\}$ et $I = \{\omega \in X^* : \exists x \in \{a, b\} \text{ tel que } |\omega_x| \geq 1\}$ où $|\omega|_x$ est le nombre d'occurrences de la lettre x dans le mot ω. Il en résulte que $Z(X, I) = \{0, 1, a, b\} \cup \{\omega \in X^* : \forall x \in \{a, b\},\ |\omega|_a + |\omega|_b \leq 1\}$ (donc les éléments de $Z(X, I)$ sont tous les mots sur l'alphabet X contenant au plus une occurrence d'un élément de $\{a, b\}$).
Considérons $\phi : X \to M_0$ définie par $\phi(a) = a$, $\phi(b) = b$ et $\phi(c) = 1$. Alors on peut étendre de façon unique ϕ en un morphisme de monoïdes à zéro $\tilde{\phi} : Z(X, I) \to M$. Il vérifie en particulier

$$\tilde{\phi}(c^m x c^n) = \underbrace{\phi(c) \times \cdots \times \phi(c)}_{m \text{ facteurs}} \times \phi(x) \times \underbrace{\phi(c) \times \cdots \times \phi(c)}_{n \text{ facteurs}} = x$$

quel que soit $x \in \{a, b\}$.

Exemple

Soit $M = \{0, 1, a, b, ab, ba\}$ (les seuls produits non nuls sont $a \times b = ab$, $b \times a = ba$, $1 \times x = x = x \times 1$ pour $x \neq 0$). Considérons $X = \{a, b, c\}$ et $I = \{\omega \in X^* : \exists x \in \{a, b\}$ tel que $|\omega_x| \geq 1\}$ où $|\omega|_x$ est le nombre d'occurrences de la lettre x dans le mot ω. Il en résulte que $Z(X, I) = \{0, 1, a, b\} \cup \{\omega \in X^* : \forall x \in \{a, b\},\ |\omega|_a + |\omega|_b \leq 1\}$ (donc les éléments de $Z(X, I)$ sont tous les mots sur l'alphabet X contenant au plus une occurrence d'un élément de $\{a, b\}$).
Considérons $\phi : X \to M_0$ définie par $\phi(a) = a$, $\phi(b) = b$ et $\phi(c) = 1$.
Alors on peut étendre de façon unique ϕ en un morphisme de monoïdes à zéro $\tilde{\phi} : Z(X, I) \to M$. Il vérifie en particulier

$$\tilde{\phi}(c^m x c^n) = \underbrace{\phi(c) \times \cdots \times \phi(c)}_{m\ facteurs} \times \phi(x) \times \underbrace{\phi(c) \times \cdots \times \phi(c)}_{n\ facteurs} = x$$

quel que soit $x \in \{a, b\}$.