Contributions à l'algèbre, à l'analyse et à la combinatoire des endomorphismes sur les espaces de séries

Laurent Poinsot

LIPN - UMR CNRS 7030
Université Paris-Nord XIII - Institut Galilée

Séminaire Algèbre, Dynamique et Topologie

Le 6 février 2012 au LATP, Aix-Marseille Université

Table des matières

Table des matières

Un peu d'histoire

La mécanique quantique

Dans la seule année 1925 paraissent trois modèles de la Mécanique Quantique :

Un peu d'histoire
La mécanique quantique

Dans la seule année 1925 paraissent trois modèles de la Mécanique Quantique :

- ceux de Dirac et de Schrödinger basés sur une (fameuse) équation aux dérivées partielles, Dans la seule année 1925 paraissent trois modèles de la Mécanique Quantique :

- ceux de Dirac et de Schrödinger basés sur une (fameuse) équation aux dérivées partielles,
- celui d'Heisenberg fondé sur la relation :

$$AB - BA = Id \; .$$

La relation

$$AB - BA = Id$$

a immédiatement contraint Born, Heisenberg et Jordan à considérer des matrices infinies.

La relation

$$AB - BA = Id$$

a immédiatement contraint Born, Heisenberg et Jordan à considérer des matrices infinies.

En effet, un simple calcul de traces montre directement que cette relation ne peut, en caractéristique zéro, se représenter par des matrices finies non vides (sur une algèbre associative avec unité).

Un peu d'histoire

Matrices infinies

La relation

$$AB - BA = Id$$

a immédiatement contraint Born, Heisenberg et Jordan à considérer des matrices infinies.

En effet, un simple calcul de traces montre directement que cette relation ne peut, en caractéristique zéro, se représenter par des matrices finies non vides (sur une algèbre associative avec unité).

La représentation (non triviale) par des opérateurs continus n'est pas non plus possible dans un espace de Banach. (La preuve est plus subtile.)

La relation

$$AB - BA = Id$$

a immédiatement contraint Born, Heisenberg et Jordan à considérer des matrices infinies.

Cette relation peut être satisfaite fidèlement :

- soit par des opérateurs (fermables et densément définis, mais non bornés) sur un espace hilbertien.

- soit par des opérateurs continus sur un espace de Fréchet.

Il est ainsi possible de représenter l'opérateur A comme la dérivation usuelle des séries formelles en une variable z, et l'opérateur B comme la multiplication par z.

Il est ainsi possible de représenter l'opérateur A comme la dérivation usuelle des séries formelles en une variable z, et l'opérateur B comme la multiplication par z.

Lorsque l'on restreint leur action aux polynômes, on obtient des opérateurs gradués de degré -1 et $+1$.

A est un opérateur descendant et B un opérateur montant.

En général de nombreux opérateurs de la physique quantique sont interprétés comme des éléments de l'algèbre d'opérateurs engendrée par A et B (l'algèbre de Weyl d'indice 1).

En général de nombreux opérateurs de la physique quantique sont interprétés comme des éléments de l'algèbre d'opérateurs engendrée par A et B (l'algèbre de Weyl d'indice 1).

Si l'on se donne un tel élément Ω, il est intéressant d'étudier le sous-groupe à un paramètre réel (groupe d'évolution)

$$t \mapsto e^{t\Omega} \ .$$

En général de nombreux opérateurs de la physique quantique sont interprétés comme des éléments de l'algèbre d'opérateurs engendrée par A et B (l'algèbre de Weyl d'indice 1).

Si l'on se donne un tel élément Ω, il est intéressant d'étudier le sous-groupe à un paramètre réel (groupe d'évolution)

$$t \mapsto e^{t\Omega} \ .$$

De tels groupes sont importants en dynamique quantique (t est le temps) ou en mécanique statistique quantique (t est une grandeur liée à la température).

Quelques questions

1. Le groupe $t \mapsto e^{t\Omega}$ est-il bien défini ? À travers quelle représentation ?

Quelques questions

1. Le groupe $t \mapsto e^{t\Omega}$ est-il bien défini ? À travers quelle représentation ?
2. Quelles sont les méthodes combinatoires pouvant être extraites de la connaissance de tels groupes ?

Table des matières

Objectif

- Trouver une catégorie d'algèbres topologiques (de dimension infinie) convenable pour définir l'application exponentielle et qui permette la réalisation de la relation de commutation d'Heisenberg.

Objectif

- Trouver une catégorie d'algèbres topologiques (de dimension infinie) convenable pour définir l'application exponentielle et qui permette la réalisation de la relation de commutation d'Heisenberg.

- Étendre les liens classiques entre l'exponentielle et les sous-groupes à un paramètre (problème de Cauchy).

Convention

Pour l'intégralité de cette présentation (sauf sa dernière partie),

$$\mathbb{K} \in \{ \mathbb{R}, \mathbb{C} \} .$$

Soit V un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Une semi-norme est une norme ne satisfaisant pas l'axiome de séparation !

Soit V un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Une semi-norme est une application $p\colon V \to \mathbb{R}_+$ satisfaisant les axiomes suivants :

Pour tous $x, y \in V$ et $\lambda \in \mathbb{K}$,

1. $p(x+y) \leq p(x) + p(y)$ (sous-additivité).
2. $p(\lambda x) = |\lambda| p(x)$ (homogéneité).

On appelle noyau de la semi-norme p le sous-espace vectoriel

$$\ker p = \{\, x \in V \colon p(x) = 0 \,\} \;.$$

On appelle noyau de la semi-norme p le sous-espace vectoriel

$$\ker p = \{ x \in V \colon p(x) = 0 \} \ .$$

Une famille $\mathcal{P}$ (non vide) de semi-normes de V est dite séparante si

$$\bigcap_{p \in \mathcal{P}} \ker p = (0) \ .$$

On appelle noyau de la semi-norme p le sous-espace vectoriel

$$\ker p = \{ x \in V \colon p(x) = 0 \} .$$

Une famille $\mathcal{P}$ (non vide) de semi-normes de V est dite séparante si

$$\bigcap_{p \in \mathcal{P}} \ker p = (0) .$$

Autrement dit, pour $x \in V$, si $p(x) = 0$ quel que soit $p \in \mathcal{P}$, alors $x = 0$.

Remarque

La donnée d'un espace vectoriel V et d'une famille séparante $\mathcal{P}$ de semi-normes définit une structure d'espace vectoriel localement convexe séparé dont une base locale de voisinages de zéro est donnée par

$$\{ x \in V \colon p(x) < \epsilon \}$$

pour $p \in \mathcal{P}$ et $\epsilon > 0$.

Les espaces de Fréchet

Définition

Un espace de Fréchet est un espace vectoriel équipé d'une famille séparante **au plus dénombrable** de semi-normes et qui se trouve être complet pour cette topologie.

Les espaces de Fréchet

Définition

Un espace de Fréchet est un espace vectoriel équipé d'une famille séparante **au plus dénombrable** de semi-normes et qui se trouve être complet pour cette topologie.

De façon équivalente, un espace de Fréchet est un espace vectoriel localement convexe, métrisable (donc séparé) et complet.

1. Un espace banachique ou hilbertien est un espace de Fréchet.

1. Un espace banachique ou hilbertien est un espace de Fréchet.
2. L'espace $\mathcal{C}^\infty([a,b],\mathbb{K})$ est de Fréchet avec $p_n(f) = \sum_{i=0}^{n} \sup_{x\in[a,b]} |f^{(i)}(x)|$.

Les espaces de Fréchet

Exemples

1. Un espace banachique ou hilbertien est un espace de Fréchet.
2. L'espace $\mathcal{C}^\infty([a,b],\mathbb{K})$ est de Fréchet avec $p_n(f) = \sum_{i=0}^{n} \sup_{x\in[a,b]} |f^{(i)}(x)|$.
3. L'espace $\mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ est de Fréchet avec $p_n(f) = \sup\{\,|f(x)| :\ -n \leq x \leq n\,\}$.

Les espaces de Fréchet

Exemples

1. Un espace banachique ou hilbertien est un espace de Fréchet.
2. L'espace $\mathcal{C}^\infty([a,b],\mathbb{K})$ est de Fréchet avec $p_n(f) = \sum_{i=0}^{n} \sup_{x\in[a,b]} |f^{(i)}(x)|$.
3. L'espace $\mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ est de Fréchet avec $p_n(f) = \sup\{\,|f(x)|:\ -n \le x \le n\,\}$.
4. Toute limite projective d'un système projectif (au plus) dénombrable d'espaces de Banach est un espace de Fréchet.

Les espaces de Fréchet

Exemples

1. Un espace banachique ou hilbertien est un espace de Fréchet.
2. L'espace $\mathcal{C}^\infty([a,b],\mathbb{K})$ est de Fréchet avec $p_n(f) = \sum_{i=0}^{n} \sup_{x\in[a,b]} |f^{(i)}(x)|$.
3. L'espace $\mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ est de Fréchet avec $p_n(f) = \sup\{\,|f(x)| :\ -n \le x \le n\,\}$.
4. Toute limite projective d'un système projectif (au plus) <u>dénombrable</u> d'espaces de Banach est un espace de Fréchet.
5. Si X est un alphabet fini, alors $\mathbb{K}[[X]]$ et $\mathbb{K}\langle\langle X\rangle\rangle$ sont des espaces de Fréchet (en tant que limite projective d'un nombre dénombrable d'espaces de dimension finie).

Les espaces de Fréchet

Exemples

1. Un espace banachique ou hilbertien est un espace de Fréchet.
2. L'espace $\mathcal{C}^\infty([a,b],\mathbb{K})$ est de Fréchet avec $p_n(f) = \sum_{i=0}^{n} \sup_{x\in[a,b]} |f^{(i)}(x)|$.
3. L'espace $\mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ est de Fréchet avec $p_n(f) = \sup\{\,|f(x)|:\ -n \leq x \leq n\,\}$.
4. Toute limite projective d'un système projectif (au plus) <u>dénombrable</u> d'espaces de Banach est un espace de Fréchet.
5. Si X est un alphabet fini, alors $\mathbb{K}[[X]]$ et $\mathbb{K}\langle\langle X\rangle\rangle$ sont des espaces de Fréchet (en tant que limite projective d'un nombre dénombrable d'espaces de dimension finie).
6. L'espace $\mathfrak{ti}(\mathbb{N},\mathbb{K})$ des matrices triangulaires inférieures indicées par $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ (algèbre d'incidence de $\mathbb{N}$ pour l'ordre opposé à l'ordre naturel).

Une algèbre de Fréchet est

- une $\mathbb{K}$-algèbre topologique dont l'espace vectoriel sous-jacent se trouve être un espace de Fréchet

Les algèbres de Fréchet

Définition

Une algèbre de Fréchet est

- une $\mathbb{K}$-algèbre topologique dont l'espace vectoriel sous-jacent se trouve être un espace de Fréchet

- cette topologie peut être donnée par une famille (séparante et au plus dénombrable) $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de semi-normes sous-multiplicatives, *i.e.*,

$$p_n(xy) \leq p_n(x)p_n(y)$$

pour tout n et tous x, y.

Une $\mathbb{K}$-algèbre topologique est une algèbre de Fréchet

$$\Leftrightarrow$$

c'est la limite projective d'un système projectif au plus dénombrable d'algèbres de Banach.

1. Une algèbre de Banach est fréchetique.

1. Une algèbre de Banach est fréchetique.
2. Pour un alphabet fini X, $\mathbb{K}[[X]]$ et $\mathbb{K}\langle\langle X\rangle\rangle$ sont des algèbres de Fréchet.

Les algèbres de Fréchet

Exemples

1. Une algèbre de Banach est fréchetique.
2. Pour un alphabet fini X, $\mathbb{K}[[X]]$ et $\mathbb{K}\langle\langle X\rangle\rangle$ sont des algèbres de Fréchet.
3. L'algèbre $\mathfrak{ti}(\mathbb{N},\mathbb{K})$ est de Fréchet.

Dans une algèbre de Fréchet unitaire A,

$$Exp(x) = \sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!}$$

a un sens pour tout élément x d'une algèbre de Fréchet. (Existence d'un calcul fonctionnel analytique.)

Dans une algèbre de Fréchet unitaire A,

$$Exp(x) = \sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!}$$

a un sens pour tout élément x d'une algèbre de Fréchet. (Existence d'un calcul fonctionnel analytique.)
On a les propriétés usuelles évidentes : $Exp(0) = 1_A$,

Dans une algèbre de Fréchet unitaire A,

$$Exp(x) = \sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!}$$

a un sens pour tout élément x d'une algèbre de Fréchet. (Existence d'un calcul fonctionnel analytique.)
On a les propriétés usuelles évidentes : $Exp(0) = 1_A$,
$Exp(-x) = Exp(x)^{-1}$,

Dans une algèbre de Fréchet unitaire A,

$$Exp(x) = \sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!}$$

a un sens pour tout élément x d'une algèbre de Fréchet. (Existence d'un calcul fonctionnel analytique.)
On a les propriétés usuelles évidentes : $Exp(0) = 1_A$, $Exp(-x) = Exp(x)^{-1}$, si $[x, y] = 0$, alors $Exp(x + y) = Exp(x)Exp(y)$.

Les algèbres de Fréchet

Exponentielle et logarithme

Dans une algèbre de Fréchet unitaire A,

$$Exp(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n!}$$

a un sens pour tout élément x d'une algèbre de Fréchet. (Existence d'un calcul fonctionnel analytique.)
On a les propriétés usuelles évidentes : $Exp(0) = 1_A$, $Exp(-x) = Exp(x)^{-1}$, si $[x, y] = 0$, alors $Exp(x + y) = Exp(x)Exp(y)$.
On peut également définir

$$Log(x) = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}(1_A - x)^n$$

pour certains $x \in A$ (on utilise une notion de spectre « local »),

Dans une algèbre de Fréchet unitaire A,

$$Exp(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n!}$$

a un sens pour tout élément x d'une algèbre de Fréchet. (Existence d'un calcul fonctionnel analytique.)
On a les propriétés usuelles évidentes : $Exp(0) = 1_A$, $Exp(-x) = Exp(x)^{-1}$, si $[x, y] = 0$, alors $Exp(x + y) = Exp(x)Exp(y)$.
On peut également définir

$$Log(x) = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}(1_A - x)^n$$

pour certains $x \in A$ (on utilise une notion de spectre « local »), de sorte que $Exp(Log(x)) = x$ (pour tout $x \in A$ admettant un logarithme).

Les algèbres de Fréchet

Exponentielle et logarithme

Dans une algèbre de Fréchet unitaire A,

$$Exp(x) = \sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!}$$

a un sens pour tout élément x d'une algèbre de Fréchet. (Existence d'un calcul fonctionnel analytique.)
On a les propriétés usuelles évidentes : $Exp(0) = 1_A$,
$Exp(-x) = Exp(x)^{-1}$, si $[x, y] = 0$, alors $Exp(x + y) = Exp(x)Exp(y)$.
On peut également définir

$$Log(x) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}(1_A - x)^n$$

pour certains $x \in A$ (on utilise une notion de spectre « local »), de sorte que $Exp(Log(x)) = x$ (pour tout $x \in A$ admettant un logarithme). On obtient donc une correspondance $Exp \leftrightarrow Log$ entre l'algèbre de Fréchet et son groupe des inversibles (similaire aux algèbres de Banach).

Remarques

1. Sur un anneau (commutatif avec unité) R contenant $\mathbb{Q}$ comme sous-anneau, on peut toujours calculer l'exponentielle d'une série sans terme constant, et d'une matrice triangulaire infinie nilpotente, ainsi que le logarithme d'une série de la forme $1 + zf$, et d'une matrice triangulaire infinie unipotente :

Remarques

1. Sur un anneau (commutatif avec unité) R contenant $\mathbb{Q}$ comme sous-anneau, on peut toujours calculer l'exponentielle d'une série sans terme constant, et d'une matrice triangulaire infinie nilpotente, ainsi que le logarithme d'une série de la forme $1 + zf$, et d'une matrice triangulaire infinie unipotente : par nilpotence topologique.

Remarques

1. Sur un anneau (commutatif avec unité) R contenant $\mathbb{Q}$ comme sous-anneau, on peut toujours calculer l'exponentielle d'une série sans terme constant, et d'une matrice triangulaire infinie nilpotente, ainsi que le logarithme d'une série de la forme $1 + zf$, et d'une matrice triangulaire infinie unipotente : par nilpotence topologique.

2. Dans les autres cas, quand $R = \mathbb{K}$, on doit utiliser la topologie de Fréchet.

Intégration d'un problème de Cauchy

On montre (modulo la définition d'un calcul différentiel et intégral élémentaire) que pour chaque x, l'application $z \mapsto Exp(zx)$ est dérivable (et même de classe $\mathcal{C}^\infty$), et que sa dérivée est $xExp(zx)$.

Intégration d'un problème de Cauchy

On montre (modulo la définition d'un calcul différentiel et intégral élémentaire) que pour chaque x, l'application $z \mapsto Exp(zx)$ est dérivable (et même de classe $\mathcal{C}^\infty$), et que sa dérivée est $x Exp(zx)$.

Théorème

Soient $x, x_0 \in A$ fixés. Le problème de Cauchy

$$u'(z) = xu(z)$$

avec condition initiale $u(0) = x_0$ admet une unique solution dérivable $u \colon \mathbb{K} \to A$, à savoir,

$$u(z) = Exp(zx)x_0 \ .$$

En utilisant astucieusement

En utilisant astucieusement

- qu'une algèbre de Fréchet est la limite projective d'algèbres de Banach

Les algèbres de Fréchet

Sous-groupe à un paramètre

En utilisant astucieusement

- qu'une algèbre de Fréchet est la limite projective d'algèbres de Banach

- que les sous-groupes à un paramètre réel tracés dans le groupes des inversibles d'une algèbre de Banach sont nécessairement de classe $\mathcal{C}^1$

En utilisant astucieusement

- qu'une algèbre de Fréchet est la limite projective d'algèbres de Banach

- que les sous-groupes à un paramètre réel tracés dans le groupes des inversibles d'une algèbre de Banach sont nécessairement de classe $\mathcal{C}^1$

J'ai prouvé :

Lemme

Tout sous-groupe à un paramètre réel tracé dans le groupe des inversibles d'une algèbre de Fréchet est de classe $\mathcal{C}^1$.

Puisqu'un sous-groupe à un paramètre γ est nécessairement dérivable,

Puisqu'un sous-groupe à un paramètre γ est nécessairement dérivable, on en déduit aisément que

$$\gamma'(t) = \gamma'(0)\gamma(t)$$

Les algèbres de Fréchet

Sous-groupe à un paramètre

Puisqu'un sous-groupe à un paramètre γ est nécessairement dérivable, on en déduit aisément que

$$\gamma'(t) = \gamma'(0)\gamma(t)$$

de sorte qu'il se trouve être solution du problème de Cauchy

$$u'(t) = \gamma'(0)u(t)$$

avec condition initiale $u(0) = 1_A$.

Puisqu'un sous-groupe à un paramètre γ est nécessairement dérivable, on en déduit aisément que

$$\gamma'(t) = \gamma'(0)\gamma(t)$$

de sorte qu'il se trouve être solution du problème de Cauchy

$$u'(t) = \gamma'(0)u(t)$$

avec condition initiale $u(0) = 1_A$.

Il s'ensuit (par unicité) que $\gamma(t) = Exp(t\gamma'(0))$.

Puisqu'un sous-groupe à un paramètre γ est nécessairement dérivable, on en déduit aisément que

$$\gamma'(t) = \gamma'(0)\gamma(t)$$

de sorte qu'il se trouve être solution du problème de Cauchy

$$u'(t) = \gamma'(0)u(t)$$

avec condition initiale $u(0) = 1_A$.

Il s'ensuit (par unicité) que $\gamma(t) = Exp(t\gamma'(0))$.

Remarques

1. Tout sous-groupe à un paramètre est lisse (*i.e.*, de classe $\mathcal{C}^\infty$).

Les algèbres de Fréchet

Sous-groupe à un paramètre

Puisqu'un sous-groupe à un paramètre γ est nécessairement dérivable, on en déduit aisément que

$$\gamma'(t) = \gamma'(0)\gamma(t)$$

de sorte qu'il se trouve être solution du problème de Cauchy

$$u'(t) = \gamma'(0)u(t)$$

avec condition initiale $u(0) = 1_A$.

Il s'ensuit (par unicité) que $\gamma(t) = Exp(t\gamma'(0))$.

Remarques

1. Tout sous-groupe à un paramètre est lisse (*i.e.*, de classe $\mathcal{C}^\infty$).
2. $\gamma'(0)$ est le générateur infinitésimal (ou vecteur tangent à l'identité) du sous-groupe à un paramètre.

Les algèbres de Fréchet

Sous-groupe à un paramètre

Puisqu'un sous-groupe à un paramètre γ est nécessairement dérivable, on en déduit aisément que

$$\gamma'(t) = \gamma'(0)\gamma(t)$$

de sorte qu'il se trouve être solution du problème de Cauchy

$$u'(t) = \gamma'(0)u(t)$$

avec condition initiale $u(0) = 1_A$.

Il s'ensuit (par unicité) que $\gamma(t) = Exp(t\gamma'(0))$.

Remarques

1. Tout sous-groupe à un paramètre est lisse (*i.e.*, de classe $\mathcal{C}^\infty$).
2. $\gamma'(0)$ est le générateur infinitésimal (ou vecteur tangent à l'identité) du sous-groupe à un paramètre.
3. Deux sous-groupes à un paramètre de même vecteur tangent sont égaux (*paradigme du vecteur tangent*).

Table des matières

Objectif

- Liens entre opérateurs continus et matrices infinies.

Objectif

- Liens entre opérateurs continus et matrices infinies.

- Étude de divers espaces (et algèbres) de matrices infinies.

Quelques notations

Soient X un ensemble, et R un anneau (commutatif avec unité).

Quelques notations

Soient X un ensemble, et R un anneau (commutatif avec unité). Étant donné $f \in R^X$ et $x \in X$, notons

$$\langle f \mid \delta_x \rangle = f(x)$$

Quelques notations

Soient X un ensemble, et R un anneau (commutatif avec unité). Étant donné $f \in R^X$ et $x \in X$, notons

$$\langle f \mid \delta_x \rangle = f(x)$$

de sorte que si $p \in R^{(X)}$, on ait

$$\langle f \mid p \rangle = \sum_{x \in X} f(x) p(x) \in R \ .$$

Quelques notations

Soient X un ensemble, et R un anneau (commutatif avec unité). Étant donné $f \in R^X$ et $x \in X$, notons

$$\langle f \mid \delta_x \rangle = f(x)$$

de sorte que si $p \in R^{(X)}$, on ait

$$\langle f \mid p \rangle = \sum_{x \in X} f(x) p(x) \in R \ .$$

Remarques

1. Il est clair que $\langle \cdot \mid \cdot \rangle \colon R^X \times R^{(X)} \to R$ est une forme R-bilinéaire non dégénérée,

Quelques notations

Soient X un ensemble, et R un anneau (commutatif avec unité). Étant donné $f \in R^X$ et $x \in X$, notons

$$\langle f \mid \delta_x \rangle = f(x)$$

de sorte que si $p \in R^{(X)}$, on ait

$$\langle f \mid p \rangle = \sum_{x \in X} f(x) p(x) \in R \ .$$

Remarques

1. Il est clair que $\langle \cdot \mid \cdot \rangle \colon R^X \times R^{(X)} \to R$ est une forme R-bilinéaire non dégénérée, qui met en dualité $R^{(X)}$ et son dual algébrique R^X.

Quelques notations

Soient X un ensemble, et R un anneau (commutatif avec unité). Étant donné $f \in R^X$ et $x \in X$, notons

$$\langle f \mid \delta_x \rangle = f(x)$$

de sorte que si $p \in R^{(X)}$, on ait

$$\langle f \mid p \rangle = \sum_{x \in X} f(x) p(x) \in R\ .$$

Remarques

1. Il est clair que $\langle \cdot \mid \cdot \rangle \colon R^X \times R^{(X)} \to R$ est une forme R-bilinéaire non dégénérée, qui met en dualité $R^{(X)}$ et son dual algébrique R^X.
2. Si R est un corps topologique séparé,

Quelques notations

Soient X un ensemble, et R un anneau (commutatif avec unité). Étant donné $f \in R^X$ et $x \in X$, notons

$$\langle f \mid \delta_x \rangle = f(x)$$

de sorte que si $p \in R^{(X)}$, on ait

$$\langle f \mid p \rangle = \sum_{x \in X} f(x) p(x) \in R \ .$$

Remarques

1. Il est clair que $\langle \cdot \mid \cdot \rangle \colon R^X \times R^{(X)} \to R$ est une forme R-bilinéaire non dégénérée, qui met en dualité $R^{(X)}$ et son dual algébrique R^X.
2. Si R est un corps topologique séparé, alors j'ai prouvé que $R^{(X)}$ est isomorphe au dual topologique de R^X avec la topologie produit (et cela quelle que soit la topologie de corps séparée sur R).

Quelques notations

Soient X un ensemble, et R un anneau (commutatif avec unité). Étant donné $f \in R^X$ et $x \in X$, notons

$$\langle f \mid \delta_x \rangle = f(x)$$

de sorte que si $p \in R^{(X)}$, on ait

$$\langle f \mid p \rangle = \sum_{x \in X} f(x) p(x) \in R \ .$$

Remarques

1. Il est clair que $\langle \cdot \mid \cdot \rangle \colon R^X \times R^{(X)} \to R$ est une forme R-bilinéaire non dégénérée, qui met en dualité $R^{(X)}$ et son dual algébrique R^X.
2. Si R est un corps topologique séparé, alors j'ai prouvé que $R^{(X)}$ est isomorphe au dual topologique de R^X avec la topologie produit (et cela quelle que soit la topologie de corps séparée sur R).
3. Sous les mêmes conditions précédentes, pour tout $f \in R^X$, la famille $(f(x)\delta_x)_{x \in X}$ est sommable de somme $f = \sum_{x \in X} f(x) \delta_x$.

Matrices en toute généralité

Soient X et Y deux ensembles, et R un anneau (commutatif avec unité).

Matrices en toute généralité

Soient X et Y deux ensembles, et R un anneau (commutatif avec unité).

Une matrice de format $X \times Y$ et à coefficients dans R est un élément du R-module $R^{X \times Y}$.

Matrices en toute généralité

Soient X et Y deux ensembles, et R un anneau (commutatif avec unité).

Une matrice de format $X \times Y$ et à coefficients dans R est un élément du R-module $R^{X \times Y}$.

À chaque application R-linéaire ϕ de R^X dans R^Y, on associe une matrice M_ϕ de format $Y \times X$ à coefficients dans R donnée par

Matrices en toute généralité

Soient X et Y deux ensembles, et R un anneau (commutatif avec unité).

Une matrice de format $X \times Y$ et à coefficients dans R est un élément du R-module $R^{X \times Y}$.

À chaque application R-linéaire ϕ de R^X dans R^Y, on associe une matrice M_ϕ de format $Y \times X$ à coefficients dans R donnée par

$$M_\phi(y, x) = \langle \phi(x) \mid \delta_y \rangle$$

(généralisation évidente de la matrice d'une application linéaire en dimension finie).

Puisque $(\delta_x)_x$ n'est pas une base algébrique de R^X dès que X est infini,

Matrices en toute généralité

Remarque

Puisque $(\delta_x)_x$ n'est pas une base algébrique de R^X dès que X est infini, on peut montrer qu'en général, la matrice M_ϕ ne caractérise pas l'application linéaire ϕ.

Matrices en toute généralité

Remarque

Puisque $(\delta_x)_x$ n'est pas une base algébrique de R^X dès que X est infini, on peut montrer qu'en général, la matrice M_ϕ ne caractérise pas l'application linéaire ϕ.

Il est en fait possible de prouver l'existence d'une application non nulle dont la matrice associée est nulle (preuve hautement non constructible !).

Matrices en toute généralité

Remarque

Pour simplifier : $X = Y$ est infini, et R est un corps quelconque.

Matrices en toute généralité

Remarque

Pour simplifier : $X = Y$ est infini, et R est un corps quelconque.

Par l'axiome du choix, on se donne une base algébrique $\mathcal{B}$ de R^X étendant la famille R-linéairement indépendante $(\delta_x)_x$.

Pour simplifier : $X = Y$ est infini, et R est un corps quelconque.

Par l'axiome du choix, on se donne une base algébrique $\mathcal{B}$ de R^X étendant la famille R-linéairement indépendante $(\delta_x)_x$.

Soit V le sous-espace engendré par $\mathcal{B} \setminus \{\, \delta_x \colon x \in X \,\} \neq \emptyset$ de sorte que $R^X = V \oplus R^{(X)}$.

Matrices en toute généralité

Remarque

Pour simplifier : $X = Y$ est infini, et R est un corps quelconque.

Par l'axiome du choix, on se donne une base algébrique $\mathcal{B}$ de R^X étendant la famille R-linéairement indépendante $(\delta_x)_x$.

Soit V le sous-espace engendré par $\mathcal{B} \setminus \{\, \delta_x \colon x \in X \,\} \neq \emptyset$ de sorte que $R^X = V \oplus R^{(X)}$.

Considérons la projection $\pi_V \neq 0$ sur V parallèlement à $R^{(X)}$.

Matrices en toute généralité

Remarque

Pour simplifier : $X = Y$ est infini, et R est un corps quelconque.

Par l'axiome du choix, on se donne une base algébrique $\mathcal{B}$ de R^X étendant la famille R-linéairement indépendante $(\delta_x)_x$.

Soit V le sous-espace engendré par $\mathcal{B} \setminus \{\, \delta_x \colon x \in X \,\} \neq \emptyset$ de sorte que $R^X = V \oplus R^{(X)}$.

Considérons la projection $\pi_V \neq 0$ sur V parallèlement à $R^{(X)}$.

Alors $\langle \pi_V(\delta_x) \mid \delta_y \rangle = 0$ quels que soient x, y de sorte que $M_{\pi_V} = 0$.

Matrices et opérateurs linéaires

On appelle matrice à lignes finies toute matrice $M \in R^{X \times Y}$ telle que quel que soit $x \in X$, l'ensemble $\{ y \in Y : M(x, y) \neq 0 \}$ est fini.

Matrices et opérateurs linéaires

On appelle matrice à lignes finies toute matrice $M \in R^{X \times Y}$ telle que quel que soit $x \in X$, l'ensemble $\{\, y \in Y \colon M(x,y) \neq 0 \,\}$ est fini.

On note $R^{X \times (Y)}$ l'ensemble des telles matrices (c'est un R-module).

Matrices et opérateurs linéaires

On appelle matrice à lignes finies toute matrice $M \in R^{X \times Y}$ telle que quel que soit $x \in X$, l'ensemble $\{ y \in Y : M(x, y) \neq 0 \}$ est fini.

On note $R^{X \times (Y)}$ l'ensemble des telles matrices (c'est un R-module).

Théorème

Soit R un corps topologique séparé.

Matrices et opérateurs linéaires

On appelle matrice à lignes finies toute matrice $M \in R^{X \times Y}$ telle que quel que soit $x \in X$, l'ensemble $\{ y \in Y : M(x, y) \neq 0 \}$ est fini.

On note $R^{X \times (Y)}$ l'ensemble des telles matrices (c'est un R-module).

Théorème

Soit R un corps topologique séparé.

Pour chaque ensemble Z, supposons que R^Z est muni de la topologie produit.

Matrices et opérateurs linéaires

On appelle matrice à lignes finies toute matrice $M \in R^{X \times Y}$ telle que quel que soit $x \in X$, l'ensemble $\{\, y \in Y \colon M(x, y) \neq 0 \,\}$ est fini.

On note $R^{X \times (Y)}$ l'ensemble des telles matrices (c'est un R-module).

Théorème

Soit R un corps topologique séparé.

Pour chaque ensemble Z, supposons que R^Z est muni de la topologie produit.

Les R-espaces vectoriels $\mathrm{Hom}_{R\text{-}\mathcal{VectTop}}(R^X, R^Y)$ et $R^{Y \times (X)}$ sont isomorphes par $\phi \mapsto M_\phi$.

Matrices et opérateurs linéaires

On appelle matrice à lignes finies toute matrice $M \in R^{X \times Y}$ telle que quel que soit $x \in X$, l'ensemble $\{ y \in Y : M(x,y) \neq 0 \}$ est fini.

On note $R^{X \times (Y)}$ l'ensemble des telles matrices (c'est un R-module).

Théorème

Soit R un corps topologique séparé.

Pour chaque ensemble Z, supposons que R^Z est muni de la topologie produit.

Les R-espaces vectoriels $\mathrm{Hom}_{R\text{-}\mathcal{VectTop}}(R^X, R^Y)$ et $R^{Y \times (X)}$ sont isomorphes par $\phi \mapsto M_\phi$.

En particulier, $\mathrm{End}_{R\text{-}\mathcal{VectTop}}(R^X)$ et $R^{X \times (X)}$ sont des algèbres isomorphes.

Matrices et opérateurs linéaires

On appelle matrice à lignes finies toute matrice $M \in R^{X \times Y}$ telle que quel que soit $x \in X$, l'ensemble $\{ y \in Y : M(x, y) \neq 0 \}$ est fini.

On note $R^{X \times (Y)}$ l'ensemble des telles matrices (c'est un R-module).

Théorème

Soit R un corps topologique séparé.

Pour chaque ensemble Z, supposons que R^Z est muni de la topologie produit.

Les R-espaces vectoriels $\mathrm{Hom}_{R\text{-}\mathcal{VectTop}}(R^X, R^Y)$ et $R^{Y \times (X)}$ sont isomorphes par $\phi \mapsto M_\phi$.

En particulier, $\mathrm{End}_{R\text{-}\mathcal{VectTop}}(R^X)$ et $R^{X \times (X)}$ sont des algèbres isomorphes.

$R^{X \times (X)}$ s'appelle l'algèbre des matrices finies en ligne.

Critère de continuité des applications linéaires

Corollaire

Si $\mathbb{K}$ est un corps et $M \in \mathbb{K}^{Y\times(X)}$, alors l'application linéaire $\phi_M \colon \mathbb{K}^X \to \mathbb{K}^Y$ définie par $\langle \phi_M(x) \mid \delta_y \rangle = M(y,x)$ est continue pour les topologies produits sur $\mathbb{K}^X$ et $\mathbb{K}^Y$, quelle que soit la topologie séparée de corps donnée à $\mathbb{K}$.

On remarque que $\mathfrak{ti}(\mathbb{N}, R) \subseteq R^{\mathbb{N}\times(\mathbb{N})}$

On remarque que $\mathfrak{ti}(\mathbb{N}, R) \subseteq R^{\mathbb{N}\times(\mathbb{N})}$ de sorte que toute matrice triangulaire infinie détermine de façon biunivoque un endomorphisme linéaire et continu de $R^{\mathbb{N}}$ (dès que R est un corps topologique séparé, et que $R^{\mathbb{N}}$ admet la topologie produit).

On remarque que $\mathfrak{ti}(\mathbb{N}, R) \subseteq R^{\mathbb{N}\times(\mathbb{N})}$ de sorte que toute matrice triangulaire infinie détermine de façon biunivoque un endomorphisme linéaire et continu de $R^{\mathbb{N}}$ (dès que R est un corps topologique séparé, et que $R^{\mathbb{N}}$ admet la topologie produit).

Rappelons également que $\mathfrak{ti}(\mathbb{N}, \mathbb{K})$ est une algèbre de Fréchet

On remarque que $\mathfrak{ti}(\mathbb{N}, R) \subseteq R^{\mathbb{N}\times(\mathbb{N})}$ de sorte que toute matrice triangulaire infinie détermine de façon biunivoque un endomorphisme linéaire et continu de $R^{\mathbb{N}}$ (dès que R est un corps topologique séparé, et que $R^{\mathbb{N}}$ admet la topologie produit).

Rappelons également que $\mathfrak{ti}(\mathbb{N}, \mathbb{K})$ est une algèbre de Fréchet (même si X et Y sont au plus dénombrables, l'algèbre $\mathbb{K}^{X\times(Y)}$ n'est pas de Fréchet : elle n'est pas complète et sa multiplication n'est pas continue).

Table des matières

Soit $\mathbb{K}$ un corps de caractéristique zéro.

Algèbre de Weyl

Définition

Soit $\mathbb{K}$ un corps de caractéristique zéro.

L'algèbre quotient de $\mathbb{K}\langle \mathrm{x}, \mathrm{y} \rangle$ par l'idéal bilatère engendré par la relation (inhomogène) $[\mathrm{x}, \mathrm{y}] = 1$ est l'algèbre de Weyl (d'indice 1), notée A.

Algèbre de Weyl

Définition

Soit $\mathbb{K}$ un corps de caractéristique zéro.

L'algèbre quotient de $\mathbb{K}\langle \mathrm{x}, \mathrm{y}\rangle$ par l'idéal bilatère engendré par la relation (inhomogène) $[\mathrm{x}, \mathrm{y}] = 1$ est l'algèbre de Weyl (d'indice 1), notée A.

On pose $a = \pi(\mathrm{x})$ et $a^\dagger = \pi(\mathrm{y})$ où $\pi \colon \mathbb{K}\langle \mathrm{x}, \mathrm{y}\rangle \to A$ désigne l'épimorphisme canonique.

Avec la nouvelle $\mathbb{Z}$-graduation (excès) de $\mathbb{K}\langle \mathtt{x}, \mathtt{y} \rangle$ donnée par

Avec la nouvelle $\mathbb{Z}$-graduation (excès) de $\mathbb{K}\langle \mathtt{x}, \mathtt{y} \rangle$ donnée par

$$\mathrm{exc}(\mathtt{y}) = -\mathrm{exc}(\mathtt{x}) = 1 \ ,$$

Avec la nouvelle $\mathbb{Z}$-graduation (excès) de $\mathbb{K}\langle \mathrm{x}, \mathrm{y}\rangle$ donnée par

$$\mathsf{exc}(\mathrm{y}) = -\mathsf{exc}(\mathrm{x}) = 1 \ ,$$

la relation $[\mathrm{x}, \mathrm{y}] = 1$ est homogène, Avec la nouvelle $\mathbb{Z}$-graduation (excès) de $\mathbb{K}\langle \mathtt{x}, \mathtt{y}\rangle$ donnée par

$$\mathsf{exc}(\mathtt{y}) = -\mathsf{exc}(\mathtt{x}) = 1 \ ,$$

la relation $[\mathtt{x}, \mathtt{y}] = 1$ est homogène, de sorte que A devient une algèbre $\mathbb{Z}$-graduée.

Avec la nouvelle $\mathbb{Z}$-graduation (excès) de $\mathbb{K}\langle \mathtt{x}, \mathtt{y}\rangle$ donnée par

$$\mathrm{exc}(\mathtt{y}) = -\mathrm{exc}(\mathtt{x}) = 1 \ ,$$

la relation $[\mathtt{x}, \mathtt{y}] = 1$ est homogène, de sorte que A devient une algèbre $\mathbb{Z}$-graduée.

Les éléments d'excès $n \in \mathbb{N}$ sont ceux appartenant au sous-espace vectoriel engendré par $\{\, (a^\dagger)^i a^j : i - j = n \,\}$ (car comme toute algèbre de polynômes tordus on dispose d'une base algèbrique « naturelle »).

Représentation

On définit une représentation de A sur $\mathbb{K}[[z]]$ de la façon suivante :

Représentation

On définit une représentation de A sur $\mathbb{K}[[z]]$ de la façon suivante :

- $\rho(\mathtt{x})(f) = \mathtt{z}f$.

Représentation

On définit une représentation de A sur $\mathbb{K}[[z]]$ de la façon suivante :

- $\rho(\mathrm{x})(f) = \mathtt{z}f$.
- $\rho(\mathrm{y})(f) = \frac{d}{d\mathtt{z}}f$.

Représentation

On définit une représentation de A sur $\mathbb{K}[[z]]$ de la façon suivante :

- $\rho(\mathrm{x})(f) = zf$.
- $\rho(\mathrm{y})(f) = \frac{d}{dz}f$.

Comme $\ker \pi \subseteq \ker \rho$, on obtient une représentation de A dans $\mathbb{K}[[z]]$ (c'est-à-dire un homomorphisme de $\mathbb{K}$-algèbres de A dans l'algèbre des endomorphismes linéaires $\mathrm{End}_{\mathbb{K}\text{-}\mathcal{V}ect}(\mathbb{K}[[z]])$ de $\mathbb{K}[[z]]$) que l'on note (par abus) encore ρ.

Représentation

On définit une représentation de A sur $\mathbb{K}[[z]]$ de la façon suivante :

- $\rho(\mathrm{x})(f) = zf$.
- $\rho(\mathrm{y})(f) = \frac{d}{dz}f$.

Comme $\ker \pi \subseteq \ker \rho$, on obtient une représentation de A dans $\mathbb{K}[[z]]$ (c'est-à-dire un homomorphisme de $\mathbb{K}$-algèbres de A dans l'algèbre des endomorphismes linéaires $\mathrm{End}_{\mathbb{K}\text{-}\mathcal{V}ect}(\mathbb{K}[[z]])$ de $\mathbb{K}[[z]]$) que l'on note (par abus) encore ρ.

Cette représentation est fidèle.

Représentation

Convention

À partir de maintenant, nous supposons que $\mathbb{K} \in \{ \mathbb{R}, \mathbb{C} \}$ avec la topologie usuelle, et $\mathbb{K}[[z]]$ est muni de sa topologie d'espace de Fréchet.

Représentation

Convention

À partir de maintenant, nous supposons que $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ avec la topologie usuelle, et $\mathbb{K}[[z]]$ est muni de sa topologie d'espace de Fréchet.

Lemme

Quel que soit $\Omega \in A$, $M_{\rho(\Omega)} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N} \times (\mathbb{N})}$ (on emploie par exemple la « base » $(z^n)_n$ de $\mathbb{K}[[z]] \cong \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$),

Représentation

Convention

À partir de maintenant, nous supposons que $\mathbb{K} \in \{ \mathbb{R}, \mathbb{C} \}$ avec la topologie usuelle, et $\mathbb{K}[[z]]$ est muni de sa topologie d'espace de Fréchet.

Lemme

Quel que soit $\Omega \in A$, $M_{\rho(\Omega)} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}\times(\mathbb{N})}$ (on emploie par exemple la « base » $(z^n)_n$ de $\mathbb{K}[[z]] \cong \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$),

de sorte que $\rho(\Omega)$ est un endomorphisme linéaire et continu de $\mathbb{K}[[z]]$.

Considérons un opérateur Ω homogène d'excès $n \in \mathbb{Z}$.

Considérons un opérateur Ω homogène d'excès $n \in \mathbb{Z}$.

La matrice $M_{\rho(\Omega)}$ est :

- strictement triangulaire inférieure quand $n > 0$,

Considérons un opérateur Ω homogène d'excès $n \in \mathbb{Z}$.

La matrice $M_{\rho(\Omega)}$ est :

- strictement triangulaire inférieure quand $n > 0$,
- diagonale quand $n = 0$,

Considérons un opérateur Ω homogène d'excès $n \in \mathbb{Z}$.

La matrice $M_{\rho(\Omega)}$ est :

- strictement triangulaire inférieure quand $n > 0$,
- diagonale quand $n = 0$,
- strictement triangulaire supérieure quand $n < 0$.

Considérons un opérateur Ω homogène d'excès $n \in \mathbb{Z}$.

La matrice $M_{\rho(\Omega)}$ est :

- strictement triangulaire inférieure quand $n > 0$,
- diagonale quand $n = 0$,
- strictement triangulaire supérieure quand $n < 0$.

Il s'ensuit que l'exponentielle de $M_{\rho(\Omega)}$ (et donc de $\rho(\Omega)$) existe et se calcule dans la topologie de Fréchet de $\mathfrak{ti}(\mathbb{N}, \mathbb{K})$ pour des opérateurs homogènes d'excès ≥ 0.

Exponentielle d'opérateurs différentiels du 1er ordre au plus

Nous souhaitons maintenant tirer parti de la graduation de A afin de calculer l'exponentielle d'opérateurs dont l'image par ρ est de la forme

$$P\frac{d}{dz} + Q \ .$$

Exponentielle d'opérateurs différentiels du 1er ordre au plus

Nous souhaitons maintenant tirer parti de la graduation de A afin de calculer l'exponentielle d'opérateurs dont l'image par ρ est de la forme

$$P\frac{d}{dz} + Q\ .$$

On effectue cela en deux étapes :

Exponentielle d'opérateurs différentiels du 1er ordre au plus

Nous souhaitons maintenant tirer parti de la graduation de A afin de calculer l'exponentielle d'opérateurs dont l'image par ρ est de la forme

$$P\frac{d}{dz} + Q \ .$$

On effectue cela en deux étapes :

1. On commence par intégrer le champ de vecteurs $P\frac{d}{dz}$.

Exponentielle d'opérateurs différentiels du 1er ordre au plus

Nous souhaitons maintenant tirer parti de la graduation de A afin de calculer l'exponentielle d'opérateurs dont l'image par ρ est de la forme

$$P\frac{d}{dz} + Q \ .$$

On effectue cela en deux étapes :

1. On commence par intégrer le champ de vecteurs $P\frac{d}{dz}$.
2. Puis le cas général est traité en interprétant $P\frac{d}{dz} + Q$ comme le conjugué d'un champ de vecteurs.

Supposons donné $\omega \in \mathbb{K}\langle \mathtt{x}, \mathtt{y} \rangle$ tel que

$$\rho(\pi(\omega)) = P\frac{d}{dz}$$

où $P \in \mathtt{K}[\mathtt{z}]$ est de degré ≥ 1.

Supposons donné $\omega \in \mathbb{K}\langle \mathtt{x}, \mathtt{y} \rangle$ tel que

$$\rho(\pi(\omega)) = P\frac{d}{dz}$$

où $P \in \mathtt{K}[\mathtt{z}]$ est de degré ≥ 1.

Ainsi $\pi(\omega) \in A$ est une somme d'éléments homogènes d'excès ≥ 0.

Exponentielle d'opérateurs différentiels du 1er ordre au plus

L'exponentielle d'une dérivation est un automorphisme

Supposons donné $\omega \in \mathbb{K}\langle \mathtt{x}, \mathtt{y} \rangle$ tel que

$$\rho(\pi(\omega)) = P\frac{d}{dz}$$

où $P \in \mathbb{K}[\mathtt{z}]$ est de degré ≥ 1.

Ainsi $\pi(\omega) \in A$ est une somme d'éléments homogènes d'excès ≥ 0.

Lemme

L'exponentielle $Exp(tP\frac{d}{dz}) \in \mathrm{Aut}_{\mathbb{K}\text{-}\mathcal{AlgTop}}(\mathbb{K}[[\mathtt{z}]])$.

Exponentielle d'opérateurs différentiels du 1er ordre au plus

L'exponentielle d'une dérivation est un automorphisme

Supposons donné $\omega \in \mathbb{K}\langle \mathtt{x}, \mathtt{y} \rangle$ tel que

$$\rho(\pi(\omega)) = P\frac{d}{dz}$$

où $P \in \mathbb{K}[z]$ est de degré ≥ 1.

Ainsi $\pi(\omega) \in A$ est une somme d'éléments homogènes d'excès ≥ 0.

Lemme

L'exponentielle $Exp(tP\frac{d}{dz}) \in \mathrm{Aut}_{\mathbb{K}\text{-}\mathcal{AlgTop}}(\mathbb{K}[[z]])$.

Il existe une série formelle sans terme constant $s_t \in \mathbb{K}[[z]]$ telle que

$$Exp(tP\frac{d}{dz})(f) = f \circ s_t$$

pour tout $f \in \mathbb{K}[[z]]$.

L'objectif est maintenant de calculer explicitement la série s_t.

L'objectif est maintenant de calculer explicitement la série s_t.

Évacuons d'emblée le cas où $P = \mathbf{z}$:

L'objectif est maintenant de calculer explicitement la série s_t.

Évacuons d'emblée le cas où $P = \mathtt{z}$:

$$Exp(t\mathtt{z}\frac{d}{d\mathtt{z}})(f) = f(e^t\mathtt{z}) \ .$$

Supposons que $\deg(P) > 1$.

Supposons que $\deg(P) > 1$. Dans ce cas, nous opérons par intégration d'un champ de vecteurs continu :

Supposons que $\deg(P) > 1$. Dans ce cas, nous opérons par intégration d'un champ de vecteurs continu :

Lemme

Soit I un intervalle ouvert (non vide) de $\mathbb{R}$.

Supposons que $\deg(P) > 1$. Dans ce cas, nous opérons par intégration d'un champ de vecteurs continu :

Lemme

Soit I un intervalle ouvert (non vide) de $\mathbb{R}$.

Soit $P\colon I \to \mathbb{R}$ une application continue telle que $P(x) \neq 0$ pour $x \in I$.
Soit $x_0 \in I$.

Supposons que $\deg(P) > 1$. Dans ce cas, nous opérons par intégration d'un champ de vecteurs continu :

Lemme

Soit I un intervalle ouvert (non vide) de $\mathbb{R}$.

Soit $P\colon I \to \mathbb{R}$ une application continue telle que $P(x) \neq 0$ pour $x \in I$. Soit $x_0 \in I$.

On définit l'application $u\colon I \to \mathbb{R}$ par $u(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{dt}{p(t)}$.

Supposons que $\deg(P) > 1$. Dans ce cas, nous opérons par intégration d'un champ de vecteurs continu :

Lemme

Soit I un intervalle ouvert (non vide) de $\mathbb{R}$.

Soit $P\colon I \to \mathbb{R}$ une application continue telle que $P(x) \neq 0$ pour $x \in I$. Soit $x_0 \in I$.

On définit l'application $u\colon I \to \mathbb{R}$ par $u(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{dt}{p(t)}$.

Alors u est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme,

Supposons que $\deg(P) > 1$. Dans ce cas, nous opérons par intégration d'un champ de vecteurs continu :

Lemme

Soit I un intervalle ouvert (non vide) de $\mathbb{R}$.

Soit $P\colon I \to \mathbb{R}$ une application continue telle que $P(x) \neq 0$ pour $x \in I$. Soit $x_0 \in I$.

On définit l'application $u\colon I \to \mathbb{R}$ par $u(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{dt}{p(t)}$.

Alors u est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme, et l'application $\gamma\colon u(I) \to I$ donnée par $\gamma(t) = u^{-1}(t)$ est l'unique solution au problème de Cauchy $\gamma'(t) = P(\gamma(t))$ avec condition initiale $\gamma(0) = x_0$.

Posons $s_t(x) = u^{-1}(u(x) + t)$ (pour x, t suffisamment petits).

Exponentielle d'opérateurs différentiels du 1er ordre au plus

Calcul de s_t

Posons $s_t(x) = u^{-1}(u(x) + t)$ (pour x, t suffisamment petits).

Il est alors clair qu'au moins localement,

$$s_{t_1+t_2}(x) = s_{t_1}(s_{t_2}(x)) \text{ et } s_0(x) = x$$

(sous-groupe à un paramètre local).

Posons $s_t(x) = u^{-1}(u(x) + t)$ (pour x, t suffisamment petits).

Il est alors clair qu'au moins localement,

$$s_{t_1+t_2}(x) = s_{t_1}(s_{t_2}(x)) \text{ et } s_0(x) = x$$

(sous-groupe à un paramètre local).

Lorsque $P \in \mathbb{K}[z]$, $\deg(P) > 1$, alors $s_t \in \mathbb{K}[[z]]$.

Posons $s_t(x) = u^{-1}(u(x) + t)$ (pour x, t suffisamment petits).

Il est alors clair qu'au moins localement,

$$s_{t_1+t_2}(x) = s_{t_1}(s_{t_2}(x)) \text{ et } s_0(x) = x$$

(sous-groupe à un paramètre local).

Lorsque $P \in \mathbb{K}[\mathrm{z}]$, $\deg(P) > 1$, alors $s_t \in \mathbb{K}[[\mathrm{z}]]$.

Par exemple, pour $P = \mathrm{z}^n$, $n > 1$, alors

$$s_t = \frac{\mathrm{z}}{(1 - t(n-1)\mathrm{z}^{n-1})^{\frac{1}{n-1}}} \ .$$

Supposons donné $\omega \in \mathbb{K}\langle \mathrm{x}, \mathrm{y} \rangle$ tel que

$$\rho(\pi(\omega)) = P \frac{d}{dz} + Q$$

(somme d'un champ de vecteurs et d'un champ scalaire) où $P \in \mathbb{K}[z]$ est de degré ≥ 1 et $Q \in \mathbb{K}[z]$.

Exponentielle d'opérateurs différentiels du 1er ordre au plus

Champ affine

Supposons donné $\omega \in \mathbb{K}\langle \mathrm{x}, \mathrm{y} \rangle$ tel que

$$\rho(\pi(\omega)) = P\frac{d}{dz} + Q$$

(somme d'un champ de vecteurs et d'un champ scalaire) où $P \in \mathbb{K}[z]$ est de degré ≥ 1 et $Q \in \mathbb{K}[z]$.

Pour obtenir l'exponentielle d'un tel opérateur, on va tirer parti du calcul effectué dans le cadre d'un opérateur homogène à une seule dérivation.

Exponentielle d'opérateurs différentiels du 1er ordre au plus

Champ affine = conjugué d'un champ de vecteurs

On suit l'intuition suivante :

Exponentielle d'opérateurs différentiels du 1er ordre au plus

Champ affine = conjugué d'un champ de vecteurs

On suit l'intuition suivante :

Supposons donné $P\colon I \to \mathbb{R}$ comme dans le lemme précédent.

Exponentielle d'opérateurs différentiels du 1er ordre au plus

Champ affine = conjugué d'un champ de vecteurs

On suit l'intuition suivante :

Supposons donné $P\colon I \to \mathbb{R}$ comme dans le lemme précédent.

Sur I, on pose $u(x) = e^{\int_{x_0}^{x} \frac{Q(t)}{P(t)} dt}$.

Exponentielle d'opérateurs différentiels du 1er ordre au plus

Champ affine = conjugué d'un champ de vecteurs

On suit l'intuition suivante :

Supposons donné $P \colon I \to \mathbb{R}$ comme dans le lemme précédent.

Sur I, on pose $u(x) = e^{\int_{x_0}^{x} \frac{Q(t)}{P(t)} dt}$.

On vérifie facilement la formule de conjugaison suivante

$$\rho(\pi(\omega)) = u^{-1} \left(P \frac{d}{dz} \right) u \ .$$

Exponentielle d'opérateurs différentiels du 1er ordre au plus

Champ affine = conjugué d'un champ de vecteurs

On suit l'intuition suivante :

Supposons donné $P\colon I \to \mathbb{R}$ comme dans le lemme précédent.

Sur I, on pose $u(x) = e^{\int_{x_0}^{x} \frac{Q(t)}{P(t)} dt}$.

On vérifie facilement la formule de conjugaison suivante

$$\rho(\pi(\omega)) = u^{-1} \left(P \frac{d}{dz} \right) u \ .$$

Cela signifie que $\rho(\pi(\omega))$ agit sur une série f comme la composition de :

- la multiplication de f par u,
- l'action du champ de vecteurs $P\frac{d}{dz}$ sur uf,
- la division par u.

Exponentielle d'opérateurs différentiels du 1er ordre au plus

Champ affine = conjugué d'un champ de vecteurs

En utilisant le fait que l'exponentiation commute avec la conjugaison, l'exponentielle devient

$$Exp(t(P\frac{d}{dz} + Q)) = u^{-1} Exp(tP\frac{d}{dz})u \ .$$

Exponentielle d'opérateurs différentiels du 1er ordre au plus

Champ affine = conjugué d'un champ de vecteurs

En utilisant le fait que l'exponentiation commute avec la conjugaison, l'exponentielle devient

$$Exp(t(P\frac{d}{dz}+Q)) = u^{-1}Exp(tP\frac{d}{dz})u \ .$$

Compte tenu des calculs déjà effectués :

$$Exp(t(P\frac{d}{dz}+Q)(f) = \left(\frac{u\circ s_t}{u}\right) f\circ s_t$$

où s_t est la série associée à l'opérateur $Exp(tP\frac{d}{dz})$.

Soit $\Omega = (a^\dagger)^2 a a^\dagger$.

Exponentielle d'opérateurs différentiels du 1er ordre au plus

Exemple

Soit $\Omega = (a^\dagger)^2 a a^\dagger$.

On a la forme conjuguée

$$\rho(\Omega) = z^2 \frac{d}{dz} z = z^{-1} \left(z^3 \frac{d}{dz} \right) z \ .$$

Soit $\Omega = (a^\dagger)^2 a a^\dagger$.

On a la forme conjuguée

$$\rho(\Omega) = z^2 \frac{d}{dz} z = z^{-1} \left(z^3 \frac{d}{dz} \right) z \ .$$

En utilisant la procédure précédente, on obtient le sous-groupe à un paramètre :

$$Exp(t\rho(\Omega))(f) = \sqrt{\frac{1}{1-2tz^2}} f\left(\frac{z}{\sqrt{1-2tz^2}} \right) \ .$$

Table des matières

Soient V un espace vectoriel de dimension infinie dénombrable sur un corps $\mathbb{K}$ quelconque, et $E = (e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une base distinguée.

Opérateurs montants et descendants

Généralisation de l'algèbre de Weyl

Soient V un espace vectoriel de dimension infinie dénombrable sur un corps $\mathbb{K}$ quelconque, et $E = (e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une base distinguée.

L'opérateur montant R_E associé à la base E est

$$R_E e_n = e_{n+1} \ .$$

Opérateurs montants et descendants

Généralisation de l'algèbre de Weyl

Soient V un espace vectoriel de dimension infinie dénombrable sur un corps $\mathbb{K}$ quelconque, et $E = (e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une base distinguée.

L'opérateur montant R_E associé à la base E est

$$R_E e_n = e_{n+1} \ .$$

L'opérateur descendant L_E associé à la base E est

$$L_E e_{n+1} = e_n, \ L_E e_0 = 0 \ .$$

Opérateurs montants et descendants

Généralisation de l'algèbre de Weyl

Soient V un espace vectoriel de dimension infinie dénombrable sur un corps $\mathbb{K}$ quelconque, et $E = (e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une base distinguée.

L'opérateur montant R_E associé à la base E est

$$R_E e_n = e_{n+1} \ .$$

L'opérateur descendant L_E associé à la base E est

$$L_E e_{n+1} = e_n, \ L_E e_0 = 0 \ .$$

Par exemple en caractéristique zéro, $\mathrm{a}^\dagger$ est l'opérateur montant associé à la base des monômes $(\mathrm{z}^n)_n$, et a est l'opérateur descendant associé à la base $(\frac{\mathrm{z}^n}{n!})_n$.

L'algèbre de Weyl est dense

Une conséquence immédiate du théorème de densité de Jacobson : l'algèbre de Weyl A (vue comme une algèbre d'opérateurs différentiels) est dense (au sens de la topologie compact-ouvert) dans $\mathrm{End}_{\mathbb{K}\text{-}\mathsf{Vect}}(\mathbb{K}[z])$.

L'algèbre de Weyl est dense

Une conséquence immédiate du théorème de densité de Jacobson : l'algèbre de Weyl A (vue comme une algèbre d'opérateurs différentiels) est dense (au sens de la topologie compact-ouvert) dans $\mathrm{End}_{\mathbb{K}\text{-}\mathsf{Vect}}(\mathbb{K}[z])$.

Il est même possible de calculer explicitement une suite d'éléments de A convergeant vers un endomorphisme donné.

L'algèbre de Weyl est dense

Une conséquence immédiate du théorème de densité de Jacobson : l'algèbre de Weyl A (vue comme une algèbre d'opérateurs différentiels) est dense (au sens de la topologie compact-ouvert) dans $\mathrm{End}_{\mathbb{K}\text{-}\mathrm{Vect}}(\mathbb{K}[z])$.

Il est même possible de calculer explicitement une suite d'éléments de A convergeant vers un endomorphisme donné.

Par exemple, l'opérateur I d'intégration usuel des polynômes peut être vu comme un opérateur différentiel de degré infini (!) :

$$I = \sum_{n \geq 0} (-1)^n \frac{z^{n+1}}{(n+1)!} \frac{d^n}{dz}$$

(somme d'une famille sommable).

Généralisation au cas des opérateurs d'échelle

Théorème

Soit V un espace vectoriel de dimension infinie dénombrable sur un corps $\mathbb{K}$ quelconque.

Généralisation au cas des opérateurs d'échelle

Théorème

Soit V un espace vectoriel de dimension infinie dénombrable sur un corps $\mathbb{K}$ quelconque.

Soient E et F deux bases de V telles que $\lambda e_0 = f_0$.

Généralisation au cas des opérateurs d'échelle

Théorème

Soit V un espace vectoriel de dimension infinie dénombrable sur un corps $\mathbb{K}$ quelconque.

Soient E et F deux bases de V telles que $\lambda e_0 = f_0$.

Pour chaque $\phi \in \mathrm{End}_{\mathbb{K}\text{-}\mathcal{V}ect}(V)$, il existe une unique suite de polynômes $(P_n)_n$ en une indéterminée $\mathtt{z}$ telle que :

$$\phi = \sum_{n \geq 0} P_n(R_E) L_F^n$$

(somme d'une famille sommable).

Généralisation au cas des opérateurs d'échelle

Pour la démonstration j'ai utilisé les faits évidents suivants :

1. Si $A = (a_n)_n$ est une base de V, alors l'application $P = \sum_{n\geq 0} P_n z^n \in \mathbb{K}[z] \mapsto P(A) = \sum_{n\geq 0} P_n a_n$ est un isomorphisme $\mathbb{K}$-linéaire.
2. Quel que soit $P \in \mathbb{K}[z]$, $P(R_E)e_0 = P(E)$.

Preuve

Par récurrence :

- $P_0(E) = \lambda^{-1}\phi(f_0)$.
- $\lambda P_{n+1}(E) = \phi(f_{n+1}) - \sum_{k=0}^{n} P_k(R_E) f_{n+1-k}$.

Remarque

Commutateur

L'opérateur « diagonal » $[L_F, R_E]$ s'écrit également sous la forme $\sum_{n\geq 0} P_n(R_E)L_F^n$ de sorte que l'on obtient une relation de commutation

$$L_F R_E = P_0(R_E) + (P_1(R_E) + R_E)L_F + \sum_{n\geq 2} P_n(R_E)L_F^n \ .$$

Remarque

Il est possible d'étendre le résultat précédent au cas d'opérateurs linéaires et continus sur un certain complété $\widehat{V}$ de l'espace V.

Remarque

Il est possible d'étendre le résultat précédent au cas d'opérateurs linéaires et continus sur un certain complété $\widehat{V}$ de l'espace V.

Les éléments de $\widehat{V}$ sont des « combinaisons linéaires » infinies

$$\sum_{n\geq 0} \lambda_n e_n$$

par rapport à une base $(e_n)_n$ de V.

Remarque

Il est possible d'étendre le résultat précédent au cas d'opérateurs linéaires et continus sur un certain complété $\widehat{V}$ de l'espace V.

Les éléments de $\widehat{V}$ sont des « combinaisons linéaires » infinies

$$\sum_{n \geq 0} \lambda_n e_n$$

par rapport à une base $(e_n)_n$ de V.

On utilise de façon essentielle que

$$\widehat{V}' \cong V$$

Remarque

Il est possible d'étendre le résultat précédent au cas d'opérateurs linéaires et continus sur un certain complété $\widehat{V}$ de l'espace V.

Les éléments de $\widehat{V}$ sont des « combinaisons linéaires » infinies

$$\sum_{n \geq 0} \lambda_n e_n$$

par rapport à une base $(e_n)_n$ de V.

On utilise de façon essentielle que

$$\widehat{V}' \cong V$$

et

$$V^* \cong \widehat{V} \ .$$