Opérateurs d'échelle généralisés et une « forme normale » des endomorphismes

Laurent Poinsot

LIPN - UMR CNRS 7030
Université Paris-Nord XIII - Institut Galilée

Séminaire Algo

Le 28 février 2012 à l'Université de Caen Basse-Normandie

Introduction

Considérons l'espace $\mathbb{C}[z]$ des polynômes complexes en une indéterminée z.

Introduction

Considérons l'espace $\mathbb{C}[z]$ des polynômes complexes en une indéterminée z.

Un endomorphisme (linéaire) de $\mathbb{C}[z]$ est une application $\phi\colon \mathbb{C}[z] \to \mathbb{C}[z]$

Introduction

Considérons l'espace $\mathbb{C}[z]$ des polynômes complexes en une indéterminée z.

Un endomorphisme (linéaire) de $\mathbb{C}[z]$ est une application $\phi\colon \mathbb{C}[z] \to \mathbb{C}[z]$ telle que

$$\phi(P + Q) = \phi(P) + \phi(Q)$$

Introduction

Considérons l'espace $\mathbb{C}[z]$ des polynômes complexes en une indéterminée z.

Un endomorphisme (linéaire) de $\mathbb{C}[z]$ est une application $\phi\colon \mathbb{C}[z] \to \mathbb{C}[z]$ telle que

$$\phi(P + Q) = \phi(P) + \phi(Q)$$

et

$$\phi(\alpha P) = \alpha \phi(P)$$

pour tous polynômes $P, Q \in \mathbb{C}[z]$ et tout nombre complexe α.

Introduction

Considérons l'espace $\mathbb{C}[z]$ des polynômes complexes en une indéterminée z.

Un endomorphisme (linéaire) de $\mathbb{C}[z]$ est une application $\phi\colon \mathbb{C}[z] \to \mathbb{C}[z]$ telle que

$$\phi(P+Q) = \phi(P) + \phi(Q)$$

et

$$\phi(\alpha P) = \alpha\phi(P)$$

pour tous polynômes $P, Q \in \mathbb{C}[z]$ et tout nombre complexe α.

Parmi tous ces endomorphismes, deux d'entre eux jouent un rôle important

Introduction

Considérons l'espace $\mathbb{C}[z]$ des polynômes complexes en une indéterminée z.

Un endomorphisme (linéaire) de $\mathbb{C}[z]$ est une application $\phi\colon \mathbb{C}[z] \to \mathbb{C}[z]$ telle que

$$\phi(P+Q) = \phi(P) + \phi(Q)$$

et

$$\phi(\alpha P) = \alpha\phi(P)$$

pour tous polynômes $P, Q \in \mathbb{C}[z]$ et tout nombre complexe α.

Parmi tous ces endomorphismes, deux d'entre eux jouent un rôle important

- L'opérateur de multiplication : $a^\dagger(P) = zP$.

Introduction

Considérons l'espace $\mathbb{C}[z]$ des polynômes complexes en une indéterminée z.

Un endomorphisme (linéaire) de $\mathbb{C}[z]$ est une application $\phi\colon \mathbb{C}[z] \to \mathbb{C}[z]$ telle que

$$\phi(P+Q) = \phi(P) + \phi(Q)$$

et

$$\phi(\alpha P) = \alpha\phi(P)$$

pour tous polynômes $P, Q \in \mathbb{C}[z]$ et tout nombre complexe α.

Parmi tous ces endomorphismes, deux d'entre eux jouent un rôle important

- L'opérateur de multiplication : $a^\dagger(P) = zP$.

- L'opérateur de dérivation (formelle) : $a(P) = \frac{d}{dz}P$.

Introduction

En effet, ces deux opérateurs contiennent toute l'information sur l'espace $\mathrm{End}(\mathbb{C}[z])$ des endomorphismes.

Introduction

En effet, ces deux opérateurs contiennent toute l'information sur l'espace $\mathrm{End}(\mathbb{C}[z])$ des endomorphismes.

Précisons cela :

Introduction

En effet, ces deux opérateurs contiennent toute l'information sur l'espace $\mathrm{End}(\mathbb{C}[z])$ des endomorphismes.

Précisons cela : Considérons tous les endomorphismes qui peuvent s'écrire comme une somme finie de produits de puissances (pour la composition) de a et de $a^\dagger$

Introduction

En effet, ces deux opérateurs contiennent toute l'information sur l'espace $\mathrm{End}(\mathbb{C}[z])$ des endomorphismes.

Précisons cela : Considérons tous les endomorphismes qui peuvent s'écrire comme une somme finie de produits de puissances (pour la composition) de a et de $a^\dagger$, soit

$$S = \alpha_1 \left(b_1^{n(1,1)} \cdots b_{k_1}^{n(1,k_1)} \right) + \cdots + \alpha_m \left(b_1^{n(m,1)} \cdots b_{k_m}^{n(m,k_m)} \right)$$

Introduction

En effet, ces deux opérateurs contiennent toute l'information sur l'espace $\mathrm{End}(\mathbb{C}[z])$ des endomorphismes.

Précisons cela : Considérons tous les endomorphismes qui peuvent s'écrire comme une somme finie de produits de puissances (pour la composition) de a et de $a^\dagger$, soit

$$S = \alpha_1 \left(b_1^{n(1,1)} \cdots b_{k_1}^{n(1,k_1)} \right) + \cdots + \alpha_m \left(b_1^{n(m,1)} \cdots b_{k_m}^{n(m,k_m)} \right)$$

où $b_k \in \{ a, a^\dagger \}$, $b^n = \underbrace{b \circ \cdots \circ b}_{n \text{ facteurs}}$, et $\alpha_i \in \mathbb{C}$,

Introduction

En effet, ces deux opérateurs contiennent toute l'information sur l'espace $\mathrm{End}(\mathbb{C}[z])$ des endomorphismes.

Précisons cela : Considérons tous les endomorphismes qui peuvent s'écrire comme une somme finie de produits de puissances (pour la composition) de a et de $a^\dagger$, soit

$$S = \alpha_1 \left(b_1^{n(1,1)} \cdots b_{k_1}^{n(1,k_1)} \right) + \cdots + \alpha_m \left(b_1^{n(m,1)} \cdots b_{k_m}^{n(m,k_m)} \right)$$

où $b_k \in \{ a, a^\dagger \}$, $b^n = \underbrace{b \circ \cdots \circ b}_{n \ facteurs}$, et $\alpha_i \in \mathbb{C}$, autrement dit, S est l'endomorphisme donné par
$S(P) = \alpha_1 b_1^{n(1,1)}(b_2^{n(1,2)}(\cdots(b_{k_1}^{n(1,k_1)}(P))\cdots)) + \cdots +$
$\alpha_m b_1^{n(m,1)}(b_2^{n(m,2)}(\cdots(b_{k_m}^{n(m,k_m)}(P))\cdots))$
pour chaque polynôme P.

Ces endomorphismes forment une algèbre, la sous-algèbre engendrée par a et $a^\dagger$

Introduction

Ce que nous dit le théorème de densité de Jacobson

Ces endomorphismes forment une algèbre, la sous-algèbre engendrée par a et $a^\dagger$: étant donnés deux de ces opérateurs S_1 et S_2, alors $S_1 \circ S_2$ et $S_1 + S_2$ sont des opérateurs du même type.

Ces endomorphismes forment une algèbre, la sous-algèbre engendrée par a et $a^\dagger$: étant donnés deux de ces opérateurs S_1 et S_2, alors $S_1 \circ S_2$ et $S_1 + S_2$ sont des opérateurs du même type. Il s'agit de l'algèbre de Weyl.

Introduction

Ce que nous dit le théorème de densité de Jacobson

Ces endomorphismes forment une algèbre, la sous-algèbre engendrée par a et $a^\dagger$: étant donnés deux de ces opérateurs S_1 et S_2, alors $S_1 \circ S_2$ et $S_1 + S_2$ sont des opérateurs du même type. Il s'agit de l'algèbre de Weyl.

Le théorème de densité de Jacobson a pour conséquence que l'algèbre de Weyl est dense (pour une certaine topologie) dans $\mathrm{End}(\mathbb{C}[z])$.

Ces endomorphismes forment une algèbre, la sous-algèbre engendrée par a et $a^\dagger$: étant donnés deux de ces opérateurs S_1 et S_2, alors $S_1 \circ S_2$ et $S_1 + S_2$ sont des opérateurs du même type. Il s'agit de l'algèbre de Weyl.

Le théorème de densité de Jacobson a pour conséquence que l'algèbre de Weyl est dense (pour une certaine topologie) dans $\mathrm{End}(\mathbb{C}[z])$.

Cela signifie que quel que soit l'endomorphisme ϕ de $\mathbb{C}[z]$, il existe une suite $(S_n)_{n\geq 0}$ d'éléments de l'algèbre de Weyl telle que

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \phi$$

Introduction

Ce que nous dit le théorème de densité de Jacobson

Ces endomorphismes forment une algèbre, la sous-algèbre engendrée par a et $a^\dagger$: étant donnés deux de ces opérateurs S_1 et S_2, alors $S_1 \circ S_2$ et $S_1 + S_2$ sont des opérateurs du même type. Il s'agit de l'algèbre de Weyl.

Le théorème de densité de Jacobson a pour conséquence que l'algèbre de Weyl est dense (pour une certaine topologie) dans $\mathrm{End}(\mathbb{C}[z])$.

Cela signifie que quel que soit l'endomorphisme ϕ de $\mathbb{C}[z]$, il existe une suite $(S_n)_{n\geq 0}$ d'éléments de l'algèbre de Weyl telle que

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \phi$$

au sens où pour chaque polynôme P, $S_n(P) = \phi(P)$ (convergence discrète) pour n suffisamment grand.

Introduction

Ce que nous dit le théorème de densité de Jacobson

Ces endomorphismes forment une algèbre, la sous-algèbre engendrée par a et $a^\dagger$: étant donnés deux de ces opérateurs S_1 et S_2, alors $S_1 \circ S_2$ et $S_1 + S_2$ sont des opérateurs du même type. Il s'agit de l'algèbre de Weyl.

Le théorème de densité de Jacobson a pour conséquence que l'algèbre de Weyl est dense (pour une certaine topologie) dans $\mathrm{End}(\mathbb{C}[z])$.

Cela signifie que quel que soit l'endomorphisme ϕ de $\mathbb{C}[z]$, il existe une suite $(S_n)_{n\geq 0}$ d'éléments de l'algèbre de Weyl telle que

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \phi$$

au sens où pour chaque polynôme P, $S_n(P) = \phi(P)$ (convergence discrète) pour n suffisamment grand.

Dans le fond il suffit de connaître les éléments de l'algèbre de Weyl pour connaître tous les endomorphismes de $\mathbb{C}[z]$.

Introduction

Ce que ne nous dit pas le théorème de densité de Jacobson

Introduction

Ce que ne nous dit pas le théorème de densité de Jacobson

Cependant, le théorème de Jacobson est un résultat existentiel

Cependant, le théorème de Jacobson est un résultat existentiel : il ne nous dit pas comment construire explicitement sinon algorithmiquement une suite $(S_n)_n$ convergeant vers un endomorphisme ϕ.

Si deux polynômes peuvent s'additionner, on peut également les multiplier.

Introduction

Questions

Si deux polynômes peuvent s'additionner, on peut également les multiplier. Or dans la preuve (de la conséquence) du théorème de Jacobson, la structure d'algèbre de $\mathbb{C}[z]$ n'est pas directement utilisée

Si deux polynômes peuvent s'additionner, on peut également les multiplier. Or dans la preuve (de la conséquence) du théorème de Jacobson, la structure d'algèbre de $\mathbb{C}[z]$ n'est pas directement utilisée : Peut-on s'en passer ?

Introduction

Questions

Si deux polynômes peuvent s'additionner, on peut également les multiplier. Or dans la preuve (de la conséquence) du théorème de Jacobson, la structure d'algèbre de $\mathbb{C}[z]$ n'est pas directement utilisée : Peut-on s'en passer ?

Par ailleurs, les opérateurs a et $a^\dagger$ sont des cas particuliers d'opérateurs plus généraux : les opérateurs d'échelle.

Si deux polynômes peuvent s'additionner, on peut également les multiplier. Or dans la preuve (de la conséquence) du théorème de Jacobson, la structure d'algèbre de $\mathbb{C}[z]$ n'est pas directement utilisée : Peut-on s'en passer ?

Par ailleurs, les opérateurs a et $a^\dagger$ sont des cas particuliers d'opérateurs plus généraux : les opérateurs d'échelle. Soit par exemple V un espace vectoriel avec une base $(e_n)_n$ constituée d'une infinité d'éléments (typiquement $V = \mathbb{C}[z]$ et $e_n = z^n$ ou $e_n = \frac{z^n}{n!}$).

Si deux polynômes peuvent s'additionner, on peut également les multiplier. Or dans la preuve (de la conséquence) du théorème de Jacobson, la structure d'algèbre de $\mathbb{C}[z]$ n'est pas directement utilisée : Peut-on s'en passer ?

Par ailleurs, les opérateurs a et $a^\dagger$ sont des cas particuliers d'opérateurs plus généraux : les opérateurs d'échelle. Soit par exemple V un espace vectoriel avec une base $(e_n)_n$ constituée d'une infinité d'éléments (typiquement $V = \mathbb{C}[z]$ et $e_n = z^n$ ou $e_n = \frac{z^n}{n!}$). L'opérateur montant est donné par $Re_n = e_{n+1}$,

Introduction

Questions

Si deux polynômes peuvent s'additionner, on peut également les multiplier. Or dans la preuve (de la conséquence) du théorème de Jacobson, la structure d'algèbre de $\mathbb{C}[z]$ n'est pas directement utilisée : Peut-on s'en passer ?

Par ailleurs, les opérateurs a et $a^\dagger$ sont des cas particuliers d'opérateurs plus généraux : les opérateurs d'échelle. Soit par exemple V un espace vectoriel avec une base $(e_n)_n$ constituée d'une infinité d'éléments (typiquement $V = \mathbb{C}[z]$ et $e_n = z^n$ ou $e_n = \frac{z^n}{n!}$). L'opérateur montant est donné par $Re_n = e_{n+1}$, et l'opérateur descendant est défini par $Le_{n+1} = e_n$ et $Le_0 = 0$.

Si deux polynômes peuvent s'additionner, on peut également les multiplier. Or dans la preuve (de la conséquence) du théorème de Jacobson, la structure d'algèbre de $\mathbb{C}[z]$ n'est pas directement utilisée : Peut-on s'en passer ?

Par ailleurs, les opérateurs a et $a^\dagger$ sont des cas particuliers d'opérateurs plus généraux : les opérateurs d'échelle. Soit par exemple V un espace vectoriel avec une base $(e_n)_n$ constituée d'une infinité d'éléments (typiquement $V = \mathbb{C}[z]$ et $e_n = z^n$ ou $e_n = \frac{z^n}{n!}$). L'opérateur montant est donné par $Re_n = e_{n+1}$, et l'opérateur descendant est défini par $Le_{n+1} = e_n$ et $Le_0 = 0$.

Est-il possible d'étendre le résultat de Jacobson aux opérateurs d'échelle plus généraux ?

Introduction

Questions

Si deux polynômes peuvent s'additionner, on peut également les multiplier. Or dans la preuve (de la conséquence) du théorème de Jacobson, la structure d'algèbre de $\mathbb{C}[z]$ n'est pas directement utilisée : Peut-on s'en passer ?

Par ailleurs, les opérateurs a et $a^\dagger$ sont des cas particuliers d'opérateurs plus généraux : les opérateurs d'échelle. Soit par exemple V un espace vectoriel avec une base $(e_n)_n$ constituée d'une infinité d'éléments (typiquement $V = \mathbb{C}[z]$ et $e_n = z^n$ ou $e_n = \frac{z^n}{n!}$). L'opérateur montant est donné par $Re_n = e_{n+1}$, et l'opérateur descendant est défini par $Le_{n+1} = e_n$ et $Le_0 = 0$.

Est-il possible d'étendre le résultat de Jacobson aux opérateurs d'échelle plus généraux ? Et si oui, peut-on se passer de la caractéristique zéro ?

Objectifs de l'exposé

Cet exposé a pour buts de :

Objectifs de l'exposé

Cet exposé a pour buts de :

- Étendre le résultat de Jacobson à un cadre plus général

Objectifs de l'exposé

Cet exposé a pour buts de :

• Étendre le résultat de Jacobson à un cadre plus général : l'espace $\mathbb{C}[z]$ est remplacé par un espace de dimension infinie dénombrable V (sur un corps de caractéristique quelconque),

Objectifs de l'exposé

Cet exposé a pour buts de :

• Étendre le résultat de Jacobson à un cadre plus général : l'espace $\mathbb{C}[z]$ est remplacé par un espace de dimension infinie dénombrable V (sur un corps de caractéristique quelconque), et a, $a^\dagger$ par des opérateurs d'échelle.

Objectifs de l'exposé

Cet exposé a pour buts de :

• Étendre le résultat de Jacobson à un cadre plus général : l'espace $\mathbb{C}[z]$ est remplacé par un espace de dimension infinie dénombrable V (sur un corps de caractéristique quelconque), et a, $a^\dagger$ par des opérateurs d'échelle.

• Présenter une construction explicite (par récurrence) d'une suite $(S_n)_n$

Objectifs de l'exposé

Cet exposé a pour buts de :

• Étendre le résultat de Jacobson à un cadre plus général : l'espace $\mathbb{C}[z]$ est remplacé par un espace de dimension infinie dénombrable V (sur un corps de caractéristique quelconque), et a, $a^\dagger$ par des opérateurs d'échelle.

• Présenter une construction explicite (par récurrence) d'une suite $(S_n)_n$: un algorithme qui prend en entrée un endomorphisme P de V et qui renvoie une suite $(S_n)_n$ d'éléments de l'algèbre engendrée par les opérateurs d'échelle telle que $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \phi$.

Objectifs de l'exposé

Cet exposé a pour buts de :

• Étendre le résultat de Jacobson à un cadre plus général : l'espace $\mathbb{C}[z]$ est remplacé par un espace de dimension infinie dénombrable V (sur un corps de caractéristique quelconque), et a, $a^\dagger$ par des opérateurs d'échelle.

• Présenter une construction explicite (par récurrence) d'une suite $(S_n)_n$: un algorithme qui prend en entrée un endomorphisme P de V et qui renvoie une suite $(S_n)_n$ d'éléments de l'algèbre engendrée par les opérateurs d'échelle telle que $\lim_{n\to\infty} S_n = \phi$.

• En déduire une forme normale pour les endomorphismes

Objectifs de l'exposé

Cet exposé a pour buts de :

• Étendre le résultat de Jacobson à un cadre plus général : l'espace $\mathbb{C}[z]$ est remplacé par un espace de dimension infinie dénombrable V (sur un corps de caractéristique quelconque), et a, $a^\dagger$ par des opérateurs d'échelle.

• Présenter une construction explicite (par récurrence) d'une suite $(S_n)_n$: un algorithme qui prend en entrée un endomorphisme P de V et qui renvoie une suite $(S_n)_n$ d'éléments de l'algèbre engendrée par les opérateurs d'échelle telle que $\lim_{n\to\infty} S_n = \phi$.

• En déduire une forme normale pour les endomorphismes : il existe *a priori* de nombreuses suites $(S_n)_n$ qui convergent vers un opérateur ϕ donné.

Objectifs de l'exposé

Cet exposé a pour buts de :

• Étendre le résultat de Jacobson à un cadre plus général : l'espace $\mathbb{C}[z]$ est remplacé par un espace de dimension infinie dénombrable V (sur un corps de caractéristique quelconque), et a, $a^\dagger$ par des opérateurs d'échelle.

• Présenter une construction explicite (par récurrence) d'une suite $(S_n)_n$: un algorithme qui prend en entrée un endomorphisme P de V et qui renvoie une suite $(S_n)_n$ d'éléments de l'algèbre engendrée par les opérateurs d'échelle telle que $\lim_{n\to\infty} S_n = \phi$.

• En déduire une forme normale pour les endomorphismes : il existe *a priori* de nombreuses suites $(S_n)_n$ qui convergent vers un opérateur ϕ donné. Notre construction permet d'associer une unique série en deux variables non commutatives à chaque endomorphisme

Objectifs de l'exposé

Cet exposé a pour buts de :

• Étendre le résultat de Jacobson à un cadre plus général : l'espace $\mathbb{C}[z]$ est remplacé par un espace de dimension infinie dénombrable V (sur un corps de caractéristique quelconque), et a, $a^\dagger$ par des opérateurs d'échelle.

• Présenter une construction explicite (par récurrence) d'une suite $(S_n)_n$: un algorithme qui prend en entrée un endomorphisme P de V et qui renvoie une suite $(S_n)_n$ d'éléments de l'algèbre engendrée par les opérateurs d'échelle telle que $\lim_{n\to\infty} S_n = \phi$.

• En déduire une forme normale pour les endomorphismes : il existe *a priori* de nombreuses suites $(S_n)_n$ qui convergent vers un opérateur ϕ donné. Notre construction permet d'associer une unique série en deux variables non commutatives à chaque endomorphisme, c'est sa forme normale (c'est un genre de patron),

Objectifs de l'exposé

Cet exposé a pour buts de :

• Étendre le résultat de Jacobson à un cadre plus général : l'espace $\mathbb{C}[z]$ est remplacé par un espace de dimension infinie dénombrable V (sur un corps de caractéristique quelconque), et a, $a^\dagger$ par des opérateurs d'échelle.

• Présenter une construction explicite (par récurrence) d'une suite $(S_n)_n$: un algorithme qui prend en entrée un endomorphisme P de V et qui renvoie une suite $(S_n)_n$ d'éléments de l'algèbre engendrée par les opérateurs d'échelle telle que $\lim_{n\to\infty} S_n = \phi$.

• En déduire une forme normale pour les endomorphismes : il existe *a priori* de nombreuses suites $(S_n)_n$ qui convergent vers un opérateur ϕ donné. Notre construction permet d'associer une unique série en deux variables non commutatives à chaque endomorphisme, c'est sa forme normale (c'est un genre de patron), et par une application de spécialisation

Objectifs de l'exposé

Cet exposé a pour buts de :

• Étendre le résultat de Jacobson à un cadre plus général : l'espace $\mathbb{C}[z]$ est remplacé par un espace de dimension infinie dénombrable V (sur un corps de caractéristique quelconque), et a, $a^\dagger$ par des opérateurs d'échelle.

• Présenter une construction explicite (par récurrence) d'une suite $(S_n)_n$: un algorithme qui prend en entrée un endomorphisme P de V et qui renvoie une suite $(S_n)_n$ d'éléments de l'algèbre engendrée par les opérateurs d'échelle telle que $\lim_{n\to\infty} S_n = \phi$.

• En déduire une forme normale pour les endomorphismes : il existe *a priori* de nombreuses suites $(S_n)_n$ qui convergent vers un opérateur ϕ donné. Notre construction permet d'associer une unique série en deux variables non commutatives à chaque endomorphisme, c'est sa forme normale (c'est un genre de patron), et par une application de spécialisation (une des variables est remplacée par l'opérateur montant, et l'autre par l'opérateur descendant)

Objectifs de l'exposé

Cet exposé a pour buts de :

• Étendre le résultat de Jacobson à un cadre plus général : l'espace $\mathbb{C}[z]$ est remplacé par un espace de dimension infinie dénombrable V (sur un corps de caractéristique quelconque), et a, $a^\dagger$ par des opérateurs d'échelle.

• Présenter une construction explicite (par récurrence) d'une suite $(S_n)_n$: un algorithme qui prend en entrée un endomorphisme P de V et qui renvoie une suite $(S_n)_n$ d'éléments de l'algèbre engendrée par les opérateurs d'échelle telle que $\lim_{n\to\infty} S_n = \phi$.

• En déduire une forme normale pour les endomorphismes : il existe *a priori* de nombreuses suites $(S_n)_n$ qui convergent vers un opérateur ϕ donné. Notre construction permet d'associer une unique série en deux variables non commutatives à chaque endomorphisme, c'est sa forme normale (c'est un genre de patron), et par une application de spécialisation (une des variables est remplacée par l'opérateur montant, et l'autre par l'opérateur descendant) on trouve la suite $(S_n)_n$ qui converge vers l'opérateur.

Précisions quant à cet exposé, 1

La notion de forme normale est liée aux systèmes de réécriture (convergents).

Précisions quant à cet exposé, 1

La notion de forme normale est liée aux systèmes de réécriture (convergents).

C'est également en relation avec le concept de structures algébriques définies par générateurs et relations

Précisions quant à cet exposé, 1

La notion de forme normale est liée aux systèmes de réécriture (convergents).

C'est également en relation avec le concept de structures algébriques définies par générateurs et relations (on parle de présentations par générateurs et relations).

Précisions quant à cet exposé, 1

La notion de forme normale est liée aux systèmes de réécriture (convergents).

C'est également en relation avec le concept de structures algébriques définies par générateurs et relations (on parle de présentations par générateurs et relations).

Dans les algèbres, les formes normales sont décrites à l'aide de polynômes (en plusieurs variables) commutatifs ou non commutatifs (par exemple, les bases de Gröbner).

Précisions quant à cet exposé, 1

La notion de forme normale est liée aux systèmes de réécriture (convergents).

C'est également en relation avec le concept de structures algébriques définies par générateurs et relations (on parle de présentations par générateurs et relations).

Dans les algèbres, les formes normales sont décrites à l'aide de polynômes (en plusieurs variables) commutatifs ou non commutatifs (par exemple, les bases de Gröbner).

La première partie de cet exposé est donc entièrement consacrée à ces notions centrales dans mes travaux :

Précisions quant à cet exposé, 1

La notion de forme normale est liée aux systèmes de réécriture (convergents).

C'est également en relation avec le concept de structures algébriques définies par générateurs et relations (on parle de présentations par générateurs et relations).

Dans les algèbres, les formes normales sont décrites à l'aide de polynômes (en plusieurs variables) commutatifs ou non commutatifs (par exemple, les bases de Gröbner).

La première partie de cet exposé est donc entièrement consacrée à ces notions centrales dans mes travaux : les monoïdes, les algèbres, les polynômes non commutatifs, les algèbres présentées et les séries non commutatives.

Précisions quant à cet exposé, 2

Puis, dans une seconde partie, certaines de ces notions sont appliquées au cas de l'algèbre de Weyl.

Précisions quant à cet exposé, 2

Puis, dans une seconde partie, certaines de ces notions sont appliquées au cas de l'algèbre de Weyl. Je montre en particulier que cet algèbre peut être vue comme abstraite sous la forme d'une algèbre présentée ou comme concrète, au travers d'une représentation, comme l'algèbre engendrée par la multiplication par la variable z et la dérivation des polynômes.

Précisions quant à cet exposé, 2

Puis, dans une seconde partie, certaines de ces notions sont appliquées au cas de l'algèbre de Weyl. Je montre en particulier que cet algèbre peut être vue comme abstraite sous la forme d'une algèbre présentée ou comme concrète, au travers d'une représentation, comme l'algèbre engendrée par la multiplication par la variable z et la dérivation des polynômes.

Le théorème de densité de Jacobson est volontairement ignoré en dépit du fait qu'il est au centre de ces travaux

Précisions quant à cet exposé, 2

Puis, dans une seconde partie, certaines de ces notions sont appliquées au cas de l'algèbre de Weyl. Je montre en particulier que cet algèbre peut être vue comme abstraite sous la forme d'une algèbre présentée ou comme concrète, au travers d'une représentation, comme l'algèbre engendrée par la multiplication par la variable z et la dérivation des polynômes.

Le théorème de densité de Jacobson est volontairement ignoré en dépit du fait qu'il est au centre de ces travaux : son introduction nécessite à la fois des notions algébriques, comme les anneaux primitifs, et des notions topologiques, comme la topologie compact-ouvert des applications continues, que je préfère ignorer aujourd'hui.

Table des matières

Table des matières

Le monoïde libre

Un monoïde est un ensemble non vide M

Le monoïde libre

Un monoïde est un ensemble non vide M
- avec une loi de composition interne, $\times$ en notation multiplicative, associative,

Le monoïde libre

Un monoïde est un ensemble non vide M
- avec une loi de composition interne, $\times$ en notation multiplicative, associative,
- et avec un élément distingué 1_M qui est neutre (bilatère) pour $\times$ (*i.e.*, $x \times 1_M = 1_M \times x$ quel que soit $x \in M$).

Le monoïde libre

Un monoïde est un ensemble non vide M
- avec une loi de composition interne, $\times$ en notation multiplicative, associative,
- et avec un élément distingué 1_M qui est neutre (bilatère) pour $\times$ (*i.e.*, $x \times 1_M = 1_M \times x$ quel que soit $x \in M$).

Étant donné un ensemble X, on peut construire le monoïde libre sur X, noté X^* :

Le monoïde libre

Un monoïde est un ensemble non vide M
- avec une loi de composition interne, $\times$ en notation multiplicative, associative,
- et avec un élément distingué 1_M qui est neutre (bilatère) pour $\times$ (*i.e.*, $x \times 1_M = 1_M \times x$ quel que soit $x \in M$).

Étant donné un ensemble X, on peut construire le monoïde libre sur X, noté X^* : Il s'agit de l'ensemble des mots $x_1 x_2 \cdots x_n$ avec $x_i \in X$ (le mot vide ϵ y compris obtenu pour $n = 0$).

Le monoïde libre

Un monoïde est un ensemble non vide M
- avec une loi de composition interne, $\times$ en notation multiplicative, associative,
- et avec un élément distingué 1_M qui est neutre (bilatère) pour $\times$ (*i.e.*, $x \times 1_M = 1_M \times x$ quel que soit $x \in M$).

Étant donné un ensemble X, on peut construire le monoïde libre sur X, noté X^* : Il s'agit de l'ensemble des mots $x_1 x_2 \cdots x_n$ avec $x_i \in X$ (le mot vide ϵ y compris obtenu pour $n = 0$). La loi de composition interne est la concaténation des mots

Le monoïde libre

Un monoïde est un ensemble non vide M
- avec une loi de composition interne, $\times$ en notation multiplicative, associative,
- et avec un élément distingué 1_M qui est neutre (bilatère) pour $\times$ (*i.e.*, $x \times 1_M = 1_M \times x$ quel que soit $x \in M$).

Étant donné un ensemble X, on peut construire le monoïde libre sur X, noté X^* : Il s'agit de l'ensemble des mots $x_1 x_2 \cdots x_n$ avec $x_i \in X$ (le mot vide ϵ y compris obtenu pour $n = 0$). La loi de composition interne est la concaténation des mots :

$$(x_1 \cdots x_m) \times (x'_1 \cdots x'_n) = x_1 \cdots x_m x'_1 \cdots x'_n \ .$$

Le monoïde libre

Un monoïde est un ensemble non vide M
- avec une loi de composition interne, $\times$ en notation multiplicative, associative,
- et avec un élément distingué 1_M qui est neutre (bilatère) pour $\times$ (*i.e.*, $x \times 1_M = 1_M \times x$ quel que soit $x \in M$).

Étant donné un ensemble X, on peut construire le monoïde libre sur X, noté X^* : Il s'agit de l'ensemble des mots $x_1 x_2 \cdots x_n$ avec $x_i \in X$ (le mot vide ϵ y compris obtenu pour $n = 0$). La loi de composition interne est la concaténation des mots :

$$(x_1 \cdots x_m) \times (x'_1 \cdots x'_n) = x_1 \cdots x_m x'_1 \cdots x'_n \ .$$

Par exemple, $(\mathbb{N}, +, 0)$ est le monoïde libre sur une lettre.

Les groupes

Un élément x d'un monoïde M est inversible s'il existe $y \in M$ tel que $x \times y = 1_M = y \times x$.

Les groupes

Un élément x d'un monoïde M est inversible s'il existe $y \in M$ tel que $x \times y = 1_M = y \times x$. Il est aisé de démontrer l'unicité (lorsqu'il existe) d'un tel élément y que l'on appelle l'inverse de x et que l'on note x^{-1}.

Les groupes

Un élément x d'un monoïde M est inversible s'il existe $y \in M$ tel que $x \times y = 1_M = y \times x$. Il est aisé de démontrer l'unicité (lorsqu'il existe) d'un tel élément y que l'on appelle l'inverse de x et que l'on note x^{-1}.

Notons que le monoïde libre n'admet que le mot vide comme élément inversible.

Un élément x d'un monoïde M est inversible s'il existe $y \in M$ tel que $x \times y = 1_M = y \times x$. Il est aisé de démontrer l'unicité (lorsqu'il existe) d'un tel élément y que l'on appelle l'inverse de x et que l'on note x^{-1}.

Notons que le monoïde libre n'admet que le mot vide comme élément inversible.

Un groupe est un monoïde dans lequel tout élément est inversible.

Les groupes

Un élément x d'un monoïde M est inversible s'il existe $y \in M$ tel que $x \times y = 1_M = y \times x$. Il est aisé de démontrer l'unicité (lorsqu'il existe) d'un tel élément y que l'on appelle l'inverse de x et que l'on note x^{-1}.

Notons que le monoïde libre n'admet que le mot vide comme élément inversible.

Un groupe est un monoïde dans lequel tout élément est inversible.

Un monoïde ou un groupe est dit commutatif si sa loi l'est : $x \times y = y \times x$.

Les anneaux

Un anneau (unitaire) est un ensemble non vide R avec deux lois de compositions internes $+$ et $\times$ et des éléments distingués 0 et 1 tels que :

Les anneaux

Un anneau (unitaire) est un ensemble non vide R avec deux lois de compositions internes $+$ et $\times$ et des éléments distingués 0 et 1 tels que :

- $(R, +, 0)$ est un groupe commutatif.

Les anneaux

Un anneau (unitaire) est un ensemble non vide R avec deux lois de compositions internes $+$ et $\times$ et des éléments distingués 0 et 1 tels que :

- $(R, +, 0)$ est un groupe commutatif.

- $(R, \times, 1)$ est un monoïde.

Les anneaux

Un anneau (unitaire) est un ensemble non vide R avec deux lois de compositions internes $+$ et $\times$ et des éléments distingués 0 et 1 tels que :

- $(R, +, 0)$ est un groupe commutatif.

- $(R, \times, 1)$ est un monoïde.

- Quels que soient $x, y, z \in R$, $x(y+z) = xy + xz$ et $(x+y)z = xz + yz$.

Les anneaux

Un anneau (unitaire) est un ensemble non vide R avec deux lois de compositions internes $+$ et $\times$ et des éléments distingués 0 et 1 tels que :

- $(R, +, 0)$ est un groupe commutatif.

- $(R, \times, 1)$ est un monoïde.

- Quels que soient $x, y, z \in R$, $x(y+z) = xy + xz$ et $(x+y)z = xz + yz$.

On déduit de ces axiomes que 0 est un élément absorbant bilatère :

$$x \times 0 = 0 = 0 \times x\ .$$

Les anneaux

Un anneau (unitaire) est un ensemble non vide R avec deux lois de compositions internes $+$ et $\times$ et des éléments distingués 0 et 1 tels que :

- $(R, +, 0)$ est un groupe commutatif.

- $(R, \times, 1)$ est un monoïde.

- Quels que soient $x, y, z \in R$, $x(y+z) = xy + xz$ et $(x+y)z = xz + yz$.

On déduit de ces axiomes que 0 est un élément absorbant bilatère :

$$x \times 0 = 0 = 0 \times x \ .$$

Exemple : $\mathbb{Z}$ est un anneau, alors que $\mathbb{N}$ ne l'est pas.

Les anneaux

Un anneau (unitaire) est un ensemble non vide R avec deux lois de compositions internes $+$ et $\times$ et des éléments distingués 0 et 1 tels que :

- $(R, +, 0)$ est un groupe commutatif.

- $(R, \times, 1)$ est un monoïde.

- Quels que soient $x, y, z \in R$, $x(y+z) = xy + xz$ et $(x+y)z = xz + yz$.

On déduit de ces axiomes que 0 est un élément absorbant bilatère :

$$x \times 0 = 0 = 0 \times x \; .$$

Exemple : $\mathbb{Z}$ est un anneau, alors que $\mathbb{N}$ ne l'est pas.

Un anneau est dit commutatif dès que $\times$ l'est.

Les corps

Soit R un anneau.

Les corps

Soit R un anneau. Soit $x \in R$.

Les corps

Soit R un anneau. Soit $x \in R$. On dit que x est inversible dans R s'il est inversible dans le monoïde $(R, \times, 1)$.

Les corps

Soit R un anneau. Soit $x \in R$. On dit que x est inversible dans R s'il est inversible dans le monoïde $(R, \times, 1)$.

Un corps est un anneau commutatif $\mathbb{K}$ dans lequel tout élément non nul est inversible.

Les corps

Soit R un anneau. Soit $x \in R$. On dit que x est inversible dans R s'il est inversible dans le monoïde $(R, \times, 1)$.

Un corps est un anneau commutatif $\mathbb{K}$ dans lequel tout élément non nul est inversible.

Autrement dit, $(\mathbb{K} \setminus \{ 0 \}, \times, 1)$ est un groupe.

Les algèbres sur un anneau commutatif

Soit R un anneau commutatif (c'est l'ensemble des scalaires).

Les algèbres sur un anneau commutatif

Soit R un anneau commutatif (c'est l'ensemble des scalaires). Une R-algèbre A est un anneau avec une loi de composition externe $R \times A \to A$ vérifiant pour $x, y \in A$ et $\alpha, \beta \in R$:

Les algèbres sur un anneau commutatif

Soit R un anneau commutatif (c'est l'ensemble des scalaires). Une R-algèbre A est un anneau avec une loi de composition externe $R \times A \to A$ vérifiant pour $x, y \in A$ et $\alpha, \beta \in R$:

- $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$.

Les algèbres sur un anneau commutatif

Soit R un anneau commutatif (c'est l'ensemble des scalaires). Une R-algèbre A est un anneau avec une loi de composition externe $R \times A \to A$ vérifiant pour $x, y \in A$ et $\alpha, \beta \in R$:

- $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$.
- $(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$.

Les algèbres sur un anneau commutatif

Soit R un anneau commutatif (c'est l'ensemble des scalaires). Une R-algèbre A est un anneau avec une loi de composition externe $R \times A \to A$ vérifiant pour $x, y \in A$ et $\alpha, \beta \in R$:

- $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$.
- $(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$.
- $1_R x = x$.

Les algèbres sur un anneau commutatif

Soit R un anneau commutatif (c'est l'ensemble des scalaires). Une R-algèbre A est un anneau avec une loi de composition externe $R \times A \to A$ vérifiant pour $x, y \in A$ et $\alpha, \beta \in R$:

- $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$.
- $(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$.
- $1_R x = x$.
- $\alpha(xy) = (\alpha x)y = x(\alpha y)$.

Les algèbres sur un anneau commutatif

Soit R un anneau commutatif (c'est l'ensemble des scalaires). Une R-algèbre A est un anneau avec une loi de composition externe $R \times A \to A$ vérifiant pour $x, y \in A$ et $\alpha, \beta \in R$:

- $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$.
- $(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$.
- $1_R x = x$.
- $\alpha(xy) = (\alpha x)y = x(\alpha y)$.

(Les trois premiers axiomes font de $(A, +, 0)$ un R-module, et si R est un corps, alors c'est un espace vectoriel.)

Les algèbres sur un anneau commutatif

Soit R un anneau commutatif (c'est l'ensemble des scalaires). Une R-algèbre A est un anneau avec une loi de composition externe $R \times A \to A$ vérifiant pour $x, y \in A$ et $\alpha, \beta \in R$:

- $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$.
- $(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$.
- $1_R x = x$.
- $\alpha(xy) = (\alpha x)y = x(\alpha y)$.

(Les trois premiers axiomes font de $(A, +, 0)$ un R-module, et si R est un corps, alors c'est un espace vectoriel.)

Exemples : • $\mathbb{R}$ est une $\mathbb{Q}$-algèbre, $\mathbb{C}$ est une $\mathbb{R}$-algèbre,

Les algèbres sur un anneau commutatif

Soit R un anneau commutatif (c'est l'ensemble des scalaires). Une R-algèbre A est un anneau avec une loi de composition externe $R \times A \to A$ vérifiant pour $x, y \in A$ et $\alpha, \beta \in R$:

- $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$.
- $(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$.
- $1_R x = x$.
- $\alpha(xy) = (\alpha x)y = x(\alpha y)$.

(Les trois premiers axiomes font de $(A, +, 0)$ un R-module, et si R est un corps, alors c'est un espace vectoriel.)

Exemples : • $\mathbb{R}$ est une $\mathbb{Q}$-algèbre, $\mathbb{C}$ est une $\mathbb{R}$-algèbre,
• L'ensemble des matrices carrées de taille $n \times n$ sur un anneau commutatif R est une R-algèbre,

Les algèbres sur un anneau commutatif

Soit R un anneau commutatif (c'est l'ensemble des scalaires). Une R-algèbre A est un anneau avec une loi de composition externe $R \times A \to A$ vérifiant pour $x, y \in A$ et $\alpha, \beta \in R$:

- $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$.
- $(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$.
- $1_R x = x$.
- $\alpha(xy) = (\alpha x)y = x(\alpha y)$.

(Les trois premiers axiomes font de $(A, +, 0)$ un R-module, et si R est un corps, alors c'est un espace vectoriel.)

Exemples : • $\mathbb{R}$ est une $\mathbb{Q}$-algèbre, $\mathbb{C}$ est une $\mathbb{R}$-algèbre,
• L'ensemble des matrices carrées de taille $n \times n$ sur un anneau commutatif R est une R-algèbre,
• Si V un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, alors l'ensemble des endomorphismes (linéaires) de V, $\mathrm{End}(V)$, est une $\mathbb{K}$-algèbre.

Les (homo)morphismes

Soient M, N deux monoïdes et $f\colon M \to N$.

Les (homo)morphismes

Soient M, N deux monoïdes et $f : M \to N$. On dit que f est un morphisme de monoïdes si $f(xy) = f(x)f(y)$ pour tous $x, y \in M$

Les (homo)morphismes

Soient M, N deux monoïdes et $f\colon M \to N$. On dit que f est un morphisme de monoïdes si $f(xy) = f(x)f(y)$ pour tous $x, y \in M$ et $f(1_M) = 1_N$.

Les (homo)morphismes

Soient M, N deux monoïdes et $f\colon M \to N$. On dit que f est un morphisme de monoïdes si $f(xy) = f(x)f(y)$ pour tous $x, y \in M$ et $f(1_M) = 1_N$.

Soient R, R' deux anneaux et $f\colon R \to R'$.

Les (homo)morphismes

Soient M, N deux monoïdes et $f \colon M \to N$. On dit que f est un morphisme de monoïdes si $f(xy) = f(x)f(y)$ pour tous $x, y \in M$ et $f(1_M) = 1_N$.

Soient R, R' deux anneaux et $f \colon R \to R'$. On dit que f est un morphisme d'anneaux si f est un morphisme de monoïdes pour les structures additives et multiplicatives

Les (homo)morphismes

Soient M, N deux monoïdes et $f\colon M \to N$. On dit que f est un morphisme de monoïdes si $f(xy) = f(x)f(y)$ pour tous $x, y \in M$ et $f(1_M) = 1_N$.

Soient R, R' deux anneaux et $f\colon R \to R'$. On dit que f est un morphisme d'anneaux si f est un morphisme de monoïdes pour les structures additives et multiplicatives (autrement dit, $f(x+y) = f(x) + f(y)$, $f(0) = 0$, $f(xy) = f(x)f(y)$, $f(1) = 1$).

Les (homo)morphismes

Soient M, N deux monoïdes et $f\colon M \to N$. On dit que f est un morphisme de monoïdes si $f(xy) = f(x)f(y)$ pour tous $x, y \in M$ et $f(1_M) = 1_N$.

Soient R, R' deux anneaux et $f\colon R \to R'$. On dit que f est un morphisme d'anneaux si f est un morphisme de monoïdes pour les structures additives et multiplicatives (autrement dit, $f(x+y) = f(x) + f(y)$, $f(0) = 0$, $f(xy) = f(x)f(y)$, $f(1) = 1$).

Soient R un anneau, A et A' deux algèbres, $f\colon A \to A'$.

Les (homo)morphismes

Soient M, N deux monoïdes et $f\colon M \to N$. On dit que f est un morphisme de monoïdes si $f(xy) = f(x)f(y)$ pour tous $x, y \in M$ et $f(1_M) = 1_N$.

Soient R, R' deux anneaux et $f\colon R \to R'$. On dit que f est un morphisme d'anneaux si f est un morphisme de monoïdes pour les structures additives et multiplicatives (autrement dit, $f(x+y) = f(x) + f(y)$, $f(0) = 0$, $f(xy) = f(x)f(y)$, $f(1) = 1$).

Soient R un anneau, A et A' deux algèbres, $f\colon A \to A'$. On dit que f est un morphisme d'algèbres si c'est un morphisme d'anneaux et si $f(\alpha x) = \alpha f(x)$ pour tout $x \in A$ et tout scalaire α.

Les congruences

Soit A une algèbre.

Les congruences

Soit A une algèbre. Une relation d'équivalence $\cong$ sur A est une congruence si quels que soient $x, y, x', y' \in A$ et pour tout scalaire α,

Les congruences

Soit A une algèbre. Une relation d'équivalence $\cong$ sur A est une congruence si quels que soient $x, y, x', y' \in A$ et pour tout scalaire α,

- $x \cong x'$ implique $\alpha x \cong \alpha x'$.

Les congruences

Soit A une algèbre. Une relation d'équivalence $\cong$ sur A est une congruence si quels que soient $x, y, x', y' \in A$ et pour tout scalaire α,

- $x \cong x'$ implique $\alpha x \cong \alpha x'$.
- $x \cong x'$ et $y \cong y'$ impliquent $x + y \cong x' + y'$

Les congruences

Soit A une algèbre. Une relation d'équivalence $\cong$ sur A est une congruence si quels que soient $x, y, x', y' \in A$ et pour tout scalaire α,

- $x \cong x'$ implique $\alpha x \cong \alpha x'$.
- $x \cong x'$ et $y \cong y'$ impliquent $x + y \cong x' + y'$ et $xy \cong x'y'$.

Les congruences

Soit A une algèbre. Une relation d'équivalence $\cong$ sur A est une congruence si quels que soient $x, y, x', y' \in A$ et pour tout scalaire α,

- $x \cong x'$ implique $\alpha x \cong \alpha x'$.
- $x \cong x'$ et $y \cong y'$ impliquent $x + y \cong x' + y'$ et $xy \cong x'y'$.

L'ensemble $A/\cong$ des classes déquivalence pour une congruence $\cong$ forme une R-algèbre.

Les congruences

Soit A une algèbre. Une relation d'équivalence $\cong$ sur A est une congruence si quels que soient $x, y, x', y' \in A$ et pour tout scalaire α,

- $x \cong x'$ implique $\alpha x \cong \alpha x'$.
- $x \cong x'$ et $y \cong y'$ impliquent $x + y \cong x' + y'$ et $xy \cong x'y'$.

L'ensemble $A/\cong$ des classes déquivalence pour une congruence $\cong$ forme une R-algèbre. Désignons par $\pi(x)$ la classe d'équivalence de $x \in A$ modulo $\cong$.

Les congruences

Soit A une algèbre. Une relation d'équivalence $\cong$ sur A est une congruence si quels que soient $x, y, x', y' \in A$ et pour tout scalaire α,

- $x \cong x'$ implique $\alpha x \cong \alpha x'$.
- $x \cong x'$ et $y \cong y'$ impliquent $x + y \cong x' + y'$ et $xy \cong x'y'$.

L'ensemble $A/\cong$ des classes déquivalence pour une congruence $\cong$ forme une R-algèbre. Désignons par $\pi(x)$ la classe d'équivalence de $x \in A$ modulo $\cong$. Les lois sont données par :

Les congruences

Soit A une algèbre. Une relation d'équivalence $\cong$ sur A est une congruence si quels que soient $x, y, x', y' \in A$ et pour tout scalaire α,

- $x \cong x'$ implique $\alpha x \cong \alpha x'$.

- $x \cong x'$ et $y \cong y'$ impliquent $x + y \cong x' + y'$ et $xy \cong x'y'$.

L'ensemble $A/\cong$ des classes déquivalence pour une congruence $\cong$ forme une R-algèbre. Désignons par $\pi(x)$ la classe d'équivalence de $x \in A$ modulo $\cong$. Les lois sont données par :

- $\alpha\pi(x) = \pi(\alpha x)$.

Les congruences

Soit A une algèbre. Une relation d'équivalence $\cong$ sur A est une congruence si quels que soient $x, y, x', y' \in A$ et pour tout scalaire α,

- $x \cong x'$ implique $\alpha x \cong \alpha x'$.
- $x \cong x'$ et $y \cong y'$ impliquent $x + y \cong x' + y'$ et $xy \cong x'y'$.

L'ensemble $A/\cong$ des classes déquivalence pour une congruence $\cong$ forme une R-algèbre. Désignons par $\pi(x)$ la classe d'équivalence de $x \in A$ modulo $\cong$. Les lois sont données par :

- $\alpha\pi(x) = \pi(\alpha x)$.
- $\pi(x) + \pi(y) = \pi(x + y)$.

Les congruences

Soit A une algèbre. Une relation d'équivalence $\cong$ sur A est une congruence si quels que soient $x, y, x', y' \in A$ et pour tout scalaire α,

- $x \cong x'$ implique $\alpha x \cong \alpha x'$.
- $x \cong x'$ et $y \cong y'$ impliquent $x + y \cong x' + y'$ et $xy \cong x'y'$.

L'ensemble $A/\cong$ des classes déquivalence pour une congruence $\cong$ forme une R-algèbre. Désignons par $\pi(x)$ la classe d'équivalence de $x \in A$ modulo $\cong$. Les lois sont données par :

- $\alpha\pi(x) = \pi(\alpha x)$.
- $\pi(x) + \pi(y) = \pi(x + y)$.
- $\pi(x)\pi(y) = \pi(xy)$.

Les congruences

Soit A une algèbre. Une relation d'équivalence $\cong$ sur A est une congruence si quels que soient $x, y, x', y' \in A$ et pour tout scalaire α,

- $x \cong x'$ implique $\alpha x \cong \alpha x'$.
- $x \cong x'$ et $y \cong y'$ impliquent $x + y \cong x' + y'$ et $xy \cong x'y'$.

L'ensemble $A/\cong$ des classes déquivalence pour une congruence $\cong$ forme une R-algèbre. Désignons par $\pi(x)$ la classe d'équivalence de $x \in A$ modulo $\cong$. Les lois sont données par :

- $\alpha\pi(x) = \pi(\alpha x)$.
- $\pi(x) + \pi(y) = \pi(x + y)$.
- $\pi(x)\pi(y) = \pi(xy)$.

Il est clair que la surjection canonique $\pi\colon A \to A/\cong$ est un morphisme de R-algèbres.

Les idéaux

Soient R un anneau commutatif et A une R-algèbre.

Les idéaux

Soient R un anneau commutatif et A une R-algèbre. Soit $I \subseteq A$.

Les idéaux

Soient R un anneau commutatif et A une R-algèbre. Soit $I \subseteq A$. On dit que I est un idéal (bilatère) de A si :

Les idéaux

Soient R un anneau commutatif et A une R-algèbre. Soit $I \subseteq A$. On dit que I est un idéal (bilatère) de A si :

- I est un sous-module de $(A, +, 0)$,

Les idéaux

Soient R un anneau commutatif et A une R-algèbre. Soit $I \subseteq A$. On dit que I est un idéal (bilatère) de A si :

- I est un sous-module de $(A, +, 0)$,

- Quels que soient $a \in A$ et $x \in I$, $ax \in I$ et $xa \in I$.

Les idéaux

Soient R un anneau commutatif et A une R-algèbre. Soit $I \subseteq A$. On dit que I est un idéal (bilatère) de A si :

- I est un sous-module de $(A, +, 0)$,
- Quels que soient $a \in A$ et $x \in I$, $ax \in I$ et $xa \in I$.

Exemple : si $f : A \to A'$ est un morphisme d'algèbres, alors son noyau $\ker f = f^{-1}(\{ 0 \})$ est un idéal de A.

Les idéaux

Soient R un anneau commutatif et A une R-algèbre. Soit $I \subseteq A$. On dit que I est un idéal (bilatère) de A si :

- I est un sous-module de $(A, +, 0)$,
- Quels que soient $a \in A$ et $x \in I$, $ax \in I$ et $xa \in I$.

Exemple : si $f : A \to A'$ est un morphisme d'algèbres, alors son noyau $\ker f = f^{-1}(\{ 0 \})$ est un idéal de A.

Étant donné $S \subseteq A$, on définit l'idéal engendré par S, noté $\langle S \rangle$, comme le plus petit idéal contenant S

Les idéaux

Soient R un anneau commutatif et A une R-algèbre. Soit $I \subseteq A$. On dit que I est un idéal (bilatère) de A si :

- I est un sous-module de $(A, +, 0)$,

- Quels que soient $a \in A$ et $x \in I$, $ax \in I$ et $xa \in I$.

Exemple : si $f\colon A \to A'$ est un morphisme d'algèbres, alors son noyau $\ker f = f^{-1}(\{ 0 \})$ est un idéal de A.

Étant donné $S \subseteq A$, on définit l'idéal engendré par S, noté $\langle S \rangle$, comme le plus petit idéal contenant S (il s'agit de l'intersection de tous les idéaux contenant S).

Les idéaux

Soient R un anneau commutatif et A une R-algèbre. Soit $I \subseteq A$. On dit que I est un idéal (bilatère) de A si :

- I est un sous-module de $(A, +, 0)$,

- Quels que soient $a \in A$ et $x \in I$, $ax \in I$ et $xa \in I$.

Exemple : si $f : A \to A'$ est un morphisme d'algèbres, alors son noyau $\ker f = f^{-1}(\{ 0 \})$ est un idéal de A.

Étant donné $S \subseteq A$, on définit l'idéal engendré par S, noté $\langle S \rangle$, comme le plus petit idéal contenant S (il s'agit de l'intersection de tous les idéaux contenant S). Les éléments de $\langle S \rangle$ admettent une écriture sous la forme :
$\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i s_i b_i$, $a_i, b_i \in A$, $s_i \in S$.

Idéaux et congruences

Un idéal I définit une congruence $\cong_I$ sur A

Idéaux et congruences

Un idéal I définit une congruence $\cong_I$ sur A : $x \cong_I y$ si, et seulement, si $x - y \in I$.

Idéaux et congruences

Un idéal I définit une congruence $\cong_I$ sur A : $x \cong_I y$ si, et seulement, si $x - y \in I$.

Si I est un idéal (bilatère) de A, alors on construit A/I l'algèbre quotient de A par I comme $A/\cong_I$.

L'algèbre des polynômes non commutatifs

Soient R un anneau commutatif avec unité, et $X = \{ x_1, \cdots, x_n \}$ un ensemble à n éléments.

L'algèbre des polynômes non commutatifs

Soient R un anneau commutatif avec unité, et $X = \{ x_1, \cdots, x_n \}$ un ensemble à n éléments.

L'algèbre des polynômes non commutatifs à coefficients dans R est notée $R\langle X\rangle = R\langle x_1, \cdots, x_n\rangle$.

L'algèbre des polynômes non commutatifs

Soient R un anneau commutatif avec unité, et $X = \{ x_1, \cdots, x_n \}$ un ensemble à n éléments.

L'algèbre des polynômes non commutatifs à coefficients dans R est notée $R\langle X \rangle = R\langle x_1, \cdots, x_n \rangle$.

Ses éléments sont de la forme

$$\sum_{w \in X^*} \alpha_w w$$

où tous les coefficients $\alpha_w \in R$ sont nuls sauf un nombre fini.

L'ensemble $R\langle x_1, \cdots, x_n\rangle$ dispose des lois d'algèbres sur R suivantes :

L'ensemble $R\langle x_1, \cdots, x_n\rangle$ dispose des lois d'algèbres sur R suivantes :

1. $$\sum_{w \in X^*} \alpha_w w + \sum_{w \in X^*} \beta_w w = \sum_{w \in X^*} (\alpha_w + \beta_w) w.$$

L'ensemble $R\langle x_1, \cdots, x_n\rangle$ dispose des lois d'algèbres sur R suivantes :

1. $$\sum_{w \in X^*} \alpha_w w + \sum_{w \in X^*} \beta_w w = \sum_{w \in X^*} (\alpha_w + \beta_w) w.$$

2. $\lambda \left(\sum_{w \in X^*} \alpha_w w\right) = \sum_{w \in X^*} (\lambda \alpha_w) w$ pour tout $\lambda \in R$.

L'ensemble $R\langle x_1, \cdots, x_n\rangle$ dispose des lois d'algèbres sur R suivantes :

1. $$\sum_{w\in X^*} \alpha_w w + \sum_{w\in X^*} \beta_w w = \sum_{w\in X^*} (\alpha_w + \beta_w) w.$$
2. $\lambda \left(\sum_{w\in X^*} \alpha_w w\right) = \sum_{w\in X^*} (\lambda \alpha_w) w$ pour tout $\lambda \in R$.
3. $$\left(\sum_{w\in X^*} \alpha_w w\right)\left(\sum_{w\in X^*} \beta_w w\right) = \sum_{w\in X^*} \left(\sum_{w_1 w_2 = w} \alpha_{w_1}\beta_{w_2}\right) w.$$

L'ensemble $R\langle x_1, \cdots, x_n\rangle$ dispose des lois d'algèbres sur R suivantes :

1. $$\sum_{w\in X^*} \alpha_w w + \sum_{w\in X^*} \beta_w w = \sum_{w\in X^*} (\alpha_w + \beta_w) w.$$
2. $\lambda \left(\sum_{w\in X^*} \alpha_w w\right) = \sum_{w\in X^*} (\lambda\alpha_w) w$ pour tout $\lambda \in R$.
3. $$\left(\sum_{w\in X^*} \alpha_w w\right)\left(\sum_{w\in X^*} \beta_w w\right) = \sum_{w\in X^*} \left(\sum_{w_1 w_2 = w} \alpha_{w_1}\beta_{w_2}\right) w.$$

Remarque : Il est également possible de considérer les polynômes non commutatifs sur un ensemble infini X.

Algèbre libre

L'algèbre $R\langle X\rangle$ est libre

Algèbre libre

L'algèbre $R\langle X\rangle$ est libre : soient A une R-algèbre, et $f : X \to A$ une application (ensembliste),

Algèbre libre

L'algèbre $R\langle X\rangle$ est libre : soient A une R-algèbre, et $f\colon X \to A$ une application (ensembliste), alors il existe un unique morphisme d'algèbres $\widehat{f}\colon R\langle X\rangle \to A$ tel que $\widehat{f}(x) = f(x)$ pour tout $x \in X$.

Algèbre libre

L'algèbre $R\langle X\rangle$ est libre : soient A une R-algèbre, et $f : X \to A$ une application (ensembliste), alors il existe un unique morphisme d'algèbres $\widehat{f} : R\langle X\rangle \to A$ tel que $\widehat{f}(x) = f(x)$ pour tout $x \in X$.

Le morphisme $\widehat{f}$ est défini par

$$\widehat{f}\left(\sum_{w \in X^*} \alpha_w w\right) = \sum_{w \in X^*} \alpha_w \overline{f}(w)$$

Algèbre libre

L'algèbre $R\langle X\rangle$ est libre : soient A une R-algèbre, et $f\colon X \to A$ une application (ensembliste), alors il existe un unique morphisme d'algèbres $\widehat{f}\colon R\langle X\rangle \to A$ tel que $\widehat{f}(x) = f(x)$ pour tout $x \in X$.

Le morphisme $\widehat{f}$ est défini par

$$\widehat{f}\left(\sum_{w\in X^*} \alpha_w w\right) = \sum_{w\in X^*} \alpha_w \overline{f}(w)$$

où l'application $\overline{f}\colon X^* \to A$ est donnée par $\overline{f}(x_1 \cdots x_n) = f(x_1)\cdots f(x_n)$ et $\overline{f}(\epsilon) = 1$.

Générateurs et relations

L'algèbre $R\langle X\rangle$ est utilisée pour construire des algèbres présentées par générateurs et relations.

Générateurs et relations

L'algèbre $R\langle X\rangle$ est utilisée pour construire des algèbres présentées par générateurs et relations. Une relation est un couple (P, Q) avec $P, Q \in R\langle X\rangle$.

Générateurs et relations

L'algèbre $R\langle X\rangle$ est utilisée pour construire des algèbres présentées par générateurs et relations. Une relation est un couple (P, Q) avec $P, Q \in R\langle X\rangle$. Les éléments de X sont appelés les générateurs.

Générateurs et relations

L'algèbre $R\langle X\rangle$ est utilisée pour construire des algèbres présentées par générateurs et relations. Une relation est un couple (P, Q) avec $P, Q \in R\langle X\rangle$. Les éléments de X sont appelés les générateurs. Soit $\mathcal{R}$ un ensemble de relations.

Générateurs et relations

L'algèbre $R\langle X\rangle$ est utilisée pour construire des algèbres présentées par générateurs et relations. Une relation est un couple (P, Q) avec $P, Q \in R\langle X\rangle$. Les éléments de X sont appelés les générateurs. Soit $\mathcal{R}$ un ensemble de relations. L'algèbre $R\langle X \mid \mathcal{R}\rangle$ est le quotient de l'algèbre $R\langle X\rangle$ par l'idéal bilatère engendré par l'ensemble des $P - Q$ pour (P, Q) parcourant $\mathcal{R}$.

Générateurs et relations

L'algèbre $R\langle X\rangle$ est utilisée pour construire des algèbres présentées par générateurs et relations. Une relation est un couple (P, Q) avec $P, Q \in R\langle X\rangle$. Les éléments de X sont appelés les générateurs. Soit $\mathcal{R}$ un ensemble de relations. L'algèbre $R\langle X \mid \mathcal{R}\rangle$ est le quotient de l'algèbre $R\langle X\rangle$ par l'idéal bilatère engendré par l'ensemble des $P - Q$ pour (P, Q) parcourant $\mathcal{R}$. Plutôt que de les noter sous la forme de couples, les relations sont données sous la forme d'équations $P = Q$.

Générateurs et relations

L'algèbre $R\langle X\rangle$ est utilisée pour construire des algèbres présentées par générateurs et relations. Une relation est un couple (P, Q) avec $P, Q \in R\langle X\rangle$. Les éléments de X sont appelés les générateurs. Soit $\mathcal{R}$ un ensemble de relations. L'algèbre $R\langle X \mid \mathcal{R}\rangle$ est le quotient de l'algèbre $R\langle X\rangle$ par l'idéal bilatère engendré par l'ensemble des $P - Q$ pour (P, Q) parcourant $\mathcal{R}$. Plutôt que de les noter sous la forme de couples, les relations sont données sous la forme d'équations $P = Q$.

Dans $R\langle X\rangle/\mathcal{R}$, on a $\pi(P - Q) = \pi(P) - \pi(Q) = \pi(0)$ quels que soient $(P, Q) \in \mathcal{R}$.

Générateurs et relations

L'algèbre $R\langle X\rangle$ est utilisée pour construire des algèbres présentées par générateurs et relations. Une relation est un couple (P, Q) avec $P, Q \in R\langle X\rangle$. Les éléments de X sont appelés les générateurs. Soit $\mathcal{R}$ un ensemble de relations. L'algèbre $R\langle X \mid \mathcal{R}\rangle$ est le quotient de l'algèbre $R\langle X\rangle$ par l'idéal bilatère engendré par l'ensemble des $P - Q$ pour (P, Q) parcourant $\mathcal{R}$. Plutôt que de les noter sous la forme de couples, les relations sont données sous la forme d'équations $P = Q$.

Dans $R\langle X\rangle/\mathcal{R}$, on a $\pi(P - Q) = \pi(P) - \pi(Q) = \pi(0)$ quels que soient $(P, Q) \in \mathcal{R}$.

Par exemple, $R\langle x, y \mid [x, y] = 0\rangle$, où $[x, y] = xy - yx$ est le commutateur (de Lie), est l'algèbre $R[x, y]$ des polynômes commutatifs.

Générateurs et relations

L'algèbre $R\langle X\rangle$ est utilisée pour construire des algèbres présentées par générateurs et relations. Une relation est un couple (P, Q) avec $P, Q \in R\langle X\rangle$. Les éléments de X sont appelés les générateurs. Soit $\mathcal{R}$ un ensemble de relations. L'algèbre $R\langle X \mid \mathcal{R}\rangle$ est le quotient de l'algèbre $R\langle X\rangle$ par l'idéal bilatère engendré par l'ensemble des $P - Q$ pour (P, Q) parcourant $\mathcal{R}$. Plutôt que de les noter sous la forme de couples, les relations sont données sous la forme d'équations $P = Q$.

Dans $R\langle X\rangle/\mathcal{R}$, on a $\pi(P - Q) = \pi(P) - \pi(Q) = \pi(0)$ quels que soient $(P, Q) \in \mathcal{R}$.

Par exemple, $R\langle x, y \mid [x, y] = 0\rangle$, où $[x, y] = xy - yx$ est le commutateur (de Lie), est l'algèbre $R[x, y]$ des polynômes commutatifs.

$R\langle x, y \mid xy = 1 = yx\rangle$ est l'anneau des polynômes de Laurent $R[x, x^{-1}]$.

Système de réécriture

Soit $\mathcal{R}$ un ensemble de relations sur $R\langle X\rangle$.

Système de réécriture

Soit $\mathcal{R}$ un ensemble de relations sur $R\langle X\rangle$. On peut lui associer un système de réécriture :

Système de réécriture

Soit $\mathcal{R}$ un ensemble de relations sur $R\langle X\rangle$. On peut lui associer un système de réécriture :

- On définit les règles de réécriture en un pas par

(1) $P_1 P P_2 \Rightarrow_{\mathcal{R}} P_1 Q P_2$ et

Système de réécriture

Soit $\mathcal{R}$ un ensemble de relations sur $R\langle X\rangle$. On peut lui associer un système de réécriture :

- On définit les règles de réécriture en un pas par

(1) $P_1PP_2 \Rightarrow_{\mathcal{R}} P_1QP_2$ et

(2) $P_1 + P \Rightarrow_{\mathcal{R}} P_1 + Q$
pour chaque $(P, Q) \in \mathcal{R}$ et $P_1, P_2 \in R\langle X\rangle$.

Système de réécriture

Soit $\mathcal{R}$ un ensemble de relations sur $R\langle X\rangle$. On peut lui associer un système de réécriture :

- On définit les règles de réécriture en un pas par

(1) $P_1PP_2 \Rightarrow_{\mathcal{R}} P_1QP_2$ et

(2) $P_1 + P \Rightarrow_{\mathcal{R}} P_1 + Q$
pour chaque $(P, Q) \in \mathcal{R}$ et $P_1, P_2 \in R\langle X\rangle$.

- Puis la règle de réduction générale : $P_0 \Rightarrow^*_{\mathcal{R}} P_n$ s'il existe une suite $P_1, \cdots, P_{n-1}$ telle que $P_i = P_{i+1}$ ou $P_i \Rightarrow_{\mathcal{R}} P_{i+1}$ pour tout $i = 0, \cdots, n-1$.

Système de réécriture

Soit $\mathcal{R}$ un ensemble de relations sur $R\langle X\rangle$. On peut lui associer un système de réécriture :

- On définit les règles de réécriture en un pas par

(1) $P_1 P P_2 \Rightarrow_{\mathcal{R}} P_1 Q P_2$ et

(2) $P_1 + P \Rightarrow_{\mathcal{R}} P_1 + Q$
pour chaque $(P, Q) \in \mathcal{R}$ et $P_1, P_2 \in R\langle X\rangle$.

- Puis la règle de réduction générale : $P_0 \Rightarrow_{\mathcal{R}}^* P_n$ s'il existe une suite $P_1, \cdots, P_{n-1}$ telle que $P_i = P_{i+1}$ ou $P_i \Rightarrow_{\mathcal{R}} P_{i+1}$ pour tout $i = 0, \cdots, n-1$.

Autrement dit, $\Rightarrow_{\mathcal{R}}^*$ est la clôture réflexive et transitive de $\Rightarrow_{\mathcal{R}}$.

Formes normales

Lorsque $\Rightarrow^*$ dispose de certaines propriétés intéressantes (confluence et terminaison), chaque élément $C = \pi(P)$ de $R\langle X \mid \mathcal{R} \rangle$ possède une unique forme normale $\mathscr{Pol}(C)$

Formes normales

Lorsque $\Rightarrow^*$ dispose de certaines propriétés intéressantes (confluence et terminaison), chaque élément $C = \pi(P)$ de $R\langle X \mid \mathcal{R}\rangle$ possède une unique forme normale $\mathscr{Pol}(C)$: il s'agit d'un élément $Q \in R\langle X\rangle$ tel que

- $Q \in C$ (*i.e.*, $Q \cong P$) et

Formes normales

Lorsque $\Rightarrow^*$ dispose de certaines propriétés intéressantes (confluence et terminaison), chaque élément $C = \pi(P)$ de $R\langle X \mid \mathcal{R}\rangle$ possède une unique forme normale $\mathscr{Pol}(C)$: il s'agit d'un élément $Q \in R\langle X\rangle$ tel que

- $Q \in C$ (*i.e.*, $Q \cong P$) et

- Il n'existe aucun $Q' \in R\langle X\rangle$ tel que $Q \Rightarrow_{\mathcal{R}} Q'$.

Formes normales

Lorsque $\Rightarrow^*$ dispose de certaines propriétés intéressantes (confluence et terminaison), chaque élément $C = \pi(P)$ de $R\langle X \mid \mathcal{R}\rangle$ possède une unique forme normale $\mathscr{Pol}(C)$: il s'agit d'un élément $Q \in R\langle X\rangle$ tel que

- $Q \in C$ (*i.e.*, $Q \cong P$) et

- Il n'existe aucun $Q' \in R\langle X\rangle$ tel que $Q \Rightarrow_{\mathcal{R}} Q'$.

Par exemple, soient $\mathbb{K}$ un corps, $\alpha\colon \mathbb{K}[x] \to \mathbb{K}[x]$ un automorphisme d'algèbre, et $\delta\colon \mathbb{K}[x] \to \mathbb{K}[x]$ une α-dérivation, *i.e.*, une application $\mathbb{K}[x]$-linéaire telle que $\delta(PQ) = \alpha(P)\delta(Q) + \delta(P)Q$.

Formes normales

Lorsque $\Rightarrow^*$ dispose de certaines propriétés intéressantes (confluence et terminaison), chaque élément $C = \pi(P)$ de $R\langle X \mid \mathcal{R}\rangle$ possède une unique forme normale $\mathcal{Pol}(C)$: il s'agit d'un élément $Q \in R\langle X\rangle$ tel que

- $Q \in C$ (*i.e.*, $Q \cong P$) et

- Il n'existe aucun $Q' \in R\langle X\rangle$ tel que $Q \Rightarrow_{\mathcal{R}} Q'$.

Par exemple, soient $\mathbb{K}$ un corps, $\alpha\colon \mathbb{K}[x] \to \mathbb{K}[x]$ un automorphisme d'algèbre, et $\delta\colon \mathbb{K}[x] \to \mathbb{K}[x]$ une α-dérivation, *i.e.*, une application $\mathbb{K}[x]$-linéaire telle que $\delta(PQ) = \alpha(P)\delta(Q) + \delta(P)Q$. Dans $\mathbb{K}\langle x, y \mid yx = \alpha(x)y + \delta(x)\rangle$, tout élément admet une unique forme normale.

Formes normales

Lorsque $\Rightarrow^*$ dispose de certaines propriétés intéressantes (confluence et terminaison), chaque élément $C = \pi(P)$ de $R\langle X \mid \mathcal{R}\rangle$ possède une unique forme normale $\mathcal{P}o\ell(C)$: il s'agit d'un élément $Q \in R\langle X\rangle$ tel que

- $Q \in C$ (*i.e.*, $Q \cong P$) et

- Il n'existe aucun $Q' \in R\langle X\rangle$ tel que $Q \Rightarrow_{\mathcal{R}} Q'$.

Par exemple, soient $\mathbb{K}$ un corps, $\alpha \colon \mathbb{K}[x] \to \mathbb{K}[x]$ un automorphisme d'algèbre, et $\delta \colon \mathbb{K}[x] \to \mathbb{K}[x]$ une α-dérivation, *i.e.*, une application $\mathbb{K}[x]$-linéaire telle que $\delta(PQ) = \alpha(P)\delta(Q) + \delta(P)Q$. Dans $\mathbb{K}\langle x, y \mid yx = \alpha(x)y + \delta(x)\rangle$, tout élément admet une unique forme normale. Les formes normales sont exactement les polynômes non commutatifs

$$\sum_{i,j\geq 0} \alpha_{i,j} x^i y^j$$

où tous les coefficients $\alpha_{i,j}$ sont nuls excepté un nombre fini d'entre eux.

L'algèbre des séries non commutatives

Ses éléments sont de la forme

$$\sum_{w \in X^*} \alpha_w w$$

avec la possibilité que tous les coefficients α_w soient non nuls.

L'algèbre des séries non commutatives

Ses éléments sont de la forme

$$\sum_{w \in X^*} \alpha_w w$$

avec la possibilité que tous les coefficients α_w soient non nuls.

On note $R\langle\langle X \rangle\rangle$ cette algèbre,

L'algèbre des séries non commutatives

Ses éléments sont de la forme

$$\sum_{w \in X^*} \alpha_w w$$

avec la possibilité que tous les coefficients α_w soient non nuls.

On note $R\langle\langle X\rangle\rangle$ cette algèbre, et il est clair que $R\langle X\rangle \subseteq R\langle\langle X\rangle\rangle$.

Crochet (de dualité)

Soient $S \in R\langle\langle X \rangle\rangle$ et $w \in X^*$.

Crochet (de dualité)

Soient $S \in R\langle\langle X\rangle\rangle$ et $w \in X^*$. On note

$$\langle S \mid w\rangle$$

le coefficient du mot w dans la série S

Crochet (de dualité)

Soient $S \in R\langle\langle X \rangle\rangle$ et $w \in X^*$. On note

$$\langle S \mid w \rangle$$

le coefficient du mot w dans la série S de sorte que

$$S = \sum_{w \in X^*} \langle S \mid w \rangle w \ .$$

Le support

Définition: Support d'une série

Le support $\mathrm{Supp}(S)$ d'une série $S \in R\langle\langle X\rangle\rangle$ est l'ensemble (éventuellement vide) des mots $w \in X^*$ tels que $\langle S \mid w\rangle \neq 0$.

Le support

Définition: Support d'une série

Le support $\mathrm{Supp}(S)$ d'une série $S \in R\langle\langle X \rangle\rangle$ est l'ensemble (éventuellement vide) des mots $w \in X^*$ tels que $\langle S \mid w \rangle \neq 0$.

Il est clair que $R\langle X \rangle$ est exactement l'ensemble des séries formelles dont le support est un ensemble fini.

Table des matières

L'algèbre de Weyl : Définition

Soit $\mathbb{K}$ un corps.

L'algèbre de Weyl $A(\mathbb{K})$ (d'indice 1) est définie comme l'algèbre quotient de l'algèbre des polynômes $\mathbb{K}\langle x, y\rangle$ à variables non commutatives par l'idéal bilatère engendré par la relation $[x, y] = 1$.

L'algèbre de Weyl : Définition

Soit $\mathbb{K}$ un corps.

L'algèbre de Weyl $A(\mathbb{K})$ (d'indice 1) est définie comme l'algèbre quotient de l'algèbre des polynômes $\mathbb{K}\langle x, y\rangle$ à variables non commutatives par l'idéal bilatère engendré par la relation $[x, y] = 1$.

Soient $a = \pi(x)$ et $a^\dagger = \pi(y)$ où $\pi\colon \mathbb{K}\langle x, y\rangle \twoheadrightarrow A(\mathbb{K})$ est l'épimorphisme canonique.

Algèbre de Weyl : Base de l'ordre normal

L'ensemble $\{\, (a^\dagger)^i a^j \,\}_{i,j\in\mathbb{N}}$ est une base de $A(\mathbb{K})$ en tant que $\mathbb{K}$-espace vectoriel

Algèbre de Weyl : Base de l'ordre normal

L'ensemble $\{\,(a^\dagger)^i a^j\,\}_{i,j\in\mathbb{N}}$ est une base de $A(\mathbb{K})$ en tant que $\mathbb{K}$-espace vectoriel : ce sont les formes normales pour le système de réécriture associé à $xy \Rightarrow yx + 1$.

Algèbre de Weyl : Base de l'ordre normal

L'ensemble $\{\, (a^\dagger)^i a^j \,\}_{i,j\in\mathbb{N}}$ est une base de $A(\mathbb{K})$ en tant que $\mathbb{K}$-espace vectoriel : ce sont les formes normales pour le système de réécriture associé à $xy \Rightarrow yx + 1$.

Cela signifie que pour tout $\Omega \in A(\mathbb{K})$ il existe un unique polynôme non commutatif, disons

$$\mathcal{P}ol\,(\Omega) \in \mathbb{K}\langle x, y\rangle$$

Algèbre de Weyl : Base de l'ordre normal

L'ensemble $\{ (a^\dagger)^i a^j \}_{i,j\in\mathbb{N}}$ est une base de $A(\mathbb{K})$ en tant que $\mathbb{K}$-espace vectoriel : ce sont les formes normales pour le système de réécriture associé à $xy \Rightarrow yx + 1$.

Cela signifie que pour tout $\Omega \in A(\mathbb{K})$ il existe un unique polynôme non commutatif, disons

$$\mathcal{Pol}(\Omega) \in \mathbb{K}\langle x, y\rangle$$

avec $\mathrm{Supp}(\mathcal{Pol}(\Omega)) \subseteq \{ y^i x^j : i, j \in \mathbb{N} \}$

Algèbre de Weyl : Base de l'ordre normal

L'ensemble $\{ (a^\dagger)^i a^j \}_{i,j\in\mathbb{N}}$ est une base de $A(\mathbb{K})$ en tant que $\mathbb{K}$-espace vectoriel : ce sont les formes normales pour le système de réécriture associé à $xy \Rightarrow yx + 1$.

Cela signifie que pour tout $\Omega \in A(\mathbb{K})$ il existe un unique polynôme non commutatif, disons

$$\mathcal{Pol}(\Omega) \in \mathbb{K}\langle x, y\rangle$$

avec $\mathrm{Supp}(\mathcal{Pol}(\Omega)) \subseteq \{ y^i x^j : i, j \in \mathbb{N} \}$ et tel que $\pi(\mathcal{Pol}(\Omega)) = \Omega$

Algèbre de Weyl : Base de l'ordre normal

L'ensemble $\{ (a^\dagger)^i a^j \}_{i,j\in\mathbb{N}}$ est une base de $A(\mathbb{K})$ en tant que $\mathbb{K}$-espace vectoriel : ce sont les formes normales pour le système de réécriture associé à $xy \Rightarrow yx + 1$.

Cela signifie que pour tout $\Omega \in A(\mathbb{K})$ il existe un unique polynôme non commutatif, disons

$$\mathcal{P}ol(\Omega) \in \mathbb{K}\langle x, y\rangle$$

avec $\mathrm{Supp}(\mathcal{P}ol(\Omega)) \subseteq \{ y^i x^j : i, j \in \mathbb{N} \}$ et tel que $\pi(\mathcal{P}ol(\Omega)) = \Omega$ (en d'autres termes, $\mathcal{P}ol : A(\mathbb{K}) \hookrightarrow \mathbb{K}\langle x, y\rangle$ est une section de π).

L'algèbre de Weyl : Ordre normal - un exemple

Soit $P = y^2xy + x^3yx \in \mathbb{Q}\langle x, y\rangle$.

L'algèbre de Weyl : Ordre normal - un exemple

Soit $P = y^2xy + x^3yx \in \mathbb{Q}\langle x, y\rangle$. Calculons la forme normale de $\pi(P) = (a^\dagger)^2 aa^\dagger + a^3 a^\dagger a \in A(\mathbb{Q})$.

L'algèbre de Weyl : Ordre normal - un exemple

Soit $P = y^2xy + x^3yx \in \mathbb{Q}\langle x, y\rangle$. Calculons la forme normale de $\pi(P) = (a^\dagger)^2 a a^\dagger + a^3 a^\dagger a \in A(\mathbb{Q})$.

Nous avons,

$$y^2xy + x^3yx \;\;\Rightarrow\;\; y^2(yx+1) + x^2(yx+1)x$$

L'algèbre de Weyl : Ordre normal - un exemple

Soit $P = y^2xy + x^3yx \in \mathbb{Q}\langle x, y\rangle$. Calculons la forme normale de $\pi(P) = (a^\dagger)^2 aa^\dagger + a^3a^\dagger a \in A(\mathbb{Q})$.

Nous avons,

$$\begin{aligned} y^2xy + x^3yx &\Rightarrow y^2(yx+1) + x^2(yx+1)x \\ &\Rightarrow y^2 + y^3x + x^3 + x(yx+1)x^2 \end{aligned}$$

L'algèbre de Weyl : Ordre normal - un exemple

Soit $P = y^2xy + x^3yx \in \mathbb{Q}\langle x, y\rangle$. Calculons la forme normale de $\pi(P) = (a^\dagger)^2aa^\dagger + a^3a^\dagger a \in A(\mathbb{Q})$.

Nous avons,

$$\begin{aligned}
y^2xy + x^3yx &\Rightarrow y^2(yx+1) + x^2(yx+1)x \\
&\Rightarrow y^2 + y^3x + x^3 + x(yx+1)x^2 \\
&\Rightarrow y^2 + y^3x + 2x^3 + (yx+1)x^3
\end{aligned}$$

L'algèbre de Weyl : Ordre normal - un exemple

Soit $P = y^2xy + x^3yx \in \mathbb{Q}\langle x, y\rangle$. Calculons la forme normale de $\pi(P) = (a^\dagger)^2aa^\dagger + a^3a^\dagger a \in A(\mathbb{Q})$.

Nous avons,

$$\begin{aligned} y^2xy + x^3yx &\Rightarrow y^2(yx+1) + x^2(yx+1)x \\ &\Rightarrow y^2 + y^3x + x^3 + x(yx+1)x^2 \\ &\Rightarrow y^2 + y^3x + 2x^3 + (yx+1)x^3 \end{aligned}$$

Donc

$$\mathcal{Pol}((a^\dagger)^2aa^\dagger + a^3a^\dagger a) = y^2 + y^3x + 3x^3 + yx^4 \ .$$

L'algèbre de Weyl comme algèbre d'opérateurs différentiels

Supposons maintenant que $\mathbb{K}$ est un corps de caractéristique zéro (*i.e.*, $\mathbb{Q}$ est le sous-corps premier de $\mathbb{K}$).

L'algèbre de Weyl comme algèbre d'opérateurs différentiels

Supposons maintenant que $\mathbb{K}$ est un corps de caractéristique zéro (*i.e.*, $\mathbb{Q}$ est le sous-corps premier de $\mathbb{K}$).

On définit une représentation linéaire ρ de $A(\mathbb{K})$ sur $\mathbb{K}[z]$

L'algèbre de Weyl comme algèbre d'opérateurs différentiels

Supposons maintenant que $\mathbb{K}$ est un corps de caractéristique zéro (*i.e.*, $\mathbb{Q}$ est le sous-corps premier de $\mathbb{K}$).

On définit une représentation linéaire ρ de $A(\mathbb{K})$ sur $\mathbb{K}[z]$, c'est-à-dire un morphisme d'algèbres de $A(\mathbb{K})$ dans $\mathrm{End}(\mathbb{K}[z])$, comme suit :

L'algèbre de Weyl comme algèbre d'opérateurs différentiels

Supposons maintenant que $\mathbb{K}$ est un corps de caractéristique zéro (*i.e.*, $\mathbb{Q}$ est le sous-corps premier de $\mathbb{K}$).

On définit une représentation linéaire ρ de $A(\mathbb{K})$ sur $\mathbb{K}[z]$, c'est-à-dire un morphisme d'algèbres de $A(\mathbb{K})$ dans $\mathrm{End}(\mathbb{K}[z])$, comme suit :

- On définit l'action des lettres x, y sur $\mathbb{K}[z]$:

L'algèbre de Weyl comme algèbre d'opérateurs différentiels

Supposons maintenant que $\mathbb{K}$ est un corps de caractéristique zéro (*i.e.*, $\mathbb{Q}$ est le sous-corps premier de $\mathbb{K}$).

On définit une représentation linéaire ρ de $A(\mathbb{K})$ sur $\mathbb{K}[z]$, c'est-à-dire un morphisme d'algèbres de $A(\mathbb{K})$ dans $\mathrm{End}(\mathbb{K}[z])$, comme suit :

- On définit l'action des lettres x, y sur $\mathbb{K}[z]$:
  $\Rightarrow$ $\rho(x)(p) = \frac{d}{dz}p$,

L'algèbre de Weyl comme algèbre d'opérateurs différentiels

Supposons maintenant que $\mathbb{K}$ est un corps de caractéristique zéro (*i.e.*, $\mathbb{Q}$ est le sous-corps premier de $\mathbb{K}$).

On définit une représentation linéaire ρ de $A(\mathbb{K})$ sur $\mathbb{K}[z]$, c'est-à-dire un morphisme d'algèbres de $A(\mathbb{K})$ dans $\mathrm{End}(\mathbb{K}[z])$, comme suit :

- On définit l'action des lettres x, y sur $\mathbb{K}[z]$:
  $\Rightarrow$ $\rho(x)(p) = \frac{d}{dz}p$,
  $\Rightarrow$ $\rho(y)(p) = zp$

L'algèbre de Weyl comme algèbre d'opérateurs différentiels

Supposons maintenant que $\mathbb{K}$ est un corps de caractéristique zéro (*i.e.*, $\mathbb{Q}$ est le sous-corps premier de $\mathbb{K}$).

On définit une représentation linéaire ρ de $A(\mathbb{K})$ sur $\mathbb{K}[z]$, c'est-à-dire un morphisme d'algèbres de $A(\mathbb{K})$ dans $\mathrm{End}(\mathbb{K}[z])$, comme suit :

- On définit l'action des lettres x, y sur $\mathbb{K}[z]$:
  $\Rightarrow$ $\rho(x)(p) = \frac{d}{dz}p$,
  $\Rightarrow$ $\rho(y)(p) = zp$
  pour $p \in \mathbb{K}[z]$.

L'algèbre de Weyl comme algèbre d'opérateurs différentiels

Supposons maintenant que $\mathbb{K}$ est un corps de caractéristique zéro (*i.e.*, $\mathbb{Q}$ est le sous-corps premier de $\mathbb{K}$).

On définit une représentation linéaire ρ de $A(\mathbb{K})$ sur $\mathbb{K}[z]$, c'est-à-dire un morphisme d'algèbres de $A(\mathbb{K})$ dans $\mathrm{End}(\mathbb{K}[z])$, comme suit :

- On définit l'action des lettres x, y sur $\mathbb{K}[z]$:
  $\Rightarrow$ $\rho(x)(p) = \frac{d}{dz}p$,
  $\Rightarrow$ $\rho(y)(p) = zp$
  pour $p \in \mathbb{K}[z]$.
- On étend ρ en un morphisme de $\mathbb{K}$-algèbres, encore noté ρ, de $\mathbb{K}\langle x, y\rangle$ dans $\mathrm{End}(\mathbb{K}[z])$ (car $\mathbb{K}\langle x, y\rangle$ est libre en tant qu'algèbre).

L'algèbre de Weyl comme algèbre d'opérateurs différentiels

Supposons maintenant que $\mathbb{K}$ est un corps de caractéristique zéro (*i.e.*, $\mathbb{Q}$ est le sous-corps premier de $\mathbb{K}$).

On définit une représentation linéaire ρ de $A(\mathbb{K})$ sur $\mathbb{K}[z]$, c'est-à-dire un morphisme d'algèbres de $A(\mathbb{K})$ dans $\mathrm{End}(\mathbb{K}[z])$, comme suit :

- On définit l'action des lettres x, y sur $\mathbb{K}[z]$:
  $\Rightarrow$ $\rho(x)(p) = \frac{d}{dz}p$,
  $\Rightarrow$ $\rho(y)(p) = zp$
  pour $p \in \mathbb{K}[z]$.
- On étend ρ en un morphisme de $\mathbb{K}$-algèbres, encore noté ρ, de $\mathbb{K}\langle x, y\rangle$ dans $\mathrm{End}(\mathbb{K}[z])$ (car $\mathbb{K}\langle x, y\rangle$ est libre en tant qu'algèbre).
- Comme $\rho([x, y]) = [\rho(x), \rho(y)] = Id_{\mathbb{K}[z]}$, il s'ensuit que ρ « passe au quotient » : il existe un unique morphisme d'algèbres $\tilde{\rho}\colon A(\mathbb{K}) \to \mathrm{End}(\mathbb{K}[z])$ tel que $\tilde{\rho} \circ \pi = \rho$.

L'algèbre de Weyl comme algèbre d'opérateurs différentiels

Supposons maintenant que $\mathbb{K}$ est un corps de caractéristique zéro (*i.e.*, $\mathbb{Q}$ est le sous-corps premier de $\mathbb{K}$).

On définit une représentation linéaire ρ de $A(\mathbb{K})$ sur $\mathbb{K}[z]$, c'est-à-dire un morphisme d'algèbres de $A(\mathbb{K})$ dans $\mathrm{End}(\mathbb{K}[z])$, comme suit :

- On définit l'action des lettres x, y sur $\mathbb{K}[z]$:
  $\Rightarrow$ $\rho(x)(p) = \frac{d}{dz}p$,
  $\Rightarrow$ $\rho(y)(p) = zp$
  pour $p \in \mathbb{K}[z]$.

- On étend ρ en un morphisme de $\mathbb{K}$-algèbres, encore noté ρ, de $\mathbb{K}\langle x, y\rangle$ dans $\mathrm{End}(\mathbb{K}[z])$ (car $\mathbb{K}\langle x, y\rangle$ est libre en tant qu'algèbre).

- Comme $\rho([x, y]) = [\rho(x), \rho(y)] = Id_{\mathbb{K}[z]}$, il s'ensuit que ρ « passe au quotient » : il existe un unique morphisme d'algèbres $\tilde{\rho}\colon A(\mathbb{K}) \to \mathrm{End}(\mathbb{K}[z])$ tel que $\tilde{\rho} \circ \pi = \rho$. Autrement dit, on peut définir $\tilde{\rho}(\pi(P))$ par $\rho(P)$ et montrer que c'est indépendant du choix du représentant $P \in \mathbb{K}\langle x, y\rangle$.

L'algèbre de Weyl comme algèbre d'opérateurs différentiels

Cette représentation est fidèle

Cette représentation est fidèle, *i.e.*, $\tilde{\rho}$ est injectif ($\ker \tilde{\rho} = (0)$)

L'algèbre de Weyl comme algèbre d'opérateurs différentiels

Cette représentation est fidèle, *i.e.*, $\tilde{\rho}$ est injectif ($\ker \tilde{\rho} = (0)$) de telle sorte que $A(\mathbb{K})$ peut être identifiée à la sous-algèbre de $\mathrm{End}(\mathbb{K}[z])$ engendrée par la multiplication par z et la dérivation formelle $\frac{d}{dz}$.

L'algèbre de Weyl comme algèbre d'opérateurs différentiels

Cette représentation est fidèle, *i.e.*, $\tilde{\rho}$ est injectif ($\ker \tilde{\rho} = (0)$) de telle sorte que $A(\mathbb{K})$ peut être identifiée à la sous-algèbre de $\mathrm{End}(\mathbb{K}[z])$ engendrée par la multiplication par z et la dérivation formelle $\frac{d}{dz}$.

Dans cette réalisation, $a^\dagger$ est l'opérateur de multiplication par z, et a est l'opérateur de dérivation formelles des polynômes.

L'algèbre de Weyl comme algèbre d'opérateurs différentiels

Cette représentation est fidèle, *i.e.*, $\tilde{\rho}$ est injectif ($\ker \tilde{\rho} = (0)$) de telle sorte que $A(\mathbb{K})$ peut être identifiée à la sous-algèbre de $\mathrm{End}(\mathbb{K}[z])$ engendrée par la multiplication par z et la dérivation formelle $\frac{d}{dz}$.

Dans cette réalisation, $a^\dagger$ est l'opérateur de multiplication par z, et a est l'opérateur de dérivation formelles des polynômes.

Cela permet d'incarner les éléments abstraits de $A(\mathbb{K})$ comme des opérateurs linéaires sur les polynômes.

L'algèbre de Weyl comme algèbre d'opérateurs différentiels - un exemple

Soit $\Omega = (a^\dagger)^2 a a^\dagger + a^3 a^\dagger a \in A(\mathbb{K})$.

L'algèbre de Weyl comme algèbre d'opérateurs différentiels - un exemple

Soit $\Omega = (a^\dagger)^2 a a^\dagger + a^3 a^\dagger a \in A(\mathbb{K})$.

Alors pour chaque $p \in \mathbb{K}[z]$,

$$\tilde{\rho}(\Omega)(p) = z^2 p + z^3 p' + 3p''' + zp'''' \ .$$

Opérateurs d'échelle

En tant qu'opérateurs sur $\mathbb{K}[z]$, a et $a^\dagger$ sont gradués de degré -1 et 1 relativement au degré usuel des polynômes.

Opérateurs d'échelle

En tant qu'opérateurs sur $\mathbb{K}[z]$, a et $a^\dagger$ sont gradués de degré -1 et 1 relativement au degré usuel des polynômes.

Ainsi, a est un opérateur descendant,

Opérateurs d'échelle

En tant qu'opérateurs sur $\mathbb{K}[z]$, a et $a^\dagger$ sont gradués de degré -1 et 1 relativement au degré usuel des polynômes.

Ainsi, a est un opérateur descendant, alors que $a^\dagger$ est un opérateur montant.

Opérateurs d'échelle

En tant qu'opérateurs sur $\mathbb{K}[z]$, a et $a^\dagger$ sont gradués de degré -1 et 1 relativement au degré usuel des polynômes.

Ainsi, a est un opérateur descendant, alors que $a^\dagger$ est un opérateur montant.

Ce sont des opérateurs d'échelle.

Table des matières

Opérateurs d'échelle : Définition

Soit $\mathbb{K}$ un corps (de caractéristique comme de cardinal quelconques).

Opérateurs d'échelle : Définition

Soit $\mathbb{K}$ un corps (de caractéristique comme de cardinal quelconques).

Soit V un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ de dimension infinie dénombrable,

Opérateurs d'échelle : Définition

Soit $\mathbb{K}$ un corps (de caractéristique comme de cardinal quelconques).

Soit V un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ de dimension infinie dénombrable, et soit $E = (e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une base fixée.

Opérateurs d'échelle : Définition

Soit $\mathbb{K}$ un corps (de caractéristique comme de cardinal quelconques).

Soit V un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ de dimension infinie dénombrable, et soit $E = (e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une base fixée.

L'opérateur montant R_E (associé à E) est défini par

$$R_E e_n = e_{n+1} \ .$$

Opérateurs d'échelle : Définition

Soit $\mathbb{K}$ un corps (de caractéristique comme de cardinal quelconques).

Soit V un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ de dimension infinie dénombrable, et soit $E = (e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une base fixée.

L'opérateur montant R_E (associé à E) est défini par

$$R_E e_n = e_{n+1} \ .$$

L'opérateur descendant L_E (associé à E) est défini par

$$L_E e_{n+1} = e_n, \ \ L_E e_0 = 0 \ .$$

Opérateurs d'échelle : Exemple

Soit $V = \mathbb{K}[z]$ ($\mathbb{K}$ est ici un corps de caractéristique zéro).

Opérateurs d'échelle : Exemple

Soit $V = \mathbb{K}[z]$ ($\mathbb{K}$ est ici un corps de caractéristique zéro).

Alors $a^\dagger$ est l'opérateur montant associé à la base $(z^n)_{n\geq 0}$,

Opérateurs d'échelle : Exemple

Soit $V = \mathbb{K}[z]$ ($\mathbb{K}$ est ici un corps de caractéristique zéro).

Alors $a^\dagger$ est l'opérateur montant associé à la base $(z^n)_{n\geq 0}$,

alors que a est l'opérateur descendant associé à la base $(\frac{z^n}{n!})_{n\geq 0}$.

Décomposition des endomorphismes

Théorème [2010]

Soient $E = (e_n)_n$ et $F = (f_n)_n$ deux bases de V sur le corps $\mathbb{K}$ telles que $\mathrm{span}_{\mathbb{K}}\{\, f_0 \,\} = \mathrm{span}_{\mathbb{K}}\{\, e_0 \,\}$ (les deux bases coïncident en degré zéro).

Décomposition des endomorphismes

Théorème [2010]

Soient $E = (e_n)_n$ et $F = (f_n)_n$ deux bases de V sur le corps $\mathbb{K}$ telles que $\mathrm{span}_{\mathbb{K}}\{ f_0 \} = \mathrm{span}_{\mathbb{K}}\{ e_0 \}$ (les deux bases coïncident en degré zéro).

Soit ϕ un opérateur linéaire de V.

Décomposition des endomorphismes

Théorème [2010]

Soient $E = (e_n)_n$ et $F = (f_n)_n$ deux bases de V sur le corps $\mathbb{K}$ telles que $\mathrm{span}_{\mathbb{K}}\{\, f_0 \,\} = \mathrm{span}_{\mathbb{K}}\{\, e_0 \,\}$ (les deux bases coïncident en degré zéro).

Soit ϕ un opérateur linéaire de V.

Alors il existe une famille $(P_n)_{n\geq 0}$ de polynômes en une variable telle que

$$\phi = \sum_{n\geq 0} P_n(R_E) L_F^n \ .$$

Décomposition des endomorphismes

Théorème [2010]

Soient $E = (e_n)_n$ et $F = (f_n)_n$ deux bases de V sur le corps $\mathbb{K}$ telles que $\mathrm{span}_{\mathbb{K}}\{ f_0 \} = \mathrm{span}_{\mathbb{K}}\{ e_0 \}$ (les deux bases coïncident en degré zéro).

Soit ϕ un opérateur linéaire de V.

Alors il existe une famille $(P_n)_{n\geq 0}$ de polynômes en une variable telle que

$$\phi = \sum_{n\geq 0} P_n(R_E)L_F^n \ .$$

De plus, $(P_n)_n$ est uniquement déterminée par ϕ,

Décomposition des endomorphismes

Théorème [2010]

Soient $E = (e_n)_n$ et $F = (f_n)_n$ deux bases de V sur le corps $\mathbb{K}$ telles que $\mathrm{span}_{\mathbb{K}}\{\, f_0 \,\} = \mathrm{span}_{\mathbb{K}}\{\, e_0 \,\}$ (les deux bases coïncident en degré zéro).

Soit ϕ un opérateur linéaire de V.

Alors il existe une famille $(P_n)_{n\geq 0}$ de polynômes en une variable telle que

$$\phi = \sum_{n\geq 0} P_n(R_E)L_F^n \ .$$

De plus, $(P_n)_n$ est uniquement déterminée par ϕ,

et l'application $\phi \in \mathrm{End}(V) \mapsto (P_n)_n \in \mathbb{K}[z]^{\mathbb{N}}$ est un isomorphisme linéaire.

L'écriture

$$\phi = \sum_{n \geq 0} P_n(R_E) L_F^n$$

L'écriture

$$\phi = \sum_{n \geq 0} P_n(R_E) L_F^n$$

signifie que pour chaque $v \in V$, $\phi(v) = \sum_{n \geq 0} P_n(R_E) L_F^n(v)$.

L'écriture

$$\phi = \sum_{n\geq 0} P_n(R_E) L_F^n$$

signifie que pour chaque $v \in V$, $\phi(v) = \sum_{n\geq 0} P_n(R_E) L_F^n(v)$.

Il s'agit d'une fausse somme infinie

L'écriture

$$\phi = \sum_{n\geq 0} P_n(R_E)L_F^n$$

signifie que pour chaque $v \in V$, $\phi(v) = \sum_{n\geq 0} P_n(R_E)L_F^n(v)$.

Il s'agit d'une fausse somme infinie : étant donné v il existe un plus grand entier k_v pour lequel le coefficient de v relativement à f_{k_v} dans sa décomposition dans la base $(f_n)_n$ est non nul.

L'écriture

$$\phi = \sum_{n \geq 0} P_n(R_E) L_F^n$$

signifie que pour chaque $v \in V$, $\phi(v) = \sum_{n \geq 0} P_n(R_E) L_F^n(v)$.

Il s'agit d'une fausse somme infinie : étant donné v il existe un plus grand entier k_v pour lequel le coefficient de v relativement à f_{k_v} dans sa décomposition dans la base $(f_n)_n$ est non nul. Aussi on a

$$\sum_{n \geq 0} P_n(R_E) L_F^n(v) = \sum_{n=0}^{k_v} P_n(R_E) L_F^n(v)$$

Décomposition des endomorphismes : Remarque

La famille $(P_n)_n$ de l'endomorphisme linéaire ϕ peut être explicitement calculée par récurrence.

Décomposition des endomorphismes : Remarque

La famille $(P_n)_n$ de l'endomorphisme linéaire ϕ peut être explicitement calculée par récurrence.

Soit $U = (u_n)_n$ une suite d'éléments de V, et soit $P = \sum_{i \geq 0} P_i z^i \in \mathbb{K}[z]$ (somme avec un nombre fini de coefficients P_i non nuls).

Décomposition des endomorphismes : Remarque

La famille $(P_n)_n$ de l'endomorphisme linéaire ϕ peut être explicitement calculée par récurrence.

Soit $U = (u_n)_n$ une suite d'éléments de V, et soit $P = \sum_{i \geq 0} P_i z^i \in \mathbb{K}[z]$ (somme avec un nombre fini de coefficients P_i non nuls).

On définit $P(U) = \sum_{i \geq 0} P_i u_i$

Décomposition des endomorphismes : Remarque

La famille $(P_n)_n$ de l'endomorphisme linéaire ϕ peut être explicitement calculée par récurrence.

Soit $U = (u_n)_n$ une suite d'éléments de V, et soit $P = \sum_{i \geq 0} P_i z^i \in \mathbb{K}[z]$ (somme avec un nombre fini de coefficients P_i non nuls).

On définit $P(U) = \sum_{i \geq 0} P_i u_i$ et si U est une base de V, alors $P \mapsto P(U)$ est un isomorphisme linéaire de $\mathbb{K}[z]$ dans V.

Décomposition des endomorphismes : Remarque

La famille $(P_n)_n$ de l'endomorphisme linéaire ϕ peut être explicitement calculée par récurrence.

Soit $U = (u_n)_n$ une suite d'éléments de V, et soit $P = \sum_{i \geq 0} P_i z^i \in \mathbb{K}[z]$ (somme avec un nombre fini de coefficients P_i non nuls).

On définit $P(U) = \sum_{i \geq 0} P_i u_i$ et si U est une base de V, alors $P \mapsto P(U)$ est un isomorphisme linéaire de $\mathbb{K}[z]$ dans V.

Soit $\lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda \neq 0$ tel que $\lambda e_0 = f_0$ (un tel scalaire λ existe puisque E et F coïncident en degré zéro).

Décomposition des endomorphismes : Remarque

La famille $(P_n)_n$ de l'endomorphisme linéaire ϕ peut être explicitement calculée par récurrence.

Soit $U = (u_n)_n$ une suite d'éléments de V, et soit $P = \sum_{i \geq 0} P_i z^i \in \mathbb{K}[z]$ (somme avec un nombre fini de coefficients P_i non nuls).

On définit $P(U) = \sum_{i \geq 0} P_i u_i$ et si U est une base de V, alors $P \mapsto P(U)$ est un isomorphisme linéaire de $\mathbb{K}[z]$ dans V.

Soit $\lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda \neq 0$ tel que $\lambda e_0 = f_0$ (un tel scalaire λ existe puisque E et F coïncident en degré zéro). La famille $(P_n)_n$ de ϕ satisfait la relation de récurrence suivante :

Décomposition des endomorphismes : Remarque

La famille $(P_n)_n$ de l'endomorphisme linéaire ϕ peut être explicitement calculée par récurrence.

Soit $U = (u_n)_n$ une suite d'éléments de V, et soit $P = \sum_{i \geq 0} P_i z^i \in \mathbb{K}[z]$ (somme avec un nombre fini de coefficients P_i non nuls).

On définit $P(U) = \sum_{i \geq 0} P_i u_i$ et si U est une base de V, alors $P \mapsto P(U)$ est un isomorphisme linéaire de $\mathbb{K}[z]$ dans V.

Soit $\lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda \neq 0$ tel que $\lambda e_0 = f_0$ (un tel scalaire λ existe puisque E et F coïncident en degré zéro). La famille $(P_n)_n$ de ϕ satisfait la relation de récurrence suivante :

- $\lambda P_0(E) = \phi(f_0)$.

Décomposition des endomorphismes : Remarque

La famille $(P_n)_n$ de l'endomorphisme linéaire ϕ peut être explicitement calculée par récurrence.

Soit $U = (u_n)_n$ une suite d'éléments de V, et soit $P = \sum_{i \geq 0} P_i z^i \in \mathbb{K}[z]$ (somme avec un nombre fini de coefficients P_i non nuls).

On définit $P(U) = \sum_{i \geq 0} P_i u_i$ et si U est une base de V, alors $P \mapsto P(U)$ est un isomorphisme linéaire de $\mathbb{K}[z]$ dans V.

Soit $\lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda \neq 0$ tel que $\lambda e_0 = f_0$ (un tel scalaire λ existe puisque E et F coïncident en degré zéro). La famille $(P_n)_n$ de ϕ satisfait la relation de récurrence suivante :

- $\lambda P_0(E) = \phi(f_0)$.
- $\lambda P_{n+1}(E) = \phi(f_{n+1}) - \sum_{k=0}^{n} P_k(R_E) f_{n+1-k}$.

Une forme normale pour les endomorphismes

Considérons le sous-ensemble suivant de $\mathbb{K}\langle\langle x, y\rangle\rangle$:

Une forme normale pour les endomorphismes

Considérons le sous-ensemble suivant de $\mathbb{K}\langle\langle x, y\rangle\rangle$:

$$\mathbb{K}\langle x, y\rangle\rangle = \{ \sum_{n\geq 0} P_n(x)y^n : \forall n,\ P_n(x) \in \mathbb{K}[x] \}$$

où la concaténation (non commutative) est notée par une simple juxtaposition.

Une forme normale pour les endomorphismes

Considérons le sous-ensemble suivant de $\mathbb{K}\langle\langle x, y\rangle\rangle$:

$$\mathbb{K}\langle x, y\rangle\rangle = \{ \sum_{n\geq 0} P_n(x)y^n : \forall n,\ P_n(x) \in \mathbb{K}[x] \}$$

où la concaténation (non commutative) est notée par une simple juxtaposition. Appelons-le l'espace des séries génératrices non commutatives de polynômes.

Une forme normale pour les endomorphismes

Considérons le sous-ensemble suivant de $\mathbb{K}\langle\langle x, y\rangle\rangle$:

$$\mathbb{K}\langle x, y\rangle\rangle = \{ \sum_{n\geq 0} P_n(x)y^n : \forall n,\ P_n(x) \in \mathbb{K}[x] \}$$

où la concaténation (non commutative) est notée par une simple juxtaposition. Appelons-le l'espace des séries génératrices non commutatives de polynômes.

Propriétés

- $\mathbb{K}\langle x, y\rangle\rangle$ est un sous $\mathbb{K}$-espace vectoriel de $\mathbb{K}\langle\langle x, y\rangle\rangle$.

Une forme normale pour les endomorphismes

Considérons le sous-ensemble suivant de $\mathbb{K}\langle\langle x, y\rangle\rangle$:

$$\mathbb{K}\langle x, y\rangle\rangle = \{ \sum_{n\geq 0} P_n(x)y^n : \forall n,\ P_n(x) \in \mathbb{K}[x] \}$$

où la concaténation (non commutative) est notée par une simple juxtaposition. Appelons-le l'espace des séries génératrices non commutatives de polynômes.

Propriétés

- $\mathbb{K}\langle x, y\rangle\rangle$ est un sous $\mathbb{K}$-espace vectoriel de $\mathbb{K}\langle\langle x, y\rangle\rangle$.
- $\mathbb{K}\langle x, y\rangle\rangle$ est un $\mathbb{K}[x]$-module (bilatère) dont les actions (à gauche et à droite) sont données par

Une forme normale pour les endomorphismes

Considérons le sous-ensemble suivant de $\mathbb{K}\langle\langle x, y\rangle\rangle$:

$$\mathbb{K}\langle x, y\rangle\rangle = \{ \sum_{n\geq 0} P_n(x) y^n : \forall n,\ P_n(x) \in \mathbb{K}[x] \}$$

où la concaténation (non commutative) est notée par une simple juxtaposition. Appelons-le l'espace des séries génératrices non commutatives de polynômes.

Propriétés

- $\mathbb{K}\langle x, y\rangle\rangle$ est un sous $\mathbb{K}$-espace vectoriel de $\mathbb{K}\langle\langle x, y\rangle\rangle$.
- $\mathbb{K}\langle x, y\rangle\rangle$ est un $\mathbb{K}[x]$-module (bilatère) dont les actions (à gauche et à droite) sont données par $Q(x) \cdot \sum_{n\geq 0} P_n(x) y^n = \sum_{n\geq 0} (Q(x) P_n(x)) y^n$ et

Une forme normale pour les endomorphismes

Considérons le sous-ensemble suivant de $\mathbb{K}\langle\langle x, y\rangle\rangle$:

$$\mathbb{K}\langle x, y\rangle\rangle = \{ \sum_{n\geq 0} P_n(x)y^n : \forall n,\ P_n(x) \in \mathbb{K}[x] \}$$

où la concaténation (non commutative) est notée par une simple juxtaposition. Appelons-le l'espace des séries génératrices non commutatives de polynômes.

Propriétés

- $\mathbb{K}\langle x, y\rangle\rangle$ est un sous $\mathbb{K}$-espace vectoriel de $\mathbb{K}\langle\langle x, y\rangle\rangle$.
- $\mathbb{K}\langle x, y\rangle\rangle$ est un $\mathbb{K}[x]$-module (bilatère) dont les actions (à gauche et à droite) sont données par $Q(x) \cdot \sum_{n\geq 0} P_n(x)y^n = \sum_{n\geq 0} (Q(x)P_n(x))y^n$ et $\sum_{n\geq 0} P_n(x)y^n \cdot Q(x) = \sum_{n\geq 0} (P_n(x)Q(x))y^n = \sum_{n\geq 0} (Q(x)P_n(x))y^n$.

Une forme normale pour les endomorphismes

Considérons le sous-ensemble suivant de $\mathbb{K}\langle\langle x, y\rangle\rangle$:

$$\mathbb{K}\langle x, y\rangle\rangle = \{ \sum_{n\geq 0} P_n(x) y^n : \forall n,\ P_n(x) \in \mathbb{K}[x] \}$$

où la concaténation (non commutative) est notée par une simple juxtaposition. Appelons-le l'espace des séries génératrices non commutatives de polynômes.

Propriétés

- $\mathbb{K}\langle x, y\rangle\rangle$ est un sous $\mathbb{K}$-espace vectoriel de $\mathbb{K}\langle\langle x, y\rangle\rangle$.
- $\mathbb{K}\langle x, y\rangle\rangle$ est un $\mathbb{K}[x]$-module (bilatère) dont les actions (à gauche et à droite) sont données par $Q(x) \cdot \sum_{n\geq 0} P_n(x) y^n = \sum_{n\geq 0} (Q(x) P_n(x)) y^n$ et $\sum_{n\geq 0} P_n(x) y^n \cdot Q(x) = \sum_{n\geq 0} (P_n(x) Q(x)) y^n = \sum_{n\geq 0} (Q(x) P_n(x)) y^n$.
- En fait il s'agit du complété (pour la topologie produit avec $\mathbb{K}[x]$ discret) du $\mathbb{K}[x]$-module des $\sum_{n\geq 0} P_n(x) y^n \in \mathbb{K}\langle\langle x, y\rangle\rangle$ avec seulement un nombre fini de $P_n(x) \neq 0$.

Une forme normale pour les endomorphismes

Remarques

- Notons que $xy = y \cdot x$ mais yx n'appartient pas à $\mathbb{K}\langle x, y \rangle\rangle$.

Une forme normale pour les endomorphismes

Remarques

- Notons que $xy = y \cdot x$ mais yx n'appartient pas à $\mathbb{K}\langle x, y\rangle\rangle$.

- En fait, $\mathbb{K}\langle x, y\rangle\rangle$ est le complété du $\mathbb{K}[x]$-module libre de base $\{ y^n \colon n \geq 0 \}$, à savoir

$$\mathbb{K}[x] \otimes_{\mathbb{K}} \mathrm{span}_{\mathbb{K}}\{ y^n \colon n \geq 0 \}$$

(avec l'action évidente de $\mathbb{K}[x]$), par rapport à la topologie la plus fine rendant continues les applications $x^i \otimes y^j \mapsto x^i$ pour $\mathbb{K}[x]$ discret.

Une forme normale pour les endomorphismes

D'après le théorème précédent, il y a un isomorphisme $\mathbb{K}$-linéaire

$$\pi_{E,F} \colon \mathbb{K}\langle x, y \rangle\rangle \to \mathrm{End}(V)$$

qui envoie $\sum_{n \geq 0} P_n(x) y^n$ sur $\sum_{n \geq 0} P_n(R_E) L_F^n$.

Une forme normale pour les endomorphismes

D'après le théorème précédent, il y a un isomorphisme $\mathbb{K}$-linéaire

$$\pi_{E,F} \colon \mathbb{K}\langle x, y \rangle\rangle \to \mathrm{End}(V)$$

qui envoie $\sum_{n \geq 0} P_n(x) y^n$ sur $\sum_{n \geq 0} P_n(R_E) L_F^n$.

Il s'agit d'une application d'évaluation: $x \leftarrow R_E$ et $y \leftarrow L_F$.

Une forme normale pour les endomorphismes

D'après le théorème précédent, il y a un isomorphisme $\mathbb{K}$-linéaire

$$\pi_{E,F} : \mathbb{K}\langle x, y\rangle\rangle \to \mathrm{End}(V)$$

qui envoie $\sum_{n\geq 0} P_n(x)y^n$ sur $\sum_{n\geq 0} P_n(R_E)L_F^n$.

Il s'agit d'une application d'évaluation: $x \leftarrow R_E$ et $y \leftarrow L_F$.

Remarque

Notons qu'il est nécessaire que $xy \neq yx$ car si $xy = yx$, alors $\pi_{E,F}(xy) = R_E L_F \neq L_F R_E = \pi_{E,F}(yx)$.

Une forme normale pour les endomorphismes

D'après le théorème précédent, il y a un isomorphisme $\mathbb{K}$-linéaire

$$\pi_{E,F} : \mathbb{K}\langle\langle x, y\rangle\rangle \to \mathrm{End}(V)$$

qui envoie $\sum_{n\geq 0} P_n(x)y^n$ sur $\sum_{n\geq 0} P_n(R_E)L_F^n$.

Il s'agit d'une application d'évaluation: $x \leftarrow R_E$ et $y \leftarrow L_F$.

Remarque

Notons qu'il est nécessaire que $xy \neq yx$ car si $xy = yx$, alors $\pi_{E,F}(xy) = R_E L_F \neq L_F R_E = \pi_{E,F}(yx)$.

Soit $\phi \in \mathrm{End}(V)$. L'unique élément $S \in \mathbb{K}\langle\langle x, y\rangle\rangle$ tel que $\pi_{E,F}(S) = \phi$ peut être appelé la forme normale de ϕ relativement aux bases E, F de V.

Une conséquence du théorème de densité de Jacobson (sic!)

Supposons que $\mathbb{K}$ soit un corps de caractéristique zéro.

Une conséquence du théorème de densité de Jacobson (sic!)

Supposons que $\mathbb{K}$ soit un corps de caractéristique zéro.

Alors $A(\mathbb{K})$ est un anneau primitif.

Une conséquence du théorème de densité de Jacobson (sic!)

Supposons que $\mathbb{K}$ soit un corps de caractéristique zéro.

Alors $A(\mathbb{K})$ est un anneau primitif. En effet, on peut prouver que $A(\mathbb{K})$ est un sous-anneau dense de $\mathrm{End}(\mathbb{K}[z])$.

Une conséquence du théorème de densité de Jacobson (sic!)

Supposons que $\mathbb{K}$ soit un corps de caractéristique zéro.

Alors $A(\mathbb{K})$ est un anneau primitif. En effet, on peut prouver que $A(\mathbb{K})$ est un sous-anneau dense de $\mathrm{End}(\mathbb{K}[z])$.

Cela signifie que pour chaque endomorphisme ϕ de $\mathbb{K}[z]$ il existe au moins une suite $(S_n)_n$ d'éléments de $A(\mathbb{K})$ telle que $\lim_{n\to\infty} S_n = \phi$.

Une conséquence du théorème de densité de Jacobson (sic!)

Supposons que $\mathbb{K}$ soit un corps de caractéristique zéro.

Alors $A(\mathbb{K})$ est un anneau primitif. En effet, on peut prouver que $A(\mathbb{K})$ est un sous-anneau dense de $\mathrm{End}(\mathbb{K}[z])$.

Cela signifie que pour chaque endomorphisme ϕ de $\mathbb{K}[z]$ il existe au moins une suite $(S_n)_n$ d'éléments de $A(\mathbb{K})$ telle que $\lim_{n\to\infty} S_n = \phi$.

Notre résultat nous permet d'être plus précis puisqu'on peut calculer explicitement $(S_n)_n$:

Une conséquence du théorème de densité de Jacobson (sic!)

Supposons que $\mathbb{K}$ soit un corps de caractéristique zéro.

Alors $A(\mathbb{K})$ est un anneau primitif. En effet, on peut prouver que $A(\mathbb{K})$ est un sous-anneau dense de $\mathrm{End}(\mathbb{K}[z])$.

Cela signifie que pour chaque endomorphisme ϕ de $\mathbb{K}[z]$ il existe au moins une suite $(S_n)_n$ d'éléments de $A(\mathbb{K})$ telle que $\lim_{n\to\infty} S_n = \phi$.

Notre résultat nous permet d'être plus précis puisqu'on peut calculer explicitement $(S_n)_n$:

Pour chaque application linéaire ϕ de $\mathbb{K}[z]$, il existe une famille sommable $(\Omega_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $A(\mathbb{K})$ telle que

$$\phi = \sum_{n\geq 0} \Omega_n \ .$$

(Somme d'une famille sommable.)

Une conséquence du théorème de densité de Jacobson (sic!)

Supposons que $\mathbb{K}$ soit un corps de caractéristique zéro.

Alors $A(\mathbb{K})$ est un anneau primitif. En effet, on peut prouver que $A(\mathbb{K})$ est un sous-anneau dense de $\mathrm{End}(\mathbb{K}[z])$.

Cela signifie que pour chaque endomorphisme ϕ de $\mathbb{K}[z]$ il existe au moins une suite $(S_n)_n$ d'éléments de $A(\mathbb{K})$ telle que $\lim_{n\to\infty} S_n = \phi$.

Notre résultat nous permet d'être plus précis puisqu'on peut calculer explicitement $(S_n)_n$:

Pour chaque application linéaire ϕ de $\mathbb{K}[z]$, il existe une famille sommable $(\Omega_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $A(\mathbb{K})$ telle que

$$\phi = \sum_{n\geq 0} \Omega_n \ .$$

(Somme d'une famille sommable.)

De plus, la famille est uniquement déterminée par ϕ (*i.e.*, $(\Omega_n)_n$ est une fonction de ϕ) et peut être explicitement calculée.

Un exemple : l'opérateur d'intégration

Soit $\int$ l'opérateur usuel d'intégration (formelle) de $\mathbb{K}[z]$

Un exemple : l'opérateur d'intégration

Soit $\int$ l'opérateur usuel d'intégration (formelle) de $\mathbb{K}[z]$:

$$\int \left(\sum_{n \geq 0} \alpha_n z^n \right) = \sum_{n \geq 0} \alpha_n \frac{z^{n+1}}{n+1}.$$

Un exemple : l'opérateur d'intégration

Soit $\int$ l'opérateur usuel d'intégration (formelle) de $\mathbb{K}[z]$:

$$\int \left(\sum_{n \geq 0} \alpha_n z^n \right) = \sum_{n \geq 0} \alpha_n \frac{z^{n+1}}{n+1}.$$

D'après le théorème de densité de Jacobson, $\int$ peut être vu comme un opérateur différentiel de degré infini (!) :

Un exemple : l'opérateur d'intégration

Soit $\int$ l'opérateur usuel d'intégration (formelle) de $\mathbb{K}[z]$:
$\int \left(\sum_{n \geq 0} \alpha_n z^n \right) = \sum_{n \geq 0} \alpha_n \frac{z^{n+1}}{n+1}$.

D'après le théorème de densité de Jacobson, $\int$ peut être vu comme un opérateur différentiel de degré infini (!) :

$$\int = \sum_{n \geq 0} (-1)^n \frac{z^{n+1}}{(n+1)!} \frac{d^n}{dz} \ .$$

Un exemple : l'opérateur d'intégration

Soit $\int$ l'opérateur usuel d'intégration (formelle) de $\mathbb{K}[z]$:
$$\int \left(\sum_{n \geq 0} \alpha_n z^n \right) = \sum_{n \geq 0} \alpha_n \frac{z^{n+1}}{n+1}.$$

D'après le théorème de densité de Jacobson, $\int$ peut être vu comme un opérateur différentiel de degré infini (!) :

$$\int = \sum_{n \geq 0} (-1)^n \frac{z^{n+1}}{(n+1)!} \frac{d^n}{dz} \ .$$

Sa forme normale est donc $\displaystyle\sum_{n \geq 0} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} y^n$.

Table des matières

Le complété d'un espace vectoriel gradué

Considérons une nouvelle fois un $\mathbb{K}$-espace vectoriel V de dimension infinie dénombrable avec une base fixée $E = (e_n)_{n \geq 0}$.

Le complété d'un espace vectoriel gradué

Considérons une nouvelle fois un $\mathbb{K}$-espace vectoriel V de dimension infinie dénombrable avec une base fixée $E = (e_n)_{n \geq 0}$.

Une topologie peut être définie sur V relativement à la décomposition en somme directe

$$V = \bigoplus_{n \geq 0} \mathrm{span}_{\mathbb{K}}(e_n)$$

de la façon suivante :

Le complété d'un espace vectoriel gradué

Considérons une nouvelle fois un $\mathbb{K}$-espace vectoriel V de dimension infinie dénombrable avec une base fixée $E = (e_n)_{n\geq 0}$.

Une topologie peut être définie sur V relativement à la décomposition en somme directe

$$V = \bigoplus_{n\geq 0} \mathrm{span}_{\mathbb{K}}(e_n)$$

de la façon suivante : on définit une valuation $\nu\colon V \to \mathbb{N} \sqcup \{ \infty \}$ telle que $\nu(v) = \inf\{\, n \geq 0 \colon \langle v \mid e_n \rangle \neq 0 \,\}$ pour $v \neq 0$ et $\nu(0) = \infty$.

Le complété d'un espace vectoriel gradué

Considérons une nouvelle fois un $\mathbb{K}$-espace vectoriel V de dimension infinie dénombrable avec une base fixée $E = (e_n)_{n\geq 0}$.

Une topologie peut être définie sur V relativement à la décomposition en somme directe

$$V = \bigoplus_{n\geq 0} \operatorname{span}_{\mathbb{K}}(e_n)$$

de la façon suivante : on définit une valuation $\nu\colon V \to \mathbb{N} \sqcup \{ \infty \}$ telle que $\nu(v) = \inf\{ n \geq 0 \colon \langle v \mid e_n \rangle \neq 0 \}$ pour $v \neq 0$ et $\nu(0) = \infty$.

Par rapport à la topologie induite par cette valuation, on peut décrire le complété $\widehat{V}$ de V comme le produit direct infini $\prod_{n\geq 0} \operatorname{span}_{\mathbb{K}}(e_n)$.

Le complété d'un espace vectoriel gradué

Considérons une nouvelle fois un $\mathbb{K}$-espace vectoriel V de dimension infinie dénombrable avec une base fixée $E = (e_n)_{n \geq 0}$.

Une topologie peut être définie sur V relativement à la décomposition en somme directe

$$V = \bigoplus_{n \geq 0} \mathrm{span}_{\mathbb{K}}(e_n)$$

de la façon suivante : on définit une valuation $\nu \colon V \to \mathbb{N} \sqcup \{ \infty \}$ telle que $\nu(v) = \inf \{ n \geq 0 \colon \langle v \mid e_n \rangle \neq 0 \}$ pour $v \neq 0$ et $\nu(0) = \infty$.

Par rapport à la topologie induite par cette valuation, on peut décrire le complété $\widehat{V}$ de V comme le produit direct infini $\prod_{n \geq 0} \mathrm{span}_{\mathbb{K}}(e_n)$.

Ses éléments sont les combinaisons linéaires infinies :

$$\sum_{n \geq 0} \alpha_n e_n$$

où tous les coefficients α_n peuvent être non nuls.

Dualité

En fait V et $\widehat{V}$ peuvent être mis en dualité par

$$\langle S \mid P \rangle = \sum_{n \geq 0} \langle S \mid e_n \rangle \langle P \mid e_n \rangle$$

où $S \in \widehat{V}$ et $P \in V$ (comme pour $\mathbb{K}\langle\langle X \rangle\rangle$ et $\mathbb{K}\langle X \rangle$).

Dualité

En fait V et $\widehat{V}$ peuvent être mis en dualité par

$$\langle S \mid P \rangle = \sum_{n \geq 0} \langle S \mid e_n \rangle \langle P \mid e_n \rangle$$

où $S \in \widehat{V}$ et $P \in V$ (comme pour $\mathbb{K}\langle\langle X \rangle\rangle$ et $\mathbb{K}\langle X \rangle$).

En utilisant ce couplage (non dégénéré),

$$V^* \cong \widehat{V}$$

et

$$\widehat{V}' \cong V \ .$$

Transposé

Cette dualité nous permet de définir le transposé des opérateurs.

Transposé

Cette dualité nous permet de définir le transposé des opérateurs.

Soient $\phi \in \mathrm{End}(V)$ et $\psi \in \mathrm{End}(\widehat{V})$ (et continu).

Transposé

Cette dualité nous permet de définir le transposé des opérateurs.

Soient $\phi \in \mathrm{End}(V)$ et $\psi \in \mathrm{End}(\widehat{V})$ (et continu).

Alors on définit ${}^{\dagger}\phi \in \mathrm{End}(\widehat{V})$ par

$$\langle {}^{\dagger}\phi(S) \mid P \rangle = \langle S \mid \phi(P) \rangle$$

(c'est un opérateur continu)

Transposé

Cette dualité nous permet de définir le transposé des opérateurs.

Soient $\phi \in \mathrm{End}(V)$ et $\psi \in \mathrm{End}(\widehat{V})$ (et continu).

Alors on définit ${}^{\dagger}\phi \in \mathrm{End}(\widehat{V})$ par

$$\langle {}^{\dagger}\phi(S) \mid P\rangle = \langle S \mid \phi(P)\rangle$$

(c'est un opérateur continu) et $\psi^{\dagger} \in \mathrm{End}(V)$ par

$$\langle S \mid \psi^{\dagger}(P)\rangle = \langle \psi(S) \mid P\rangle \ .$$

Décomposition des endomorphismes continus

En utilisant la dualité et la transposition, on peut prouver que tout opérateur continu ψ sur $\widehat{V}$ admet une décomposition comme somme d'une famille sommable

$$\psi = \sum_{n \geq 0} R^n P_n(L) \ .$$

Décomposition des endomorphismes continus

En utilisant la dualité et la transposition, on peut prouver que tout opérateur continu ψ sur $\widehat{V}$ admet une décomposition comme somme d'une famille sommable

$$\psi = \sum_{n \geq 0} R^n P_n(L) \ .$$

Il s'ensuit notamment que l'on dispose d'un isomorphisme

$$\mathrm{End}_{\mathbb{K}\text{-}\mathcal{Vect}}(V) \cong \mathrm{End}_{\mathbb{K}\text{-}\mathcal{TopVect}}(\widehat{V}) \ .$$