Le monoïde partiel libre

Laurent Poinsot

LIPN UMR 7030 - Université Paris 13 - Institut Galilée

Sommaire de la présentation

Sommaire de la présentation

Sommaire de la présentation

Sommaire de la présentation

Sommaire de la présentation

Catégories

Une catégorie C est la donnée de $(\mathcal{O}_{\mathsf{C}}, \mathsf{hom}_{\mathsf{C}}, \mathsf{id}, \circ)$ où

1. $\mathcal{O}_{\mathsf{C}}$ est une classe, la *classe des objets de* C ;
2. Pour chaque paire (a, b) d'objets, $\mathsf{hom}_{\mathsf{C}}(a, b)$ est une classe dont les éléments sont appelés les C-*morphismes* (ou *flèches*) de a dans b. On écrit souvent $f : a \to b$ pour exprimer le fait que $f \in \mathsf{hom}_{\mathsf{C}}(a, b)$. Les classes $\mathsf{hom}_{\mathsf{C}}(a, b)$ sont deux à deux disjointes. La classe de tous les C-morphismes est notée $\mathcal{F}_{\mathsf{C}}$;
3. id est une application de $\mathcal{O}_{\mathsf{C}}$ dans $\mathcal{F}_{\mathsf{C}}$ telle que pour chaque $a \in \mathcal{O}_{\mathsf{C}}$, on a $\mathsf{id}_a : a \to a$. Cette flèche est appelée l'*identité de* a ;
4. $\circ$ est une loi de composition partiellement définie sur $\mathcal{A}_{\mathsf{C}}$: si $f : a \to b$ et $g : b \to c$, alors $g \circ f : a \to c$. Cette opération vérifie en outre :
   - Associativité : si $f : a \to b$, $g : b \to c$ et $h : c \to d$, alors $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$;
   - Élément neutre : si $f : a \to b$, alors $f \circ \mathsf{id}_a = f$ et $\mathsf{id}_b \circ f = f$.

Catégories

Une catégorie C est la donnée de $(\mathcal{O}_{\mathsf{C}}, \mathsf{hom}_{\mathsf{C}}, \mathsf{id}, \circ)$ où

1. $\mathcal{O}_{\mathsf{C}}$ est une classe, la *classe des objets de* C ;
2. Pour chaque paire (a, b) d'objets, $\mathsf{hom}_{\mathsf{C}}(a, b)$ est une classe dont les éléments sont appelés les C-*morphismes* (ou *flêches*) de a dans b. On écrit souvent $f : a \to b$ pour exprimer le fait que $f \in \mathsf{hom}_{\mathsf{C}}(a, b)$. Les classes $\mathsf{hom}_{\mathsf{C}}(a, b)$ sont deux à deux disjointes. La classe de tous les C-morphismes est notée $\mathcal{F}_{\mathsf{C}}$;
3. id est une application de $\mathcal{O}_{\mathsf{C}}$ dans $\mathcal{F}_{\mathsf{C}}$ telle que pour chaque $a \in \mathcal{O}_{\mathsf{C}}$, on a $\mathsf{id}_a : a \to a$. Cette flêche est appelée l'*identité de* a ;
4. $\circ$ est une loi de composition partiellement définie sur $\mathcal{A}_{\mathsf{C}}$: si $f : a \to b$ et $g : b \to c$, alors $g \circ f : a \to c$. Cette opération vérifie en outre :
   - Associativité : si $f : a \to b$, $g : b \to c$ et $h : c \to d$, alors $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$;
   - Élément neutre : si $f : a \to b$, alors $f \circ \mathsf{id}_a = f$ et $\mathsf{id}_b \circ f = f$.

Catégories

Une catégorie C est la donnée de $(\mathcal{O}_{\mathsf{C}}, \mathsf{hom}_{\mathsf{C}}, \mathsf{id}, \circ)$ où

1. $\mathcal{O}_{\mathsf{C}}$ est une classe, la *classe des objets de* C ;
2. Pour chaque paire (a, b) d'objets, $\mathsf{hom}_{\mathsf{C}}(a, b)$ est une classe dont les éléments sont appelés les C-*morphismes* (ou *flêches*) de a dans b. On écrit souvent $f : a \to b$ pour exprimer le fait que $f \in \mathsf{hom}_{\mathsf{C}}(a, b)$. Les classes $\mathsf{hom}_{\mathsf{C}}(a, b)$ sont deux à deux disjointes. La classe de tous les C-morphismes est notée $\mathcal{F}_{\mathsf{C}}$;
3. id est une application de $\mathcal{O}_{\mathsf{C}}$ dans $\mathcal{F}_{\mathsf{C}}$ telle que pour chaque $a \in \mathcal{O}_{\mathsf{C}}$, on a $\mathsf{id}_a : a \to a$. Cette flêche est appelée l'*identité de* a ;
4. $\circ$ est une loi de composition partiellement définie sur $\mathcal{A}_{\mathsf{C}}$: si $f : a \to b$ et $g : b \to c$, alors $g \circ f : a \to c$. Cette opération vérifie en outre :
   - Associativité : si $f : a \to b$, $g : b \to c$ et $h : c \to d$, alors $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$;
   - Élément neutre : si $f : a \to b$, alors $f \circ \mathsf{id}_a = f$ et $\mathsf{id}_b \circ f = f$.

Catégories

Une catégorie C est la donnée de $(\mathcal{O}_{\mathsf{C}}, \mathsf{hom}_{\mathsf{C}}, \mathsf{id}, \circ)$ où

1. $\mathcal{O}_{\mathsf{C}}$ est une classe, la *classe des objets de* C ;
2. Pour chaque paire (a, b) d'objets, $\mathsf{hom}_{\mathsf{C}}(a, b)$ est une classe dont les éléments sont appelés les C-*morphismes* (ou *flêches*) de a dans b. On écrit souvent $f : a \to b$ pour exprimer le fait que $f \in \mathsf{hom}_{\mathsf{C}}(a, b)$. Les classes $\mathsf{hom}_{\mathsf{C}}(a, b)$ sont deux à deux disjointes. La classe de tous les C-morphismes est notée $\mathcal{F}_{\mathsf{C}}$;
3. id est une application de $\mathcal{O}_{\mathsf{C}}$ dans $\mathcal{F}_{\mathsf{C}}$ telle que pour chaque $a \in \mathcal{O}_{\mathsf{C}}$, on a $\mathsf{id}_a : a \to a$. Cette flêche est appelée l'*identité de* a ;
4. $\circ$ est une loi de composition partiellement définie sur $\mathcal{A}_{\mathsf{C}}$: si $f : a \to b$ et $g : b \to c$, alors $g \circ f : a \to c$. Cette opération vérifie en outre :
   - Associativité : si $f : a \to b$, $g : b \to c$ et $h : c \to d$, alors $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$;
   - Élément neutre : si $f : a \to b$, alors $f \circ \mathsf{id}_a = f$ et $\mathsf{id}_b \circ f = f$.

Catégories

Une catégorie C est la donnée de $(\mathcal{O}_{\mathsf{C}}, \mathsf{hom}_{\mathsf{C}}, \mathsf{id}, \circ)$ où

1. $\mathcal{O}_{\mathsf{C}}$ est une classe, la *classe des objets de* C ;
2. Pour chaque paire (a, b) d'objets, $\mathsf{hom}_{\mathsf{C}}(a, b)$ est une classe dont les éléments sont appelés les C-*morphismes* (ou *flêches*) de a dans b. On écrit souvent $f : a \to b$ pour exprimer le fait que $f \in \mathsf{hom}_{\mathsf{C}}(a, b)$. Les classes $\mathsf{hom}_{\mathsf{C}}(a, b)$ sont deux à deux disjointes. La classe de tous les C-morphismes est notée $\mathcal{F}_{\mathsf{C}}$;
3. id est une application de $\mathcal{O}_{\mathsf{C}}$ dans $\mathcal{F}_{\mathsf{C}}$ telle que pour chaque $a \in \mathcal{O}_{\mathsf{C}}$, on a $\mathsf{id}_a : a \to a$. Cette flêche est appelée l'*identité de* a ;
4. $\circ$ est une loi de composition partiellement définie sur $\mathcal{A}_{\mathsf{C}}$: si $f : a \to b$ et $g : b \to c$, alors $g \circ f : a \to c$. Cette opération vérifie en outre :
   - Associativité : si $f : a \to b$, $g : b \to c$ et $h : c \to d$, alors $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$;
   - Élément neutre : si $f : a \to b$, alors $f \circ \mathsf{id}_a = f$ et $\mathsf{id}_b \circ f = f$.

Catégories

Une catégorie C est la donnée de $(\mathcal{O}_{\mathsf{C}}, \mathsf{hom}_{\mathsf{C}}, \mathsf{id}, \circ)$ où

1. $\mathcal{O}_{\mathsf{C}}$ est une classe, la *classe des objets de* C ;
2. Pour chaque paire (a, b) d'objets, $\mathsf{hom}_{\mathsf{C}}(a, b)$ est une classe dont les éléments sont appelés les C-*morphismes* (ou *flêches*) de a dans b. On écrit souvent $f : a \to b$ pour exprimer le fait que $f \in \mathsf{hom}_{\mathsf{C}}(a, b)$. Les classes $\mathsf{hom}_{\mathsf{C}}(a, b)$ sont deux à deux disjointes. La classe de tous les C-morphismes est notée $\mathcal{F}_{\mathsf{C}}$;
3. id est une application de $\mathcal{O}_{\mathsf{C}}$ dans $\mathcal{F}_{\mathsf{C}}$ telle que pour chaque $a \in \mathcal{O}_{\mathsf{C}}$, on a $\mathsf{id}_a : a \to a$. Cette flêche est appelée l'*identité de* a ;
4. $\circ$ est une loi de composition partiellement définie sur $\mathcal{A}_{\mathsf{C}}$: si $f : a \to b$ et $g : b \to c$, alors $g \circ f : a \to c$. Cette opération vérifie en outre :
   - Associativité : si $f : a \to b$, $g : b \to c$ et $h : c \to d$, alors $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$;
   - Élément neutre : si $f : a \to b$, alors $f \circ \mathsf{id}_a = f$ et $\mathsf{id}_b \circ f = f$.

Catégories

Une catégorie C est la donnée de $(\mathcal{O}_{\mathsf{C}}, \mathsf{hom}_{\mathsf{C}}, \mathsf{id}, \circ)$ où

1. $\mathcal{O}_{\mathsf{C}}$ est une classe, la *classe des objets de* C ;
2. Pour chaque paire (a, b) d'objets, $\mathsf{hom}_{\mathsf{C}}(a, b)$ est une classe dont les éléments sont appelés les C-*morphismes* (ou *flêches*) de a dans b. On écrit souvent $f : a \to b$ pour exprimer le fait que $f \in \mathsf{hom}_{\mathsf{C}}(a, b)$. Les classes $\mathsf{hom}_{\mathsf{C}}(a, b)$ sont deux à deux disjointes. La classe de tous les C-morphismes est notée $\mathcal{F}_{\mathsf{C}}$;
3. id est une application de $\mathcal{O}_{\mathsf{C}}$ dans $\mathcal{F}_{\mathsf{C}}$ telle que pour chaque $a \in \mathcal{O}_{\mathsf{C}}$, on a $\mathsf{id}_a : a \to a$. Cette flêche est appelée l'*identité de* a ;
4. $\circ$ est une loi de composition partiellement définie sur $\mathcal{A}_{\mathsf{C}}$: si $f : a \to b$ et $g : b \to c$, alors $g \circ f : a \to c$. Cette opération vérifie en outre :
   - Associativité : si $f : a \to b$, $g : b \to c$ et $h : c \to d$, alors $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$;
   - Élément neutre : si $f : a \to b$, alors $f \circ \mathsf{id}_a = f$ et $\mathsf{id}_b \circ f = f$.

Catégories

Une catégorie C est la donnée de $(\mathcal{O}_{\mathsf{C}}, \mathsf{hom}_{\mathsf{C}}, \mathsf{id}, \circ)$ où

1. $\mathcal{O}_{\mathsf{C}}$ est une classe, la *classe des objets de* C ;
2. Pour chaque paire (a, b) d'objets, $\mathsf{hom}_{\mathsf{C}}(a, b)$ est une classe dont les éléments sont appelés les C-*morphismes* (ou *flêches*) de a dans b. On écrit souvent $f : a \to b$ pour exprimer le fait que $f \in \mathsf{hom}_{\mathsf{C}}(a, b)$. Les classes $\mathsf{hom}_{\mathsf{C}}(a, b)$ sont deux à deux disjointes. La classe de tous les C-morphismes est notée $\mathcal{F}_{\mathsf{C}}$;
3. id est une application de $\mathcal{O}_{\mathsf{C}}$ dans $\mathcal{F}_{\mathsf{C}}$ telle que pour chaque $a \in \mathcal{O}_{\mathsf{C}}$, on a $\mathsf{id}_a : a \to a$. Cette flêche est appelée l'*identité de* a ;
4. $\circ$ est une loi de composition partiellement définie sur $\mathcal{A}_{\mathsf{C}}$: si $f : a \to b$ et $g : b \to c$, alors $g \circ f : a \to c$. Cette opération vérifie en outre :
   - Associativité : si $f : a \to b$, $g : b \to c$ et $h : c \to d$, alors $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$;
   - Élément neutre : si $f : a \to b$, alors $f \circ \mathsf{id}_a = f$ et $\mathsf{id}_b \circ f = f$.

Catégories

Une catégorie C est la donnée de $(\mathcal{O}_{\mathsf{C}}, \mathsf{hom}_{\mathsf{C}}, \mathsf{id}, \circ)$ où

1. $\mathcal{O}_{\mathsf{C}}$ est une classe, la *classe des objets de* C ;
2. Pour chaque paire (a, b) d'objets, $\mathsf{hom}_{\mathsf{C}}(a, b)$ est une classe dont les éléments sont appelés les C-*morphismes* (ou *flêches*) de a dans b. On écrit souvent $f : a \to b$ pour exprimer le fait que $f \in \mathsf{hom}_{\mathsf{C}}(a, b)$. Les classes $\mathsf{hom}_{\mathsf{C}}(a, b)$ sont deux à deux disjointes. La classe de tous les C-morphismes est notée $\mathcal{F}_{\mathsf{C}}$;
3. id est une application de $\mathcal{O}_{\mathsf{C}}$ dans $\mathcal{F}_{\mathsf{C}}$ telle que pour chaque $a \in \mathcal{O}_{\mathsf{C}}$, on a $\mathsf{id}_a : a \to a$. Cette flêche est appelée l'*identité de* a ;
4. $\circ$ est une loi de composition partiellement définie sur $\mathcal{A}_{\mathsf{C}}$: si $f : a \to b$ et $g : b \to c$, alors $g \circ f : a \to c$. Cette opération vérifie en outre :
   - Associativité : si $f : a \to b$, $g : b \to c$ et $h : c \to d$, alors $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$;
   - Élément neutre : si $f : a \to b$, alors $f \circ \mathsf{id}_a = f$ et $\mathsf{id}_b \circ f = f$.

Catégories

Une catégorie C est la donnée de $(\mathcal{O}_{\mathsf{C}}, \mathsf{hom}_{\mathsf{C}}, \mathsf{id}, \circ)$ où

1. $\mathcal{O}_{\mathsf{C}}$ est une classe, la *classe des objets de* C ;
2. Pour chaque paire (a, b) d'objets, $\mathsf{hom}_{\mathsf{C}}(a, b)$ est une classe dont les éléments sont appelés les C-*morphismes* (ou *flêches*) de a dans b. On écrit souvent $f : a \to b$ pour exprimer le fait que $f \in \mathsf{hom}_{\mathsf{C}}(a, b)$. Les classes $\mathsf{hom}_{\mathsf{C}}(a, b)$ sont deux à deux disjointes. La classe de tous les C-morphismes est notée $\mathcal{F}_{\mathsf{C}}$;
3. id est une application de $\mathcal{O}_{\mathsf{C}}$ dans $\mathcal{F}_{\mathsf{C}}$ telle que pour chaque $a \in \mathcal{O}_{\mathsf{C}}$, on a $\mathsf{id}_a : a \to a$. Cette flêche est appelée l'*identité de* a ;
4. $\circ$ est une loi de composition partiellement définie sur $\mathcal{A}_{\mathsf{C}}$: si $f : a \to b$ et $g : b \to c$, alors $g \circ f : a \to c$. Cette opération vérifie en outre :
   - Associativité : si $f : a \to b$, $g : b \to c$ et $h : c \to d$, alors $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$;
   - Élément neutre : si $f : a \to b$, alors $f \circ \mathsf{id}_a = f$ et $\mathsf{id}_b \circ f = f$.

Catégories

Une catégorie C est la donnée de $(\mathcal{O}_{\mathsf{C}}, \mathsf{hom}_{\mathsf{C}}, \mathsf{id}, \circ)$ où

1. $\mathcal{O}_{\mathsf{C}}$ est une classe, la *classe des objets de* C ;
2. Pour chaque paire (a, b) d'objets, $\mathsf{hom}_{\mathsf{C}}(a, b)$ est une classe dont les éléments sont appelés les C-*morphismes* (ou *flêches*) de a dans b. On écrit souvent $f : a \to b$ pour exprimer le fait que $f \in \mathsf{hom}_{\mathsf{C}}(a, b)$. Les classes $\mathsf{hom}_{\mathsf{C}}(a, b)$ sont deux à deux disjointes. La classe de tous les C-morphismes est notée $\mathcal{F}_{\mathsf{C}}$;
3. id est une application de $\mathcal{O}_{\mathsf{C}}$ dans $\mathcal{F}_{\mathsf{C}}$ telle que pour chaque $a \in \mathcal{O}_{\mathsf{C}}$, on a $\mathsf{id}_a : a \to a$. Cette flêche est appelée l'*identité de* a ;
4. $\circ$ est une loi de composition partiellement définie sur $\mathcal{A}_{\mathsf{C}}$: si $f : a \to b$ et $g : b \to c$, alors $g \circ f : a \to c$. Cette opération vérifie en outre :
   - Associativité : si $f : a \to b$, $g : b \to c$ et $h : c \to d$, alors $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$;
   - Élément neutre : si $f : a \to b$, alors $f \circ \mathsf{id}_a = f$ et $\mathsf{id}_b \circ f = f$.

Catégories

Une catégorie C est la donnée de $(\mathcal{O}_{\mathsf{C}}, \mathsf{hom}_{\mathsf{C}}, \mathsf{id}, \circ)$ où

1. $\mathcal{O}_{\mathsf{C}}$ est une classe, la *classe des objets de* C ;
2. Pour chaque paire (a, b) d'objets, $\mathsf{hom}_{\mathsf{C}}(a, b)$ est une classe dont les éléments sont appelés les C-*morphismes* (ou *flêches*) de a dans b. On écrit souvent $f : a \to b$ pour exprimer le fait que $f \in \mathsf{hom}_{\mathsf{C}}(a, b)$. Les classes $\mathsf{hom}_{\mathsf{C}}(a, b)$ sont deux à deux disjointes. La classe de tous les C-morphismes est notée $\mathcal{F}_{\mathsf{C}}$;
3. id est une application de $\mathcal{O}_{\mathsf{C}}$ dans $\mathcal{F}_{\mathsf{C}}$ telle que pour chaque $a \in \mathcal{O}_{\mathsf{C}}$, on a $\mathsf{id}_a : a \to a$. Cette flêche est appelée l'*identité de* a ;
4. $\circ$ est une loi de composition partiellement définie sur $\mathcal{A}_{\mathsf{C}}$: si $f : a \to b$ et $g : b \to c$, alors $g \circ f : a \to c$. Cette opération vérifie en outre :
   - Associativité : si $f : a \to b$, $g : b \to c$ et $h : c \to d$, alors $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$;
   - Élément neutre : si $f : a \to b$, alors $f \circ \mathsf{id}_a = f$ et $\mathsf{id}_b \circ f = f$.

Isomorphismes

Une flêche $f : a \to b$ (dans une certaine catégorie) est un *isomorphisme* si, et seulement si, il existe $g : b \to a$ tel que $g \circ f = \mathsf{id}_a$ et $f \circ g = \mathsf{id}_b$.

Exemples

1. La catégorie Ens des ensembles avec les applications ensemblistes comme flêches ;
2. La catégorie Mon des monoïdes avec les homomorphismes de monoïdes comme flêche ;
3. Soit $M \in \mathcal{O}_{\mathsf{Mon}}$, alors c’est une catégorie dans laquelle la composition des flêches (qui sont ici les éléments de M) est totalement définie.

Exemples

1. La catégorie Ens des ensembles avec les applications ensemblistes comme flêches ;
2. La catégorie Mon des monoïdes avec les homomorphismes de monoïdes comme flêche ;
3. Soit $M \in \mathcal{O}_{\mathsf{Mon}}$, alors c’est une catégorie dans laquelle la composition des flêches (qui sont ici les éléments de M) est totalement définie.

Exemples

1. La catégorie Ens des ensembles avec les applications ensemblistes comme flêches ;
2. La catégorie Mon des monoïdes avec les homomorphismes de monoïdes comme flêche ;
3. Soit $M \in \mathcal{O}_{\mathsf{Mon}}$, alors c'est une catégorie dans laquelle la composition des flêches (qui sont ici les éléments de M) est totalement définie.

Foncteurs

Soit C_1 et C_2 deux catégories. Un *foncteur* de C_1 dans C_2 est la donnée d'une *fonction d'objets* $\mathsf{F}_{\mathcal{O}} : \mathcal{O}_{\mathsf{C}_1} \to \mathcal{O}_{\mathsf{C}_2}$ et d'une *fonction de flêches* $\mathsf{F}_{\mathcal{F}} : \mathcal{F}_{\mathsf{C}_1} \to \mathcal{F}_{\mathsf{C}_2}$ telles que quelle que soit $f \in \mathsf{hom}_{\mathsf{C}_1}(a, b)$, on a $\mathsf{F}_{\mathcal{F}}(f) \in \mathsf{hom}_{\mathsf{C}_2}(F_{\mathcal{O}}(a), F_{\mathcal{O}}(b))$ ainsi que

1. $\mathsf{F}_{\mathcal{F}}(\mathsf{id}_a) = \mathsf{id}_{\mathsf{F}_{\mathcal{O}}(a)}$;
2. $\mathsf{F}_{\mathcal{F}}(g \circ f) = \mathsf{F}_{\mathcal{F}}(g) \circ \mathsf{F}_{\mathcal{F}}(f)$ dès que $g \circ f$ est défini dans C_1

On utilise fréquemment la même nom F pour désigner les deux fonctions, et la notation “ $\mathsf{F} : \mathsf{C}_1 \to \mathsf{C}_2$ ” permet d'indiquer que F est un foncteur entre les deux catégories C_1 et C_2.

Foncteurs

Soit C_1 et C_2 deux catégories. Un *foncteur* de C_1 dans C_2 est la donnée d'une *fonction d'objets* $\mathsf{F}_{\mathcal{O}} : \mathcal{O}_{\mathsf{C}_1} \to \mathcal{O}_{\mathsf{C}_2}$ et d'une *fonction de flêches* $\mathsf{F}_{\mathcal{F}} : \mathcal{F}_{\mathsf{C}_1} \to \mathcal{F}_{\mathsf{C}_2}$ telles que quelle que soit $f \in \mathsf{hom}_{\mathsf{C}_1}(a, b)$, on a $\mathsf{F}_{\mathcal{F}}(f) \in \mathsf{hom}_{\mathsf{C}_2}(F_{\mathcal{O}}(a), F_{\mathcal{O}}(b))$ ainsi que

1. $\mathsf{F}_{\mathcal{F}}(\mathsf{id}_a) = \mathsf{id}_{\mathsf{F}_{\mathcal{O}}(a)}$;
2. $\mathsf{F}_{\mathcal{F}}(g \circ f) = \mathsf{F}_{\mathcal{F}}(g) \circ \mathsf{F}_{\mathcal{F}}(f)$ dès que $g \circ f$ est défini dans C_1

On utilise fréquemment la même nom F pour désigner les deux fonctions, et la notation “ $\mathsf{F} : \mathsf{C}_1 \to \mathsf{C}_2$ ” permet d'indiquer que F est un foncteur entre les deux catégories C_1 et C_2.

Foncteurs

Soit C_1 et C_2 deux catégories. Un *foncteur* de C_1 dans C_2 est la donnée d'une *fonction d'objets* $\mathsf{F}_{\mathcal{O}} : \mathcal{O}_{\mathsf{C}_1} \to \mathcal{O}_{\mathsf{C}_2}$ et d'une *fonction de flêches* $\mathsf{F}_{\mathcal{F}} : \mathcal{F}_{\mathsf{C}_1} \to \mathcal{F}_{\mathsf{C}_2}$ telles que quelle que soit $f \in \mathsf{hom}_{\mathsf{C}_1}(a, b)$, on a $\mathsf{F}_{\mathcal{F}}(f) \in \mathsf{hom}_{\mathsf{C}_2}(F_{\mathcal{O}}(a), F_{\mathcal{O}}(b))$ ainsi que

1. $\mathsf{F}_{\mathcal{F}}(\mathsf{id}_a) = \mathsf{id}_{\mathsf{F}_{\mathcal{O}}(a)}$;
2. $\mathsf{F}_{\mathcal{F}}(g \circ f) = \mathsf{F}_{\mathcal{F}}(g) \circ \mathsf{F}_{\mathcal{F}}(f)$ dès que $g \circ f$ est défini dans C_1

On utilise fréquemment la même nom F pour désigner les deux fonctions, et la notation " $\mathsf{F} : \mathsf{C}_1 \to \mathsf{C}_2$ " permet d'indiquer que F est un foncteur entre les deux catégories C_1 et C_2.

Foncteurs

Soit C_1 et C_2 deux catégories. Un *foncteur* de C_1 dans C_2 est la donnée d'une *fonction d'objets* $\mathsf{F}_{\mathcal{O}} : \mathcal{O}_{\mathsf{C}_1} \to \mathcal{O}_{\mathsf{C}_2}$ et d'une *fonction de flêches* $\mathsf{F}_{\mathcal{F}} : \mathcal{F}_{\mathsf{C}_1} \to \mathcal{F}_{\mathsf{C}_2}$ telles que quelle que soit $f \in \mathsf{hom}_{\mathsf{C}_1}(a,b)$, on a $\mathsf{F}_{\mathcal{F}}(f) \in \mathsf{hom}_{\mathsf{C}_2}(F_{\mathcal{O}}(a), F_{\mathcal{O}}(b))$ ainsi que

1. $\mathsf{F}_{\mathcal{F}}(\mathsf{id}_a) = \mathsf{id}_{\mathsf{F}_{\mathcal{O}}(a)}$;
2. $\mathsf{F}_{\mathcal{F}}(g \circ f) = \mathsf{F}_{\mathcal{F}}(g) \circ \mathsf{F}_{\mathcal{F}}(f)$ dès que $g \circ f$ est défini dans C_1

On utilise fréquemment la même nom F pour désigner les deux fonctions, et la notation “ $\mathsf{F} : \mathsf{C}_1 \to \mathsf{C}_2$ ” permet d'indiquer que F est un foncteur entre les deux catégories C_1 et C_2.

Foncteurs

Soit C_1 et C_2 deux catégories. Un *foncteur* de C_1 dans C_2 est la donnée d'une *fonction d'objets* $\mathsf{F}_{\mathcal{O}} : \mathcal{O}_{\mathsf{C}_1} \to \mathcal{O}_{\mathsf{C}_2}$ et d'une *fonction de flêches* $\mathsf{F}_{\mathcal{F}} : \mathcal{F}_{\mathsf{C}_1} \to \mathcal{F}_{\mathsf{C}_2}$ telles que quelle que soit $f \in \mathsf{hom}_{\mathsf{C}_1}(a, b)$, on a $\mathsf{F}_{\mathcal{F}}(f) \in \mathsf{hom}_{\mathsf{C}_2}(F_{\mathcal{O}}(a), F_{\mathcal{O}}(b))$ ainsi que

1. $\mathsf{F}_{\mathcal{F}}(\mathsf{id}_a) = \mathsf{id}_{\mathsf{F}_{\mathcal{O}}(a)}$;
2. $\mathsf{F}_{\mathcal{F}}(g \circ f) = \mathsf{F}_{\mathcal{F}}(g) \circ \mathsf{F}_{\mathcal{F}}(f)$ dès que $g \circ f$ est défini dans C_1

On utilise fréquemment la même nom F pour désigner les deux fonctions, et la notation “ $\mathsf{F} : \mathsf{C}_1 \to \mathsf{C}_2$ ” permet d'indiquer que F est un foncteur entre les deux catégories C_1 et C_2.

Foncteurs

Soit C_1 et C_2 deux catégories. Un *foncteur* de C_1 dans C_2 est la donnée d'une *fonction d'objets* $\mathsf{F}_{\mathcal{O}} : \mathcal{O}_{\mathsf{C}_1} \rightarrow \mathcal{O}_{\mathsf{C}_2}$ et d'une *fonction de flêches* $\mathsf{F}_{\mathcal{F}} : \mathcal{F}_{\mathsf{C}_1} \rightarrow \mathcal{F}_{\mathsf{C}_2}$ telles que quelle que soit $f \in \mathsf{hom}_{\mathsf{C}_1}(a, b)$, on a $\mathsf{F}_{\mathcal{F}}(f) \in \mathsf{hom}_{\mathsf{C}_2}(F_{\mathcal{O}}(a), F_{\mathcal{O}}(b))$ ainsi que

1. $\mathsf{F}_{\mathcal{F}}(\mathsf{id}_a) = \mathsf{id}_{\mathsf{F}_{\mathcal{O}}(a)}$;
2. $\mathsf{F}_{\mathcal{F}}(g \circ f) = \mathsf{F}_{\mathcal{F}}(g) \circ \mathsf{F}_{\mathcal{F}}(f)$ dès que $g \circ f$ est défini dans C_1

On utilise fréquemment la même nom F pour désigner les deux fonctions, et la notation “ $\mathsf{F} : \mathsf{C}_1 \rightarrow \mathsf{C}_2$ ” permet d'indiquer que F est un foncteur entre les deux catégories C_1 et C_2.

Fonceurs d'oubli

Un foncteur qui “ oublie ” une partie de (ou toute la) structure d'un objet algébrique est appelé *foncteur d'oubli*. Par exemple, le foncteur $\mathsf{U} : \mathsf{Mon} \rightarrow \mathsf{Ens}$ qui associe à tout monoïde son ensemble sous-jacent, et à tout homomorphisme de monoïdes l'application ensembliste sous-jacente est un foncteur d'oubli.

Foncteurs d’oubli

Un foncteur qui “ oublie ” une partie de (ou toute la) structure d’un objet algébrique est appelé *foncteur d’oubli*. Par exemple, le foncteur $\mathsf{U} : \mathsf{Mon} \to \mathsf{Ens}$ qui associe à tout monoïde son ensemble sous-jacent, et à tout homomorphisme de monoïdes l’application ensembliste sous-jacente est un foncteur d’oubli.

Composition des foncteurs

Les foncteurs peuvent être composés. Soient $\mathsf{F} : \mathsf{C}_1 \to \mathsf{C}_2$ et $\mathsf{G} : \mathsf{C}_2 \to \mathsf{C}_3$ deux foncteurs. Alors on définit le foncteur $\mathsf{G} \circ \mathsf{F} : \mathsf{C}_1 \to \mathsf{C}_3$ par

$$(\mathsf{G} \circ \mathsf{F})(a) := \mathsf{G}(\mathsf{F}a) \text{ et } (\mathsf{G} \circ \mathsf{F})(f) := \mathsf{G}(\mathsf{F}f) .$$

Comme pour les flêches d'une catégorie, la composition des foncteurs est associative à condition quelle soit définie.
Pour chaque catégorie C, il existe un *foncteur identité* $\mathsf{I}_{\mathsf{C}} : \mathsf{C} \to \mathsf{C}$ qui joue le rôle de l'identité pour cette composition (rôle identique à celui joué par la flêche identité dans une catégorie).

Composition des foncteurs

Les foncteurs peuvent être composés. Soient $\mathsf{F} : \mathsf{C}_1 \to \mathsf{C}_2$ et $\mathsf{G} : \mathsf{C}_2 \to \mathsf{C}_3$ deux foncteurs. Alors on définit le foncteur $\mathsf{G} \circ \mathsf{F} : \mathsf{C}_1 \to \mathsf{C}_3$ par

$$(\mathsf{G} \circ \mathsf{F})(a) := \mathsf{G}(\mathsf{F}a) \text{ et } (\mathsf{G} \circ \mathsf{F})(f) := \mathsf{G}(\mathsf{F}f)\ .$$

Comme pour les flêches d'une catégorie, la composition des foncteurs est associative à condition quelle soit définie.

Pour chaque catégorie C, il existe un *foncteur identité* $\mathsf{I}_{\mathsf{C}} : \mathsf{C} \to \mathsf{C}$ qui joue le rôle de l'identité pour cette composition (rôle identique à celui joué par la flêche identité dans une catégorie).

Composition des foncteurs

Les foncteurs peuvent être composés. Soient $\mathsf{F} : \mathsf{C}_1 \to \mathsf{C}_2$ et $\mathsf{G} : \mathsf{C}_2 \to \mathsf{C}_3$ deux foncteurs. Alors on définit le foncteur $\mathsf{G} \circ \mathsf{F} : \mathsf{C}_1 \to \mathsf{C}_3$ par

$$(\mathsf{G} \circ \mathsf{F})(a) := \mathsf{G}(\mathsf{F}a) \text{ et } (\mathsf{G} \circ \mathsf{F})(f) := \mathsf{G}(\mathsf{F}f) \; .$$

Comme pour les flêches d'une catégorie, la composition des foncteurs est associative à condition quelle soit définie.
Pour chaque catégorie C, il existe un *foncteur identité* $\mathsf{I}_{\mathsf{C}} : \mathsf{C} \to \mathsf{C}$ qui joue le rôle de l'identité pour cette composition (rôle identique à celui joué par la flêche identité dans une catégorie).

Composition des foncteurs

Les foncteurs peuvent être composés. Soient $\mathsf{F} : \mathsf{C}_1 \to \mathsf{C}_2$ et $\mathsf{G} : \mathsf{C}_2 \to \mathsf{C}_3$ deux foncteurs. Alors on définit le foncteur $\mathsf{G} \circ \mathsf{F} : \mathsf{C}_1 \to \mathsf{C}_3$ par

$$(\mathsf{G} \circ \mathsf{F})(a) := \mathsf{G}(\mathsf{F}a) \text{ et } (\mathsf{G} \circ \mathsf{F})(f) := \mathsf{G}(\mathsf{F}f)\ .$$

Comme pour les flêches d'une catégorie, la composition des foncteurs est associative à condition quelle soit définie.
Pour chaque catégorie C, il existe un *foncteur identité* $\mathsf{I}_\mathsf{C} : \mathsf{C} \to \mathsf{C}$ qui joue le rôle de l'identité pour cette composition (rôle identique à celui joué par la flêche identité dans une catégorie).

Composition des foncteurs

Les foncteurs peuvent être composés. Soient $\mathsf{F} : \mathsf{C}_1 \to \mathsf{C}_2$ et $\mathsf{G} : \mathsf{C}_2 \to \mathsf{C}_3$ deux foncteurs. Alors on définit le foncteur $\mathsf{G} \circ \mathsf{F} : \mathsf{C}_1 \to \mathsf{C}_3$ par

$$(\mathsf{G} \circ \mathsf{F})(a) := \mathsf{G}(\mathsf{F}a) \text{ et } (\mathsf{G} \circ \mathsf{F})(f) := \mathsf{G}(\mathsf{F}f) \ .$$

Comme pour les flêches d'une catégorie, la composition des foncteurs est associative à condition quelle soit définie.
Pour chaque catégorie C, il existe un *foncteur identité* $\mathsf{I}_{\mathsf{C}} : \mathsf{C} \to \mathsf{C}$ qui joue le rôle de l'identité pour cette composition (rôle identique à celui joué par la flêche identité dans une catégorie).

Isomorphisme entre catégories

Un foncteur $\mathsf{F} : \mathsf{C}_1 \to \mathsf{C}_2$ est un *isomorphisme* si, et seulement si, il existe un foncteur $\mathsf{G} : \mathsf{C}_2 \to \mathsf{C}_1$ tel que $\mathsf{G} \circ \mathsf{F} = \mathsf{I}_{\mathsf{C}_1}$ et $\mathsf{F} \circ \mathsf{G} = \mathsf{I}_{\mathsf{C}_2}$.

Transformation naturelle

Soient $\mathsf{F}, \mathsf{G} : \mathsf{C}_1 \to \mathsf{C}_2$ deux foncteurs. Une *transformation naturelle*, que l'on note $\tau : \mathsf{F} \to \mathsf{G}$ est une application qui à chaque objet $a \in \mathcal{O}_{\mathsf{C}_1}$ associe une flèche $\tau_a \in \mathsf{hom}_{\mathsf{C}_2}(\mathsf{F}a, \mathsf{G}a)$ telle que quelle que soit $f \in \mathsf{hom}_{\mathsf{C}_1}(a, b)$, on ait

$$\tau_b \circ (\mathsf{F}f) = (\mathsf{G}f) \circ \tau_a \ .$$

Une transformation naturelle $\tau : \mathsf{F} \to \mathsf{G}$, avec $\mathsf{F}, \mathsf{G} : \mathsf{C}_1 \to \mathsf{C}_2$, est un *isomorphisme naturel* si, et seulement si, quel que soit l'objet a de la catégorie C_1, τ_a est un isomorphisme dans la catégorie C_2.

Transformation naturelle

Soient $\mathsf{F}, \mathsf{G} : \mathsf{C}_1 \to \mathsf{C}_2$ deux foncteurs. Une *transformation naturelle*, que l'on note $\tau : \mathsf{F} \to \mathsf{G}$ est une application qui à chaque objet $a \in \mathcal{O}_{\mathsf{C}_1}$ associe une flêche $\tau_a \in \mathsf{hom}_{\mathsf{C}_2}(\mathsf{F}a, \mathsf{G}a)$ telle que quelle que soit $f \in \mathsf{hom}_{\mathsf{C}_1}(a, b)$, on ait

$$\tau_b \circ (\mathsf{F}f) = (\mathsf{G}f) \circ \tau_a \ .$$

Une transformation naturelle $\tau : \mathsf{F} \to \mathsf{G}$, avec $\mathsf{F}, \mathsf{G} : \mathsf{C}_1 \to \mathsf{C}_2$, est un *isomorphisme naturel* si, et seulement si, quel que soit l'objet a de la catégorie C_1, τ_a est un isomorphisme dans la catégorie C_2.

Transformation naturelle

Soient $\mathsf{F}, \mathsf{G} : \mathsf{C}_1 \to \mathsf{C}_2$ deux foncteurs. Une *transformation naturelle*, que l'on note $\tau : \mathsf{F} \to \mathsf{G}$ est une application qui à chaque objet $a \in \mathcal{O}_{\mathsf{C}_1}$ associe une flêche $\tau_a \in \mathsf{hom}_{\mathsf{C}_2}(\mathsf{F}a, \mathsf{G}a)$ telle que quelle que soit $f \in \mathsf{hom}_{\mathsf{C}_1}(a, b)$, on ait

$$\tau_b \circ (\mathsf{F}f) = (\mathsf{G}f) \circ \tau_a \ .$$

Une transformation naturelle $\tau : \mathsf{F} \to \mathsf{G}$, avec $\mathsf{F}, \mathsf{G} : \mathsf{C}_1 \to \mathsf{C}_2$, est un *isomorphisme naturel* si, et seulement si, quel que soit l'objet a de la catégorie C_1, τ_a est un isomorphisme dans la catégorie C_2.

Transformation naturelle

Soient $\mathsf{F}, \mathsf{G} : \mathsf{C}_1 \to \mathsf{C}_2$ deux foncteurs. Une *transformation naturelle*, que l'on note $\tau : \mathsf{F} \to \mathsf{G}$ est une application qui à chaque objet $a \in \mathcal{O}_{\mathsf{C}_1}$ associe une flêche $\tau_a \in \mathsf{hom}_{\mathsf{C}_2}(\mathsf{F}a, \mathsf{G}a)$ telle que quelle que soit $f \in \mathsf{hom}_{\mathsf{C}_1}(a, b)$, on ait

$$\tau_b \circ (\mathsf{F}f) = (\mathsf{G}f) \circ \tau_a \ .$$

Une transformation naturelle $\tau : \mathsf{F} \to \mathsf{G}$, avec $\mathsf{F}, \mathsf{G} : \mathsf{C}_1 \to \mathsf{C}_2$, est un *isomorphisme naturel* si, et seulement si, quel que soit l'objet a de la catégorie C_1, τ_a est un isomorphisme dans la catégorie C_2.

Équivalence naturelle

Une *équivalence naturelle* est la donnée de deux foncteurs $\mathsf{F} : \mathsf{C}_1 \to \mathsf{C}_2$ et $\mathsf{G} : \mathsf{C}_2 \to \mathsf{C}_1$ et de deux isomorphismes naturels $\tau : \mathsf{I}_{\mathsf{C}_1} \to \mathsf{G} \circ \mathsf{F}$ et $\tau' : \mathsf{I}_{\mathsf{C}_2} \to \mathsf{F} \circ \mathsf{G}$.
Dans ce cas, on dit que les deux catégories C_1 et C_2 sont naturellement équivalentes.

Équivalence naturelle

Une *équivalence naturelle* est la donnée de deux foncteurs $\mathsf{F} : \mathsf{C}_1 \to \mathsf{C}_2$ et $\mathsf{G} : \mathsf{C}_2 \to \mathsf{C}_1$ et de deux isomorphismes naturels $\tau : \mathsf{I}_{\mathsf{C}_1} \to \mathsf{G} \circ \mathsf{F}$ et $\tau' : \mathsf{I}_{\mathsf{C}_2} \to \mathsf{F} \circ \mathsf{G}$.
Dans ce cas, on dit que les deux catégories C_1 et C_2 sont naturellement équivalentes.

Un monoïde partiel est la donnée de $(M, D_M, \times, 1_M)$ où

- M est un ensemble non vide ;
- $D_M \subseteq M \times M$;
- $\times : D_M \rightarrow M$ et D_M est le *domaine* de l'opération $\times$;
- $1_M \in M$

tels que

1. $(x, 1_M), (1_M, x) \in D_M$ pour tout $x \in M$, et $x \times 1_M = x \times 1_M = x$;
2. Quels que soient $x, y, z \in M$, $(x, y) \in D_M$ et $(x \times y, z) \in D_M$ si, et seulement si, $(y, z) \in D_M$ et $(x, y \times z) \in D_M$. Dans chacun de ces cas, $(x \times y) \times z = x \times (y \times z)$.

Le monoïde partiel M est *commutatif* si, et seulement, $(x, y) \in D_M$ si, et seulement si, $(y, z) \in D_M$ et dans chacun de ces cas, $x \times y = y \times x$.

Un monoïde partiel est la donnée de $(M, D_M, \times, 1_M)$ où

- M est un ensemble non vide ;
- $D_M \subseteq M \times M$;
- $\times : D_M \to M$ et D_M est le *domaine* de l'opération $\times$;
- $1_M \in M$

tels que

1. $(x, 1_M), (1_M, x) \in D_M$ pour tout $x \in M$, et $x \times 1_M = x \times 1_M = x$;
2. Quels que soient $x, y, z \in M$, $(x, y) \in D_M$ et $(x \times y, z) \in D_M$ si, et seulement si, $(y, z) \in D_M$ et $(x, y \times z) \in D_M$. Dans chacun de ces cas, $(x \times y) \times z = x \times (y \times z)$.

Le monoïde partiel M est *commutatif* si, et seulement, $(x, y) \in D_M$ si, et seulement si, $(y, z) \in D_M$ et dans chacun de ces cas, $x \times y = y \times x$.

Un monoïde partiel est la donnée de $(M, D_M, \times, 1_M)$ où

- M est un ensemble non vide ;
- $D_M \subseteq M \times M$;
- $\times : D_M \to M$ et D_M est le *domaine* de l'opération $\times$;
- $1_M \in M$

tels que

1. $(x, 1_M), (1_M, x) \in D_M$ pour tout $x \in M$, et $x \times 1_M = x \times 1_M = x$;
2. Quels que soient $x, y, z \in M$, $(x, y) \in D_M$ et $(x \times y, z) \in D_M$ si, et seulement si, $(y, z) \in D_M$ et $(x, y \times z) \in D_M$. Dans chacun de ces cas, $(x \times y) \times z = x \times (y \times z)$.

Le monoïde partiel M est *commutatif* si, et seulement, $(x, y) \in D_M$ si, et seulement si, $(y, z) \in D_M$ et dans chacun de ces cas, $x \times y = y \times x$.

Un monoïde partiel est la donnée de $(M, D_M, \times, 1_M)$ où

- M est un ensemble non vide ;
- $D_M \subseteq M \times M$;
- $\times : D_M \to M$ et D_M est le *domaine* de l'opération $\times$;
- $1_M \in M$

tels que

1. $(x, 1_M), (1_M, x) \in D_M$ pour tout $x \in M$, et $x \times 1_M = x \times 1_M = x$;
2. Quels que soient $x, y, z \in M$, $(x, y) \in D_M$ et $(x \times y, z) \in D_M$ si, et seulement si, $(y, z) \in D_M$ et $(x, y \times z) \in D_M$. Dans chacun de ces cas, $(x \times y) \times z = x \times (y \times z)$.

Le monoïde partiel M est *commutatif* si, et seulement, $(x, y) \in D_M$ si, et seulement si, $(y, z) \in D_M$ et dans chacun de ces cas, $x \times y = y \times x$.

Un monoïde partiel est la donnée de $(M, D_M, \times, 1_M)$ où

- M est un ensemble non vide ;
- $D_M \subseteq M \times M$;
- $\times : D_M \to M$ et D_M est le *domaine* de l'opération $\times$;
- $1_M \in M$

tels que

1. $(x, 1_M), (1_M, x) \in D_M$ pour tout $x \in M$, et $x \times 1_M = x \times 1_M = x$;
2. Quels que soient $x, y, z \in M$, $(x, y) \in D_M$ et $(x \times y, z) \in D_M$ si, et seulement si, $(y, z) \in D_M$ et $(x, y \times z) \in D_M$. Dans chacun de ces cas, $(x \times y) \times z = x \times (y \times z)$.

Le monoïde partiel M est *commutatif* si, et seulement, $(x, y) \in D_M$ si, et seulement si, $(y, z) \in D_M$ et dans chacun de ces cas, $x \times y = y \times x$.

Un monoïde partiel est la donnée de $(M, D_M, \times, 1_M)$ où

- M est un ensemble non vide ;
- $D_M \subseteq M \times M$;
- $\times : D_M \to M$ et D_M est le *domaine* de l'opération $\times$;
- $1_M \in M$

tels que

1. $(x, 1_M), (1_M, x) \in D_M$ pour tout $x \in M$, et $x \times 1_M = x \times 1_M = x$;
2. Quels que soient $x, y, z \in M$, $(x, y) \in D_M$ et $(x \times y, z) \in D_M$ si, et seulement si, $(y, z) \in D_M$ et $(x, y \times z) \in D_M$. Dans chacun de ces cas, $(x \times y) \times z = x \times (y \times z)$.

Le monoïde partiel M est *commutatif* si, et seulement, $(x, y) \in D_M$ si, et seulement si, $(y, z) \in D_M$ et dans chacun de ces cas, $x \times y = y \times x$.

Un monoïde partiel est la donnée de $(M, D_M, \times, 1_M)$ où

- M est un ensemble non vide ;
- $D_M \subseteq M \times M$;
- $\times : D_M \to M$ et D_M est le *domaine* de l'opération $\times$;
- $1_M \in M$

tels que

1. $(x, 1_M), (1_M, x) \in D_M$ pour tout $x \in M$, et $x \times 1_M = x \times 1_M = x$;
2. Quels que soient $x, y, z \in M$, $(x, y) \in D_M$ et $(x \times y, z) \in D_M$ si, et seulement si, $(y, z) \in D_M$ et $(x, y \times z) \in D_M$. Dans chacun de ces cas, $(x \times y) \times z = x \times (y \times z)$.

Le monoïde partiel M est *commutatif* si, et seulement, $(x, y) \in D_M$ si, et seulement si, $(y, z) \in D_M$ et dans chacun de ces cas, $x \times y = y \times x$.

Un monoïde partiel est la donnée de $(M, D_M, \times, 1_M)$ où

- M est un ensemble non vide ;
- $D_M \subseteq M \times M$;
- $\times : D_M \to M$ et D_M est le *domaine* de l'opération $\times$;
- $1_M \in M$

tels que

1. $(x, 1_M), (1_M, x) \in D_M$ pour tout $x \in M$, et $x \times 1_M = x \times 1_M = x$;
2. Quels que soient $x, y, z \in M$, $(x, y) \in D_M$ et $(x \times y, z) \in D_M$ si, et seulement si, $(y, z) \in D_M$ et $(x, y \times z) \in D_M$. Dans chacun de ces cas, $(x \times y) \times z = x \times (y \times z)$.

Le monoïde partiel M est *commutatif* si, et seulement, $(x, y) \in D_M$ si, et seulement si, $(y, z) \in D_M$ et dans chacun de ces cas, $x \times y = y \times x$.

Un monoïde partiel est la donnée de $(M, D_M, \times, 1_M)$ où

- M est un ensemble non vide ;
- $D_M \subseteq M \times M$;
- $\times : D_M \to M$ et D_M est le *domaine* de l'opération $\times$;
- $1_M \in M$

tels que

1. $(x, 1_M), (1_M, x) \in D_M$ pour tout $x \in M$, et $x \times 1_M = x \times 1_M = x$;
2. Quels que soient $x, y, z \in M$, $(x, y) \in D_M$ et $(x \times y, z) \in D_M$ si, et seulement si, $(y, z) \in D_M$ et $(x, y \times z) \in D_M$. Dans chacun de ces cas, $(x \times y) \times z = x \times (y \times z)$.

Le monoïde partiel M est *commutatif* si, et seulement, $(x, y) \in D_M$ si, et seulement si, $(y, z) \in D_M$ et dans chacun de ces cas, $x \times y = y \times x$.

Un monoïde partiel est la donnée de $(M, D_M, \times, 1_M)$ où

- M est un ensemble non vide ;
- $D_M \subseteq M \times M$;
- $\times : D_M \to M$ et D_M est le *domaine* de l'opération $\times$;
- $1_M \in M$

tels que

1. $(x, 1_M), (1_M, x) \in D_M$ pour tout $x \in M$, et $x \times 1_M = x \times 1_M = x$;
2. Quels que soient $x, y, z \in M$, $(x, y) \in D_M$ et $(x \times y, z) \in D_M$ si, et seulement si, $(y, z) \in D_M$ et $(x, y \times z) \in D_M$. Dans chacun de ces cas, $(x \times y) \times z = x \times (y \times z)$.

Le monoïde partiel M est *commutatif* si, et seulement, $(x, y) \in D_M$ si, et seulement si, $(y, z) \in D_M$ et dans chacun de ces cas, $x \times y = y \times x$.

Un monoïde partiel est la donnée de $(M, D_M, \times, 1_M)$ où

- M est un ensemble non vide ;
- $D_M \subseteq M \times M$;
- $\times : D_M \to M$ et D_M est le *domaine* de l'opération $\times$;
- $1_M \in M$

tels que

1. $(x, 1_M), (1_M, x) \in D_M$ pour tout $x \in M$, et $x \times 1_M = x \times 1_M = x$;
2. Quels que soient $x, y, z \in M$, $(x, y) \in D_M$ et $(x \times y, z) \in D_M$ si, et seulement si, $(y, z) \in D_M$ et $(x, y \times z) \in D_M$. Dans chacun de ces cas, $(x \times y) \times z = x \times (y \times z)$.

Le monoïde partiel M est *commutatif* si, et seulement, $(x, y) \in D_M$ si, et seulement si, $(y, z) \in D_M$ et dans chacun de ces cas, $x \times y = y \times x$.

Un monoïde partiel est la donnée de $(M, D_M, \times, 1_M)$ où

- M est un ensemble non vide ;
- $D_M \subseteq M \times M$;
- $\times : D_M \to M$ et D_M est le *domaine* de l'opération $\times$;
- $1_M \in M$

tels que

1. $(x, 1_M), (1_M, x) \in D_M$ pour tout $x \in M$, et $x \times 1_M = x \times 1_M = x$;
2. Quels que soient $x, y, z \in M$, $(x, y) \in D_M$ et $(x \times y, z) \in D_M$ si, et seulement si, $(y, z) \in D_M$ et $(x, y \times z) \in D_M$. Dans chacun de ces cas, $(x \times y) \times z = x \times (y \times z)$.

Le monoïde partiel M est *commutatif* si, et seulement, $(x, y) \in D_M$ si, et seulement si, $(y, z) \in D_M$ et dans chacun de ces cas, $x \times y = y \times x$.

Un monoïde partiel est la donnée de $(M, D_M, \times, 1_M)$ où

- M est un ensemble non vide ;
- $D_M \subseteq M \times M$;
- $\times : D_M \rightarrow M$ et D_M est le *domaine* de l'opération $\times$;
- $1_M \in M$

tels que

1. $(x, 1_M), (1_M, x) \in D_M$ pour tout $x \in M$, et $x \times 1_M = x \times 1_M = x$;
2. Quels que soient $x, y, z \in M$, $(x, y) \in D_M$ et $(x \times y, z) \in D_M$ si, et seulement si, $(y, z) \in D_M$ et $(x, y \times z) \in D_M$. Dans chacun de ces cas, $(x \times y) \times z = x \times (y \times z)$.

Le monoïde partiel M est *commutatif* si, et seulement, $(x, y) \in D_M$ si, et seulement si, $(y, z) \in D_M$ et dans chacun de ces cas, $x \times y = y \times x$.

Exemples

1. Un monoïde (usuel ou total) est un monoïde partiel ;
2. Soit X un ensemble. Alors 2^X munit de l'opération $\sqcup$ de somme disjointe est un monoïde partiel commutatif ;
3. Soit $S \subseteq \mathbb{N}^*$ l'ensemble de tous les entiers sans facteurs premiers carrés. Alors $S \cup \{1\}$ est un monoïde partiel commutatif pour la multiplication.

Exemples

1. Un monoïde (usuel ou total) est un monoïde partiel ;
2. Soit X un ensemble. Alors 2^X munit de l'opération $\sqcup$ de somme disjointe est un monoïde partiel commutatif ;
3. Soit $S \subseteq \mathbb{N}^*$ l'ensemble de tous les entiers sans facteurs premiers carrés. Alors $S \cup \{1\}$ est un monoïde partiel commutatif pour la multiplication.

Exemples

1. Un monoïde (usuel ou total) est un monoïde partiel ;
2. Soit X un ensemble. Alors 2^X munit de l'opération $\sqcup$ de somme disjointe est un monoïde partiel commutatif ;
3. Soit $S \subseteq \mathbb{N}^*$ l'ensemble de tous les entiers sans facteurs premiers carrés. Alors $S \cup \{1\}$ est un monoïde partiel commutatif pour la multiplication.

Morphismes de monoïdes partiels

Soient $(M, D_M, \times, 1_M)$ et $(N, D_N, \times, 1_N)$ deux monoïdes partiels. Une application $\phi : M \to N$ est un *morphisme de monoïdes partiels* si, et seulement si,

1. $\phi(1_M) = 1_N$;
2. Quels que soient $x, y \in M$, si $(x, y) \in D_M$, alors $(\phi(x), \phi(y)) \in D_N$ et $\phi(x \times y) = \phi(x) \times \phi(y)$.

La classe de tous les monoïdes partiels avec les morphismes de monoïdes partiels forme une catégorie notée MonP. On peut également définir la catégorie de tous les monoïdes partiels commutatifs CMonP

Morphismes de monoïdes partiels

Soient $(M, D_M, \times, 1_M)$ et $(N, D_N, \times, 1_N)$ deux monoïdes partiels. Une application $\phi : M \to N$ est un *morphisme de monoïdes partiels* si, et seulement si,

1. $\phi(1_M) = 1_N$;
2. Quels que soient $x, y \in M$, si $(x, y) \in D_M$, alors $(\phi(x), \phi(y)) \in D_N$ et $\phi(x \times y) = \phi(x) \times \phi(y)$.

La classe de tous les monoïdes partiels avec les morphismes de monoïdes partiels forme une catégorie notée MonP. On peut également définir la catégorie de tous les monoïdes partiels commutatifs CMonP

Morphismes de monoïdes partiels

Soient $(M, D_M, \times, 1_M)$ et $(N, D_N, \times, 1_N)$ deux monoïdes partiels. Une application $\phi : M \to N$ est un *morphisme de monoïdes partiels* si, et seulement si,

1. $\phi(1_M) = 1_N$;
2. Quels que soient $x, y \in M$, si $(x, y) \in D_M$, alors $(\phi(x), \phi(y)) \in D_N$ et $\phi(x \times y) = \phi(x) \times \phi(y)$.

La classe de tous les monoïdes partiels avec les morphismes de monoïdes partiels forme une catégorie notée MonP. On peut également définir la catégorie de tous les monoïdes partiels commutatifs CMonP

Morphismes de monoïdes partiels

Soient $(M, D_M, \times, 1_M)$ et $(N, D_N, \times, 1_N)$ deux monoïdes partiels. Une application $\phi : M \to N$ est un *morphisme de monoïdes partiels* si, et seulement si,

1. $\phi(1_M) = 1_N$;
2. Quels que soient $x, y \in M$, si $(x, y) \in D_M$, alors $(\phi(x), \phi(y)) \in D_N$ et $\phi(x \times y) = \phi(x) \times \phi(y)$.

La classe de tous les monoïdes partiels avec les morphismes de monoïdes partiels forme une catégorie notée MonP. On peut également définir la catégorie de tous les monoïdes partiels commutatifs CMonP

Morphismes de monoïdes partiels

Soient $(M, D_M, \times, 1_M)$ et $(N, D_N, \times, 1_N)$ deux monoïdes partiels. Une application $\phi : M \to N$ est un *morphisme de monoïdes partiels* si, et seulement si,

1. $\phi(1_M) = 1_N$;
2. Quels que soient $x, y \in M$, si $(x, y) \in D_M$, alors $(\phi(x), \phi(y)) \in D_N$ et $\phi(x \times y) = \phi(x) \times \phi(y)$.

La classe de tous les monoïdes partiels avec les morphismes de monoïdes partiels forme une catégorie notée MonP. On peut également définir la catégorie de tous les monoïdes partiels commutatifs CMonP

Morphismes de monoïdes partiels

Soient $(M, D_M, \times, 1_M)$ et $(N, D_N, \times, 1_N)$ deux monoïdes partiels. Une application $\phi : M \to N$ est un *morphisme de monoïdes partiels* si, et seulement si,

1. $\phi(1_M) = 1_N$;
2. Quels que soient $x, y \in M$, si $(x, y) \in D_M$, alors $(\phi(x), \phi(y)) \in D_N$ et $\phi(x \times y) = \phi(x) \times \phi(y)$.

La classe de tous les monoïdes partiels avec les morphismes de monoïdes partiels forme une catégorie notée MonP. On peut également définir la catégorie de tous les monoïdes partiels commutatifs CMonP

Un monoïde M (noté multiplicativement) est un *monoïde à zéro* si, et seulement si, il existe $0_M \in M$ tel que

1. $0_M \neq 1_M$;
2. Quel que soit $x \in M$, $x \times 0_M = 0_M \times x$ (c'est-à-dire que 0_M est absorbant).

En notation additive, on préfère parler d'un *point à l'infini* ∞_M plutôt que d'un zéro.
Par définition, $|M| \geq 2$ et il est facile de voir que le zéro est nécessairement unique.
Le monoïde multiplicatif d'un anneau associatif avec unité est un monoïde à zéro.

Un monoïde M (noté multiplicativement) est un *monoïde à zéro* si, et seulement si, il existe $0_M \in M$ tel que

1. $0_M \neq 1_M$;
2. Quel que soit $x \in M$, $x \times 0_M = 0_M \times x$ (c'est-à-dire que 0_M est absorbant).

En notation additive, on préfère parler d'un *point à l'infini* ∞_M plutôt que d'un zéro.

Par définition, $|M| \geq 2$ et il est facile de voir que le zéro est nécessairement unique.

Le monoïde multiplicatif d'un anneau associatif avec unité est un monoïde à zéro.

Un monoïde M (noté multiplicativement) est un *monoïde à zéro* si, et seulement si, il existe $0_M \in M$ tel que

1. $0_M \neq 1_M$;
2. Quel que soit $x \in M$, $x \times 0_M = 0_M \times x$ (c'est-à-dire que 0_M est absorbant).

En notation additive, on préfère parler d'un *point à l'infini* ∞_M plutôt que d'un zéro.

Par définition, $|M| \geq 2$ et il est facile de voir que le zéro est nécessairement unique.

Le monoïde multiplicatif d'un anneau associatif avec unité est un monoïde à zéro.

Un monoïde M (noté multiplicativement) est un *monoïde à zéro* si, et seulement si, il existe $0_M \in M$ tel que

1. $0_M \neq 1_M$;
2. Quel que soit $x \in M$, $x \times 0_M = 0_M \times x$ (c'est-à-dire que 0_M est absorbant).

En notation additive, on préfère parler d'un *point à l'infini* ∞_M plutôt que d'un zéro.

Par définition, $|M| \geq 2$ et il est facile de voir que le zéro est nécessairement unique.

Le monoïde multiplicatif d'un anneau associatif avec unité est un monoïde à zéro.

Un monoïde M (noté multiplicativement) est un *monoïde à zéro* si, et seulement si, il existe $0_M \in M$ tel que

1. $0_M \neq 1_M$;
2. Quel que soit $x \in M$, $x \times 0_M = 0_M \times x$ (c'est-à-dire que 0_M est absorbant).

En notation additive, on préfère parler d'un *point à l'infini* ∞_M plutôt que d'un zéro.
Par définition, $|M| \geq 2$ et il est facile de voir que le zéro est nécessairement unique.
Le monoïde multiplicatif d'un anneau associatif avec unité est un monoïde à zéro.

Un monoïde M (noté multiplicativement) est un *monoïde à zéro* si, et seulement si, il existe $0_M \in M$ tel que

1. $0_M \neq 1_M$;
2. Quel que soit $x \in M$, $x \times 0_M = 0_M \times x$ (c'est-à-dire que 0_M est absorbant).

En notation additive, on préfère parler d'un *point à l'infini* ∞_M plutôt que d'un zéro.
Par définition, $|M| \geq 2$ et il est facile de voir que le zéro est nécessairement unique.
Le monoïde multiplicatif d'un anneau associatif avec unité est un monoïde à zéro.

Morphismes de monoïdes à zéro

Soient M, N deux monoïdes à zéro. Soit $\phi : M \to N$. Alors ϕ est un *morphisme de monoïdes à zéro* si, et seulement si,

1. $\phi(1_M) = 1_N$;
2. $\phi(0_M) = 0_N$;
3. quels que soient $x, y \in M$, si $x \times y \neq 0_M$, alors $\phi(x) \times \phi(y) \neq 0_M$, et dans ce cas, $\phi(x \times y) = \phi(x) \times \phi(y)$.

La classe de tous les monoïdes à zéro avec les morphismes entre ces structures forme une catégorie notée MonZ. On peut également définir la catégorie des monoïdes à zéro commutatifs, CMonZ

Morphismes de monoïdes à zéro

Soient M, N deux monoïdes à zéro. Soit $\phi : M \to N$. Alors ϕ est un *morphisme de monoïdes à zéro* si, et seulement si,

1. $\phi(1_M) = 1_N$;
2. $\phi(0_M) = 0_N$;
3. quels que soient $x, y \in M$, si $x \times y \neq 0_M$, alors $\phi(x) \times \phi(y) \neq 0_M$, et dans ce cas, $\phi(x \times y) = \phi(x) \times \phi(y)$.

La classe de tous les monoïdes à zéro avec les morphismes entre ces structures forme une catégorie notée MonZ. On peut également définir la catégorie des monoïdes à zéro commutatifs, CMonZ

Morphismes de monoïdes à zéro

Soient M, N deux monoïdes à zéro. Soit $\phi : M \to N$. Alors ϕ est un *morphisme de monoïdes à zéro* si, et seulement si,

1. $\phi(1_M) = 1_N$;
2. $\phi(0_M) = 0_N$;
3. quels que soient $x, y \in M$, si $x \times y \neq 0_M$, alors $\phi(x) \times \phi(y) \neq 0_M$, et dans ce cas, $\phi(x \times y) = \phi(x) \times \phi(y)$.

La classe de tous les monoïdes à zéro avec les morphismes entre ces structures forme une catégorie notée MonZ. On peut également définir la catégorie des monoïdes à zéro commutatifs, CMonZ

Morphismes de monoïdes à zéro

Soient M, N deux monoïdes à zéro. Soit $\phi : M \to N$. Alors ϕ est un *morphisme de monoïdes à zéro* si, et seulement si,

1. $\phi(1_M) = 1_N$;
2. $\phi(0_M) = 0_N$;
3. quels que soient $x, y \in M$, si $x \times y \neq 0_M$, alors $\phi(x) \times \phi(y) \neq 0_M$, et dans ce cas, $\phi(x \times y) = \phi(x) \times \phi(y)$.

La classe de tous les monoïdes à zéro avec les morphismes entre ces structures forme une catégorie notée MonZ. On peut également définir la catégorie des monoïdes à zéro commutatifs, CMonZ

Morphismes de monoïdes à zéro

Soient M, N deux monoïdes à zéro. Soit $\phi : M \to N$. Alors ϕ est un *morphisme de monoïdes à zéro* si, et seulement si,

1. $\phi(1_M) = 1_N$;
2. $\phi(0_M) = 0_N$;
3. quels que soient $x, y \in M$, si $x \times y \neq 0_M$, alors $\phi(x) \times \phi(y) \neq 0_M$, et dans ce cas, $\phi(x \times y) = \phi(x) \times \phi(y)$.

La classe de tous les monoïdes à zéro avec les morphismes entre ces structures forme une catégorie notée MonZ. On peut également définir la catégorie des monoïdes à zéro commutatifs, CMonZ

Morphismes de monoïdes à zéro

Soient M, N deux monoïdes à zéro. Soit $\phi : M \to N$. Alors ϕ est un *morphisme de monoïdes à zéro* si, et seulement si,

1. $\phi(1_M) = 1_N$;
2. $\phi(0_M) = 0_N$;
3. quels que soient $x, y \in M$, si $x \times y \neq 0_M$, alors $\phi(x) \times \phi(y) \neq 0_M$, et dans ce cas, $\phi(x \times y) = \phi(x) \times \phi(y)$.

La classe de tous les monoïdes à zéro avec les morphismes entre ces structures forme une catégorie notée MonZ. On peut également définir la catégorie des monoïdes à zéro commutatifs, CMonZ

Morphismes de monoïdes à zéro

Soient M, N deux monoïdes à zéro. Soit $\phi : M \rightarrow N$. Alors ϕ est un *morphisme de monoïdes à zéro* si, et seulement si,

1. $\phi(1_M) = 1_N$;
2. $\phi(0_M) = 0_N$;
3. quels que soient $x, y \in M$, si $x \times y \neq 0_M$, alors $\phi(x) \times \phi(y) \neq 0_M$, et dans ce cas, $\phi(x \times y) = \phi(x) \times \phi(y)$.

La classe de tous les monoïdes à zéro avec les morphismes entre ces structures forme une catégorie notée MonZ. On peut également définir la catégorie des monoïdes à zéro commutatifs, CMonZ

Morphismes de monoïdes à zéro

Soient M, N deux monoïdes à zéro. Soit $\phi : M \longrightarrow N$. Alors ϕ est un *morphisme de monoïdes à zéro* si, et seulement si,

1. $\phi(1_M) = 1_N$;
2. $\phi(0_M) = 0_N$;
3. quels que soient $x, y \in M$, si $x \times y \neq 0_M$, alors $\phi(x) \times \phi(y) \neq 0_M$, et dans ce cas, $\phi(x \times y) = \phi(x) \times \phi(y)$.

La classe de tous les monoïdes à zéro avec les morphismes entre ces structures forme une catégorie notée MonZ. On peut également définir la catégorie des monoïdes à zéro commutatifs, CMonZ

Remarque

Un monoïde à zéro possède une structure sous-jacente de monoïde usuel (il suffit d'oublier le zéro). Néanmoins on n'a pas là un foncteur d'oubli de la catégorie MonZ dans la catégorie Mon car un morphisme de monoïdes à zéro, même en oubliant le fait qu'il respecte les zéros, n'est pas nécessairement un morphisme de monoïdes. Il est néanmoins possible de contourner cette difficulté en considérant une sous-catégorie particulière de MonZ qui possède la même classe d'objets (mais une sous-classe de flèches).

Remarque

Un monoïde à zéro possède une structure sous-jacente de monoïde usuel (il suffit d'oublier le zéro). Néanmoins on n'a pas là un foncteur d'oubli de la catégorie MonZ dans la catégorie Mon car un morphisme de monoïdes à zéro, même en oubliant le fait qu'il respecte les zéros, n'est pas nécessairement un morphisme de monoïdes. Il est néanmoins possible de contourner cette difficulté en considérant une sous-catégorie particulière de MonZ qui possède la même classe d'objets (mais une sous-classe de flèches).

Remarque

Un monoïde à zéro possède une structure sous-jacente de monoïde usuel (il suffit d'oublier le zéro). Néanmoins on n'a pas là un foncteur d'oubli de la catégorie MonZ dans la catégorie Mon car un morphisme de monoïdes à zéro, même en oubliant le fait qu'il respecte les zéros, n'est pas nécessairement un morphisme de monoïdes. Il est néanmoins possible de contourner cette difficulté en considérant une sous-catégorie particulière de MonZ qui possède la même classe d'objets (mais une sous-classe de flêches).

Monoïde quotient de Rees

Soit M un monoïde (usuel) et I un idéal bilatère propre de M (*i.e.*, $I \neq M$). Soit $0 \notin M \setminus I$, alors l'ensemble $(M \setminus I) \sqcup \{0\}$ possède une structure de monoïde à zéro pour l'opération :

$$x \cdot y := \begin{cases} xy & \text{si} \quad xy \notin I\,, \\ 0 & \text{si} \quad xy \in I \end{cases}$$

et $z \cdot 0 = 0 \cdot z = 0$ quel que soit $x, y \in M \setminus I$ et $z \in (M \setminus I) \sqcup \{0\}$.

Monoïde quotient de Rees

Soit M un monoïde (usuel) et I un idéal bilatère propre de M (*i.e.*, $I \neq M$). Soit $0 \notin M \setminus I$, alors l'ensemble $(M \setminus I) \sqcup \{0\}$ possède une structure de monoïde à zéro pour l'opération :

$$x \cdot y := \begin{cases} xy & \text{si} \quad xy \notin I \,, \\ 0 & \text{si} \quad xy \in I \end{cases}$$

et $z \cdot 0 = 0 \cdot z = 0$ quel que soit $x, y \in M \setminus I$ et $z \in (M \setminus I) \sqcup \{0\}$.

Monoïde quotient de Rees

Soit M un monoïde (usuel) et I un idéal bilatère propre de M (*i.e.*, $I \neq M$). Soit $0 \notin M \setminus I$, alors l'ensemble $(M \setminus I) \sqcup \{0\}$ possède une structure de monoïde à zéro pour l'opération :

$$x \cdot y := \begin{cases} xy & \text{si} \quad xy \notin I\,, \\ 0 & \text{si} \quad xy \in I \end{cases}$$

et $z \cdot 0 = 0 \cdot z = 0$ quel que soit $x, y \in M \setminus I$ et $z \in (M \setminus I) \sqcup \{0\}$.

Monoïde quotient de Rees

Soit M un monoïde (usuel) et I un idéal bilatère propre de M (*i.e.*, $I \neq M$). Soit $0 \notin M \setminus I$, alors l'ensemble $(M \setminus I) \sqcup \{0\}$ possède une structure de monoïde à zéro pour l'opération :

$$x \cdot y := \begin{cases} xy & \text{si} \quad xy \notin I\,, \\ 0 & \text{si} \quad xy \in I \end{cases}$$

et $z \cdot 0 = 0 \cdot z = 0$ quel que soit $x, y \in M \setminus I$ et $z \in (M \setminus I) \sqcup \{0\}$.

Monoïde quotient de Rees

Soit M un monoïde (usuel) et I un idéal bilatère propre de M (*i.e.*, $I \neq M$). Soit $0 \notin M \setminus I$, alors l'ensemble $(M \setminus I) \sqcup \{0\}$ possède une structure de monoïde à zéro pour l'opération :

$$x \cdot y := \begin{cases} xy & \text{si} \quad xy \notin I \, , \\ 0 & \text{si} \quad xy \in I \end{cases}$$

et $z \cdot 0 = 0 \cdot z = 0$ quel que soit $x, y \in M \setminus I$ et $z \in (M \setminus I) \sqcup \{0\}$.

Monoïde quotient de Rees

Soit M un monoïde (usuel) et I un idéal bilatère propre de M (*i.e.*, $I \neq M$). Soit $0 \notin M \setminus I$, alors l'ensemble $(M \setminus I) \sqcup \{0\}$ possède une structure de monoïde à zéro pour l'opération :

$$x \cdot y := \begin{cases} xy & \text{si} \quad xy \notin I \;, \\ 0 & \text{si} \quad xy \in I \end{cases}$$

et $z \cdot 0 = 0 \cdot z = 0$ quel que soit $x, y \in M \setminus I$ et $z \in (M \setminus I) \sqcup \{0\}$.

Proposition

Les catégories MonZ et MonP sont naturellement équivalentes. De même, les catégories CMonZ et CMonP sont naturellement équivalentes.

Idée : On transforme un monoïde partiel en un monoïde à zéro par adjonction d'un zéro. Les produits non définis prennent alors ce zéro comme valeur.
On transforme un monoïde à zéro en un monoïde partiel en retirant le zéro. Les produits égaux à zéro sont alors non définis.

Proposition

Les catégories MonZ et MonP sont naturellement équivalentes. De même, les catégories CMonZ et CMonP sont naturellement équivalentes.

Idée : On transforme un monoïde partiel en un monoïde à zéro par adjonction d'un zéro. Les produits non définis prennent alors ce zéro comme valeur.

On transforme un monoïde à zéro en un monoïde partiel en retirant le zéro. Les produits égaux à zéro sont alors non définis.

Proposition

Les catégories MonZ et MonP sont naturellement équivalentes. De même, les catégories CMonZ et CMonP sont naturellement équivalentes.

Idée : On transforme un monoïde partiel en un monoïde à zéro par adjonction d'un zéro. Les produits non définis prennent alors ce zéro comme valeur.

On transforme un monoïde à zéro en un monoïde partiel en retirant le zéro. Les produits égaux à zéro sont alors non définis.

Proposition

Les catégories MonZ et MonP sont naturellement équivalentes. De même, les catégories CMonZ et CMonP sont naturellement équivalentes.

Idée : On transforme un monoïde partiel en un monoïde à zéro par adjonction d'un zéro. Les produits non définis prennent alors ce zéro comme valeur.

On transforme un monoïde à zéro en un monoïde partiel en retirant le zéro. Les produits égaux à zéro sont alors non définis.

Proposition

Les catégories MonZ et MonP sont naturellement équivalentes. De même, les catégories CMonZ et CMonP sont naturellement équivalentes.

Idée : On transforme un monoïde partiel en un monoïde à zéro par adjonction d'un zéro. Les produits non définis prennent alors ce zéro comme valeur.

On transforme un monoïde à zéro en un monoïde partiel en retirant le zéro. Les produits égaux à zéro sont alors non définis.

Proposition

Les catégories MonZ et MonP sont naturellement équivalentes. De même, les catégories CMonZ et CMonP sont naturellement équivalentes.

Idée : On transforme un monoïde partiel en un monoïde à zéro par adjonction d'un zéro. Les produits non définis prennent alors ce zéro comme valeur.
On transforme un monoïde à zéro en un monoïde partiel en retirant le zéro. Les produits égaux à zéro sont alors non définis.

Proposition

Les catégories MonZ et MonP sont naturellement équivalentes. De même, les catégories CMonZ et CMonP sont naturellement équivalentes.

Idée : On transforme un monoïde partiel en un monoïde à zéro par adjonction d'un zéro. Les produits non définis prennent alors ce zéro comme valeur.
On transforme un monoïde à zéro en un monoïde partiel en retirant le zéro. Les produits égaux à zéro sont alors non définis.

Alphabets à commutation partielle

Un *alphabet à commutation partielle* est une paire (X, C) où X est un ensemble et $D \subseteq X \times X$ est une relation irréflexive et symétrique (C est la *relation de commutation partielle*). Soient (X, C_X) et (Y, C_Y) deux tels alphabets. Une application (ensembliste) $\phi : X \rightarrow Y$ est un *flêche d'alphabets à dépendance* si, et seulement si, quel que soit $(x, y) \in C_X$, on a $(\phi(x), \phi(y)) \in C_Y \cup \Delta_Y$ où $\Delta_Y = \{(y, y) : y \in Y\}$ (on dit que ϕ *respecte les relations de commutation partielle*). On obtient alors une catégorie notée AC.

Alphabets à commutation partielle

Un *alphabet à commutation partielle* est une paire (X, C) où X est un ensemble et $D \subseteq X \times X$ est une relation irréflexive et symétrique (C est la *relation de commutation partielle*). Soient (X, C_X) et (Y, C_Y) deux tels alphabets. Une application (ensembliste) $\phi : X \to Y$ est un *flêche d'alphabets à dépendance* si, et seulement si, quel que soit $(x, y) \in C_X$, on a $(\phi(x), \phi(y)) \in C_Y \cup \Delta_Y$ où $\Delta_Y = \{(y, y) : y \in Y\}$ (on dit que ϕ *respecte les relations de commutation partielle*). On obtient alors une catégorie notée AC.

Alphabets à commutation partielle

Un *alphabet à commutation partielle* est une paire (X, C) où X est un ensemble et $D \subseteq X \times X$ est une relation irréflexive et symétrique (C est la *relation de commutation partielle*). Soient (X, C_X) et (Y, C_Y) deux tels alphabets. Une application (ensembliste) $\phi : X \to Y$ est un *flêche d'alphabets à dépendance* si, et seulement si, quel que soit $(x, y) \in C_X$, on a $(\phi(x), \phi(y)) \in C_Y \cup \Delta_Y$ où $\Delta_Y = \{(y, y) : y \in Y\}$ (on dit que ϕ *respecte les relations de commutation partielle*). On obtient alors une catégorie notée AC.

Alphabets à commutation partielle

Un *alphabet à commutation partielle* est une paire (X, C) où X est un ensemble et $D \subseteq X \times X$ est une relation irréflexive et symétrique (C est la *relation de commutation partielle*). Soient (X, C_X) et (Y, C_Y) deux tels alphabets. Une application (ensembliste) $\phi : X \to Y$ est un *flêche d'alphabets à dépendance* si, et seulement si, quel que soit $(x, y) \in C_X$, on a $(\phi(x), \phi(y)) \in C_Y \cup \Delta_Y$ où $\Delta_Y = \{(y, y) : y \in Y\}$ (on dit que ϕ *respecte les relations de commutation partielle*). On obtient alors une catégorie notée AC.

Monoïde partiellement commutatif libre

Un monoïde usuel M dispose d'une relation de commutation partielle “ naturelle ” $C_M := \{(x,y) \in M : xy = yx\} \setminus \Delta_M$. De plus les morphismes de monoïdes respectent ces relations de commutation partielle. On peut alors définir un foncteur d'oubli U de la catégorie Mon dans la catégorie AC tel que $\mathsf{U}(M) = (M, C_M)$. Ce foncteur d'oubli admet un adjoint à gauche, *i.e.*, un foncteur $\mathsf{F} : \mathsf{AC} \to \mathsf{Mon}$ tel que quel que soit $(X, C_X) \in \mathcal{O}_{\mathsf{AC}}$ et $M \in \mathcal{O}_{\mathsf{Mon}}$,

$$\mathsf{hom}_{\mathsf{Mon}}(F(X, C_X), M) \cong \mathsf{hom}_{\mathsf{AD}}((X, C_X), \mathsf{U}M) .$$

Le monoïde $F(X, C_X)$ - unique à isomorphisme près - est appelé le *monoïde partiellement commutatif libre* sur (X, C_X).

Monoïde partiellement commutatif libre

Un monoïde usuel M dispose d'une relation de commutation partielle “ naturelle ” $C_M := \{(x,y) \in M : xy = yx\} \setminus \Delta_M$. De plus les morphismes de monoïdes respectent ces relations de commutation partielle. On peut alors définir un foncteur d'oubli U de la catégorie Mon dans la catégorie AC tel que $\mathsf{U}(M) = (M, C_M)$. Ce foncteur d'oubli admet un adjoint à gauche, *i.e.*, un foncteur $\mathsf{F} : \mathsf{AC} \to \mathsf{Mon}$ tel que quel que soit $(X, C_X) \in \mathcal{O}_{\mathsf{AC}}$ et $M \in \mathcal{O}_{\mathsf{Mon}}$,

$$\mathsf{hom}_{\mathsf{Mon}}(F(X,C_X), M) \cong \mathsf{hom}_{\mathsf{AD}}((X,C_X), \mathsf{U}M)\ .$$

Le monoïde $F(X,C_X)$ - unique à isomorphisme près - est appelé le *monoïde partiellement commutatif libre* sur (X, C_X).

Monoïde partiellement commutatif libre

Un monoïde usuel M dispose d'une relation de commutation partielle “ naturelle ” $C_M := \{(x,y) \in M : xy = yx\} \setminus \Delta_M$. De plus les morphismes de monoïdes respectent ces relations de commutation partielle. On peut alors définir un foncteur d'oubli U de la catégorie Mon dans la catégorie AC tel que $\mathsf{U}(M) = (M, C_M)$. Ce foncteur d'oubli admet un adjoint à gauche, *i.e.*, un foncteur $\mathsf{F} : \mathsf{AC} \to \mathsf{Mon}$ tel que quel que soit $(X, C_X) \in \mathcal{O}_{\mathsf{AC}}$ et $M \in \mathcal{O}_{\mathsf{Mon}}$,

$$\mathsf{hom}_{\mathsf{Mon}}(F(X, C_X), M) \cong \mathsf{hom}_{\mathsf{AD}}((X, C_X), \mathsf{U}M)\ .$$

Le monoïde $F(X, C_X)$ - unique à isomorphisme près - est appelé le *monoïde partiellement commutatif libre* sur (X, C_X).

Monoïde partiellement commutatif libre

Un monoïde usuel M dispose d'une relation de commutation partielle “ naturelle ” $C_M := \{(x, y) \in M : xy = yx\} \setminus \Delta_M$. De plus les morphismes de monoïdes respectent ces relations de commutation partielle. On peut alors définir un foncteur d'oubli U de la catégorie Mon dans la catégorie AC tel que $\mathsf{U}(M) = (M, C_M)$. Ce foncteur d'oubli admet un adjoint à gauche, *i.e.*, un foncteur $\mathsf{F} : \mathsf{AC} \to \mathsf{Mon}$ tel que quel que soit $(X, C_X) \in \mathcal{O}_{\mathsf{AC}}$ et $M \in \mathcal{O}_{\mathsf{Mon}}$,

$$\mathsf{hom}_{\mathsf{Mon}}(F(X, C_X), M) \cong \mathsf{hom}_{\mathsf{AD}}((X, C_X), \mathsf{U}M)\ .$$

Le monoïde $F(X, C_X)$ - unique à isomorphisme près - est appelé le *monoïde partiellement commutatif libre* sur (X, C_X).

Monoïde partiellement commutatif libre

Un monoïde usuel M dispose d'une relation de commutation partielle “ naturelle ” $C_M := \{(x, y) \in M : xy = yx\} \setminus \Delta_M$. De plus les morphismes de monoïdes respectent ces relations de commutation partielle. On peut alors définir un foncteur d'oubli U de la catégorie Mon dans la catégorie AC tel que $\mathsf{U}(M) = (M, C_M)$. Ce foncteur d'oubli admet un adjoint à gauche, *i.e.*, un foncteur $\mathsf{F} : \mathsf{AC} \to \mathsf{Mon}$ tel que quel que soit $(X, C_X) \in \mathcal{O}_{\mathsf{AC}}$ et $M \in \mathcal{O}_{\mathsf{Mon}}$,

$$\mathsf{hom}_{\mathsf{Mon}}(F(X, C_X), M) \cong \mathsf{hom}_{\mathsf{AD}}((X, C_X), \mathsf{U}M) .$$

Le monoïde $F(X, C_X)$ - unique à isomorphisme près - est appelé le *monoïde partiellement commutatif libre* sur (X, C_X).

Monoïde partiellement commutatif libre

Un monoïde usuel M dispose d'une relation de commutation partielle “ naturelle ” $C_M := \{(x, y) \in M : xy = yx\} \setminus \Delta_M$. De plus les morphismes de monoïdes respectent ces relations de commutation partielle. On peut alors définir un foncteur d'oubli U de la catégorie Mon dans la catégorie AC tel que $\mathsf{U}(M) = (M, C_M)$. Ce foncteur d'oubli admet un adjoint à gauche, *i.e.*, un foncteur $\mathsf{F} : \mathsf{AC} \to \mathsf{Mon}$ tel que quel que soit $(X, C_X) \in \mathcal{O}_{\mathsf{AC}}$ et $M \in \mathcal{O}_{\mathsf{Mon}}$,

$$\mathsf{hom}_{\mathsf{Mon}}(F(X, C_X), M) \cong \mathsf{hom}_{\mathsf{AD}}((X, C_X), \mathsf{U}M) .$$

Le monoïde $F(X, C_X)$ - unique à isomorphisme près - est appelé le *monoïde partiellement commutatif libre* sur (X, C_X).

Monoïde partiellement commutatif libre

Un monoïde usuel M dispose d'une relation de commutation partielle “ naturelle ” $C_M := \{(x, y) \in M : xy = yx\} \setminus \Delta_M$. De plus les morphismes de monoïdes respectent ces relations de commutation partielle. On peut alors définir un foncteur d'oubli U de la catégorie Mon dans la catégorie AC tel que $\mathsf{U}(M) = (M, C_M)$. Ce foncteur d'oubli admet un adjoint à gauche, *i.e.*, un foncteur $\mathsf{F} : \mathsf{AC} \to \mathsf{Mon}$ tel que quel que soit $(X, C_X) \in \mathcal{O}_{\mathsf{AC}}$ et $M \in \mathcal{O}_{\mathsf{Mon}}$,

$$\mathsf{hom}_{\mathsf{Mon}}(F(X, C_X), M) \cong \mathsf{hom}_{\mathsf{AD}}((X, C_X), \mathsf{U}M) \ .$$

Le monoïde $F(X, C_X)$ - unique à isomorphisme près - est appelé le *monoïde partiellement commutatif libre* sur (X, C_X).

Problème universel associé

Il est possible de définir l'existence de l'adjoint à gauche F comme la solution à un problème universel : Quel que soit $(X, C_X) \in \mathcal{O}_{\mathsf{AC}}$, il existe un unique (à isomorphisme près) monoïde $F(X, C_X)$ et une unique flêche $i : (X, C_X) \rightarrow \mathsf{U}(F(X, C_X))$ tels que quel que soit $M \in \mathcal{O}_{\mathsf{Mon}}$ et quelle que soit la flêche $\phi : (X, C_X) \rightarrow \mathsf{U}M$, il existe un unique morphisme de monoïdes $\overline{\phi} : F(X, C_X) \rightarrow M$ satisfaisant

$$\mathsf{U}(\overline{\phi}) \circ i = \phi \ .$$

Problème universel associé

Il est possible de définir l'existence de l'adjoint à gauche F comme la solution à un problème universel : Quel que soit $(X, C_X) \in \mathcal{O}_{\mathsf{AC}}$, il existe un unique (à isomorphisme près) monoïde $F(X, C_X)$ et une unique flêche $i : (X, C_X) \rightarrow \mathsf{U}(F(X, C_X))$ tels que quel que soit $M \in \mathcal{O}_{\mathsf{Mon}}$ et quelle que soit la flêche $\phi : (X, C_X) \rightarrow \mathsf{U}M$, il existe un unique morphisme de monoïdes $\overline{\phi} : F(X, C_X) \rightarrow M$ satisfaisant

$$\mathsf{U}(\overline{\phi}) \circ i = \phi\ .$$

Problème universel associé

Il est possible de définir l'existence de l'adjoint à gauche F comme la solution à un problème universel : Quel que soit $(X, C_X) \in \mathcal{O}_{\mathsf{AC}}$, il existe un unique (à isomorphisme près) monoïde $F(X, C_X)$ et une unique flêche $i : (X, C_X) \to \mathsf{U}(F(X, C_X))$ tels que quel que soit $M \in \mathcal{O}_{\mathsf{Mon}}$ et quelle que soit la flêche $\phi : (X, C_X) \to \mathsf{U}M$, il existe un unique morphisme de monoïdes $\overline{\phi} : F(X, C_X) \to M$ satisfaisant

$$\mathsf{U}(\overline{\phi}) \circ i = \phi\ .$$

Problème universel associé

Il est possible de définir l'existence de l'adjoint à gauche F comme la solution à un problème universel : Quel que soit $(X, C_X) \in \mathcal{O}_{\mathsf{AC}}$, il existe un unique (à isomorphisme près) monoïde $F(X, C_X)$ et une unique flêche $i : (X, C_X) \to \mathsf{U}(F(X, C_X))$ tels que quel que soit $M \in \mathcal{O}_{\mathsf{Mon}}$ et quelle que soit la flêche $\phi : (X, C_X) \to \mathsf{U}M$, il existe un unique morphisme de monoïdes $\overline{\phi} : F(X, C_X) \to M$ satisfaisant

$$\mathsf{U}(\overline{\phi}) \circ i = \phi \ .$$

Problème universel associé

Il est possible de définir l'existence de l'adjoint à gauche F comme la solution à un problème universel : Quel que soit $(X, C_X) \in \mathcal{O}_{\mathsf{AC}}$, il existe un unique (à isomorphisme près) monoïde $F(X, C_X)$ et une unique flêche $i : (X, C_X) \to \mathsf{U}(F(X, C_X))$ tels que quel que soit $M \in \mathcal{O}_{\mathsf{Mon}}$ et quelle que soit la flêche $\phi : (X, C_X) \to \mathsf{U}M$, il existe un unique morphisme de monoïdes $\overline{\phi} : F(X, C_X) \to M$ satisfaisant

$$\mathsf{U}(\overline{\phi}) \circ i = \phi\ .$$

Problème universel associé

Il est possible de définir l'existence de l'adjoint à gauche F comme la solution à un problème universel : Quel que soit $(X, C_X) \in \mathcal{O}_{\mathsf{AC}}$, il existe un unique (à isomorphisme près) monoïde $F(X, C_X)$ et une unique flêche $i : (X, C_X) \to \mathsf{U}(F(X, C_X))$ tels que quel que soit $M \in \mathcal{O}_{\mathsf{Mon}}$ et quelle que soit la flêche $\phi : (X, C_X) \to \mathsf{U}M$, il existe un unique morphisme de monoïdes $\overline{\phi} : F(X, C_X) \to M$ satisfaisant

$$\mathsf{U}(\overline{\phi}) \circ i = \phi \ .$$

Une construction

Le monoïde $F(X, C_X)$ est (isomorphe à) $X^* \setminus \equiv_{C_X}$, où $\equiv_{C_X}$ est la congruence engendrée par l'ensemble C_X. Le morphisme i est alors la composition de l'inclusion canonique de X dans X^* avec la projection canonique de X^* sur $X^* / \equiv_{C_X}$. La liberté de $F(X, C_X)$ exprime le fait qu'un morphisme de monoïdes $\phi : F(X, C_X) \to M$ est complétement déterminé par une application $f : X \to M$ telle que $f(x)f(y) = f(y)f(x)$ pour tout $(x, y) \in C_X$.
Remarquons que si $C_X = \emptyset$, alors $F(X, \emptyset) = X^*$ est le *monoïde libre sur* X et si $C_X = X \times X \setminus \Delta_X$, alors $F(X, C_X) = X^{\oplus}$ est le *monoïde commutatif libre sur* X.

Une construction

Le monoïde $F(X, C_X)$ est (isomorphe à) $X^* \setminus \equiv_{C_X}$, où $\equiv_{C_X}$ est la congruence engendrée par l'ensemble C_X. Le morphisme i est alors la composition de l'inclusion canonique de X dans X^* avec la projection canonique de X^* sur $X^*/\equiv_{C_X}$. La liberté de $F(X, C_X)$ exprime le fait qu'un morphisme de monoïdes $\phi : F(X, C_X) \rightarrow M$ est complétement déterminé par une application $f : X \rightarrow M$ telle que $f(x)f(y) = f(y)f(x)$ pour tout $(x, y) \in C_X$.

Remarquons que si $C_X = \emptyset$, alors $F(X, \emptyset) = X^*$ est le *monoïde libre sur* X et si $C_X = X \times X \setminus \Delta_X$, alors $F(X, C_X) = X^{\oplus}$ est le *monoïde commutatif libre sur* X.

Une construction

Le monoïde $F(X, C_X)$ est (isomorphe à) $X^* \backslash \equiv_{C_X}$, où $\equiv_{C_X}$ est la congruence engendrée par l'ensemble C_X. Le morphisme i est alors la composition de l'inclusion canonique de X dans X^* avec la projection canonique de X^* sur $X^* / \equiv_{C_X}$. La liberté de $F(X, C_X)$ exprime le fait qu'un morphisme de monoïdes $\phi : F(X, C_X) \to M$ est complétement déterminé par une application $f : X \to M$ telle que $f(x)f(y) = f(y)f(x)$ pour tout $(x, y) \in C_X$.
Remarquons que si $C_X = \emptyset$, alors $F(X, \emptyset) = X^*$ est le *monoïde libre sur* X et si $C_X = X \times X \setminus \Delta_X$, alors $F(X, C_X) = X^{\oplus}$ est le *monoïde commutatif libre sur* X.

Une construction

Le monoïde $F(X, C_X)$ est (isomorphe à) $X^* \backslash \equiv_{C_X}$, où $\equiv_{C_X}$ est la congruence engendrée par l'ensemble C_X. Le morphisme i est alors la composition de l'inclusion canonique de X dans X^* avec la projection canonique de X^* sur $X^*/\equiv_{C_X}$. La liberté de $F(X, C_X)$ exprime le fait qu'un morphisme de monoïdes $\phi : F(X, C_X) \rightarrow M$ est complétement déterminé par une application $f : X \rightarrow M$ telle que
$f(x)f(y) = f(y)f(x)$ pour tout $(x, y) \in C_X$.
Remarquons que si $C_X = \emptyset$, alors $F(X, \emptyset) = X^*$ est le *monoïde libre sur* X et si $C_X = X \times X \setminus \Delta_X$, alors $F(X, C_X) = X^{\oplus}$ est le *monoïde commutatif libre sur* X.

Une construction

Le monoïde $F(X, C_X)$ est (isomorphe à) $X^* \backslash \equiv_{C_X}$, où $\equiv_{C_X}$ est la congruence engendrée par l'ensemble C_X. Le morphisme i est alors la composition de l'inclusion canonique de X dans X^* avec la projection canonique de X^* sur $X^* / \equiv_{C_X}$. La liberté de $F(X, C_X)$ exprime le fait qu'un morphisme de monoïdes $\phi : F(X, C_X) \to M$ est complétement déterminé par une application $f : X \to M$ telle que $f(x)f(y) = f(y)f(x)$ pour tout $(x, y) \in C_X$.
Remarquons que si $C_X = \emptyset$, alors $F(X, \emptyset) = X^*$ est le *monoïde libre sur* X et si $C_X = X \times X \setminus \Delta_X$, alors $F(X, C_X) = X^{\oplus}$ est le *monoïde commutatif libre sur* X.

Une construction

Le monoïde $F(X, C_X)$ est (isomorphe à) $X^* \setminus \equiv_{C_X}$, où $\equiv_{C_X}$ est la congruence engendrée par l'ensemble C_X. Le morphisme i est alors la composition de l'inclusion canonique de X dans X^* avec la projection canonique de X^* sur $X^*/\equiv_{C_X}$. La liberté de $F(X, C_X)$ exprime le fait qu'un morphisme de monoïdes $\phi : F(X, C_X) \longrightarrow M$ est complétement déterminé par une application $f : X \longrightarrow M$ telle que
$f(x)f(y) = f(y)f(x)$ pour tout $(x, y) \in C_X$.
Remarquons que si $C_X = \emptyset$, alors $F(X, \emptyset) = X^*$ est le *monoïde libre sur* X et si $C_X = X \times X \setminus \Delta_X$, alors $F(X, C_X) = X^{\oplus}$ est le *monoïde commutatif libre sur* X.

Remarque

Tout monoïde (resp. monoïde commutatif) est isomorphe à un quotient, par une congruence, d'un monoïde (resp. monoïde commutatif) libre. En d'autres termes, quel que soit le monoïde (resp. monoïde commutatif) M, il existe un ensemble X et une congruence θ de X^* (resp. de $X^{\oplus}$) tels que $M \cong X^*/\theta$ (resp. $M \cong X^{\oplus}/\theta$).

Remarque

Tout monoïde (resp. monoïde commutatif) est isomorphe à un quotient, par une congruence, d'un monoïde (resp. monoïde commutatif) libre. En d'autres termes, quel que soit le monoïde (resp. monoïde commutatif) M, il existe un ensemble X et une congruence θ de X^* (resp. de $X^{\oplus}$) tels que $M \cong X^*/\theta$ (resp. $M \cong X^{\oplus}/\theta$).

Base de Rees

On appelle base de Rees (resp. base de Rees commutative) la donnée (M, X, I) où

1. M est un monoïde (resp. monoïde commutatif) ;
2. $X \subseteq M$ est un ensemble non vide générateur de M ;
3. I un idéal bilatère de M ($MI \subseteq I \supseteq IM$) et propre ($I \neq M$) ;
4. M est isomorphe à un quotient de X^* (resp. de $X^{\oplus}$).

On définit une *flèche* $\phi : (M, X, I) \to (N, Y, J)$ comme une application ensembliste $\phi : X \to Y$ telle que

$$\overline{\phi}^{-1}(\pi_Y^{-1}(J)) \subseteq \pi_X^{-1}(I)$$

où $\pi_X : X^* \to M$ (resp. $\pi_X : X^{\oplus} \to M$) et $\pi_Y : Y^* \to N$ (resp. $\pi_Y : Y^{\oplus} \to N$) sont les épimorphismes canoniques, et $\overline{\phi} : X^* \to Y^*$ (resp. $\overline{\phi} : X^{\oplus} \to Y^{\oplus}$) est l'extension naturelle de l'application $\phi : X \to Y$.

Base de Rees

On appelle base de Rees (resp. base de Rees commutative) la donnée (M, X, I) où

1. M est un monoïde (resp. monoïde commutatif) ;
2. $X \subseteq M$ est un ensemble non vide générateur de M ;
3. I un idéal bilatère de M ($MI \subseteq I \supseteq IM$) et propre ($I \neq M$) ;
4. M est isomorphe à un quotient de X^* (resp. de $X^{\oplus}$).

On définit une *flèche* $\phi : (M, X, I) \to (N, Y, J)$ comme une application ensembliste $\phi : X \to Y$ telle que

$$\overline{\phi}^{-1}(\pi_Y^{-1}(J)) \subseteq \pi_X^{-1}(I)$$

où $\pi_X : X^* \to M$ (resp. $\pi_X : X^{\oplus} \to M$) et $\pi_Y : Y^* \to N$ (resp. $\pi_Y : Y^{\oplus} \to N$) sont les épimorphismes canoniques, et $\overline{\phi} : X^* \to Y^*$ (resp. $\overline{\phi} : X^{\oplus} \to Y^{\oplus}$ est l'extension naturelle de l'application $\phi : X \to Y$.

Base de Rees

On appelle base de Rees (resp. base de Rees commutative) la donnée (M, X, I) où

1. M est un monoïde (resp. monoïde commutatif) ;
2. $X \subseteq M$ est un ensemble non vide générateur de M ;
3. I un idéal bilatère de M ($MI \subseteq I \supseteq IM$) et propre ($I \neq M$) ;
4. M est isomorphe à un quotient de X^* (resp. de $X^{\oplus}$).

On définit une *flèche* $\phi : (M, X, I) \to (N, Y, J)$ comme une application ensembliste $\phi : X \to Y$ telle que

$$\overline{\phi}^{-1}(\pi_Y^{-1}(J)) \subseteq \pi_X^{-1}(I)$$

où $\pi_X : X^* \to M$ (resp. $\pi_X : X^{\oplus} \to M$) et $\pi_Y : Y^* \to N$ (resp. $\pi_Y : Y^{\oplus} \to N$) sont les épimorphismes canoniques, et $\overline{\phi} : X^* \to Y^*$ (resp. $\overline{\phi} : X^{\oplus} \to Y^{\oplus}$) est l'extension naturelle de l'application $\phi : X \to Y$.

Base de Rees

On appelle base de Rees (resp. base de Rees commutative) la donnée (M, X, I) où

1. M est un monoïde (resp. monoïde commutatif) ;
2. $X \subseteq M$ est un ensemble non vide générateur de M ;
3. I un idéal bilatère de M ($MI \subseteq I \supseteq IM$) et propre ($I \neq M$) ;
4. M est isomorphe à un quotient de X^* (resp. de $X^{\oplus}$).

On définit une *flêche* $\phi : (M, X, I) \to (N, Y, J)$ comme une application ensembliste $\phi : X \to Y$ telle que

$$\overline{\phi}^{-1}(\pi_Y^{-1}(J)) \subseteq \pi_X^{-1}(I)$$

où $\pi_X : X^* \to M$ (resp. $\pi_X : X^{\oplus} \to M$) et $\pi_Y : Y^* \to N$ (resp. $\pi_Y : Y^{\oplus} \to N$) sont les épimorphismes canoniques, et $\overline{\phi} : X^* \to Y^*$ (resp. $\overline{\phi} : X^{\oplus} \to Y^{\oplus}$ est l'extension naturelle de l'application $\phi : X \to Y$.

Base de Rees

On appelle base de Rees (resp. base de Rees commutative) la donnée (M, X, I) où

1. M est un monoïde (resp. monoïde commutatif) ;
2. $X \subseteq M$ est un ensemble non vide générateur de M ;
3. I un idéal bilatère de M ($MI \subseteq I \supseteq IM$) et propre ($I \neq M$) ;
4. M est isomorphe à un quotient de X^* (resp. de $X^{\oplus}$).

On définit une *flêche* $\phi : (M, X, I) \to (N, Y, J)$ comme une application ensembliste $\phi : X \to Y$ telle que

$$\overline{\phi}^{-1}(\pi_Y^{-1}(J)) \subseteq \pi_X^{-1}(I)$$

où $\pi_X : X^* \to M$ (resp. $\pi_X : X^{\oplus} \to M$) et $\pi_Y : Y^* \to N$ (resp. $\pi_Y : Y^{\oplus} \to N$) sont les épimorphismes canoniques, et $\overline{\phi} : X^* \to Y^*$ (resp. $\overline{\phi} : X^{\oplus} \to Y^{\oplus}$ est l'extension naturelle de l'application $\phi : X \to Y$.

Base de Rees

On appelle base de Rees (resp. base de Rees commutative) la donnée (M, X, I) où

1. M est un monoïde (resp. monoïde commutatif) ;
2. $X \subseteq M$ est un ensemble non vide générateur de M ;
3. I un idéal bilatère de M ($MI \subseteq I \supseteq IM$) et propre ($I \neq M$) ;
4. M est isomorphe à un quotient de X^* (resp. de $X^{\oplus}$).

On définit une *flêche* $\phi : (M, X, I) \to (N, Y, J)$ comme une application ensembliste $\phi : X \to Y$ telle que

$$\overline{\phi}^{-1}(\pi_Y^{-1}(J)) \subseteq \pi_X^{-1}(I)$$

où $\pi_X : X^* \to M$ (resp. $\pi_X : X^{\oplus} \to M$) et $\pi_Y : Y^* \to N$ (resp. $\pi_Y : Y^{\oplus} \to N$) sont les épimorphismes canoniques, et $\overline{\phi} : X^* \to Y^*$ (resp. $\overline{\phi} : X^{\oplus} \to Y^{\oplus}$ est l'extension naturelle de l'application $\phi : X \to Y$.

Base de Rees

On appelle base de Rees (resp. base de Rees commutative) la donnée (M, X, I) où

1. M est un monoïde (resp. monoïde commutatif) ;
2. $X \subseteq M$ est un ensemble non vide générateur de M ;
3. I un idéal bilatère de M ($MI \subseteq I \supseteq IM$) et propre ($I \neq M$) ;
4. M est isomorphe à un quotient de X^* (resp. de $X^{\oplus}$).

On définit une *flêche* $\phi : (M, X, I) \rightarrow (N, Y, J)$ comme une application ensembliste $\phi : X \rightarrow Y$ telle que

$$\overline{\phi}^{-1}(\pi_Y^{-1}(J)) \subseteq \pi_X^{-1}(I)$$

où $\pi_X : X^* \rightarrow M$ (resp. $\pi_X : X^{\oplus} \rightarrow M$) et $\pi_Y : Y^* \rightarrow N$ (resp. $\pi_Y : Y^{\oplus} \rightarrow N$) sont les épimorphismes canoniques, et $\overline{\phi} : X^* \rightarrow Y^*$ (resp. $\overline{\phi} : X^{\oplus} \rightarrow Y^{\oplus}$ est l'extension naturelle de l'application $\phi : X \rightarrow Y$.

Base de Rees

On appelle base de Rees (resp. base de Rees commutative) la donnée (M, X, I) où

1. M est un monoïde (resp. monoïde commutatif) ;
2. $X \subseteq M$ est un ensemble non vide générateur de M ;
3. I un idéal bilatère de M ($MI \subseteq I \supseteq IM$) et propre ($I \neq M$) ;
4. M est isomorphe à un quotient de X^* (resp. de $X^\oplus$).

On définit une *flêche* $\phi : (M, X, I) \to (N, Y, J)$ comme une application ensembliste $\phi : X \to Y$ telle que

$$\overline{\phi}^{-1}(\pi_Y^{-1}(J)) \subseteq \pi_X^{-1}(I)$$

où $\pi_X : X^* \to M$ (resp. $\pi_X : X^\oplus \to M$) et $\pi_Y : Y^* \to N$ (resp. $\pi_Y : Y^\oplus \to N$) sont les épimorphismes canoniques, et $\overline{\phi} : X^* \to Y^*$ (resp. $\overline{\phi} : X^\oplus \to Y^\oplus$ est l'extension naturelle de l'application $\phi : X \to Y$.

Base de Rees

On appelle base de Rees (resp. base de Rees commutative) la donnée (M, X, I) où

1. M est un monoïde (resp. monoïde commutatif) ;
2. $X \subseteq M$ est un ensemble non vide générateur de M ;
3. I un idéal bilatère de M ($MI \subseteq I \supseteq IM$) et propre ($I \neq M$) ;
4. M est isomorphe à un quotient de X^* (resp. de $X^{\oplus}$).

On définit une *flêche* $\phi : (M, X, I) \longrightarrow (N, Y, J)$ comme une application ensembliste $\phi : X \longrightarrow Y$ telle que

$$\overline{\phi}^{-1}(\pi_Y^{-1}(J)) \subseteq \pi_X^{-1}(I)$$

où $\pi_X : X^* \longrightarrow M$ (resp. $\pi_X : X^{\oplus} \longrightarrow M$) et $\pi_Y : Y^* \longrightarrow N$ (resp. $\pi_Y : Y^{\oplus} \longrightarrow N$) sont les épimorphismes canoniques, et $\overline{\phi} : X^* \longrightarrow Y^*$ (resp. $\overline{\phi} : X^{\oplus} \longrightarrow Y^{\oplus}$ est l'extension naturelle de l'application $\phi : X \longrightarrow Y$.

Base de Rees

On appelle base de Rees (resp. base de Rees commutative) la donnée (M, X, I) où

1. M est un monoïde (resp. monoïde commutatif) ;
2. $X \subseteq M$ est un ensemble non vide générateur de M ;
3. I un idéal bilatère de M ($MI \subseteq I \supseteq IM$) et propre ($I \neq M$) ;
4. M est isomorphe à un quotient de X^* (resp. de $X^{\oplus}$).

On définit une *flêche* $\phi : (M, X, I) \to (N, Y, J)$ comme une application ensembliste $\phi : X \to Y$ telle que

$$\overline{\phi}^{-1}(\pi_Y^{-1}(J)) \subseteq \pi_X^{-1}(I)$$

où $\pi_X : X^* \to M$ (resp. $\pi_X : X^{\oplus} \to M$) et $\pi_Y : Y^* \to N$ (resp. $\pi_Y : Y^{\oplus} \to N$) sont les épimorphismes canoniques, et $\overline{\phi} : X^* \to Y^*$ (resp. $\overline{\phi} : X^{\oplus} \to Y^{\oplus}$ est l'extension naturelle de l'application $\phi : X \to Y$.

Intuitivement une flêche $\phi : (M, X, I) \to (N, Y, J)$ n'est rien d'autre qu'une application $\phi : X \to Y$ telle que quels que soient $x_1, \cdots, x_n \in X$,

$$\text{si } x_1 \cdots x_n \not\in I, \text{ alors } \phi(x_1) \cdots \phi(x_n) \not\in J.$$

Intuitivement une flêche $\phi : (M, X, I) \to (N, Y, J)$ n'est rien d'autre qu'une application $\phi : X \to Y$ telle que quels que soient $x_1, \cdots, x_n \in X$,

$$\text{si } x_1 \cdots x_n \notin I, \text{ alors } \phi(x_1) \cdots \phi(x_n) \notin J.$$

Catégorie des bases de Rees

Les bases de Rees (resp. bases de Rees commutatives) et leurs flêches forment une catégorie, laquelle est notée BR (resp. CBR).

Par ailleurs, on a un foncteur oubliant $\mathsf{U} : \mathsf{MonZ} \rightarrow \mathsf{BR}$ (resp. $\mathsf{U} : \mathsf{CMonZ} \rightarrow \mathsf{CBR}$) défini par $\mathsf{U} := (M, M, (0_M))$, c'est-à-dire que l'on choisit M comme ensemble générateur de lui-même, et (0_M) comme idéal bilatère propre de M. De même soit $\phi : M \rightarrow N$ une flêche de monoïdes à zéro, alors $\mathsf{U}\phi : (M, M, (0_M)) \rightarrow (N, N, 0_N))$ est défini comme l'application ensembliste $\phi : M \rightarrow N$ sous-jacente à ϕ. On vérifie alors que ϕ est bien une flêche de $(M, M, (0_M))$ dans $(N, N, (0_N))$.

Catégorie des bases de Rees

Les bases de Rees (resp. bases de Rees commutatives) et leurs flêches forment une catégorie, laquelle est notée BR (resp. CBR).

Par ailleurs, on a un foncteur oubliant $\mathsf{U} : \mathsf{MonZ} \to \mathsf{BR}$ (resp. $\mathsf{U} : \mathsf{CMonZ} \to \mathsf{CBR}$) défini par $\mathsf{U} := (M, M, (0_M))$, c'est-à-dire que l'on choisit M comme ensemble générateur de lui-même, et (0_M) comme idéal bilatère propre de M. De même soit $\phi : M \to N$ une flêche de monoïdes à zéro, alors $\mathsf{U}\phi : (M, M, (0_M)) \to (N, N, 0_N))$ est défini comme l'application ensembliste $\phi : M \to N$ sous-jacente à ϕ. On vérifie alors que ϕ est bien une flêche de $(M, M, (0_M))$ dans $(N, N, (0_N))$.

Catégorie des bases de Rees

Les bases de Rees (resp. bases de Rees commutatives) et leurs flêches forment une catégorie, laquelle est notée BR (resp. CBR).

Par ailleurs, on a un foncteur oubliant $\mathsf{U} : \mathsf{MonZ} \to \mathsf{BR}$ (resp. $\mathsf{U} : \mathsf{CMonZ} \to \mathsf{CBR}$) défini par $\mathsf{U} := (M, M, (0_M))$, c'est-à-dire que l'on choisit M comme ensemble générateur de lui-même, et (0_M) comme idéal bilatère propre de M. De même soit $\phi : M \to N$ une flêche de monoïdes à zéro, alors $\mathsf{U}\phi : (M, M, (0_M)) \to (N, N, 0_N))$ est défini comme l'application ensembliste $\phi : M \to N$ sous-jacente à ϕ. On vérifie alors que ϕ est bien une flêche de $(M, M, (0_M))$ dans $(N, N, (0_N))$.

Catégorie des bases de Rees

Les bases de Rees (resp. bases de Rees commutatives) et leurs flêches forment une catégorie, laquelle est notée BR (resp. CBR).

Par ailleurs, on a un foncteur oubliant $\mathsf{U} : \mathsf{MonZ} \rightarrow \mathsf{BR}$ (resp. $\mathsf{U} : \mathsf{CMonZ} \rightarrow \mathsf{CBR}$) défini par $\mathsf{U} := (M, M, (0_M))$, c'est-à-dire que l'on choisit M comme ensemble générateur de lui-même, et (0_M) comme idéal bilatère propre de M. De même soit $\phi : M \rightarrow N$ une flêche de monoïdes à zéro, alors $\mathsf{U}\phi : (M, M, (0_M)) \rightarrow (N, N, 0_N))$ est défini comme l'application ensembliste $\phi : M \rightarrow N$ sous-jacente à ϕ. On vérifie alors que ϕ est bien une flêche de $(M, M, (0_M))$ dans $(N, N, (0_N))$.

Catégorie des bases de Rees

Les bases de Rees (resp. bases de Rees commutatives) et leurs flêches forment une catégorie, laquelle est notée BR (resp. CBR).

Par ailleurs, on a un foncteur oubliant $\mathsf{U} : \mathsf{MonZ} \to \mathsf{BR}$ (resp. $\mathsf{U} : \mathsf{CMonZ} \to \mathsf{CBR}$) défini par $\mathsf{U} := (M, M, (0_M))$, c'est-à-dire que l'on choisit M comme ensemble générateur de lui-même, et (0_M) comme idéal bilatère propre de M. De même soit $\phi : M \to N$ une flêche de monoïdes à zéro, alors $\mathsf{U}\phi : (M, M, (0_M)) \to (N, N, 0_N))$ est défini comme l'application ensembliste $\phi : M \to N$ sous-jacente à ϕ. On vérifie alors que ϕ est bien une flêche de $(M, M, (0_M))$ dans $(N, N, (0_N))$.

Catégorie des bases de Rees

Les bases de Rees (resp. bases de Rees commutatives) et leurs flêches forment une catégorie, laquelle est notée BR (resp. CBR).

Par ailleurs, on a un foncteur oubliant $\mathsf{U} : \mathsf{MonZ} \to \mathsf{BR}$ (resp. $\mathsf{U} : \mathsf{CMonZ} \to \mathsf{CBR}$) défini par $\mathsf{U} := (M, M, (0_M))$, c'est-à-dire que l'on choisit M comme ensemble générateur de lui-même, et (0_M) comme idéal bilatère propre de M. De même soit $\phi : M \to N$ une flêche de monoïdes à zéro, alors $\mathsf{U}\phi : (M, M, (0_M)) \to (N, N, 0_N))$ est défini comme l'application ensembliste $\phi : M \to N$ sous-jacente à ϕ. On vérifie alors que ϕ est bien une flêche de $(M, M, (0_M))$ dans $(N, N, (0_N))$.

Monoïde (commutatif) partiel libre

Le foncteur d'oubli U admet un adjoint à gauche, autrement dit quel que soit $(M,X,I) \in \mathcal{O}_{\mathsf{BR}}$ (resp. $(M,X,I) \in \mathcal{O}_{\mathsf{CBR}}$), il existe un unique monoïde à zéro (resp. monoïde à zéro commutatif) $Z(M,X,I)$ et une flêche $i : (M,X,I) \to \mathsf{U}(Z(M,X,I))$ de BR (resp. CBR) tel que quels que soient le monoïde à zéro M (resp. monoïde à zéro commutatif) et une flêche $\phi : (M,X,I) \to \mathsf{U}N$ de BR (resp. CBR), il existe un unique morphisme de monoïdes à zéro (resp. de monoïdes à zéro commutatifs) $\tilde{\phi} : M \to N$ tel que

$$\mathsf{U}(\tilde{\phi}) \circ i = \phi \; .$$

Monoïde (commutatif) partiel libre

Le foncteur d'oubli U admet un adjoint à gauche, autrement dit quel que soit $(M, X, I) \in \mathcal{O}_{\mathsf{BR}}$ (resp. $(M, X, I) \in \mathcal{O}_{\mathsf{CBR}}$), il existe un unique monoïde à zéro (resp. monoïde à zéro commutatif) $Z(M, X, I)$ et une flêche $i : (M, X, I) \to \mathsf{U}(Z(M, X, I))$ de BR (resp. CBR) tel que quels que soient le monoïde à zéro M (resp. monoïde à zéro commutatif) et une flêche $\phi : (M, X, I) \to \mathsf{U}N$ de BR (resp. CBR), il existe un unique morphisme de monoïdes à zéro (resp. de monoïdes à zéro commutatifs) $\tilde{\phi} : M \to N$ tel que

$$\mathsf{U}(\tilde{\phi}) \circ i = \phi\ .$$

Monoïde (commutatif) partiel libre

Le foncteur d'oubli U admet un adjoint à gauche, autrement dit quel que soit $(M,X,I) \in \mathcal{O}_{\mathsf{BR}}$ (resp. $(M,X,I) \in \mathcal{O}_{\mathsf{CBR}}$), il existe un unique monoïde à zéro (resp. monoïde à zéro commutatif) $Z(M,X,I)$ et une flêche $i : (M,X,I) \to \mathsf{U}(Z(M,X,I))$ de BR (resp. CBR) tel que quels que soient le monoïde à zéro M (resp. monoïde à zéro commutatif) et une flêche $\phi : (M,X,I) \to \mathsf{U}N$ de BR (resp. CBR), il existe un unique morphisme de monoïdes à zéro (resp. de monoïdes à zéro commutatifs) $\tilde{\phi} : M \to N$ tel que

$$\mathsf{U}(\tilde{\phi}) \circ i = \phi\ .$$

Monoïde (commutatif) partiel libre

Le foncteur d'oubli U admet un adjoint à gauche, autrement dit quel que soit $(M, X, I) \in \mathcal{O}_{\mathsf{BR}}$ (resp. $(M, X, I) \in \mathcal{O}_{\mathsf{CBR}}$), il existe un unique monoïde à zéro (resp. monoïde à zéro commutatif) $Z(M, X, I)$ et une flêche $i : (M, X, I) \to \mathsf{U}(Z(M, X, I))$ de BR (resp. CBR) tel que quels que soient le monoïde à zéro M (resp. monoïde à zéro commutatif) et une flêche $\phi : (M, X, I) \to \mathsf{U}N$ de BR (resp. CBR), il existe un unique morphisme de monoïdes à zéro (resp. de monoïdes à zéro commutatifs) $\tilde{\phi} : M \to N$ tel que

$$\mathsf{U}(\tilde{\phi}) \circ i = \phi \, .$$

Monoïde (commutatif) partiel libre

Le foncteur d'oubli U admet un adjoint à gauche, autrement dit quel que soit $(M,X,I) \in \mathcal{O}_{\mathsf{BR}}$ (resp. $(M,X,I) \in \mathcal{O}_{\mathsf{CBR}}$), il existe un unique monoïde à zéro (resp. monoïde à zéro commutatif) $Z(M,X,I)$ et une flêche $i : (M,X,I) \to \mathsf{U}(Z(M,X,I))$ de BR (resp. CBR) tel que quels que soient le monoïde à zéro M (resp. monoïde à zéro commutatif) et une flêche $\phi : (M,X,I) \to \mathsf{U}N$ de BR (resp. CBR), il existe un unique morphisme de monoïdes à zéro (resp. de monoïdes à zéro commutatifs) $\tilde{\phi} : M \to N$ tel que

$$\mathsf{U}(\tilde{\phi}) \circ i = \phi\ .$$

Monoïde (commutatif) partiel libre

Le foncteur d'oubli U admet un adjoint à gauche, autrement dit quel que soit $(M, X, I) \in \mathcal{O}_{\mathsf{BR}}$ (resp. $(M, X, I) \in \mathcal{O}_{\mathsf{CBR}}$), il existe un unique monoïde à zéro (resp. monoïde à zéro commutatif) $Z(M, X, I)$ et une flêche $i : (M, X, I) \to \mathsf{U}(Z(M, X, I))$ de BR (resp. CBR) tel que quels que soient le monoïde à zéro M (resp. monoïde à zéro commutatif) et une flêche $\phi : (M, X, I) \to \mathsf{U}N$ de BR (resp. CBR), il existe un unique morphisme de monoïdes à zéro (resp. de monoïdes à zéro commutatifs) $\tilde{\phi} : M \to N$ tel que

$$\mathsf{U}(\tilde{\phi}) \circ i = \phi \,.$$

Monoïde (commutatif) partiel libre

Le foncteur d'oubli U admet un adjoint à gauche, autrement dit quel que soit $(M,X,I) \in \mathcal{O}_{\mathsf{BR}}$ (resp. $(M,X,I) \in \mathcal{O}_{\mathsf{CBR}}$), il existe un unique monoïde à zéro (resp. monoïde à zéro commutatif) $Z(M,X,I)$ et une flêche $i : (M,X,I) \to \mathsf{U}(Z(M,X,I))$ de BR (resp. CBR) tel que quels que soient le monoïde à zéro M (resp. monoïde à zéro commutatif) et une flêche $\phi : (M,X,I) \to \mathsf{U}N$ de BR (resp. CBR), il existe un unique morphisme de monoïdes à zéro (resp. de monoïdes à zéro commutatifs) $\tilde{\phi} : M \to N$ tel que

$$\mathsf{U}(\tilde{\phi}) \circ i = \phi \, .$$

Une construction du monoïde (commutatif) partiel libre

Le monoïde à zéro (resp. à zéro commutatif) $Z(M,X,I)$ s'appelle le monoïde partiel libre (resp. monoïde commutatif partiel libre) sur (M,X,I).

On peut le construire comme

$$Z(M,X,I) = (X^* \setminus \pi_X^{-1}(I)) \sqcup \{0\}$$

ou

$$Z(M,X,I) = (X^{\oplus} \setminus \pi_X^{-1}(I)) \sqcup \{\infty\}$$

dans le cas commutatif.

Une construction du monoïde (commutatif) partiel libre

Le monoïde à zéro (resp. à zéro commutatif) $Z(M,X,I)$ s'appelle le monoïde partiel libre (resp. monoïde commutatif partiel libre) sur (M,X,I).

On peut le construire comme

$$Z(M,X,I) = (X^* \setminus \pi_X^{-1}(I)) \sqcup \{0\}$$

ou

$$Z(M,X,I) = (X^{\oplus} \setminus \pi_X^{-1}(I)) \sqcup \{\infty\}$$

dans le cas commutatif.

Une construction du monoïde (commutatif) partiel libre

Le monoïde à zéro (resp. à zéro commutatif) $Z(M,X,I)$ s'appelle le monoïde partiel libre (resp. monoïde commutatif partiel libre) sur (M,X,I).

On peut le construire comme

$$Z(M,X,I) = (X^* \setminus \pi_X^{-1}(I)) \sqcup \{0\}$$

ou

$$Z(M,X,I) = (X^{\oplus} \setminus \pi_X^{-1}(I)) \sqcup \{\infty\}$$

dans le cas commutatif.