Opérateurs d'échelle généralisés et une « forme normale » des endomorphismes

Laurent Poinsot

LIPN - UMR CNRS 7030
Université Paris-Nord XIII - Institut Galilée

Séminaire d'Algèbre et de Théorie des Nombres - LMB UMR CNRS 6623
Le 10 mai 2012 à l'Université de Franche-Comté

LMB

UMR 6623 CNRS-UFC
Laboratoire de Mathématiques de Besançon

Dans la seule année 1925 paraissent trois modèles de la Mécanique Quantique :

Dans la seule année 1925 paraissent trois modèles de la Mécanique Quantique :

- ceux de Dirac et de Schrödinger basés sur une (fameuse) équation aux dérivées partielles,

Dans la seule année 1925 paraissent trois modèles de la Mécanique Quantique :

- ceux de Dirac et de Schrödinger basés sur une (fameuse) équation aux dérivées partielles,
- celui d'Heisenberg fondé sur la relation :

$$aa^\dagger - a^\dagger a = id \ .$$

La relation

$$aa^\dagger - a^\dagger a = id$$

a immédiatement contraint Born, Heisenberg et Jordan à considérer des matrices infinies.

Un peu d'histoire

Matrices infinies

La relation

$$aa^{\dagger} - a^{\dagger}a = id$$

a immédiatement contraint Born, Heisenberg et Jordan à considérer des matrices infinies.

En effet, un simple calcul de traces montre directement que cette relation ne peut, en caractéristique zéro, se représenter par des matrices finies non vides (sur une algèbre associative avec unité).

Un peu d'histoire

Matrices infinies

La relation

$$aa^\dagger - a^\dagger a = id$$

a immédiatement contraint Born, Heisenberg et Jordan à considérer des matrices infinies.

En effet, un simple calcul de traces montre directement que cette relation ne peut, en caractéristique zéro, se représenter par des matrices finies non vides (sur une algèbre associative avec unité).

La représentation (non triviale) par des opérateurs continus n'est pas non plus possible dans un espace de Banach. (La preuve est plus subtile.)

La relation

$$aa^\dagger - a^\dagger a = id$$

a immédiatement contraint Born, Heisenberg et Jordan à considérer des matrices infinies.

Cette relation peut être satisfaite fidèlement :

- soit par des opérateurs (fermables et densément définis, mais non bornés) sur un espace hilbertien.

- soit par des opérateurs continus sur un espace de Fréchet.

Il est ainsi possible de représenter l'opérateur a comme la dérivation usuelle des séries formelles en une variable z, et l'opérateur $a^\dagger$ comme la multiplication par z.

Il est ainsi possible de représenter l'opérateur a comme la dérivation usuelle des séries formelles en une variable z, et l'opérateur $a^\dagger$ comme la multiplication par z.

Lorsque l'on restreint leur action aux polynômes, on obtient des opérateurs gradués de degré -1 et $+1$.

a est un opérateur descendant, appelé opérateur d'annihilation, et $a^\dagger$ un opérateur montant, appelé opérateur de création.

Tout élément de l'algèbre engendrée par ces opérateurs admet une écriture unique sous la forme $\sum_{i,j} \alpha_{i,j}(a^\dagger)^i a^j$ (somme avec un nombre fini de termes non nuls).

Tout élément de l'algèbre engendrée par ces opérateurs admet une écriture unique sous la forme $\sum_{i,j} \alpha_{i,j}(a^\dagger)^i a^j$ (somme avec un nombre fini de termes non nuls). C'est l'écriture dans la base de l'ordre normal.

Tout élément de l'algèbre engendrée par ces opérateurs admet une écriture unique sous la forme $\sum_{i,j} \alpha_{i,j}(a^\dagger)^i a^j$ (somme avec un nombre fini de termes non nuls). C'est l'écriture dans la base de l'ordre normal.

L'intérêt pour cette écriture provient du fait que a – réalisé comme opérateur sur un espace de Hilbert – admet un théorie spectrale riche pour la physique.

Considérons donc l'espace $\mathbb{C}[z]$ des polynômes complexes en une indéterminée z.

Considérons donc l'espace $\mathbb{C}[z]$ des polynômes complexes en une indéterminée z.

Parmi tous les endomorphismes (linéaires) de $\mathbb{C}[z]$, deux d'entre eux jouent donc un rôle important

Considérons donc l'espace $\mathbb{C}[z]$ des polynômes complexes en une indéterminée z.

Parmi tous les endomorphismes (linéaires) de $\mathbb{C}[z]$, deux d'entre eux jouent donc un rôle important

• L'opérateur de multiplication : $a^\dagger(P) = zP$.

Considérons donc l'espace $\mathbb{C}[z]$ des polynômes complexes en une indéterminée z.

Parmi tous les endomorphismes (linéaires) de $\mathbb{C}[z]$, deux d'entre eux jouent donc un rôle important

- L'opérateur de multiplication : $a^\dagger(P) = zP$.
- L'opérateur de dérivation (formelle) : $a(P) = \frac{d}{dz}P$.

Ce que nous dit le théorème de densité de Jacobson

En effet, ces deux opérateurs contiennent toute l'information sur l'espace $\mathrm{End}(\mathbb{C}[z])$ des endomorphismes.

Ce que nous dit le théorème de densité de Jacobson

En effet, ces deux opérateurs contiennent toute l'information sur l'espace $\mathrm{End}(\mathbb{C}[z])$ des endomorphismes. Ces endomorphismes forment une algèbre, la sous-algèbre engendrée par a et $a^\dagger$.

Ce que nous dit le théorème de densité de Jacobson

En effet, ces deux opérateurs contiennent toute l'information sur l'espace $\mathrm{End}(\mathbb{C}[z])$ des endomorphismes. Ces endomorphismes forment une algèbre, la sous-algèbre engendrée par a et $a^\dagger$. Il s'agit de l'algèbre de Weyl.

Ce que nous dit le théorème de densité de Jacobson

En effet, ces deux opérateurs contiennent toute l'information sur l'espace $\mathrm{End}(\mathbb{C}[z])$ des endomorphismes. Ces endomorphismes forment une algèbre, la sous-algèbre engendrée par a et $a^\dagger$. Il s'agit de l'algèbre de Weyl.

Le théorème de densité de Jacobson a pour conséquence que l'algèbre de Weyl est dense (pour une certaine topologie) dans $\mathrm{End}(\mathbb{C}[z])$.

Ce que ne nous dit pas le théorème de densité de Jacobson

Ce que ne nous dit pas le théorème de densité de Jacobson

Cependant, le théorème de Jacobson est un résultat existentiel

Ce que ne nous dit pas le théorème de densité de Jacobson

Cependant, le théorème de Jacobson est un résultat existentiel : il ne nous dit pas comment construire explicitement sinon algorithmiquement une suite $(S_n)_n$ de l'algèbre de Weyl convergeant vers un endomorphisme ϕ.

Questions

Si deux polynômes peuvent s'additionner, on peut également les multiplier.

Questions

Si deux polynômes peuvent s'additionner, on peut également les multiplier. Or dans la preuve (de la conséquence) du théorème de Jacobson, la structure d'algèbre de $\mathbb{C}[z]$ n'est pas directement utilisée

Questions

Si deux polynômes peuvent s'additionner, on peut également les multiplier. Or dans la preuve (de la conséquence) du théorème de Jacobson, la structure d'algèbre de $\mathbb{C}[z]$ n'est pas directement utilisée : Peut-on s'en passer ?

Questions

Si deux polynômes peuvent s'additionner, on peut également les multiplier. Or dans la preuve (de la conséquence) du théorème de Jacobson, la structure d'algèbre de $\mathbb{C}[z]$ n'est pas directement utilisée : Peut-on s'en passer ?

Par ailleurs, les opérateurs a et $a^\dagger$ sont des cas particuliers d'opérateurs plus généraux : les opérateurs d'échelle.

Questions

Si deux polynômes peuvent s'additionner, on peut également les multiplier. Or dans la preuve (de la conséquence) du théorème de Jacobson, la structure d'algèbre de $\mathbb{C}[z]$ n'est pas directement utilisée : Peut-on s'en passer ?

Par ailleurs, les opérateurs a et $a^\dagger$ sont des cas particuliers d'opérateurs plus généraux : les opérateurs d'échelle. Soit par exemple V un espace vectoriel avec une base $(e_n)_n$ constituée d'une infinité d'éléments (typiquement $V = \mathbb{C}[z]$ et $e_n = z^n$ ou $e_n = \frac{z^n}{n!}$).

Questions

Si deux polynômes peuvent s'additionner, on peut également les multiplier. Or dans la preuve (de la conséquence) du théorème de Jacobson, la structure d'algèbre de $\mathbb{C}[z]$ n'est pas directement utilisée : Peut-on s'en passer ?

Par ailleurs, les opérateurs a et $a^\dagger$ sont des cas particuliers d'opérateurs plus généraux : les opérateurs d'échelle. Soit par exemple V un espace vectoriel avec une base $(e_n)_n$ constituée d'une infinité d'éléments (typiquement $V = \mathbb{C}[z]$ et $e_n = z^n$ ou $e_n = \frac{z^n}{n!}$). L'opérateur montant est donné par $Re_n = e_{n+1}$,

Questions

Si deux polynômes peuvent s'additionner, on peut également les multiplier. Or dans la preuve (de la conséquence) du théorème de Jacobson, la structure d'algèbre de $\mathbb{C}[z]$ n'est pas directement utilisée : Peut-on s'en passer ?

Par ailleurs, les opérateurs a et $a^\dagger$ sont des cas particuliers d'opérateurs plus généraux : les opérateurs d'échelle. Soit par exemple V un espace vectoriel avec une base $(e_n)_n$ constituée d'une infinité d'éléments (typiquement $V = \mathbb{C}[z]$ et $e_n = z^n$ ou $e_n = \frac{z^n}{n!}$). L'opérateur montant est donné par $Re_n = e_{n+1}$, et l'opérateur descendant est défini par $Le_{n+1} = e_n$ et $Le_0 = 0$.

Questions

Si deux polynômes peuvent s'additionner, on peut également les multiplier. Or dans la preuve (de la conséquence) du théorème de Jacobson, la structure d'algèbre de $\mathbb{C}[z]$ n'est pas directement utilisée : Peut-on s'en passer ?

Par ailleurs, les opérateurs a et $a^\dagger$ sont des cas particuliers d'opérateurs plus généraux : les opérateurs d'échelle. Soit par exemple V un espace vectoriel avec une base $(e_n)_n$ constituée d'une infinité d'éléments (typiquement $V = \mathbb{C}[z]$ et $e_n = z^n$ ou $e_n = \frac{z^n}{n!}$). L'opérateur montant est donné par $Re_n = e_{n+1}$, et l'opérateur descendant est défini par $Le_{n+1} = e_n$ et $Le_0 = 0$.

Est-il possible d'étendre le résultat de Jacobson aux opérateurs d'échelle plus généraux ?

Questions

Si deux polynômes peuvent s'additionner, on peut également les multiplier. Or dans la preuve (de la conséquence) du théorème de Jacobson, la structure d'algèbre de $\mathbb{C}[z]$ n'est pas directement utilisée : Peut-on s'en passer ?

Par ailleurs, les opérateurs a et $a^\dagger$ sont des cas particuliers d'opérateurs plus généraux : les opérateurs d'échelle. Soit par exemple V un espace vectoriel avec une base $(e_n)_n$ constituée d'une infinité d'éléments (typiquement $V = \mathbb{C}[z]$ et $e_n = z^n$ ou $e_n = \frac{z^n}{n!}$). L'opérateur montant est donné par $Re_n = e_{n+1}$, et l'opérateur descendant est défini par $Le_{n+1} = e_n$ et $Le_0 = 0$.

Est-il possible d'étendre le résultat de Jacobson aux opérateurs d'échelle plus généraux ? Et si oui, peut-on se passer de la caractéristique zéro ?

Objectifs de l'exposé

Cet exposé a pour buts de :

Objectifs de l'exposé

Cet exposé a pour buts de :

- Étendre la conséquence du résultat de Jacobson à un cadre plus général

Objectifs de l'exposé

Cet exposé a pour buts de :

• Étendre la conséquence du résultat de Jacobson à un cadre plus général : l'espace $\mathbb{C}[z]$ est remplacé par un espace de dimension infinie dénombrable V (sur un corps de caractéristique quelconque),

Objectifs de l'exposé

Cet exposé a pour buts de :

• Étendre la conséquence du résultat de Jacobson à un cadre plus général : l'espace $\mathbb{C}[z]$ est remplacé par un espace de dimension infinie dénombrable V (sur un corps de caractéristique quelconque), et a, $a^\dagger$ par des opérateurs d'échelle.

Objectifs de l'exposé

Cet exposé a pour buts de :

• Étendre la conséquence du résultat de Jacobson à un cadre plus général : l'espace $\mathbb{C}[z]$ est remplacé par un espace de dimension infinie dénombrable V (sur un corps de caractéristique quelconque), et a, $a^\dagger$ par des opérateurs d'échelle.

• Présenter une construction explicite (par récurrence) d'une suite $(S_n)_n$

Objectifs de l'exposé

Cet exposé a pour buts de :

• Étendre la conséquence du résultat de Jacobson à un cadre plus général : l'espace $\mathbb{C}[z]$ est remplacé par un espace de dimension infinie dénombrable V (sur un corps de caractéristique quelconque), et a, $a^\dagger$ par des opérateurs d'échelle.

• Présenter une construction explicite (par récurrence) d'une suite $(S_n)_n$: un algorithme qui prend en entrée un endomorphisme P de V et qui renvoie une suite $(S_n)_n$ d'éléments de l'algèbre engendrée par les opérateurs d'échelle telle que $\lim_{n\to\infty} S_n = \phi$.

Objectifs de l'exposé

Cet exposé a pour buts de :

• Étendre la conséquence du résultat de Jacobson à un cadre plus général : l'espace $\mathbb{C}[z]$ est remplacé par un espace de dimension infinie dénombrable V (sur un corps de caractéristique quelconque), et a, $a^\dagger$ par des opérateurs d'échelle.

• Présenter une construction explicite (par récurrence) d'une suite $(S_n)_n$: un algorithme qui prend en entrée un endomorphisme P de V et qui renvoie une suite $(S_n)_n$ d'éléments de l'algèbre engendrée par les opérateurs d'échelle telle que $\lim_{n\to\infty} S_n = \phi$.

• En déduire une forme normale pour les endomorphismes

Objectifs de l'exposé

Cet exposé a pour buts de :

• Étendre la conséquence du résultat de Jacobson à un cadre plus général : l'espace $\mathbb{C}[z]$ est remplacé par un espace de dimension infinie dénombrable V (sur un corps de caractéristique quelconque), et a, $a^\dagger$ par des opérateurs d'échelle.

• Présenter une construction explicite (par récurrence) d'une suite $(S_n)_n$: un algorithme qui prend en entrée un endomorphisme P de V et qui renvoie une suite $(S_n)_n$ d'éléments de l'algèbre engendrée par les opérateurs d'échelle telle que $\lim_{n\to\infty} S_n = \phi$.

• En déduire une forme normale pour les endomorphismes : il existe *a priori* de nombreuses suites $(S_n)_n$ qui convergent vers un opérateur ϕ donné.

Objectifs de l'exposé

Cet exposé a pour buts de :

• Étendre la conséquence du résultat de Jacobson à un cadre plus général : l'espace $\mathbb{C}[z]$ est remplacé par un espace de dimension infinie dénombrable V (sur un corps de caractéristique quelconque), et a, $a^\dagger$ par des opérateurs d'échelle.

• Présenter une construction explicite (par récurrence) d'une suite $(S_n)_n$: un algorithme qui prend en entrée un endomorphisme P de V et qui renvoie une suite $(S_n)_n$ d'éléments de l'algèbre engendrée par les opérateurs d'échelle telle que $\lim_{n\to\infty} S_n = \phi$.

• En déduire une forme normale pour les endomorphismes : il existe *a priori* de nombreuses suites $(S_n)_n$ qui convergent vers un opérateur ϕ donné. Notre construction permet d'associer une unique série en deux variables non commutatives à chaque endomorphisme

Objectifs de l'exposé

Cet exposé a pour buts de :

• Étendre la conséquence du résultat de Jacobson à un cadre plus général : l'espace $\mathbb{C}[z]$ est remplacé par un espace de dimension infinie dénombrable V (sur un corps de caractéristique quelconque), et a, $a^\dagger$ par des opérateurs d'échelle.

• Présenter une construction explicite (par récurrence) d'une suite $(S_n)_n$: un algorithme qui prend en entrée un endomorphisme P de V et qui renvoie une suite $(S_n)_n$ d'éléments de l'algèbre engendrée par les opérateurs d'échelle telle que $\lim_{n\to\infty} S_n = \phi$.

• En déduire une forme normale pour les endomorphismes : il existe *a priori* de nombreuses suites $(S_n)_n$ qui convergent vers un opérateur ϕ donné. Notre construction permet d'associer une unique série en deux variables non commutatives à chaque endomorphisme, c'est sa forme normale (c'est un genre de patron),

Objectifs de l'exposé

Cet exposé a pour buts de :

• Étendre la conséquence du résultat de Jacobson à un cadre plus général : l'espace $\mathbb{C}[z]$ est remplacé par un espace de dimension infinie dénombrable V (sur un corps de caractéristique quelconque), et a, $a^\dagger$ par des opérateurs d'échelle.

• Présenter une construction explicite (par récurrence) d'une suite $(S_n)_n$: un algorithme qui prend en entrée un endomorphisme P de V et qui renvoie une suite $(S_n)_n$ d'éléments de l'algèbre engendrée par les opérateurs d'échelle telle que $\lim_{n\to\infty} S_n = \phi$.

• En déduire une forme normale pour les endomorphismes : il existe *a priori* de nombreuses suites $(S_n)_n$ qui convergent vers un opérateur ϕ donné. Notre construction permet d'associer une unique série en deux variables non commutatives à chaque endomorphisme, c'est sa forme normale (c'est un genre de patron), et par une application de spécialisation

Objectifs de l'exposé

Cet exposé a pour buts de :

• Étendre la conséquence du résultat de Jacobson à un cadre plus général : l'espace $\mathbb{C}[z]$ est remplacé par un espace de dimension infinie dénombrable V (sur un corps de caractéristique quelconque), et a, $a^\dagger$ par des opérateurs d'échelle.

• Présenter une construction explicite (par récurrence) d'une suite $(S_n)_n$: un algorithme qui prend en entrée un endomorphisme P de V et qui renvoie une suite $(S_n)_n$ d'éléments de l'algèbre engendrée par les opérateurs d'échelle telle que $\lim_{n\to\infty} S_n = \phi$.

• En déduire une forme normale pour les endomorphismes : il existe *a priori* de nombreuses suites $(S_n)_n$ qui convergent vers un opérateur ϕ donné. Notre construction permet d'associer une unique série en deux variables non commutatives à chaque endomorphisme, c'est sa forme normale (c'est un genre de patron), et par une application de spécialisation (une des variables est remplacée par l'opérateur montant, et l'autre par l'opérateur descendant)

Objectifs de l'exposé

Cet exposé a pour buts de :

• Étendre la conséquence du résultat de Jacobson à un cadre plus général : l'espace $\mathbb{C}[z]$ est remplacé par un espace de dimension infinie dénombrable V (sur un corps de caractéristique quelconque), et a, $a^\dagger$ par des opérateurs d'échelle.

• Présenter une construction explicite (par récurrence) d'une suite $(S_n)_n$: un algorithme qui prend en entrée un endomorphisme P de V et qui renvoie une suite $(S_n)_n$ d'éléments de l'algèbre engendrée par les opérateurs d'échelle telle que $\lim_{n\to\infty} S_n = \phi$.

• En déduire une forme normale pour les endomorphismes : il existe *a priori* de nombreuses suites $(S_n)_n$ qui convergent vers un opérateur ϕ donné. Notre construction permet d'associer une unique série en deux variables non commutatives à chaque endomorphisme, c'est sa forme normale (c'est un genre de patron), et par une application de spécialisation (une des variables est remplacée par l'opérateur montant, et l'autre par l'opérateur descendant) on trouve la suite $(S_n)_n$ qui converge vers l'opérateur.

Table des matières

Table des matières

Quelques notations

Soient $\mathbb{K}$ un corps quelconque.

Si X est un ensemble, alors on note $\mathbb{K}\langle X\rangle$ l'algèbre des polynômes à variables non commutatives dans X (c'est l'algèbre du monoïde libre X^* ou l'algèbre tensorielle du $\mathbb{K}$-espace vectoriel engendré par l'ensemble X).

Quelques notations

Soient $\mathbb{K}$ un corps quelconque.

Si X est un ensemble, alors on note $\mathbb{K}\langle X\rangle$ l'algèbre des polynômes à variables non commutatives dans X (c'est l'algèbre du monoïde libre X^* ou l'algèbre tensorielle du $\mathbb{K}$-espace vectoriel engendré par l'ensemble X). Si $X = \{ x_1, \cdots, x_n \}$, alors $\mathbb{K}\langle X\rangle$ est noté $\mathbb{K}\langle x_1, \cdots, x_n\rangle$.

Quelques notations

Soient $\mathbb{K}$ un corps quelconque.

Si X est un ensemble, alors on note $\mathbb{K}\langle X\rangle$ l'algèbre des polynômes à variables non commutatives dans X (c'est l'algèbre du monoïde libre X^* ou l'algèbre tensorielle du $\mathbb{K}$-espace vectoriel engendré par l'ensemble X). Si $X = \{ x_1, \cdots, x_n \}$, alors $\mathbb{K}\langle X\rangle$ est noté $\mathbb{K}\langle x_1, \cdots, x_n\rangle$.

Si $P \in \mathbb{K}\langle X\rangle$, alors le coefficient de P par rapport au «mot» $w \in X^*$ dans son écriture dans la base X^* est noté $\langle P \mid w\rangle$,

Quelques notations

Soient $\mathbb{K}$ un corps quelconque.

Si X est un ensemble, alors on note $\mathbb{K}\langle X\rangle$ l'algèbre des polynômes à variables non commutatives dans X (c'est l'algèbre du monoïde libre X^* ou l'algèbre tensorielle du $\mathbb{K}$-espace vectoriel engendré par l'ensemble X). Si $X = \{ x_1, \cdots, x_n \}$, alors $\mathbb{K}\langle X\rangle$ est noté $\mathbb{K}\langle x_1, \cdots, x_n\rangle$.

Si $P \in \mathbb{K}\langle X\rangle$, alors le coefficient de P par rapport au «mot» $w \in X^*$ dans son écriture dans la base X^* est noté $\langle P \mid w\rangle$, de sorte que

$$P = \sum_{w\in X^*} \langle P \mid w\rangle w$$

(somme avec un nombre fini de termes non nuls).

Support d'un polynôme

Définition: Support d'un polynôme

Le support $\mathrm{Supp}(P)$ d'un polynôme $P \in \mathbb{K}\langle X \rangle$ est l'ensemble (fini) des mots $w \in X^*$ tels que $\langle P \mid w \rangle \neq 0$.

Séries formelles

Le complété de $\mathbb{K}\langle X\rangle$ pour la topologie produit (ou pour la topologie induite par la valuation donnée par la longueur d'un mot lorsque X est fini) est l'algèbre des séries non commutatives à variables dans X.

Séries formelles

Le complété de $\mathbb{K}\langle X\rangle$ pour la topologie produit (ou pour la topologie induite par la valuation donnée par la longueur d'un mot lorsque X est fini) est l'algèbre des séries non commutatives à variables dans X.

Ses éléments sont des sommes $\sum_{w\in X^*} S_w w$ où les coefficients $S_w \in X^*$ peuvent être tous non nuls.

Séries formelles

Le complété de $\mathbb{K}\langle X\rangle$ pour la topologie produit (ou pour la topologie induite par la valuation donnée par la longueur d'un mot lorsque X est fini) est l'algèbre des séries non commutatives à variables dans X.

Ses éléments sont des sommes $\displaystyle\sum_{w\in X^*} S_w w$ où les coefficients $S_w \in X^*$ peuvent être tous non nuls. On définit le support d'une série comme l'ensemble (éventuellement vide) des mots w tels que $S_w \neq 0$ de sorte que $\mathbb{K}\langle X\rangle$ est l'ensemble des séries ayant un support fini.

Algèbre de Weyl : définition

L'algèbre de Weyl (d'indice 1) $A(\mathbb{K})$ est défini comme le quotient de l'algèbre des polynômes $\mathbb{K}\langle x, y\rangle$ à deux variables non commutatives par l'idéal bilatère engendré par la relation $[x, y] = 1$.

Algèbre de Weyl : définition

L'algèbre de Weyl (d'indice 1) $A(\mathbb{K})$ est défini comme le quotient de l'algèbre des polynômes $\mathbb{K}\langle x, y\rangle$ à deux variables non commutatives par l'idéal bilatère engendré par la relation $[x, y] = 1$.

Soient $a = \pi(x)$ et $a^\dagger = \pi(y)$ où $\pi\colon \mathbb{K}\langle x, y\rangle \twoheadrightarrow A(\mathbb{K})$ désigne l'épimorphisme canonique.

Algèbre de Weyl : Base de l'ordre normal

En tant que $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $A(\mathbb{K})$ est libre de base $\{(a^\dagger)^i a^j\}_{i,j\in\mathbb{N}}$ (c'est un résultat général des algèbres de Ore).

Algèbre de Weyl : Base de l'ordre normal

En tant que $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $A(\mathbb{K})$ est libre de base $\{\, (a^\dagger)^i a^j \,\}_{i,j\in\mathbb{N}}$ (c'est un résultat général des algèbres de Ore).

Cela signifie que pour chaque $\Omega \in A(\mathbb{K})$ il existe un unique polynôme, appelons-le

$$\mathcal{Pol}(\Omega) \in \mathbb{K}\langle x, y\rangle$$

dont le support $\mathrm{Supp}(\mathcal{Pol}(\Omega)) \subseteq \{\, y^i x^j : i, j \in \mathbb{N} \,\}$ et tel que $\pi(\mathcal{Pol}(\Omega)) = \Omega$ (en d'autres termes, $\mathcal{Pol} : A(\mathbb{K}) \hookrightarrow \mathbb{K}\langle x, y\rangle$ est une section pour π).

Algèbre de Weyl : Base de l'ordre normal

Nous appelons ordre normal d'un polynôme $P \in \mathbb{K}\langle x, y\rangle$, le polynôme

$$\mathcal{N}(P) = \mathcal{Pol}(\pi(P)) \in \mathbb{K}\langle x, y\rangle \ .$$

Nous appelons ordre normal d'un polynôme $P \in \mathbb{K}\langle x, y\rangle$, le polynôme

$$\mathcal{N}(P) = \mathcal{P}ol(\pi(P)) \in \mathbb{K}\langle x, y\rangle \ .$$

Remarque

Notons que P et $\mathcal{N}(P)$ définissent le même élément de $A(\mathbb{K})$ puisque $\pi(\mathcal{N}(P)) = \pi(\mathcal{P}ol(\pi(P))) = \pi(P)$.

Algèbre de Weyl : Base de l'ordre normal - un exemple

Soit $P = y^2xy + x^3yx \in \mathbb{Q}\langle x, y\rangle$, alors $\mathcal{N}(P) = y^2 + y^3x + 3x^3 + yx^4$.

Algèbre de Weyl : Base de l'ordre normal - un exemple

Soit $P = y^2xy + x^3yx \in \mathbb{Q}\langle x, y\rangle$, alors $\mathcal{N}(P) = y^2 + y^3x + 3x^3 + yx^4$.

En effet nous avons,

$$y^2xy + x^3yx \;\Rightarrow\; y^2(yx+1) + x^2(yx+1)x$$

Algèbre de Weyl : Base de l'ordre normal - un exemple

Soit $P = y^2xy + x^3yx \in \mathbb{Q}\langle x, y\rangle$, alors $\mathcal{N}(P) = y^2 + y^3x + 3x^3 + yx^4$.

En effet nous avons,

$$
\begin{array}{rcl}
y^2xy + x^3yx & \Rightarrow & y^2(yx+1) + x^2(yx+1)x \\
 & \Rightarrow & y^2 + y^3x + x^3 + x(yx+1)x^2
\end{array}
$$

Algèbre de Weyl : Base de l'ordre normal - un exemple

Soit $P = y^2xy + x^3yx \in \mathbb{Q}\langle x, y\rangle$, alors $\mathcal{N}(P) = y^2 + y^3x + 3x^3 + yx^4$.

En effet nous avons,

$$\begin{aligned} y^2xy + x^3yx &\Rightarrow y^2(yx+1) + x^2(yx+1)x \\ &\Rightarrow y^2 + y^3x + x^3 + x(yx+1)x^2 \\ &\Rightarrow y^2 + y^3x + 2x^3 + (yx+1)x^3 \end{aligned}$$

Algèbre de Weyl : Base de l'ordre normal - un exemple

Soit $P = y^2xy + x^3yx \in \mathbb{Q}\langle x, y\rangle$, alors $\mathcal{N}(P) = y^2 + y^3x + 3x^3 + yx^4$.

En effet nous avons,

$$\begin{aligned} y^2xy + x^3yx &\Rightarrow y^2(yx+1) + x^2(yx+1)x \\ &\Rightarrow y^2 + y^3x + x^3 + x(yx+1)x^2 \\ &\Rightarrow y^2 + y^3x + 2x^3 + (yx+1)x^3 \end{aligned}$$

Il en résulte que

$$\mathcal{Pol}((a^\dagger)^2aa^\dagger + a^3a^\dagger a) = y^2 + y^3x + 3x^3 + yx^4 \ .$$

Algèbre de Weyl : Base de l'ordre normal - un exemple

Soit $P = y^2xy + x^3yx \in \mathbb{Q}\langle x, y\rangle$, alors $\mathcal{N}(P) = y^2 + y^3x + 3x^3 + yx^4$.

En effet nous avons,

$$\begin{aligned} y^2xy + x^3yx &\Rightarrow y^2(yx+1) + x^2(yx+1)x \\ &\Rightarrow y^2 + y^3x + x^3 + x(yx+1)x^2 \\ &\Rightarrow y^2 + y^3x + 2x^3 + (yx+1)x^3 \end{aligned}$$

Il en résulte que

$$\mathcal{Pol}((a^\dagger)^2 aa^\dagger + a^3a^\dagger a) = y^2 + y^3x + 3x^3 + yx^4 \ .$$

De plus,

$$\pi(P) = (a^\dagger)^2 aa^\dagger + a^3a^\dagger a \in A(\mathbb{Q})$$

Algèbre de Weyl : Base de l'ordre normal - un exemple

Soit $P = y^2xy + x^3yx \in \mathbb{Q}\langle x, y\rangle$, alors $\mathcal{N}(P) = y^2 + y^3x + 3x^3 + yx^4$.

En effet nous avons,

$$\begin{aligned} y^2xy + x^3yx &\Rightarrow y^2(yx+1) + x^2(yx+1)x \\ &\Rightarrow y^2 + y^3x + x^3 + x(yx+1)x^2 \\ &\Rightarrow y^2 + y^3x + 2x^3 + (yx+1)x^3 \end{aligned}$$

Il en résulte que

$$\mathcal{Pol}\left((a^\dagger)^2 a a^\dagger + a^3 a^\dagger a\right) = y^2 + y^3x + 3x^3 + yx^4 \ .$$

De plus,

$$\pi(P) = (a^\dagger)^2 a a^\dagger + a^3 a^\dagger a \in A(\mathbb{Q})$$

et

$$\pi(P) = (a^\dagger)^2 + (a^\dagger)^3 a + 3a^3 + (a^\dagger) a^4 \ .$$

L'algèbre de Weyl comme algèbre d'opérateurs différentiels

Supposons ici que $\mathbb{K}$ est un corps de caractéristique zéro.

L'algèbre de Weyl comme algèbre d'opérateurs différentiels

Supposons ici que $\mathbb{K}$ est un corps de caractéristique zéro.

On définit une représentation linéaire ρ de $A(\mathbb{K})$ sur $\mathbb{K}[z]$ comme suit :

L'algèbre de Weyl comme algèbre d'opérateurs différentiels

Supposons ici que $\mathbb{K}$ est un corps de caractéristique zéro.

On définit une représentation linéaire ρ de $A(\mathbb{K})$ sur $\mathbb{K}[z]$ comme suit :

- On définit $\rho(x)(p) = \frac{d}{dz}p$ et $\rho(y)(p) = zp$ pour $p \in \mathbb{K}[z]$.

L'algèbre de Weyl comme algèbre d'opérateurs différentiels

Supposons ici que $\mathbb{K}$ est un corps de caractéristique zéro.

On définit une représentation linéaire ρ de $A(\mathbb{K})$ sur $\mathbb{K}[z]$ comme suit :

- On définit $\rho(x)(p) = \frac{d}{dz}p$ et $\rho(y)(p) = zp$ pour $p \in \mathbb{K}[z]$.
- ρ est étendu par linéarité en un homomorphisme de $\mathbb{K}$-algèbre ρ de $\mathbb{K}\langle x, y\rangle$ dans $\mathrm{End}_{\mathbb{K}\text{-}\mathcal{V}ect}(\mathbb{K}[z])$.

L'algèbre de Weyl comme algèbre d'opérateurs différentiels

Supposons ici que $\mathbb{K}$ est un corps de caractéristique zéro.

On définit une représentation linéaire ρ de $A(\mathbb{K})$ sur $\mathbb{K}[z]$ comme suit :

- On définit $\rho(x)(p) = \frac{d}{dz}p$ et $\rho(y)(p) = zp$ pour $p \in \mathbb{K}[z]$.
- ρ est étendu par linéarité en un homomorphisme de $\mathbb{K}$-algèbre ρ de $\mathbb{K}\langle x, y\rangle$ dans $\mathrm{End}_{\mathbb{K}\text{-}\mathcal{V}ect}(\mathbb{K}[z])$.
- Puisque $\rho([x, y]) = [\rho(x), \rho(y)] = id_{\mathbb{K}[z]}$, il s'ensuit que la représentation passe au quotient : il existe un homomorphisme d'algèbres $\tilde{\rho}\colon A(\mathbb{K}) \to \mathrm{End}_{\mathbb{K}\text{-}\mathcal{V}ect}(\mathbb{K}[z])$tel que

$$\tilde{\rho} \circ \pi = \rho \ .$$

L'algèbre de Weyl comme algèbre d'opérateurs différentiels

Supposons ici que $\mathbb{K}$ est un corps de caractéristique zéro.

On définit une représentation linéaire ρ de $A(\mathbb{K})$ sur $\mathbb{K}[z]$ comme suit :

- On définit $\rho(x)(p) = \frac{d}{dz}p$ et $\rho(y)(p) = zp$ pour $p \in \mathbb{K}[z]$.
- ρ est étendu par linéarité en un homomorphisme de $\mathbb{K}$-algèbre ρ de $\mathbb{K}\langle x, y\rangle$ dans $\mathrm{End}_{\mathbb{K}\text{-}\mathcal{V}ect}(\mathbb{K}[z])$.
- Puisque $\rho([x, y]) = [\rho(x), \rho(y)] = id_{\mathbb{K}[z]}$, il s'ensuit que la représentation passe au quotient : il existe un homomorphisme d'algèbres $\tilde{\rho}\colon A(\mathbb{K}) \to \mathrm{End}_{\mathbb{K}\text{-}\mathcal{V}ect}(\mathbb{K}[z])$tel que

$$\tilde{\rho} \circ \pi = \rho \ .$$

  Cette représentation est fidèle, *i.e.*, $\ker \tilde{\rho} = (0)$ de telle sorte que $A(\mathbb{K})$ peut être identifiée avec la sous-algèbre de $\mathrm{End}_{\mathbb{K}\text{-}\mathcal{V}ect}(\mathbb{K}[z])$ engendrée par la multiplication par z et la dérivation formelle $\frac{d}{dz}$.

L'algèbre de Weyl comme algèbre d'opérateurs différentiels - un exemple

Soit $\Omega = (a^\dagger)^2 a a^\dagger + a^3 a^\dagger a \in A(\mathbb{K})$.

L'algèbre de Weyl comme algèbre d'opérateurs différentiels - un exemple

Soit $\Omega = (a^\dagger)^2 a a^\dagger + a^3 a^\dagger a \in A(\mathbb{K})$.

Alors pour tout $p \in \mathbb{K}[z]$,

$$\tilde{\rho}(\Omega)(p) = z^2 p + z^3 p' + 3p''' + zp'''' \ .$$

Opérateurs d'échelle

En tant qu'opérateurs sur $\mathbb{K}[z]$, a et $a^\dagger$ sont des opérateurs gradués de degré -1 et 1 relativement au degré usuel des polynômes.

Opérateurs d'échelle

En tant qu'opérateurs sur $\mathbb{K}[z]$, a et $a^\dagger$ sont des opérateurs gradués de degré -1 et 1 relativement au degré usuel des polynômes.

Ainsi, a est un opérateur descendant,

Opérateurs d'échelle

En tant qu'opérateurs sur $\mathbb{K}[z]$, a et $a^\dagger$ sont des opérateurs gradués de degré -1 et 1 relativement au degré usuel des polynômes.

Ainsi, a est un opérateur descendant, alors que $a^\dagger$ est un opérateur montant.

Opérateurs d'échelle

En tant qu'opérateurs sur $\mathbb{K}[z]$, a et $a^\dagger$ sont des opérateurs gradués de degré -1 et 1 relativement au degré usuel des polynômes.

Ainsi, a est un opérateur descendant, alors que $a^\dagger$ est un opérateur montant.

On les appelle des opérateurs d'échelle.

Table des matières

Le théorème de Jacobson : fragment algébrique

Soit R un anneau avec unité (commutatif ou non). Si M est un R-module à gauche, alors on note par $\nu\colon R \to \mathrm{End}_{\mathcal{Ab}}(M)$ l'application de structure associée. (C'est un homomorphisme d'anneaux puisqu'il s'agit d'une représentation linéaire de R.)

Le théorème de Jacobson : fragment algébrique

Soit R un anneau avec unité (commutatif ou non). Si M est un R-module à gauche, alors on note par $\nu\colon R \to \mathrm{End}_{\mathcal{Ab}}(M)$ l'application de structure associée. (C'est un homomorphisme d'anneaux puisqu'il s'agit d'une représentation linéaire de R.)

Un R-module à gauche M est dit être un module fidèle lorsque l'application de structure est injective (*i.e.*, $\ker \nu = (0)$).

Le théorème de Jacobson : fragment algébrique

Soit R un anneau avec unité (commutatif ou non). Si M est un R-module à gauche, alors on note par $\nu\colon R \to \mathrm{End}_{\mathcal{Ab}}(M)$ l'application de structure associée. (C'est un homomorphisme d'anneaux puisqu'il s'agit d'une représentation linéaire de R.)

Un R-module à gauche M est dit être un module fidèle lorsque l'application de structure est injective (*i.e.*, $\ker \nu = (0)$).

Un R-module à gauche M est dit être un module simple s'il est non nul et qu'il ne possède pas de sous-modules non triviaux.

Le théorème de Jacobson : fragment algébrique

Soit R un anneau avec unité (commutatif ou non). Si M est un R-module à gauche, alors on note par $\nu\colon R \to \mathrm{End}_{\mathcal{Ab}}(M)$ l'application de structure associée. (C'est un homomorphisme d'anneaux puisqu'il s'agit d'une représentation linéaire de R.)

Un R-module à gauche M est dit être un module fidèle lorsque l'application de structure est injective (*i.e.*, $\ker \nu = (0)$).

Un R-module à gauche M est dit être un module simple s'il est non nul et qu'il ne possède pas de sous-modules non triviaux.

L'anneau R est dit primitif (à gauche) s'il possède un module à gauche simple et fidèle.

Fragment topologique : la topologie compact-ouvert

Soient X et Y deux espaces topologiques, et soit $\mathcal{C}(X, Y)$ l'ensemble de toutes les fonctions continues de X dans Y.

Fragment topologique : la topologie compact-ouvert

Soient X et Y deux espaces topologiques, et soit $\mathcal{C}(X, Y)$ l'ensemble de toutes les fonctions continues de X dans Y.

Soit K un sous-ensemble compact de X et U un ouvert de Y, alors on définit

$$V(K, U) = \{\, f \in \mathcal{C}(X, Y) \colon f(K) \subseteq U \,\} \ .$$

Fragment topologique : la topologie compact-ouvert

Soient X et Y deux espaces topologiques, et soit $\mathcal{C}(X, Y)$ l'ensemble de toutes les fonctions continues de X dans Y.

Soit K un sous-ensemble compact de X et U un ouvert de Y, alors on définit

$$V(K, U) = \{ f \in \mathcal{C}(X, Y) \colon f(K) \subseteq U \} .$$

Alors la famille de tous les ensembles de la forme $V(K, U)$ forment une sous-base de la topologie compact-ouvert de $\mathcal{C}(X, Y)$.

Fragment topologique : la topologie compact-ouvert

Soient X et Y deux espaces topologiques, et soit $\mathcal{C}(X, Y)$ l'ensemble de toutes les fonctions continues de X dans Y.

Soit K un sous-ensemble compact de X et U un ouvert de Y, alors on définit

$$V(K, U) = \{ f \in \mathcal{C}(X, Y) \colon f(K) \subseteq U \} .$$

Alors la famille de tous les ensembles de la forme $V(K, U)$ forment une sous-base de la topologie compact-ouvert de $\mathcal{C}(X, Y)$.

Cela signifie que pour tout ouvert non vide V de la topologie compact-ouvert, et chaque $f \in V$, il existe un nombre fini $K_1, \cdots, K_n$ de parties compactes de X et un nombre fini d'ouverts $U_1, \cdots, U_n$ de Y tels que

$$f \in \bigcap_{i=1}^{n} V(K_i, U_i) \subseteq V .$$

Topologie compact-ouvert : une remarque

Soit $\mathbb{D}$ un corps gauche, et soit V un espace vectoriel à gauche sur $\mathbb{D}$.

Topologie compact-ouvert : une remarque

Soit $\mathbb{D}$ un corps gauche, et soit V un espace vectoriel à gauche sur $\mathbb{D}$.

Supposons que V soit muni de la topologie discrète.

Topologie compact-ouvert : une remarque

Soit $\mathbb{D}$ un corps gauche, et soit V un espace vectoriel à gauche sur $\mathbb{D}$.

Supposons que V soit muni de la topologie discrète.

Alors, la topologie compact-ouvert de $\mathrm{End}_{\mathbb{D}\text{-}\mathcal{V}ect}(V) \subseteq \mathcal{C}(V,V) = V^V$ est identique à la topologie de la convergence simple,

Topologie compact-ouvert : une remarque

Soit $\mathbb{D}$ un corps gauche, et soit V un espace vectoriel à gauche sur $\mathbb{D}$.

Supposons que V soit muni de la topologie discrète.

Alors, la topologie compact-ouvert de $\mathrm{End}_{\mathbb{D}\text{-}\mathcal{V}ect}(V) \subseteq \mathcal{C}(V, V) = V^V$ est identique à la topologie de la convergence simple, *i.e.*, pour tout espace topologique X, une application $\phi\colon X \to \mathrm{End}_{\mathbb{D}\text{-}\mathcal{V}ect}(V)$ est continue si, et seulement si, pour tout $v \in V$, l'application

$$\phi_v\colon x \in X \to \phi(x)(v) \in V$$

est continue.

Topologie compact-ouvert : une remarque

Soit $\mathbb{D}$ un corps gauche, et soit V un espace vectoriel à gauche sur $\mathbb{D}$.

Supposons que V soit muni de la topologie discrète.

Alors, la topologie compact-ouvert de $\mathrm{End}_{\mathbb{D}\text{-}\mathcal{V}ect}(V) \subseteq \mathcal{C}(V, V) = V^V$ est identique à la topologie de la convergence simple, *i.e.*, pour tout espace topologique X, une application $\phi\colon X \to \mathrm{End}_{\mathbb{D}\text{-}\mathcal{V}ect}(V)$ est continue si, et seulement si, pour tout $v \in V$, l'application

$$\phi_v\colon x \in X \to \phi(x)(v) \in V$$

est continue.

En d'autres termes, il s'agit ici de la topologie la moins fine rendant continue les projections $\pi_v\colon f \in V^V \mapsto f(v)$.

Le théorème de Jacobson de densité

Soit R un anneau unitaire.

Le théorème de Jacobson de densité

Soit R un anneau unitaire.

L'anneau R est primitif si, et seulement si, c'est un sous-anneau dense (pour la topologie compact-ouvert) d'un anneau $\mathrm{End}_{\mathbb{D}\text{-}\mathcal{Vect}}(V)$ d'opérateurs linéaires d'un espace vectoriel à gauche V sur un corps gauche $\mathbb{D}$ (où V est supposé discret).

Une conséquence du théorème de densité de Jacobson

Supposons que $\mathbb{K}$ est un corps de caractéristique zéro.

Une conséquence du théorème de densité de Jacobson

Supposons que $\mathbb{K}$ est un corps de caractéristique zéro.

Alors $A(\mathbb{K})$ est un anneau primitif.

Une conséquence du théorème de densité de Jacobson

Supposons que $\mathbb{K}$ est un corps de caractéristique zéro.

Alors $A(\mathbb{K})$ est un anneau primitif. En effet, on peut montrer que $A(\mathbb{K})$ est un sous-anneau dense de $\mathrm{End}_{\mathbb{K}\text{-}\mathcal{V}ect}(\mathbb{K}[z])$.

Une conséquence du théorème de densité de Jacobson

Supposons que $\mathbb{K}$ est un corps de caractéristique zéro.

Alors $A(\mathbb{K})$ est un anneau primitif. En effet, on peut montrer que $A(\mathbb{K})$ est un sous-anneau dense de $\mathrm{End}_{\mathbb{K}\text{-}\mathcal{V}ect}(\mathbb{K}[z])$.

On a un résultat plus fort [Kurbanov and Maksimov, '86] :

Une conséquence du théorème de densité de Jacobson

Supposons que $\mathbb{K}$ est un corps de caractéristique zéro.

Alors $A(\mathbb{K})$ est un anneau primitif. En effet, on peut montrer que $A(\mathbb{K})$ est un sous-anneau dense de $\mathrm{End}_{\mathbb{K}\text{-}\mathcal{V}ect}(\mathbb{K}[z])$.

On a un résultat plus fort [Kurbanov and Maksimov, '86] :

Pour chaque endomorphisme linéaire ϕ de $\mathbb{K}[z]$, il existe une famille sommable (dans la topologie compact-ouvert) $(\Omega_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $A(\mathbb{K})$ telle que

$$\phi = \sum_{n\geq 0} \Omega_n \ .$$

(Somme d'une famille sommable.)

Une conséquence du théorème de densité de Jacobson

Supposons que $\mathbb{K}$ est un corps de caractéristique zéro.

Alors $A(\mathbb{K})$ est un anneau primitif. En effet, on peut montrer que $A(\mathbb{K})$ est un sous-anneau dense de $\mathrm{End}_{\mathbb{K}\text{-}\mathcal{V}ect}(\mathbb{K}[z])$.

On a un résultat plus fort [Kurbanov and Maksimov, '86] :

Pour chaque endomorphisme linéaire ϕ de $\mathbb{K}[z]$, il existe une famille sommable (dans la topologie compact-ouvert) $(\Omega_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $A(\mathbb{K})$ telle que

$$\phi = \sum_{n\geq 0} \Omega_n \ .$$

(Somme d'une famille sommable.)

De plus, la famille est uniquement déterminée par ϕ (*i.e.*, $(\Omega_n)_n$ est une fonction de ϕ) et peut même être calculée explicitement.

Un exemple : l'opérateur d'intégration

Soit $\int$ l'opérateur d'intégration usuel sur $\mathbb{K}[z]$.

Un exemple : l'opérateur d'intégration

Soit $\int$ l'opérateur d'intégration usuel sur $\mathbb{K}[z]$.

D'après le théorème de densité de Jacobson, $\int$ peut être interprété comme un opérateur différentiel de degré infini :

Un exemple : l'opérateur d'intégration

Soit $\int$ l'opérateur d'intégration usuel sur $\mathbb{K}[z]$.

D'après le théorème de densité de Jacobson, $\int$ peut être interprété comme un opérateur différentiel de degré infini :

$$\int = \sum_{n\geq 0}(-1)^n \frac{z^{n+1}}{(n+1)!}\frac{d^n}{dz}\ .$$

Table des matières

Opérateurs d'échelle : définition

Soit $\mathbb{K}$ un corps (de caractéristique quelconque).

Opérateurs d'échelle : définition

Soit $\mathbb{K}$ un corps (de caractéristique quelconque).

Soit V un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension infinie dénombrable,

Opérateurs d'échelle : définition

Soit $\mathbb{K}$ un corps (de caractéristique quelconque).

Soit V un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension infinie dénombrable, et soit $E = (e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une base fixée.

Opérateurs d'échelle : définition

Soit $\mathbb{K}$ un corps (de caractéristique quelconque).

Soit V un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension infinie dénombrable, et soit $E = (e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une base fixée.

L'opérateur montant R_E (relativement à E) est défini par

$$R_E e_n = e_{n+1} \ .$$

Opérateurs d'échelle : définition

Soit $\mathbb{K}$ un corps (de caractéristique quelconque).

Soit V un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension infinie dénombrable, et soit $E = (e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une base fixée.

L'opérateur montant R_E (relativement à E) est défini par

$$R_E e_n = e_{n+1} \ .$$

L'opérateur descendant L_E (relativement à E) est défini par

$$L_E e_{n+1} = e_n, \ L_E e_0 = 0 \ .$$

Remarque relative à l'algèbre universelle

Soit Σ la signature constituée d'un symbole d'opérateur 0 d'arité 0 (symbole de constante), et d'un symbole d'opérateur Succ d'arité 1.

Remarque relative à l'algèbre universelle

Soit Σ la signature constituée d'un symbole d'opérateur 0 d'arité 0 (symbole de constante), et d'un symbole d'opérateur Succ d'arité 1.

Une Σ-algèbre est appelée algèbre d'induction.

Remarque relative à l'algèbre universelle

Soit Σ la signature constituée d'un symbole d'opérateur 0 d'arité 0 (symbole de constante), et d'un symbole d'opérateur Succ d'arité 1.

Une Σ-algèbre est appelée algèbre d'induction. Il s'agit d'un ensemble non vide A, avec une constante distinguée, interprétant le symbole 0, et une opération unaire $S\colon A \to A$, interprétant le symbole Succ.

Remarque relative à l'algèbre universelle

Soit Σ la signature constituée d'un symbole d'opérateur 0 d'arité 0 (symbole de constante), et d'un symbole d'opérateur Succ d'arité 1.

Une Σ-algèbre est appelée algèbre d'induction. Il s'agit d'un ensemble non vide A, avec une constante distinguée, interprétant le symbole 0, et une opération unaire $S\colon A \to A$, interprétant le symbole Succ.

Par exemple, les entiers naturels forment l'algèbre d'induction librement engendrée par l'ensemble vide (c'est l'objet initial de la catégorie des algèbres d'induction).

Remarque relative à l'algèbre universelle

Soit Σ la signature constituée d'un symbole d'opérateur 0 d'arité 0 (symbole de constante), et d'un symbole d'opérateur Succ d'arité 1.

Une Σ-algèbre est appelée algèbre d'induction. Il s'agit d'un ensemble non vide A, avec une constante distinguée, interprétant le symbole 0, et une opération unaire $S \colon A \to A$, interprétant le symbole Succ.

Par exemple, les entiers naturels forment l'algèbre d'induction librement engendrée par l'ensemble vide (c'est l'objet initial de la catégorie des algèbres d'induction).

La donnée (V, e_0, R_E) est une algèbre d'induction (dans la catégorie des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels). C'est l'algèbre d'induction librement engendrée par l'espace trivial (0) (et c'est donc l'algèbre d'induction initiale).

Remarque relative à l'algèbre universelle

Soit Σ la signature constituée d'un symbole d'opérateur 0 d'arité 0 (symbole de constante), et d'un symbole d'opérateur Succ d'arité 1.

Une Σ-algèbre est appelée algèbre d'induction. Il s'agit d'un ensemble non vide A, avec une constante distinguée, interprétant le symbole 0, et une opération unaire $S\colon A \to A$, interprétant le symbole Succ.

Par exemple, les entiers naturels forment l'algèbre d'induction librement engendrée par l'ensemble vide (c'est l'objet initial de la catégorie des algèbres d'induction).

La donnée (V, e_0, R_E) est une algèbre d'induction (dans la catégorie des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels). C'est l'algèbre d'induction librement engendrée par l'espace trivial (0) (et c'est donc l'algèbre d'induction initiale). En conclusion, (V, e_0, R_E) est le pendant de $\mathbb{N}$ dans la catégorie des espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$.

Opérateurs d'échelle : un exemple

Soit $V = \mathbb{K}[z]$ ($\mathbb{K}$ de caractéristique zéro).

Opérateurs d'échelle : un exemple

Soit $V = \mathbb{K}[z]$ ($\mathbb{K}$ de caractéristique zéro).

Alors $a^\dagger$ l'opérateur montant associé à la base $(z^n)_{n\geq 0}$,

Opérateurs d'échelle : un exemple

Soit $V = \mathbb{K}[z]$ ($\mathbb{K}$ de caractéristique zéro).

Alors $a^\dagger$ l'opérateur montant associé à la base $(z^n)_{n\geq 0}$,

alors que a est l'opérateur descendant associé à la base $(\frac{z^n}{n!})_{n\geq 0}$.

Décomposition des endomorphismes

Théorème [2010]

Soient $E = (e_n)_n$ et $F = (f_n)_n$ deux bases de V sur $\mathbb{K}$ telles que $\mathrm{span}_{\mathbb{K}}\{ f_0 \} = \mathrm{span}_{\mathbb{K}}\{ e_0 \}$ (les deux bases coïncident en degré zéro).

Décomposition des endomorphismes

Théorème [2010]

Soient $E = (e_n)_n$ et $F = (f_n)_n$ deux bases de V sur $\mathbb{K}$ telles que $\mathrm{span}_{\mathbb{K}}\{ f_0 \} = \mathrm{span}_{\mathbb{K}}\{ e_0 \}$ (les deux bases coïncident en degré zéro).

Soit ϕ une application linéaire de V.

Décomposition des endomorphismes

Théorème [2010]

Soient $E = (e_n)_n$ et $F = (f_n)_n$ deux bases de V sur $\mathbb{K}$ telles que $\mathrm{span}_{\mathbb{K}}\{ f_0 \} = \mathrm{span}_{\mathbb{K}}\{ e_0 \}$ (les deux bases coïncident en degré zéro).

Soit ϕ une application linéaire de V.

Alors, il existe une famille $(P_n)_{n\geq 0}$ de polynômes en une variable telle que

$$\phi = \sum_{n\geq 0} P_n(R_E) L_F^n \ .$$

Décomposition des endomorphismes

Théorème [2010]

Soient $E = (e_n)_n$ et $F = (f_n)_n$ deux bases de V sur $\mathbb{K}$ telles que $\mathrm{span}_{\mathbb{K}}\{ f_0 \} = \mathrm{span}_{\mathbb{K}}\{ e_0 \}$ (les deux bases coïncident en degré zéro).

Soit ϕ une application linéaire de V.

Alors, il existe une famille $(P_n)_{n\geq 0}$ de polynômes en une variable telle que

$$\phi = \sum_{n\geq 0} P_n(R_E) L_F^n \ .$$

De plus, $(P_n)_n$ est uniquement déterminée par ϕ,

Décomposition des endomorphismes

Théorème [2010]

Soient $E = (e_n)_n$ et $F = (f_n)_n$ deux bases de V sur $\mathbb{K}$ telles que $\mathrm{span}_{\mathbb{K}}\{\, f_0 \,\} = \mathrm{span}_{\mathbb{K}}\{\, e_0 \,\}$ (les deux bases coïncident en degré zéro).

Soit ϕ une application linéaire de V.

Alors, il existe une famille $(P_n)_{n\geq 0}$ de polynômes en une variable telle que

$$\phi = \sum_{n\geq 0} P_n(R_E)L_F^n \ .$$

De plus, $(P_n)_n$ est uniquement déterminée par ϕ,

et l'application $\phi \in \mathrm{End}_{\mathbb{K}\text{-}\mathcal{V}ect}(V) \mapsto (P_n)_n \in \mathbb{K}[z]^{\mathbb{N}}$ est un isomorphisme linéaire.

Décomposition des endomorphismes : une remarque

La famille $(P_n)_n$ d'un endomorphisme linéaire ϕ peut être calculée explicitement par récurrence.

Décomposition des endomorphismes : une remarque

La famille $(P_n)_n$ d'un endomorphisme linéaire ϕ peut être calculée explicitement par récurrence.

Soit $U = (u_n)_n$ une suite quelconque d'éléments de V, et soit $P = \sum_{i \geq 0} P_i z^i \in \mathbb{K}[z]$ (somme avec un nombre fini de coefficients P_i non nuls).

Décomposition des endomorphismes : une remarque

La famille $(P_n)_n$ d'un endomorphisme linéaire ϕ peut être calculée explicitement par récurrence.

Soit $U = (u_n)_n$ une suite quelconque d'éléments de V, et soit $P = \sum_{i \geq 0} P_i z^i \in \mathbb{K}[z]$ (somme avec un nombre fini de coefficients P_i non nuls).

Alors on définit $P(U) = \sum_{i \geq 0} P_i u_i$

Décomposition des endomorphismes : une remarque

La famille $(P_n)_n$ d'un endomorphisme linéaire ϕ peut être calculée explicitement par récurrence.

Soit $U = (u_n)_n$ une suite quelconque d'éléments de V, et soit $P = \sum_{i \geq 0} P_i z^i \in \mathbb{K}[z]$ (somme avec un nombre fini de coefficients P_i non nuls).

Alors on définit $P(U) = \sum_{i \geq 0} P_i u_i$ et si U est une base de V, alors $P \mapsto P(U)$ est un isomorphisme linéaire de $\mathbb{K}[z]$ sur V.

Décomposition des endomorphismes : une remarque

La famille $(P_n)_n$ d'un endomorphisme linéaire ϕ peut être calculée explicitement par récurrence.

Soit $U = (u_n)_n$ une suite quelconque d'éléments de V, et soit $P = \sum_{i \geq 0} P_i z^i \in \mathbb{K}[z]$ (somme avec un nombre fini de coefficients P_i non nuls).

Alors on définit $P(U) = \sum_{i \geq 0} P_i u_i$ et si U est une base de V, alors $P \mapsto P(U)$ est un isomorphisme linéaire de $\mathbb{K}[z]$ sur V.

Soit $\lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda \neq 0$ tel que $\lambda e_0 = f_0$ (possible puisque E et F coïncident en degré zéro).

Décomposition des endomorphismes : une remarque

La famille $(P_n)_n$ d'un endomorphisme linéaire ϕ peut être calculée explicitement par récurrence.

Soit $U = (u_n)_n$ une suite quelconque d'éléments de V, et soit $P = \sum_{i \geq 0} P_i z^i \in \mathbb{K}[z]$ (somme avec un nombre fini de coefficients P_i non nuls).

Alors on définit $P(U) = \sum_{i \geq 0} P_i u_i$ et si U est une base de V, alors $P \mapsto P(U)$ est un isomorphisme linéaire de $\mathbb{K}[z]$ sur V.

Soit $\lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda \neq 0$ tel que $\lambda e_0 = f_0$ (possible puisque E et F coïncident en degré zéro). La famille $(P_n)_n$ of ϕ satisfait la récurrence suivante :

Décomposition des endomorphismes : une remarque

La famille $(P_n)_n$ d'un endomorphisme linéaire ϕ peut être calculée explicitement par récurrence.

Soit $U = (u_n)_n$ une suite quelconque d'éléments de V, et soit $P = \sum_{i \geq 0} P_i z^i \in \mathbb{K}[z]$ (somme avec un nombre fini de coefficients P_i non nuls).

Alors on définit $P(U) = \sum_{i \geq 0} P_i u_i$ et si U est une base de V, alors $P \mapsto P(U)$ est un isomorphisme linéaire de $\mathbb{K}[z]$ sur V.

Soit $\lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda \neq 0$ tel que $\lambda e_0 = f_0$ (possible puisque E et F coïncident en degré zéro). La famille $(P_n)_n$ of ϕ satisfait la récurrence suivante :

- $\lambda P_0(E) = \phi(f_0)$.

Décomposition des endomorphismes : une remarque

La famille $(P_n)_n$ d'un endomorphisme linéaire ϕ peut être calculée explicitement par récurrence.

Soit $U = (u_n)_n$ une suite quelconque d'éléments de V, et soit $P = \sum_{i \geq 0} P_i z^i \in \mathbb{K}[z]$ (somme avec un nombre fini de coefficients P_i non nuls).

Alors on définit $P(U) = \sum_{i \geq 0} P_i u_i$ et si U est une base de V, alors $P \mapsto P(U)$ est un isomorphisme linéaire de $\mathbb{K}[z]$ sur V.

Soit $\lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda \neq 0$ tel que $\lambda e_0 = f_0$ (possible puisque E et F coïncident en degré zéro). La famille $(P_n)_n$ of ϕ satisfait la récurrence suivante :

- $\lambda P_0(E) = \phi(f_0)$.
- $\lambda P_{n+1}(E) = \phi(f_{n+1}) - \sum_{k=0}^{n} P_k(R_E) f_{n+1-k}$.

Une forme normale pour les opérateurs

Considérons le sous-ensemble suivant de $\mathbb{K}\langle\langle x, y\rangle\rangle$:

Une forme normale pour les opérateurs

Considérons le sous-ensemble suivant de $\mathbb{K}\langle\langle x, y\rangle\rangle$:

$$\mathbb{K}\langle x, y\rangle\rangle = \{ \sum_{n\geq 0} P_n(x) y^n : \forall n,\ P_n(x) \in \mathbb{K}[x] \}$$

où la concaténation (non commutative) est notée par une simple juxtaposition.

Une forme normale pour les opérateurs

Considérons le sous-ensemble suivant de $\mathbb{K}\langle\langle x, y\rangle\rangle$:

$$\mathbb{K}\langle x, y\rangle\rangle = \{ \sum_{n\geq 0} P_n(x)y^n : \forall n,\ P_n(x) \in \mathbb{K}[x] \}$$

où la concaténation (non commutative) est notée par une simple juxtaposition. Nous l'appelons l'espace des séries génératrices non commutatives de polynômes.

Une forme normale pour les opérateurs

Considérons le sous-ensemble suivant de $\mathbb{K}\langle\langle x, y\rangle\rangle$:

$$\mathbb{K}\langle x, y\rangle\rangle = \{ \sum_{n\geq 0} P_n(x) y^n : \forall n,\ P_n(x) \in \mathbb{K}[x] \}$$

où la concaténation (non commutative) est notée par une simple juxtaposition. Nous l'appelons l'espace des séries génératrices non commutatives de polynômes.

Propriétés

- $\mathbb{K}\langle x, y\rangle\rangle$ est un sous $\mathbb{K}$-espace vectoriel de $\mathbb{K}\langle\langle x, y\rangle\rangle$.

Une forme normale pour les opérateurs

Considérons le sous-ensemble suivant de $\mathbb{K}\langle\langle x, y\rangle\rangle$:

$$\mathbb{K}\langle x, y\rangle\rangle = \{ \sum_{n\geq 0} P_n(x) y^n : \forall n,\ P_n(x) \in \mathbb{K}[x] \}$$

où la concaténation (non commutative) est notée par une simple juxtaposition. Nous l'appelons l'espace des séries génératrices non commutatives de polynômes.

Propriétés

- $\mathbb{K}\langle x, y\rangle\rangle$ est un sous $\mathbb{K}$-espace vectoriel de $\mathbb{K}\langle\langle x, y\rangle\rangle$.
- $\mathbb{K}\langle x, y\rangle\rangle$ est un $\mathbb{K}[x]$-module (à gauche et à droite) avec les actions données par

Une forme normale pour les opérateurs

Considérons le sous-ensemble suivant de $\mathbb{K}\langle\langle x, y\rangle\rangle$:

$$\mathbb{K}\langle x, y\rangle\rangle = \{ \sum_{n\geq 0} P_n(x)y^n : \forall n,\ P_n(x) \in \mathbb{K}[x] \}$$

où la concaténation (non commutative) est notée par une simple juxtaposition. Nous l'appelons l'espace des séries génératrices non commutatives de polynômes.

Propriétés

- $\mathbb{K}\langle x, y\rangle\rangle$ est un sous $\mathbb{K}$-espace vectoriel de $\mathbb{K}\langle\langle x, y\rangle\rangle$.
- $\mathbb{K}\langle x, y\rangle\rangle$ est un $\mathbb{K}[x]$-module (à gauche et à droite) avec les actions données par $Q(x) \cdot \sum_{n\geq 0} P_n(x)y^n = \sum_{n\geq 0} (Q(x)P_n(x))y^n$ et

Une forme normale pour les opérateurs

Considérons le sous-ensemble suivant de $\mathbb{K}\langle\langle x, y\rangle\rangle$:

$$\mathbb{K}\langle x, y\rangle\rangle = \{ \sum_{n\geq 0} P_n(x)y^n : \forall n,\ P_n(x) \in \mathbb{K}[x] \}$$

où la concaténation (non commutative) est notée par une simple juxtaposition. Nous l'appelons l'espace des séries génératrices non commutatives de polynômes.

Propriétés

- $\mathbb{K}\langle x, y\rangle\rangle$ est un sous $\mathbb{K}$-espace vectoriel de $\mathbb{K}\langle\langle x, y\rangle\rangle$.
- $\mathbb{K}\langle x, y\rangle\rangle$ est un $\mathbb{K}[x]$-module (à gauche et à droite) avec les actions données par $Q(x) \cdot \sum_{n\geq 0} P_n(x)y^n = \sum_{n\geq 0}(Q(x)P_n(x))y^n$ et $\sum_{n\geq 0} P_n(x)y^n \cdot Q(x) = \sum_{n\geq 0}(P_n(x)Q(x))y^n = \sum_{n\geq 0}(Q(x)P_n(x))y^n$.

Une forme normale pour les opérateurs

Considérons le sous-ensemble suivant de $\mathbb{K}\langle\langle x, y\rangle\rangle$:

$$\mathbb{K}\langle x, y\rangle\rangle = \{ \sum_{n\geq 0} P_n(x)y^n : \forall n,\ P_n(x) \in \mathbb{K}[x] \}$$

où la concaténation (non commutative) est notée par une simple juxtaposition. Nous l'appelons l'espace des séries génératrices non commutatives de polynômes.

Propriétés

- $\mathbb{K}\langle x, y\rangle\rangle$ est un sous $\mathbb{K}$-espace vectoriel de $\mathbb{K}\langle\langle x, y\rangle\rangle$.
- $\mathbb{K}\langle x, y\rangle\rangle$ est un $\mathbb{K}[x]$-module (à gauche et à droite) avec les actions données par $Q(x) \cdot \sum_{n\geq 0} P_n(x)y^n = \sum_{n\geq 0} (Q(x)P_n(x))y^n$ et
$$\sum_{n\geq 0} P_n(x)y^n \cdot Q(x) = \sum_{n\geq 0} (P_n(x)Q(x))y^n = \sum_{n\geq 0} (Q(x)P_n(x))y^n.$$
- En fait il s'agit du complété (pour la topologie produit avec $\mathbb{K}[x]$ discret) du $\mathbb{K}[x]$-module des $\sum_{n\geq 0} P_n(x)y^n \in \mathbb{K}\langle\langle x, y\rangle\rangle$ avec seulement un nombre fini de $P_n(x) \neq 0$.

Une forme normale pour les opérateurs

Remarques

- Notons que $xy = y \cdot x$ mais yx n'appartient pas à $\mathbb{K}\langle x, y\rangle\rangle$.

Une forme normale pour les opérateurs

Remarques

- Notons que $xy = y \cdot x$ mais yx n'appartient pas à $\mathbb{K}\langle x, y\rangle\rangle$.

- En fait, $\mathbb{K}\langle x, y\rangle\rangle$ est le complété du $\mathbb{K}[x]$-module libre de base $\{ y^n : n \geq 0 \}$, à savoir

$$\mathbb{K}[x] \otimes_{\mathbb{K}} \operatorname{span}_{\mathbb{K}}\{ y^n : n \geq 0 \}$$

  (avec l'action évidente de $\mathbb{K}[x]$), par rapport à la topologie la moins fine rendant continue les applications $x^i \otimes y^j \mapsto x^i$ pour $\mathbb{K}[x]$ discret.

Une forme normale pour les opérateurs

D'après le théorème précédent, il existe un isomorphisme $\mathbb{K}$-linéaire

$$\pi_{E,F} : \mathbb{K}\langle x, y \rangle\rangle \to \mathrm{End}_{\mathbb{K}\text{-}\mathcal{V}ect}(V)$$

qui envoie $\displaystyle\sum_{n\geq 0} P_n(x) y^n$ sur $\displaystyle\sum_{n\geq 0} P_n(R_E) L_F^n$.

Une forme normale pour les opérateurs

D'après le théorème précédent, il existe un isomorphisme $\mathbb{K}$-linéaire

$$\pi_{E,F} : \mathbb{K}\langle x, y\rangle\rangle \to \mathrm{End}_{\mathbb{K}\text{-}\mathcal{V}ect}(V)$$

qui envoie $\sum_{n\geq 0} P_n(x)y^n$ sur $\sum_{n\geq 0} P_n(R_E)L_F^n$.

Il s'agit d'une application d'évaluation: $x \leftarrow R_E$ et $y \leftarrow L_F$.

Une forme normale pour les opérateurs

D'après le théorème précédent, il existe un isomorphisme $\mathbb{K}$-linéaire

$$\pi_{E,F} : \mathbb{K}\langle\langle x, y\rangle\rangle \to \mathrm{End}_{\mathbb{K}\text{-}\mathcal{V}ect}(V)$$

qui envoie $\sum_{n\geq 0} P_n(x)y^n$ sur $\sum_{n\geq 0} P_n(R_E)L_F^n$.

Il s'agit d'une application d'évaluation: $x \leftarrow R_E$ et $y \leftarrow L_F$.

Remarque

Notons que l'on doit nécessairement supposer que $xy \neq yx$ car si $xy = yx$, alors $\pi_{E,F}(xy) = R_E L_F \neq L_F R_E = \pi_{E,F}(yx)$.

Une forme normale pour les opérateurs

D'après le théorème précédent, il existe un isomorphisme $\mathbb{K}$-linéaire

$$\pi_{E,F} : \mathbb{K}\langle x, y\rangle\rangle \to \mathrm{End}_{\mathbb{K}\text{-}\mathcal{V}ect}(V)$$

qui envoie $\displaystyle\sum_{n\geq 0} P_n(x)y^n$ sur $\displaystyle\sum_{n\geq 0} P_n(R_E)L_F^n$.

Il s'agit d'une application d'évaluation: $x \leftarrow R_E$ et $y \leftarrow L_F$.

Remarque

Notons que l'on doit nécessairement supposer que $xy \neq yx$ car si $xy = yx$, alors $\pi_{E,F}(xy) = R_E L_F \neq L_F R_E = \pi_{E,F}(yx)$.

Soit $\phi \in \mathrm{End}_{\mathbb{K}\text{-}\mathcal{V}ect}(V)$. L'unique élément $S \in \mathbb{K}\langle x, y\rangle\rangle$ tel que $\pi_{E,F}(S) = \phi$ peut être appelé la forme normale de ϕ par rapport aux bases E, F de V.

Table des matières

Un complété pour un espace vectoriel gradué

Considérons encore un $\mathbb{K}$-espace vectoriel V de dimension infinie dénombrable avec une base fixée $E = (e_n)_{n \geq 0}$.

Un complété pour un espace vectoriel gradué

Considérons encore un $\mathbb{K}$-espace vectoriel V de dimension infinie dénombrable avec une base fixée $E = (e_n)_{n \geq 0}$.

Une topologie, «compatible» avec la décomposition

$$V = \bigoplus_{n \geq 0} \mathrm{span}_{\mathbb{K}}(e_n)$$

peut être définie sur V comme suit :

Un complété pour un espace vectoriel gradué

Considérons encore un $\mathbb{K}$-espace vectoriel V de dimension infinie dénombrable avec une base fixée $E = (e_n)_{n \geq 0}$.

Une topologie, «compatible» avec la décomposition

$$V = \bigoplus_{n \geq 0} \operatorname{span}_{\mathbb{K}}(e_n)$$

peut être définie sur V comme suit : on définit une valuation $\nu \colon V \to \mathbb{N} \sqcup \{\,\infty\,\}$ telle que $\nu(v) = \inf\{\, n \geq 0 \colon \langle v \mid e_n \rangle \neq 0 \,\}$ pour $v \neq 0$ et $\nu(0) = \infty$.

Un complété pour un espace vectoriel gradué

Considérons encore un $\mathbb{K}$-espace vectoriel V de dimension infinie dénombrable avec une base fixée $E = (e_n)_{n \geq 0}$.

Une topologie, «compatible» avec la décomposition

$$V = \bigoplus_{n \geq 0} \operatorname{span}_{\mathbb{K}}(e_n)$$

peut être définie sur V comme suit : on définit une valuation $\nu \colon V \to \mathbb{N} \sqcup \{\infty\}$ telle que $\nu(v) = \inf\{\, n \geq 0 \colon \langle v \mid e_n \rangle \neq 0 \,\}$ pour $v \neq 0$ et $\nu(0) = \infty$.

Par rapport à la topologie (métrisable) induite par cette valuation, on peut décrire le complété $\widehat{V}$ de V comme le produit direct infini $\prod_{n \geq 0} \operatorname{span}_{\mathbb{K}}(e_n)$.

Un complété pour un espace vectoriel gradué

Considérons encore un $\mathbb{K}$-espace vectoriel V de dimension infinie dénombrable avec une base fixée $E = (e_n)_{n \geq 0}$.

Une topologie, «compatible» avec la décomposition

$$V = \bigoplus_{n \geq 0} \mathrm{span}_{\mathbb{K}}(e_n)$$

peut être définie sur V comme suit : on définit une valuation $\nu \colon V \to \mathbb{N} \sqcup \{ \infty \}$ telle que $\nu(v) = \inf\{ n \geq 0 \colon \langle v \mid e_n \rangle \neq 0 \}$ pour $v \neq 0$ et $\nu(0) = \infty$.

Par rapport à la topologie (métrisable) induite par cette valuation, on peut décrire le complété $\widehat{V}$ de V comme le produit direct infini $\prod_{n \geq 0} \mathrm{span}_{\mathbb{K}}(e_n)$.

Ses éléments sont des combinaisons linéaires infinies :

$$\sum_{n \geq 0} \alpha_n e_n$$

où tous les coefficients α_n peuvent être non nuls.

Dualité

On note $\langle P \mid e_n \rangle$ le coefficient de $P \in V$ par rapport à e_n de sorte que $P = \sum_{n \geq 0} \langle P \mid e_n \rangle e_n$ (somme avec un nombre fini de termes non nuls).

Dualité

On note $\langle P \mid e_n \rangle$ le coefficient de $P \in V$ par rapport à e_n de sorte que $P = \sum_{n \geq 0} \langle P \mid e_n \rangle e_n$ (somme avec un nombre fini de termes non nuls). Cette notation est étendue par continuité à $\widehat{V}$.

Dualité

On note $\langle P \mid e_n \rangle$ le coefficient de $P \in V$ par rapport à e_n de sorte que $P = \sum_{n \geq 0} \langle P \mid e_n \rangle e_n$ (somme avec un nombre fini de termes non nuls). Cette notation est étendue par continuité à $\widehat{V}$.

Les espaces V et $\widehat{V}$ peuvent être mis en dualité (topologique)

$$\langle S \mid P \rangle = \sum_{n \geq 0} \langle S \mid e_n \rangle \langle P \mid e_n \rangle$$

où $S \in \widehat{V}$ et $P \in V$.

Dualité

On note $\langle P \mid e_n \rangle$ le coefficient de $P \in V$ par rapport à e_n de sorte que $P = \sum_{n \geq 0} \langle P \mid e_n \rangle e_n$ (somme avec un nombre fini de termes non nuls). Cette notation est étendue par continuité à $\widehat{V}$.

Les espaces V et $\widehat{V}$ peuvent être mis en dualité (topologique)

$$\langle S \mid P \rangle = \sum_{n \geq 0} \langle S \mid e_n \rangle \langle P \mid e_n \rangle$$

où $S \in \widehat{V}$ et $P \in V$.

En utilisant ce crochet de dualité (non dégénéré), on montre que

$$V^* \cong \widehat{V}$$

et

$$\widehat{V}' \cong V \ .$$

Transposition

La dualité nous permet de définir le transposé d'un opérateur.

Transposition

La dualité nous permet de définir le transposé d'un opérateur.

Soient $\phi \in \mathrm{End}_{\mathbb{K}\text{-}\mathcal{Vect}}(V)$ et $\psi \in \mathrm{End}_{\mathbb{K}\text{-}\mathcal{VectTop}}(\widehat{V})$.

Transposition

La dualité nous permet de définir le transposé d'un opérateur.

Soient $\phi \in \mathrm{End}_{\mathbb{K}\text{-}\mathcal{Vect}}(V)$ et $\psi \in \mathrm{End}_{\mathbb{K}\text{-}\mathcal{VectTop}}(\widehat{V})$.

Alors nous définissons ${}^{\dagger}\phi \in \mathrm{End}_{\mathbb{K}\text{-}\mathcal{VectTop}}(\widehat{V})$ par

$$\langle {}^{\dagger}\phi(S) \mid P \rangle = \langle S \mid \phi(P) \rangle$$

et

Transposition

La dualité nous permet de définir le transposé d'un opérateur.

Soient $\phi \in \mathrm{End}_{\mathbb{K}\text{-}\mathcal{Vect}}(V)$ et $\psi \in \mathrm{End}_{\mathbb{K}\text{-}\mathcal{VectTop}}(\widehat{V})$.

Alors nous définissons ${}^{\dagger}\phi \in \mathrm{End}_{\mathbb{K}\text{-}\mathcal{VectTop}}(\widehat{V})$ par

$$\langle {}^{\dagger}\phi(S) \mid P \rangle = \langle S \mid \phi(P) \rangle$$

et $\psi^{\dagger} \in \mathrm{End}_{\mathbb{K}\text{-}\mathcal{Vect}}(V)$ par

$$\langle S \mid \psi^{\dagger}(P) \rangle = \langle \psi(S) \mid P \rangle \ .$$

Décomposition des endomorphismes continus

En employant la dualité et la transposition, on peut démontrer que tout opérateur continu ψ sur $\widehat{V}$ admet une décomposition comme somme d'une famille sommable

$$\psi = \sum_{n \geq 0} \widehat{R}^n P_n(\widehat{L})$$

où $\widehat{R}$ et $\widehat{L}$ sont les extensions de R_E et L_E par uniforme continuité.

Décomposition des endomorphismes continus

En employant la dualité et la transposition, on peut démontrer que tout opérateur continu ψ sur $\widehat{V}$ admet une décomposition comme somme d'une famille sommable

$$\psi = \sum_{n \geq 0} \widehat{R}^n P_n(\widehat{L})$$

où $\widehat{R}$ et $\widehat{L}$ sont les extensions de R_E et L_E par uniforme continuité.
(Cela provient essentiellement du fait que $\psi^\dagger = \sum_{n \geq 0} P_n(R_E) L_E^n$.)

Décomposition des endomorphismes continus

En employant la dualité et la transposition, on peut démontrer que tout opérateur continu ψ sur $\widehat{V}$ admet une décomposition comme somme d'une famille sommable

$$\psi = \sum_{n \geq 0} \widehat{R}^n P_n(\widehat{L})$$

où $\widehat{R}$ et $\widehat{L}$ sont les extensions de R_E et L_E par uniforme continuité. (Cela provient essentiellement du fait que $\psi^\dagger = \sum_{n \geq 0} P_n(R_E) L_E^n$.)

Il s'ensuit notamment que l'on dispose d'un isomorphisme linéaire

$$\mathrm{End}_{\mathbb{K}\text{-}\mathcal{Vect}}(V) \cong \mathrm{End}_{\mathbb{K}\text{-}\mathcal{VectTop}}(\widehat{V}) \ .$$

Table des matières

Des liens avec des structures combinatoires connues

Toute suite de polynômes

$$(P_n(x))_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{K}[x]^{\mathbb{N}}$$

est bijectivement transformée en une matrice infinie indicée par $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ à coefficients dans $\mathbb{K}$

Des liens avec des structures combinatoires connues

Toute suite de polynômes

$$(P_n(x))_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}[x]^{\mathbb{N}}$$

est bijectivement transformée en une matrice infinie indicée par $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ à coefficients dans $\mathbb{K}$

$$(\langle P_i(x) \mid x^j\rangle)_{i,j\geq 0}$$

Des liens avec des structures combinatoires connues

Toute suite de polynômes

$$(P_n(x))_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}[x]^{\mathbb{N}}$$

est bijectivement transformée en une matrice infinie indicée par $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ à coefficients dans $\mathbb{K}$

$$(\langle P_i(x) \mid x^j\rangle)_{i,j\geq 0}$$

où $\langle P \mid x^i\rangle$ est le coefficient du monôme x^i dans le P (souvent appelé

crochet de Dirac-Schützenberger)

Des liens avec des structures combinatoires connues

Toute suite de polynômes

$$(P_n(x))_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}[x]^{\mathbb{N}}$$

est bijectivement transformée en une matrice infinie indicée par $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ à coefficients dans $\mathbb{K}$

$$(\langle P_i(x) \mid x^j\rangle)_{i,j\geq 0}$$

où $\langle P \mid x^i\rangle$ est le coefficient du monôme x^i dans le P (souvent appelé

crochet de Dirac-Schützenberger) de telle sorte que

$$P = \sum_{i\geq 0} \langle P \mid x^i\rangle x^i$$

(somme avec un nombre fini de termes non nuls).

Des liens avec des structures combinatoires connues

Notons qu'une telle matrice pour une famille de polynômes satisfait la propriété suivante :

Des liens avec des structures combinatoires connues

Notons qu'une telle matrice pour une famille de polynômes satisfait la propriété suivante : pour chaque $i \in \mathbb{N}$, il n'y a qu'un nombre fini de j tel que le coefficient $\langle P_i(x) \mid x^j \rangle \neq 0$.

Des liens avec des structures combinatoires connues

Notons qu'une telle matrice pour une famille de polynômes satisfait la propriété suivante : pour chaque $i \in \mathbb{N}$, il n'y a qu'un nombre fini de j tel que le coefficient $\langle P_i(x) \mid x^j \rangle \neq 0$.

Plus généralement, soit $M = (M_{i,j})_{i,j \geq 0}$ une matrice infinie.

Des liens avec des structures combinatoires connues

Notons qu'une telle matrice pour une famille de polynômes satisfait la propriété suivante : pour chaque $i \in \mathbb{N}$, il n'y a qu'un nombre fini de j tel que le coefficient $\langle P_i(x) \mid x^j \rangle \neq 0$.

Plus généralement, soit $M = (M_{i,j})_{i,j \geq 0}$ une matrice infinie. On dit que M est à lignes finies si pour chaque i, il n'y a qu'un nombre fini de j tel que $M_{i,j} \neq 0$.

Des liens avec des structures combinatoires connues

Notons qu'une telle matrice pour une famille de polynômes satisfait la propriété suivante : pour chaque $i \in \mathbb{N}$, il n'y a qu'un nombre fini de j tel que le coefficient $\langle P_i(x) \mid x^j \rangle \neq 0$.

Plus généralement, soit $M = (M_{i,j})_{i,j \geq 0}$ une matrice infinie. On dit que M est à lignes finies si pour chaque i, il n'y a qu'un nombre fini de j tel que $M_{i,j} \neq 0$. On note $\mathbb{K}^{\mathbb{N} \times (\mathbb{N})}$ l'ensemble des telles matrices.

Des liens avec des structures combinatoires connues

Notons qu'une telle matrice pour une famille de polynômes satisfait la propriété suivante : pour chaque $i \in \mathbb{N}$, il n'y a qu'un nombre fini de j tel que le coefficient $\langle P_i(x) \mid x^j \rangle \neq 0$.

Plus généralement, soit $M = (M_{i,j})_{i,j \geq 0}$ une matrice infinie. On dit que M est à lignes finies si pour chaque i, il n'y a qu'un nombre fini de j tel que $M_{i,j} \neq 0$. On note $\mathbb{K}^{\mathbb{N} \times (\mathbb{N})}$ l'ensemble des telles matrices.

Il s'ensuit donc que l'ensemble $\mathbb{K}[x]^{\mathbb{N}}$ des suites de polynômes et l'ensemble $\mathbb{K}^{\mathbb{N} \times (\mathbb{N})}$ sont en bijection par $(P_n)_n \mapsto (\langle P_i(x) \mid x^j \rangle)_{i,j}$.

Des liens avec des structures combinatoires connues

Notons qu'une telle matrice pour une famille de polynômes satisfait la propriété suivante : pour chaque $i \in \mathbb{N}$, il n'y a qu'un nombre fini de j tel que le coefficient $\langle P_i(x) \mid x^j \rangle \neq 0$.

Plus généralement, soit $M = (M_{i,j})_{i,j \geq 0}$ une matrice infinie. On dit que M est à lignes finies si pour chaque i, il n'y a qu'un nombre fini de j tel que $M_{i,j} \neq 0$. On note $\mathbb{K}^{\mathbb{N} \times (\mathbb{N})}$ l'ensemble des telles matrices.

Il s'ensuit donc que l'ensemble $\mathbb{K}[x]^{\mathbb{N}}$ des suites de polynômes et l'ensemble $\mathbb{K}^{\mathbb{N} \times (\mathbb{N})}$ sont en bijection par $(P_n)_n \mapsto (\langle P_i(x) \mid x^j \rangle)_{i,j}$.

En fait il se trouve qu'ils sont isomorphes en tant que $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

Des liens avec des structures combinatoires connues

Nous avons donc

$$\mathrm{End}_{\mathbb{K}\text{-}\mathcal{Vect}}(V) \cong_{\mathbb{K}\text{-}\mathit{Vect}} \mathbb{K}\langle x, y\rangle\rangle \cong_{\mathbb{K}\text{-}\mathit{Vect}} \mathbb{K}[x]^{\mathbb{N}} \cong_{\mathbb{K}\text{-}\mathit{Vect}} \mathbb{K}^{\mathbb{N}\times(\mathbb{N})} \; .$$

Des liens avec des structures combinatoires connues

Nous avons donc

$$\mathrm{End}_{\mathbb{K}\text{-}\mathcal{V}ect}(V) \cong_{\mathbb{K}\text{-}\mathit{Vect}} \mathbb{K}\langle\langle x, y\rangle\rangle \cong_{\mathbb{K}\text{-}\mathit{Vect}} \mathbb{K}[x]^{\mathbb{N}} \cong_{\mathbb{K}\text{-}\mathit{Vect}} \mathbb{K}^{\mathbb{N}\times(\mathbb{N})} .$$

De plus, les espaces $\mathrm{End}_{\mathbb{K}\text{-}\mathcal{V}ect}(V)$ et $\mathbb{K}^{\mathbb{N}\times(\mathbb{N})}$ sont tous les deux des $\mathbb{K}$-algèbres.

Des liens avec des structures combinatoires connues

Nous avons donc

$$\mathrm{End}_{\mathbb{K}\text{-}\mathcal{V}ect}(V) \cong_{\mathbb{K}\text{-}\mathit{Vect}} \mathbb{K}\langle\langle x, y\rangle\rangle \cong_{\mathbb{K}\text{-}\mathit{Vect}} \mathbb{K}[x]^{\mathbb{N}} \cong_{\mathbb{K}\text{-}\mathit{Vect}} \mathbb{K}^{\mathbb{N}\times(\mathbb{N})} .$$

De plus, les espaces $\mathrm{End}_{\mathbb{K}\text{-}\mathcal{V}ect}(V)$ et $\mathbb{K}^{\mathbb{N}\times(\mathbb{N})}$ sont tous les deux des $\mathbb{K}$-algèbres. Cependant l'isomorphisme linéaire qui envoie l'opérateur linéaire $\phi = \sum_{i\geq 0} P_i(R_E)L_F^i$ sur la matrice à lignes finies $(\langle P_i(x) \mid x^j\rangle)_{i,j\geq 0}$ n'est pas un homomorphisme d'anneaux.

Des liens avec des structures combinatoires connues

Nous avons donc

$$\mathrm{End}_{\mathbb{K}\text{-}\mathcal{V}ect}(V) \cong_{\mathbb{K}\text{-}\mathit{Vect}} \mathbb{K}\langle x, y\rangle\rangle \cong_{\mathbb{K}\text{-}\mathit{Vect}} \mathbb{K}[x]^{\mathbb{N}} \cong_{\mathbb{K}\text{-}\mathit{Vect}} \mathbb{K}^{\mathbb{N}\times(\mathbb{N})} .$$

De plus, les espaces $\mathrm{End}_{\mathbb{K}\text{-}\mathcal{V}ect}(V)$ et $\mathbb{K}^{\mathbb{N}\times(\mathbb{N})}$ sont tous les deux des $\mathbb{K}$-algèbres. Cependant l'isomorphisme linéaire qui envoie l'opérateur linéaire $\phi = \sum_{i\geq 0} P_i(R_E)L_F^i$ sur la matrice à lignes finies $(\langle P_i(x) \mid x^j)_{i,j\geq 0}$ n'est pas un homomorphisme d'anneaux.

Néanmoins, on peut transporter bijectivement le produit matriciel sur $\mathrm{End}_{\mathbb{K}\text{-}\mathcal{V}ect}(V)$:

Des liens avec des structures combinatoires connues

Nous avons donc

$$\mathrm{End}_{\mathbb{K}\text{-}\mathcal{V}ect}(V) \cong_{\mathbb{K}\text{-}Vect} \mathbb{K}\langle\langle x, y\rangle\rangle \cong_{\mathbb{K}\text{-}Vect} \mathbb{K}[x]^{\mathbb{N}} \cong_{\mathbb{K}\text{-}Vect} \mathbb{K}^{\mathbb{N}\times(\mathbb{N})} .$$

De plus, les espaces $\mathrm{End}_{\mathbb{K}\text{-}\mathcal{V}ect}(V)$ et $\mathbb{K}^{\mathbb{N}\times(\mathbb{N})}$ sont tous les deux des $\mathbb{K}$-algèbres. Cependant l'isomorphisme linéaire qui envoie l'opérateur linéaire $\phi = \sum_{i\geq 0} P_i(R_E)L_F^i$ sur la matrice à lignes finies $(\langle P_i(x) \mid x^j\rangle)_{i,j\geq 0}$ n'est pas un homomorphisme d'anneaux.

Néanmoins, on peut transporter bijectivement le produit matriciel sur $\mathrm{End}_{\mathbb{K}\text{-}\mathcal{V}ect}(V)$:

$$\left(\sum_{i\geq 0} P_i(R_E)L_F^i\right) \# \left(\sum_{i\geq 0} Q_i(R_E)L_F^i\right) = \sum_{i\geq 0} \left(\sum_{j\geq 0} \langle P_i(x) \mid x^j\rangle Q_j(R_E)\right) L_F^i .$$

Des liens avec des structures combinatoires connues

Cette « nouvelle » multiplication $\#$ sur $\mathrm{End}_{\mathbb{K}\text{-}\mathcal{V}ect}(V)$ est une généralisation de la composition ombrale des séquences de polynômes (*i.e.*, les suites de polynômes $(P_n(x))_n$ telles que pour tout n, $\deg P_n = n$, ou, de façon équivalente, dont la matrice associée est triangulaire inférieure):

Des liens avec des structures combinatoires connues

Cette « nouvelle » multiplication $\#$ sur $\mathrm{End}_{\mathbb{K}\text{-}\mathcal{V}ect}(V)$ est une généralisation de la composition ombrale des séquences de polynômes (*i.e.*, les suites de polynômes $(P_n(x))_n$ telles que pour tout n, $\deg P_n = n$, ou, de façon équivalente, dont la matrice associée est triangulaire inférieure):

$$(p_n(x))_n \# (q_n(x))_n = \left(\sum_{k \geq 0} \langle p_n(x) \mid x^k \rangle q_k(x) \right)_n .$$

Des liens avec des structures combinatoires connues

Une séquence de polynômes $(p_n(x))_n$ (donc $\deg p_n = n$) est dite être une séquence de Sheffer s'il existe deux séries formelles g et ϕ telles que $g(0) \neq 0$ et $\phi(0) = 0$, $\phi'(0) \neq 0$ vérifiant

$$\sum_{n \geq 0} p_n(x) y^n = g(y) e^{x\phi(y)} \in \mathbb{K}[[x, y]] \ .$$

Des liens avec des structures combinatoires connues

Une séquence de polynômes $(p_n(x))_n$ (donc $\deg p_n = n$) est dite être une séquence de Sheffer s'il existe deux séries formelles g et ϕ telles que $g(0) \neq 0$ et $\phi(0) = 0$, $\phi'(0) \neq 0$ vérifiant

$$\sum_{n \geq 0} p_n(x) y^n = g(y) e^{x\phi(y)} \in \mathbb{K}[[x, y]] \ .$$

Les séquences de Sheffer forment un groupe pour la composition ombrale qui est isomorphe avec le groupe de Riordan $\mathbb{K}[[x]]^* \rtimes x\mathbb{K}[[x]]$ (avec la loi de groupe produit semi-direct $(g, \phi)(g', \phi') = ((g \circ \phi') \times g', \phi \circ \phi')$).

Des liens avec des structures combinatoires connues

Une séquence de polynômes $(p_n(x))_n$ (donc $\deg p_n = n$) est dite être une séquence de Sheffer s'il existe deux séries formelles g et ϕ telles que $g(0) \neq 0$ et $\phi(0) = 0$, $\phi'(0) \neq 0$ vérifiant

$$\sum_{n \geq 0} p_n(x) y^n = g(y) e^{x\phi(y)} \in \mathbb{K}[[x, y]] \ .$$

Les séquences de Sheffer forment un groupe pour la composition ombrale qui est isomorphe avec le groupe de Riordan $\mathbb{K}[[x]]^* \rtimes x\mathbb{K}[[x]]$ (avec la loi de groupe produit semi-direct $(g, \phi)(g', \phi') = ((g \circ \phi') \times g', \phi \circ \phi'))$.

Vues comme des matrices triangulaires inférieures, les séquences de Sheffer forment un sous-groupe du groupe des éléments inversibles de l'algèbre d'incidence (complétée) $I(\mathbb{N}^{\mathrm{op}}, \mathbb{K})$ des entiers (avec l'ordre opposé).

Des liens avec des structures combinatoires connues

Une séquence de polynômes $(p_n(x))_n$ (donc $\deg p_n = n$) est dite être une séquence de Sheffer s'il existe deux séries formelles g et ϕ telles que $g(0) \neq 0$ et $\phi(0) = 0$, $\phi'(0) \neq 0$ vérifiant

$$\sum_{n \geq 0} p_n(x) y^n = g(y) e^{x\phi(y)} \in \mathbb{K}[[x, y]] \ .$$

Les séquences de Sheffer forment un groupe pour la composition ombrale qui est isomorphe avec le groupe de Riordan $\mathbb{K}[[x]]^* \rtimes x\mathbb{K}[[x]]$ (avec la loi de groupe produit semi-direct $(g, \phi)(g', \phi') = ((g \circ \phi') \times g', \phi \circ \phi'))$.

Vues comme des matrices triangulaires inférieures, les séquences de Sheffer forment un sous-groupe du groupe des éléments inversibles de l'algèbre d'incidence (complétée) $I(\mathbb{N}^{\mathrm{op}}, \mathbb{K})$ des entiers (avec l'ordre opposé).

Il y a donc un besoin de comprendre les relations entre ces différents objets combinatoires dans le cadre de la décomposition des opérateurs.

Relation de commutation infinie

En tant qu'opérateur linéaire, le commutateur $[L_F, R_E]$ admet lui aussi une décomposition de la forme $\sum_{n\geq 0} P_n(R_E)L_F^n$.

Relation de commutation infinie

En tant qu'opérateur linéaire, le commutateur $[L_F, R_E]$ admet lui aussi une décomposition de la forme $\sum_{n\geq 0} P_n(R_E)L_F^n$.

Nous obtenons de la sorte une relation de commutation infinie, inhabituelle dans le cadre des extensions de Ore.

Bibliographie

Bibliographie

- Poinsot, L. et al. Ladder operators and endomorphisms in combinatorial physics, 2010.

Bibliographie

- Poinsot, L. et al. Ladder operators and endomorphisms in combinatorial physics, 2010.

- Poinsot, L. Contributions à l'algèbre, à l'analyse et à la combinatoire des endomorphismes sur les espaces de séries, mémoire d'HDR, 2011.