Formule d'inversion de Möbius pour les monoïdes à zéro

Laurent Poinsot

LIPN - UMR CNRS 7030
Université Paris-Nord XIII - Institut Galilée

Séminaire Combinatoire & Algorithmes

Le 5 janvier 2012 à l'Université de Rouen

Table des matières

Table des matières

Ce travail est tiré de :

Möbius inversion formula for monoids with zero,

Laurent Poinsot, Gérard H. E. Duchamp et Christophe Tollu,
Semigroup Forum, volume 81, numéro 3, pages 446–460, 2010.

Soit M l'ensemble
$\{ 0, 1, a, b, c, ab, ac, ba, bc, ca, cb, abc, acb, bac, bca, cab, cba \}$.

Soit M l'ensemble
$\{ 0, 1, a, b, c, ab, ac, ba, bc, ca, cb, abc, acb, bac, bca, cab, cba \}$.

C'est un monoïde pour l'opération $w_1 \cdot w_2$ qui est la concaténation usuelle $w_1 w_2$ si les mots w_1, w_2 de M n'ont pas de lettre commune, et 0 sinon.

Soit M l'ensemble
$\{ 0, 1, a, b, c, ab, ac, ba, bc, ca, cb, abc, acb, bac, bca, cab, cba \}$.

C'est un monoïde pour l'opération $w_1 \cdot w_2$ qui est la concaténation usuelle $w_1 w_2$ si les mots w_1, w_2 de M n'ont pas de lettre commune, et 0 sinon.

Soit ζ_0 la série caractéristique $\zeta_0 = \sum_{w \in M_0} w$ de $M_0 = M \setminus \{ 0 \}$.

Soit M l'ensemble
$\{0, 1, a, b, c, ab, ac, ba, bc, ca, cb, abc, acb, bac, bca, cab, cba\}$.

C'est un monoïde pour l'opération $w_1 \cdot w_2$ qui est la concaténation usuelle $w_1 w_2$ si les mots w_1, w_2 de M n'ont pas de lettre commune, et 0 sinon.

Soit ζ_0 la série caractéristique $\zeta_0 = \sum_{w \in M_0} w$ de $M_0 = M \setminus \{0\}$.

Cette série est inversible (par rapport à la convolution).

Soit M l'ensemble
$\{0, 1, a, b, c, ab, ac, ba, bc, ca, cb, abc, acb, bac, bca, cab, cba\}$.

C'est un monoïde pour l'opération $w_1 \cdot w_2$ qui est la concaténation usuelle $w_1 w_2$ si les mots w_1, w_2 de M n'ont pas de lettre commune, et 0 sinon.

Soit ζ_0 la série caractéristique $\zeta_0 = \sum_{w \in M_0} w$ de $M_0 = M \setminus \{0\}$.

Cette série est inversible (par rapport à la convolution). Autrement dit, il existe une série μ_0 telle que $\zeta_0 \mu_0 = 1$.

Soit M l'ensemble
$\{0, 1, a, b, c, ab, ac, ba, bc, ca, cb, abc, acb, bac, bca, cab, cba\}$.

C'est un monoïde pour l'opération $w_1 \cdot w_2$ qui est la concaténation usuelle $w_1 w_2$ si les mots w_1, w_2 de M n'ont pas de lettre commune, et 0 sinon.

Soit ζ_0 la série caractéristique $\zeta_0 = \sum_{w \in M_0} w$ de $M_0 = M \setminus \{0\}$.

Cette série est inversible (par rapport à la convolution). Autrement dit, il existe une série μ_0 telle que $\zeta_0 \mu_0 = 1$.

Un simple calcul montre que

$$\mu_0 = 1 - a - b - c \ .$$

Soit M l'ensemble
$\{0, 1, a, b, c, ab, ac, ba, bc, ca, cb, abc, acb, bac, bca, cab, cba\}$.

C'est un monoïde pour l'opération $w_1 \cdot w_2$ qui est la concaténation usuelle $w_1 w_2$ si les mots w_1, w_2 de M n'ont pas de lettre commune, et 0 sinon.

Soit ζ_0 la série caractéristique $\zeta_0 = \sum_{w \in M_0} w$ de $M_0 = M \setminus \{0\}$.

Cette série est inversible (par rapport à la convolution). Autrement dit, il existe une série μ_0 telle que $\zeta_0 \mu_0 = 1$.

Un simple calcul montre que

$$\mu_0 = 1 - a - b - c \ .$$

La fonction de Möbius μ_0 de M est ainsi identique à celle du monoïde libre $\{\ a, b, c\ \}^*$.

Plus généralement, soit X un ensemble quelconque (éventuellement de cardinal infini quelconque).

Plus généralement, soit X un ensemble quelconque (éventuellement de cardinal infini quelconque). On considère l'ensemble M des mots de X^* dont toutes les lettres sont distinctes, auquel on adjoint un élément noté 0.

Plus généralement, soit X un ensemble quelconque (éventuellement de cardinal infini quelconque). On considère l'ensemble M des mots de X^* dont toutes les lettres sont distinctes, auquel on adjoint un élément noté 0.

Cet ensemble, $M = M_0 \sqcup \{ 0 \}$, est un monoïde pour la même opération que celle définie au transparent précédent.

Plus généralement, soit X un ensemble quelconque (éventuellement de cardinal infini quelconque). On considère l'ensemble M des mots de X^* dont toutes les lettres sont distinctes, auquel on adjoint un élément noté 0.

Cet ensemble, $M = M_0 \sqcup \{ 0 \}$, est un monoïde pour la même opération que celle définie au transparent précédent.

La série caractéristique de M_0, $\zeta_0 = \sum_{w \in M_0} w$, est inversible et son inverse est $\mu_0 = 1 - \sum_{x \in X} x$. (Le calcul de $\mu_0(w)$ se fait par récurrence sur la longueur du mot w.)

Plus généralement, soit X un ensemble quelconque (éventuellement de cardinal infini quelconque). On considère l'ensemble M des mots de X^* dont toutes les lettres sont distinctes, auquel on adjoint un élément noté 0.

Cet ensemble, $M = M_0 \sqcup \{ 0 \}$, est un monoïde pour la même opération que celle définie au transparent précédent.

La série caractéristique de M_0, $\zeta_0 = \sum_{w \in M_0} w$, est inversible et son inverse est $\mu_0 = 1 - \sum_{x \in X} x$. (Le calcul de $\mu_0(w)$ se fait par récurrence sur la longueur du mot w.)

Or μ_0 est exactement la fonction de Möbius du monoïde libre X^*.

Plus généralement, soit X un ensemble quelconque (éventuellement de cardinal infini quelconque). On considère l'ensemble M des mots de X^* dont toutes les lettres sont distinctes, auquel on adjoint un élément noté 0.

Cet ensemble, $M = M_0 \sqcup \{ 0 \}$, est un monoïde pour la même opération que celle définie au transparent précédent.

La série caractéristique de M_0, $\zeta_0 = \sum_{w \in M_0} w$, est inversible et son inverse est $\mu_0 = 1 - \sum_{x \in X} x$. (Le calcul de $\mu_0(w)$ se fait par récurrence sur la longueur du mot w.)

Or μ_0 est exactement la fonction de Möbius du monoïde libre X^*.

L'objectif de cet exposé est d'expliquer ce phénomène en introduisant la notion de formule d'inversion de Möbius pour les monoïdes à zéro.

Table des matières

La formule d'inversion de Möbius est connue en théorie des nombres depuis le XIX^{e} siècle.

La formule d'inversion de Möbius est connue en théorie des nombres depuis le XIX^{e} siècle.

Soient f et g deux applications à valeurs réelles ou complexes, définies sur l'ensemble des entiers naturels non nuls $\mathbb{N}_0$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

La formule d'inversion de Möbius est connue en théorie des nombres depuis le XIX^e siècle.

Soient f et g deux applications à valeurs réelles ou complexes, définies sur l'ensemble des entiers naturels non nuls $\mathbb{N}_0$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

- $\forall n > 0$, $g(n) = \sum_{d|n} f(d)$.

La formule d'inversion de Möbius est connue en théorie des nombres depuis le XIX$^{\text{e}}$ siècle.

Soient f et g deux applications à valeurs réelles ou complexes, définies sur l'ensemble des entiers naturels non nuls $\mathbb{N}_0$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

- $\forall n > 0,\ g(n) = \displaystyle\sum_{d|n} f(d)$.
- $\forall n > 0,\ f(n) = \displaystyle\sum_{d|n} \mu(n/d) g(d)$.

La formule d'inversion de Möbius est connue en théorie des nombres depuis le XIX$^{\text{e}}$ siècle.

Soient f et g deux applications à valeurs réelles ou complexes, définies sur l'ensemble des entiers naturels non nuls $\mathbb{N}_0$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

- $\forall n > 0$, $g(n) = \sum_{d|n} f(d)$.
- $\forall n > 0$, $f(n) = \sum_{d|n} \mu(n/d) g(d)$.

Les sommations sont étendues à tous les diviseurs d de n, et μ désigne la fonction de Möbius classique.

La formule d'inversion de Möbius est connue en théorie des nombres depuis le XIXe siècle.

Soient f et g deux applications à valeurs réelles ou complexes, définies sur l'ensemble des entiers naturels non nuls $\mathbb{N}_0$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

- $\forall n > 0,\ g(n) = \sum_{d|n} f(d)$.
- $\forall n > 0,\ f(n) = \sum_{d|n} \mu(n/d) g(d)$.

Les sommations sont étendues à tous les diviseurs d de n, et μ désigne la fonction de Möbius classique.

La fonction de Möbius est définie de $\mathbb{N}_0$ dans $\{-1, 0, 1\}$ par $\mu(n) = (-1)^{p(n)}$, si les facteurs premiers de n sont deux à deux distincts (où $p(n)$ désigne le nombre de facteurs premiers de n), et vaut zéro sinon (en particulier $\mu(1) = 1$).

L'algèbre des fonctions arithmétiques

Une fonction arithmétique est une application de $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{C}$ où on a noté $\mathbb{N}_0$ l'ensemble $\mathbb{N} \setminus \{ 0 \}$.

L'algèbre des fonctions arithmétiques

Une fonction arithmétique est une application de $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{C}$ où on a noté $\mathbb{N}_0$ l'ensemble $\mathbb{N} \setminus \{ 0 \}$.

L'ensemble des fonctions arithmétiques est un groupe abélien pour l'opération d'addition définie point par point

L'algèbre des fonctions arithmétiques

Une fonction arithmétique est une application de $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{C}$ où on a noté $\mathbb{N}_0$ l'ensemble $\mathbb{N} \setminus \{ 0 \}$.

L'ensemble des fonctions arithmétiques est un groupe abélien pour l'opération d'addition définie point par point :

$$(f + g)(n) = f(n) + g(n)$$

pour tout $n \in \mathbb{N}_0$.

L'algèbre des fonctions arithmétiques

Une fonction arithmétique est une application de $f\colon \mathbb{N}_0 \to \mathbb{C}$ où on a noté $\mathbb{N}_0$ l'ensemble $\mathbb{N} \setminus \{ 0 \}$.

L'ensemble des fonctions arithmétiques est un groupe abélien pour l'opération d'addition définie point par point :

$$(f + g)(n) = f(n) + g(n)$$

pour tout $n \in \mathbb{N}_0$.

Cet ensemble possède également une multiplication qui en fait une $\mathbb{C}$-algèbre

L'algèbre des fonctions arithmétiques

Une fonction arithmétique est une application de $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{C}$ où on a noté $\mathbb{N}_0$ l'ensemble $\mathbb{N} \setminus \{ 0 \}$.

L'ensemble des fonctions arithmétiques est un groupe abélien pour l'opération d'addition définie point par point :

$$(f + g)(n) = f(n) + g(n)$$

pour tout $n \in \mathbb{N}_0$.

Cet ensemble possède également une multiplication qui en fait une $\mathbb{C}$-algèbre : le produit de convolution de Dirichlet.

$$(f * g)(n) = \sum_{k\ell=n} f(k)g(\ell) = \sum_{d|n} f(d)g(n/d) \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}_0.$$

(La première sommation est étendue à tous les couples d'entiers strictement positifs (k, ℓ) tels que $k\ell = n$, et la seconde à tous les diviseurs d strictement positifs de n.)

Fonction zêta et fonction de Möbius

La fonction zêta ζ est la fonction arithmétique définie par

$$\zeta(n) = 1$$

pour tout $n \in \mathbb{N}_0$.

Fonction zêta et fonction de Möbius

La fonction zêta ζ est la fonction arithmétique définie par

$$\zeta(n) = 1$$

pour tout $n \in \mathbb{N}_0$.

Il se trouve qu'elle est inversible (par rapport à la convolution de Dirichlet).

Fonction zêta et fonction de Möbius

La fonction zêta ζ est la fonction arithmétique définie par

$$\zeta(n) = 1$$

pour tout $n \in \mathbb{N}_0$.

Il se trouve qu'elle est inversible (par rapport à la convolution de Dirichlet). Son inverse est précisément la fonction de Möbius μ.

Fonction zêta et fonction de Möbius

La fonction zêta ζ est la fonction arithmétique définie par

$$\zeta(n) = 1$$

pour tout $n \in \mathbb{N}_0$.

Il se trouve qu'elle est inversible (par rapport à la convolution de Dirichlet). Son inverse est précisément la fonction de Möbius μ.

En d'autres termes, $(\zeta * \mu)(n) = 1 = (\mu * \zeta)(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}_0$.

Fonction zêta et fonction de Möbius

La fonction zêta ζ est la fonction arithmétique définie par

$$\zeta(n) = 1$$

pour tout $n \in \mathbb{N}_0$.

Il se trouve qu'elle est inversible (par rapport à la convolution de Dirichlet). Son inverse est précisément la fonction de Möbius μ.

En d'autres termes, $(\zeta * \mu)(n) = 1 = (\mu * \zeta)(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}_0$.

On retrouve finalement la formule d'inversion de Möbius :

Fonction zêta et fonction de Möbius

La fonction zêta ζ est la fonction arithmétique définie par

$$\zeta(n) = 1$$

pour tout $n \in \mathbb{N}_0$.

Il se trouve qu'elle est inversible (par rapport à la convolution de Dirichlet). Son inverse est précisément la fonction de Möbius μ.

En d'autres termes, $(\zeta * \mu)(n) = 1 = (\mu * \zeta)(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}_0$.

On retrouve finalement la formule d'inversion de Möbius : pour tout $n \in \mathbb{N}_0$,

$$g(n) = (f * \zeta)(n) \Leftrightarrow f(n) = (g * \mu)(n) \ .$$

Table des matières

Algèbre large d'un monoïde

Un monoïde M est dit être à décomposition finie (ou convolable) si quel que soit $w \in M$, il n'existe qu'un nombre fini de couples (w_1, w_2) de $M \times M$ tels que $w_1 w_2 = w$.

Algèbre large d'un monoïde

Un monoïde M est dit être à décomposition finie (ou convolable) si quel que soit $w \in M$, il n'existe qu'un nombre fini de couples (w_1, w_2) de $M \times M$ tels que $w_1 w_2 = w$.

Un tel monoïde admet une algèbre large.

Algèbre large d'un monoïde

Un monoïde M est dit être à décomposition finie (ou convolable) si quel que soit $w \in M$, il n'existe qu'un nombre fini de couples (w_1, w_2) de $M \times M$ tels que $w_1 w_2 = w$.

Un tel monoïde admet une algèbre large. Étant donné un anneau commutatif et unitaire R, la R-algèbre large $R[[M]]$ de M est l'ensemble de toutes les séries formelles $\displaystyle\sum_{w \in M} a_w w$ où $a_w \in R$ pour tout $w \in M$ avec :

Algèbre large d'un monoïde

Un monoïde M est dit être à décomposition finie (ou convolable) si quel que soit $w \in M$, il n'existe qu'un nombre fini de couples (w_1, w_2) de $M \times M$ tels que $w_1 w_2 = w$.

Un tel monoïde admet une algèbre large. Étant donné un anneau commutatif et unitaire R, la R-algèbre large $R[[M]]$ de M est l'ensemble de toutes les séries formelles $\sum_{w \in M} a_w w$ où $a_w \in R$ pour tout $w \in M$ avec :

- l'addition : $\sum_{w \in M} a_w w + \sum_{w \in M} b_w w = \sum_{w \in M} (a_w + b_w) w$,

Algèbre large d'un monoïde

Un monoïde M est dit être à décomposition finie (ou convolable) si quel que soit $w \in M$, il n'existe qu'un nombre fini de couples (w_1, w_2) de $M \times M$ tels que $w_1 w_2 = w$.

Un tel monoïde admet une algèbre large. Étant donné un anneau commutatif et unitaire R, la R-algèbre large $R[[M]]$ de M est l'ensemble de toutes les séries formelles $\sum_{w \in M} a_w w$ où $a_w \in R$ pour tout $w \in M$ avec :

- l'addition : $\sum_{w \in M} a_w w + \sum_{w \in M} b_w w = \sum_{w \in M} (a_w + b_w) w$,

- le produit : $\left(\sum_{w \in M} a_w w\right) \left(\sum_{w \in M} b_w w\right) = \sum_{w \in M} \left(\sum_{w_1 w_2 = w} a_{w_1} b_{w_2}\right) w$.

Algèbre large d'un monoïde

Un monoïde M est dit être à décomposition finie (ou convolable) si quel que soit $w \in M$, il n'existe qu'un nombre fini de couples (w_1, w_2) de $M \times M$ tels que $w_1 w_2 = w$.

Un tel monoïde admet une algèbre large. Étant donné un anneau commutatif et unitaire R, la R-algèbre large $R[[M]]$ de M est l'ensemble de toutes les séries formelles $\displaystyle\sum_{w \in M} a_w w$ où $a_w \in R$ pour tout $w \in M$ avec :

- l'addition : $$\sum_{w \in M} a_w w + \sum_{w \in M} b_w w = \sum_{w \in M} (a_w + b_w) w,$$

- le produit : $$\left(\sum_{w \in M} a_w w\right)\left(\sum_{w \in M} b_w w\right) = \sum_{w \in M}\left(\sum_{w_1 w_2 = w} a_{w_1} b_{w_2}\right) w.$$

Note

$R[[M]]$ est le complété, pour la topologie initiale relativement aux projections avec R discret, de la R-algèbre $R[M]$ de M.

Exemples :

- L'algèbre large du monoïde partiellement commutatif libre $M(X, \theta)$ est l'algèbre des séries partiellement commutatives $R\langle\langle X, \theta\rangle\rangle$.

Exemples :

- L'algèbre large du monoïde partiellement commutatif libre $M(X,\theta)$ est l'algèbre des séries partiellement commutatives $R\langle\langle X,\theta\rangle\rangle$.

- L'algèbre large du monoïde libre X^* est l'algèbre des séries non commutatives $R\langle\langle X\rangle\rangle$.

Exemples :

- L'algèbre large du monoïde partiellement commutatif libre $M(X, \theta)$ est l'algèbre des séries partiellement commutatives $R\langle\langle X, \theta\rangle\rangle$.

- L'algèbre large du monoïde libre X^* est l'algèbre des séries non commutatives $R\langle\langle X\rangle\rangle$.

- L'algèbre large du monoïde commutatif libre $\mathbb{N}^{(X)}$ est l'algèbre des séries formelles commutatives $R[[X]]$ (attention : notation ambigüe).

Exemples :

- L'algèbre large du monoïde partiellement commutatif libre $M(X, \theta)$ est l'algèbre des séries partiellement commutatives $R\langle\langle X, \theta\rangle\rangle$.

- L'algèbre large du monoïde libre X^* est l'algèbre des séries non commutatives $R\langle\langle X\rangle\rangle$.

- L'algèbre large du monoïde commutatif libre $\mathbb{N}^{(X)}$ est l'algèbre des séries formelles commutatives $R[[X]]$ (attention : notation ambigüe).

- La $\mathbb{C}$-algèbre large du monoïde $\mathbb{N}_0$ avec la multiplication est l'algèbre des fonctions arithmétiques (avec la convolution de Dirichlet).

Exemples :

- L'algèbre large du monoïde partiellement commutatif libre $M(X, \theta)$ est l'algèbre des séries partiellement commutatives $R\langle\langle X, \theta\rangle\rangle$.

- L'algèbre large du monoïde libre X^* est l'algèbre des séries non commutatives $R\langle\langle X\rangle\rangle$.

- L'algèbre large du monoïde commutatif libre $\mathbb{N}^{(X)}$ est l'algèbre des séries formelles commutatives $R[[X]]$ (attention : notation ambigüe).

- La $\mathbb{C}$-algèbre large du monoïde $\mathbb{N}_0$ avec la multiplication est l'algèbre des fonctions arithmétiques (avec la convolution de Dirichlet). C'est également l'algèbre des séries commutatives sur l'ensemble des nombres premiers (séries de Dirichlet).

Notation

Soit M un monoïde convolable.

Notation

Soit M un monoïde convolable. Soit $S \in R[[M]]$ une série.

Notation

Soit M un monoïde convolable. Soit $S \in R[[M]]$ une série. Notons $\langle S \mid w \rangle$ le coefficient de S pour l'élément $w \in M$ de sorte que

$$S = \sum_{w \in M} \langle S \mid w \rangle w \ .$$

Notation

Soit M un monoïde convolable. Soit $S \in R[[M]]$ une série. Notons $\langle S \mid w \rangle$ le coefficient de S pour l'élément $w \in M$ de sorte que

$$S = \sum_{w \in M} \langle S \mid w \rangle w \ .$$

Notes

- L'application $S \in \mathbb{R}[[M]] \to f_S \in R^M$ telle que $f_S(w) = \langle S \mid w \rangle$ définit un isomorphisme de R-modules.

Notation

Soit M un monoïde convolable. Soit $S \in R[[M]]$ une série. Notons $\langle S \mid w \rangle$ le coefficient de S pour l'élément $w \in M$ de sorte que

$$S = \sum_{w \in M} \langle S \mid w \rangle w \ .$$

Notes

- L'application $S \in \mathbb{R}[[M]] \to f_S \in R^M$ telle que $f_S(w) = \langle S \mid w \rangle$ définit un isomorphisme de R-modules.
- La famille $(\langle S \mid w \rangle w)_{w \in M}$ est sommable dans la topologie produit, de somme S.

Monoïdes localement finis

Soit M un monoïde. On appelle décomposition de $w \in M$ une suite finie $(w_1, \cdots, w_n)$ d'éléments de M, tous distincts de 1_M, telle que

$$w = w_1 \cdots w_n \ .$$

Monoïdes localement finis

Soit M un monoïde. On appelle décomposition de $w \in M$ une suite finie $(w_1, \cdots, w_n)$ d'éléments de M, tous distincts de 1_M, telle que

$$w = w_1 \cdots w_n \ .$$

Un monoïde M est dit être localement fini ou à factorisation finie si chaque élément $w \in M$ n'admet qu'un nombre fini de décompositions.

Monoïdes localement finis

Soit M un monoïde. On appelle décomposition de $w \in M$ une suite finie $(w_1, \cdots, w_n)$ d'éléments de M, tous distincts de 1_M, telle que

$$w = w_1 \cdots w_n \ .$$

Un monoïde M est dit être localement fini ou à factorisation finie si chaque élément $w \in M$ n'admet qu'un nombre fini de décompositions.

Évidemment un monoïde localement fini est convolable (la réciproque est fausse : tout groupe fini est convolable, mais un groupe fini non trivial n'est pas localement fini $1 \neq g = gg^{-1}gg^{-1}gg^{-1}g \cdots$).

Monoïdes localement finis

Soit M un monoïde. On appelle décomposition de $w \in M$ une suite finie $(w_1, \cdots, w_n)$ d'éléments de M, tous distincts de 1_M, telle que

$$w = w_1 \cdots w_n \ .$$

Un monoïde M est dit être localement fini ou à factorisation finie si chaque élément $w \in M$ n'admet qu'un nombre fini de décompositions.

Évidemment un monoïde localement fini est convolable (la réciproque est fausse : tout groupe fini est convolable, mais un groupe fini non trivial n'est pas localement fini $1 \neq g = gg^{-1}gg^{-1}gg^{-1}g \cdots$).

Exemples

Monoïdes partiellement commutatif libres comme tout quotient d'un tel monoïde par une congruence multi-homogène (monoïdes plaxique, hypoplaxique, sylvestre, *etc.*).

Séries zêta et de Möbius

Soit M un monoïde localement fini. On appelle série zêta de M la série $\zeta = \sum_{w \in M} w \in R[[M]]$.

Séries zêta et de Möbius

Soit M un monoïde localement fini. On appelle série zêta de M la série $\zeta = \sum_{w \in M} w \in R[[M]]$.

La série zêta de M est inversible. Son inverse, la série de Möbius, est noté μ.

Séries zêta et de Möbius

Soit M un monoïde localement fini. On appelle série zêta de M la série $\zeta = \sum_{w \in M} w \in R[[M]]$.

La série zêta de M est inversible. Son inverse, la série de Möbius, est noté μ.

La formule d'inversion de Möbius est :

$$g = f\zeta = \sum_{w \in M} fw \text{ si, et seulement si, } f = g\mu.$$

Table des matières

Un monoïde à zéro est un monoïde M munit d'un élément 0 absorbant bilatère (*i.e.*, $x0_M = 0_M = 0_M x$ quel que soit $x \in M$).

Un monoïde à zéro est un monoïde M munit d'un élément 0 absorbant bilatère (*i.e.*, $x0_M = 0_M = 0_M x$ quel que soit $x \in M$).

S'il existe, 0_M est unique. Il est appelé le zéro de M.

Un monoïde à zéro est un monoïde M munit d'un élément 0 absorbant bilatère (*i.e.*, $x0_M = 0_M = 0_M x$ quel que soit $x \in M$).

S'il existe, 0_M est unique. Il est appelé le zéro de M.

Soient M, N deux monoïdes à zéro. Un homomorphisme de monoïdes à zéro de M dans N est une application $f : M \to N$ qui est un homomorphisme de monoïdes usuels et tel que $f(0_M) = 0_N$.

Un monoïde à zéro est un monoïde M munit d'un élément 0 absorbant bilatère (*i.e.*, $x0_M = 0_M = 0_Mx$ quel que soit $x \in M$).

S'il existe, 0_M est unique. Il est appelé le zéro de M.

Soient M, N deux monoïdes à zéro. Un homomorphisme de monoïdes à zéro de M dans N est une application $f\colon M \to N$ qui est un homomorphisme de monoïdes usuels et tel que $f(0_M) = 0_N$.

La classe de tous les monoïdes à zéro avec leurs homomorphismes est une catégorie munie d'un foncteur d'oubli évident dans celle des monoïdes usuels.

Un monoïde à zéro est un monoïde M munit d'un élément 0 absorbant bilatère (*i.e.*, $x0_M = 0_M = 0_M x$ quel que soit $x \in M$).

S'il existe, 0_M est unique. Il est appelé le zéro de M.

Soient M, N deux monoïdes à zéro. Un homomorphisme de monoïdes à zéro de M dans N est une application $f \colon M \to N$ qui est un homomorphisme de monoïdes usuels et tel que $f(0_M) = 0_N$.

La classe de tous les monoïdes à zéro avec leurs homomorphismes est une catégorie munie d'un foncteur d'oubli évident dans celle des monoïdes usuels.

Ce foncteur d'oubli admet un adjoint à gauche : l'adjonction libre d'un zéro.

Adjonction libre d'un zéro

Soient M un monoïde et $\{0\}$ un ensemble à un élément quelconque.

Adjonction libre d'un zéro

Soient M un monoïde et $\{0\}$ un ensemble à un élément quelconque.

L'ensemble $M \sqcup \{0\}$ est un monoïde pour la loi $x \cdot y = xy$ (calculé dans M) si $x, y \in M$ et $x \cdot 0 = 0 = 0 \cdot x$ pour tout $x \in M \sqcup \{0\}$ (pour simplifier, on a supposé ici que $0 \notin M$).

Adjonction libre d'un zéro

Soient M un monoïde et $\{0\}$ un ensemble à un élément quelconque.

L'ensemble $M \sqcup \{0\}$ est un monoïde pour la loi $x \cdot y = xy$ (calculé dans M) si $x, y \in M$ et $x \cdot 0 = 0 = 0 \cdot x$ pour tout $x \in M \sqcup \{0\}$ (pour simplifier, on a supposé ici que $0 \notin M$).

Le monoïde à zéro $M^0 = (M \sqcup \{0\}, \cdot, 0)$ est solution du problème universel suivant :

Adjonction libre d'un zéro

Soient M un monoïde et $\{0\}$ un ensemble à un élément quelconque.

L'ensemble $M \sqcup \{0\}$ est un monoïde pour la loi $x \cdot y = xy$ (calculé dans M) si $x, y \in M$ et $x \cdot 0 = 0 = 0 \cdot x$ pour tout $x \in M \sqcup \{0\}$ (pour simplifier, on a supposé ici que $0 \notin M$).

Le monoïde à zéro $M^0 = (M \sqcup \{0\}, \cdot, 0)$ est solution du problème universel suivant :

Quels que soient le monoïde à zéro N et l'homomorphisme de monoïdes (usuels) $f \colon M \to N$, il existe un unique homomorphisme de monoïdes à zéro $f^0 \colon M^0 \to N$ tel que $f^0(x) = f(x)$ pour tout $x \in M$.

Adjonction libre d'un zéro

Soient M un monoïde et $\{ 0 \}$ un ensemble à un élément quelconque.

L'ensemble $M \sqcup \{ 0 \}$ est un monoïde pour la loi $x \cdot y = xy$ (calculé dans M) si $x, y \in M$ et $x \cdot 0 = 0 = 0 \cdot x$ pour tout $x \in M \sqcup \{ 0 \}$ (pour simplifier, on a supposé ici que $0 \notin M$).

Le monoïde à zéro $M^0 = (M \sqcup \{ 0 \}, \cdot, 0)$ est solution du problème universel suivant :

Quels que soient le monoïde à zéro N et l'homomorphisme de monoïdes (usuels) $f \colon M \to N$, il existe un unique homomorphisme de monoïdes à zéro $f^0 \colon M^0 \to N$ tel que $f^0(x) = f(x)$ pour tout $x \in M$.

Il suffit en effet d'étendre f à tout M^0 par $f^0(0) = 0_N$.

Notation

Si M est un monoïde à zéro, alors $M_0 = M \setminus \{ 0_M \}$.

Notation

Si M est un monoïde à zéro, alors $M_0 = M \setminus \{ 0_M \}$.

Quelques exemples :

- Le monoïde multiplicatif d'un anneau (associatif avec unité).

Notation

Si M est un monoïde à zéro, alors $M_0 = M \setminus \{ 0_M \}$.

Quelques exemples :

- Le monoïde multiplicatif d'un anneau (associatif avec unité).

- Soit C une (petite) catégorie.

Notation

Si M est un monoïde à zéro, alors $M_0 = M \setminus \{ 0_M \}$.

Quelques exemples :

- Le monoïde multiplicatif d'un anneau (associatif avec unité).

- Soit C une (petite) catégorie. Si on adjoint un zéro à ses flèches, de façon que $f \circ g = 0$ si le domaine de f est différent du codomaine de g, alors on obtient un semi-groupe.

Notation

Si M est un monoïde à zéro, alors $M_0 = M \setminus \{ 0_M \}$.

Quelques exemples :

- Le monoïde multiplicatif d'un anneau (associatif avec unité).

- Soit C une (petite) catégorie. Si on adjoint un zéro à ses flèches, de façon que $f \circ g = 0$ si le domaine de f est différent du codomaine de g, alors on obtient un semi-groupe. Si on ajoute ensuite une identité, alors on obtient un monoïde à zéro.

Notation

Si M est un monoïde à zéro, alors $M_0 = M \setminus \{ 0_M \}$.

Quelques exemples :

- Le monoïde multiplicatif d'un anneau (associatif avec unité).

- Soit C une (petite) catégorie. Si on adjoint un zéro à ses flèches, de façon que $f \circ g = 0$ si le domaine de f est différent du codomaine de g, alors on obtient un semi-groupe. Si on ajoute ensuite une identité, alors on obtient un monoïde à zéro.

- Soient P un ensemble ordonné, et $\mathrm{Int}(P)$ l'ensemble de ses *intervalles* (y compris l'intervalle vide $\emptyset$ que l'on note 0).

Notation

Si M est un monoïde à zéro, alors $M_0 = M \setminus \{ 0_M \}$.

Quelques exemples :

- Le monoïde multiplicatif d'un anneau (associatif avec unité).

- Soit C une (petite) catégorie. Si on adjoint un zéro à ses flèches, de façon que $f \circ g = 0$ si le domaine de f est différent du codomaine de g, alors on obtient un semi-groupe. Si on ajoute ensuite une identité, alors on obtient un monoïde à zéro.

- Soient P un ensemble ordonné, et $\mathrm{Int}(P)$ l'ensemble de ses *intervalles* (y compris l'intervalle vide $\emptyset$ que l'on note 0). Soient deux intervalles $[x, y]$ et $[w, z]$, on définit : $[x, y][w, z] = [x, z]$ si $y = w$, et $[x, y][w, z] = 0$ si $y \neq w$.

Notation

Si M est un monoïde à zéro, alors $M_0 = M \setminus \{ 0_M \}$.

Quelques exemples :

- Le monoïde multiplicatif d'un anneau (associatif avec unité).

- Soit C une (petite) catégorie. Si on adjoint un zéro à ses flèches, de façon que $f \circ g = 0$ si le domaine de f est différent du codomaine de g, alors on obtient un semi-groupe. Si on ajoute ensuite une identité, alors on obtient un monoïde à zéro.

- Soient P un ensemble ordonné, et $\mathrm{Int}(P)$ l'ensemble de ses *intervalles* (y compris l'intervalle vide $\emptyset$ que l'on note 0). Soient deux intervalles $[x, y]$ et $[w, z]$, on définit : $[x, y][w, z] = [x, z]$ si $y = w$, et $[x, y][w, z] = 0$ si $y \neq w$. Si on adjoint une identité à $\mathrm{Int}(P)$, alors on obtient un monoïde à zéro.

Quotient de Rees d'un monoïde

Soient M un monoïde, et I un idéal bilatère ($MI \subseteq I \supseteq IM$).

Quotient de Rees d'un monoïde

Soient M un monoïde, et I un idéal bilatère ($MI \subseteq I \supseteq IM$). On définit une congruence $\equiv_I$ sur M par :

$$x \equiv_I y \text{ si, et seulement si, } x = y \text{ ou } x, y \in I.$$

Quotient de Rees d'un monoïde

Soient M un monoïde, et I un idéal bilatère ($MI \subseteq I \supseteq IM$). On définit une congruence $\equiv_I$ sur M par :

$$x \equiv_I y \text{ si, et seulement si, } x = y \text{ ou } x, y \in I.$$

Le monoïde quotient $M/\equiv_I$ s'appelle le quotient de Rees de M par I.

Quotient de Rees d'un monoïde

Soient M un monoïde, et I un idéal bilatère ($MI \subseteq I \supseteq IM$). On définit une congruence $\equiv_I$ sur M par :

$$x \equiv_I y \text{ si, et seulement si, } x = y \text{ ou } x, y \in I.$$

Le monoïde quotient $M/\equiv_I$ s'appelle le quotient de Rees de M par I. On le note M/I.

Quotient de Rees d'un monoïde

Soient M un monoïde, et I un idéal bilatère ($MI \subseteq I \supseteq IM$). On définit une congruence $\equiv_I$ sur M par :

$$x \equiv_I y \text{ si, et seulement si, } x = y \text{ ou } x, y \in I.$$

Le monoïde quotient $M/\equiv_I$ s'appelle le quotient de Rees de M par I. On le note M/I.

Il est isomorphe au monoïde suivant.

Quotient de Rees d'un monoïde

Soient M un monoïde, et I un idéal bilatère ($MI \subseteq I \supseteq IM$). On définit une congruence $\equiv_I$ sur M par :

$$x \equiv_I y \text{ si, et seulement si, } x = y \text{ ou } x, y \in I.$$

Le monoïde quotient $M/\equiv_I$ s'appelle le quotient de Rees de M par I. On le note M/I.

Il est isomorphe au monoïde suivant. Soit l'ensemble $(M \setminus I) \sqcup \{ 0 \}$ avec le produit :

$x \times y = xy$ (calculé dans M) si $xy \notin I$

Quotient de Rees d'un monoïde

Soient M un monoïde, et I un idéal bilatère ($MI \subseteq I \supseteq IM$). On définit une congruence $\equiv_I$ sur M par :

$$x \equiv_I y \text{ si, et seulement si, } x = y \text{ ou } x, y \in I.$$

Le monoïde quotient $M/\equiv_I$ s'appelle le quotient de Rees de M par I. On le note M/I.

Il est isomorphe au monoïde suivant. Soit l'ensemble $(M \setminus I) \sqcup \{ 0 \}$ avec le produit :

$x \times y = xy$ (calculé dans M) si $xy \notin I$

$x \times y = 0$ si $xy \in I$.

Quotient de Rees d'un monoïde

Soient M un monoïde, et I un idéal bilatère ($MI \subseteq I \supseteq IM$). On définit une congruence $\equiv_I$ sur M par :

$$x \equiv_I y \text{ si, et seulement si, } x = y \text{ ou } x, y \in I.$$

Le monoïde quotient $M/ \equiv_I$ s'appelle le quotient de Rees de M par I. On le note M/I.

Il est isomorphe au monoïde suivant. Soit l'ensemble $(M \setminus I) \sqcup \{ 0 \}$ avec le produit :

$x \times y = xy$ (calculé dans M) si $xy \notin I$

$x \times y = 0$ si $xy \in I$.

(Il suffit de voir que la classe de $x \in M$ est I si $x \in I$, $\{ x \}$ si $x \notin I$.)

Exemples

Soient X un ensemble, et $I = \{\, w \in X^* \colon \exists x \in X,\ |w|_x > 1 \,\}$,

Exemples

Soient X un ensemble, et $I = \{\, w \in X^* \colon \exists x \in X,\ |w|_x > 1 \,\}$, alors X^*/I est l'ensemble des mots dont toutes les lettres sont distinctes, et 0.

Exemples

Soient X un ensemble, et $I = \{\, w \in X^* \colon \exists x \in X,\ |w|_x > 1 \,\}$, alors X^*/I est l'ensemble des mots dont toutes les lettres sont distinctes, et 0.

Soit X un ensemble, et $n \geq 0$.

Exemples

Soient X un ensemble, et $I = \{\, w \in X^* \colon \exists x \in X,\ |w|_x > 1 \,\}$, alors X^*/I est l'ensemble des mots dont toutes les lettres sont distinctes, et 0.

Soit X un ensemble, et $n \geq 0$. Considérons $I_n = \{\, w \in X^* \colon |w| \geq n \,\}$,

Exemples

Soient X un ensemble, et $I = \{\, w \in X^* \colon \exists x \in X,\ |w|_x > 1 \,\}$, alors X^*/I est l'ensemble des mots dont toutes les lettres sont distinctes, et 0.

Soit X un ensemble, et $n \geq 0$. Considérons $I_n = \{\, w \in X^* \colon |w| \geq n \,\}$, alors X^*/I_n est l'ensemble de tous les mots de longueur $< n$, et 0.

Algèbre contractée d'un monoïde à zéro

Soient R un anneau commutatif unitaire et S un semi-groupe.

Algèbre contractée d'un monoïde à zéro

Soient R un anneau commutatif unitaire et S un semi-groupe. Alors $R[S]$ est la R-algèbre du semi-groupe S (sommes formelles finies d'éléments de S à coefficients dans R).

Algèbre contractée d'un monoïde à zéro

Soient R un anneau commutatif unitaire et S un semi-groupe. Alors $R[S]$ est la R-algèbre du semi-groupe S (sommes formelles finies d'éléments de S à coefficients dans R).

Soit M un monoïde à zéro.

Algèbre contractée d'un monoïde à zéro

Soient R un anneau commutatif unitaire et S un semi-groupe. Alors $R[S]$ est la R-algèbre du semi-groupe S (sommes formelles finies d'éléments de S à coefficients dans R).

Soit M un monoïde à zéro.

Le quotient $R[M]/R0_M$ de la R-algèbre $R[M]$ de M par l'idéal $R0_M = \{\, \alpha 0_M \colon \alpha \in R \,\}$ s'appelle la R-algèbre contractée de M, que l'on note $R_0[M]$.

Algèbre contractée d'un monoïde à zéro

Soient R un anneau commutatif unitaire et S un semi-groupe. Alors $R[S]$ est la R-algèbre du semi-groupe S (sommes formelles finies d'éléments de S à coefficients dans R).

Soit M un monoïde à zéro.

Le quotient $R[M]/R0_M$ de la R-algèbre $R[M]$ de M par l'idéal $R0_M = \{\, \alpha 0_M \colon \alpha \in R \,\}$ s'appelle la R-algèbre contractée de M, que l'on note $R_0[M]$.

L'algèbre $R_0[M]$ est isomorphe au R-module libre de base M_0 avec le produit donné par les éléments de la base $x, y \in M_0$ par $x \times y = xy$ si $xy \in M_0$ et $x \times y = 0$ si $xy = 0_M$.

Algèbre contractée d'un monoïde à zéro

Soient R un anneau commutatif unitaire et S un semi-groupe. Alors $R[S]$ est la R-algèbre du semi-groupe S (sommes formelles finies d'éléments de S à coefficients dans R).

Soit M un monoïde à zéro.

Le quotient $R[M]/R0_M$ de la R-algèbre $R[M]$ de M par l'idéal $R0_M = \{\, \alpha 0_M \colon \alpha \in R \,\}$ s'appelle la R-algèbre contractée de M, que l'on note $R_0[M]$.

L'algèbre $R_0[M]$ est isomorphe au R-module libre de base M_0 avec le produit donné par les éléments de la base $x, y \in M_0$ par $x \times y = xy$ si $xy \in M_0$ et $x \times y = 0$ si $xy = 0_M$.

En termes catégoriques, $R_0[\cdot]$ est l'adjoint à gauche du foncteur d'oubli de la catégorie des anneaux (associatifs) unitaires dans celle des monoïdes à zéro (qui associe à un anneau son monoïde multiplicatif sous-jacent, qui est un monoïde à zéro).

Proposition

Soient M un monoïde à zéro et I un idéal bilatère de M.

Proposition

Soient M un monoïde à zéro et I un idéal bilatère de M.

Alors

$$R_0[M/I] \cong R[M]/R[I].$$

Proposition

Soient M un monoïde à zéro et I un idéal bilatère de M.

Alors

$$R_0[M/I] \cong R[M]/R[I].$$

On peut identifier $R_0[M/I]$ au sous R-module de toutes les sommes (avec seulement un nombre fini de termes non nuls) $\displaystyle\sum_{w \in M \setminus I} \langle S \mid w \rangle w$ de $R[M]$.

Algèbre contractée large

Soit M un monoïde à zéro.

Algèbre contractée large

Soit M un monoïde à zéro. On dit qu'il est convolable ou à décomposition finie si quel que soit $w \in M_0$, il n'existe qu'un nombre fini de couples (w_1, w_2) de M tels que $w_1 w_2 = w$.

Algèbre contractée large

Soit M un monoïde à zéro. On dit qu'il est convolable ou à décomposition finie si quel que soit $w \in M_0$, il n'existe qu'un nombre fini de couples (w_1, w_2) de M tels que $w_1 w_2 = w$.

Par exemple, soient M un monoïde et I un idéal bilatère de M.

Algèbre contractée large

Soit M un monoïde à zéro. On dit qu'il est convolable ou à décomposition finie si quel que soit $w \in M_0$, il n'existe qu'un nombre fini de couples (w_1, w_2) de M tels que $w_1 w_2 = w$.

Par exemple, soient M un monoïde et I un idéal bilatère de M. Si M est convolable (au sens des monoïdes usuels), alors M/I est convolable.

Algèbre contractée large

Soit M un monoïde à zéro. On dit qu'il est convolable ou à décomposition finie si quel que soit $w \in M_0$, il n'existe qu'un nombre fini de couples (w_1, w_2) de M tels que $w_1 w_2 = w$.

Par exemple, soient M un monoïde et I un idéal bilatère de M. Si M est convolable (au sens des monoïdes usuels), alors M/I est convolable.

Un tel monoïde admet une algèbre contractée large $R_0[[M]]$.

Algèbre contractée large

Soit M un monoïde à zéro. On dit qu'il est convolable ou à décomposition finie si quel que soit $w \in M_0$, il n'existe qu'un nombre fini de couples (w_1, w_2) de M tels que $w_1 w_2 = w$.

Par exemple, soient M un monoïde et I un idéal bilatère de M. Si M est convolable (au sens des monoïdes usuels), alors M/I est convolable.

Un tel monoïde admet une algèbre contractée large $R_0[[M]]$.

Il s'agit du complété de $R_0[M]$ pour la topologie initiale donnée par les projections $\langle \cdot \mid w \rangle \colon R_0[M] \to R$ ($w \in M_0$) avec R discret.

Algèbre contractée large

Soit M un monoïde à zéro. On dit qu'il est convolable ou à décomposition finie si quel que soit $w \in M_0$, il n'existe qu'un nombre fini de couples (w_1, w_2) de M tels que $w_1 w_2 = w$.

Par exemple, soient M un monoïde et I un idéal bilatère de M. Si M est convolable (au sens des monoïdes usuels), alors M/I est convolable.

Un tel monoïde admet une algèbre contractée large $R_0[[M]]$.

Il s'agit du complété de $R_0[M]$ pour la topologie initiale donnée par les projections $\langle \cdot \mid w \rangle \colon R_0[M] \to R$ ($w \in M_0$) avec R discret. En particulier, $R_0[[M]]$ est complet pour la topologie produit.

Algèbre contractée large

Soit M un monoïde à zéro. On dit qu'il est convolable ou à décomposition finie si quel que soit $w \in M_0$, il n'existe qu'un nombre fini de couples (w_1, w_2) de M tels que $w_1 w_2 = w$.

Par exemple, soient M un monoïde et I un idéal bilatère de M. Si M est convolable (au sens des monoïdes usuels), alors M/I est convolable.

Un tel monoïde admet une algèbre contractée large $R_0[[M]]$.

Il s'agit du complété de $R_0[M]$ pour la topologie initiale donnée par les projections $\langle \cdot \mid w \rangle \colon R_0[M] \to R$ ($w \in M_0$) avec R discret. En particulier, $R_0[[M]]$ est complet pour la topologie produit.

On peut également la construire comme le R-module $R^M / R0_M$ quotient de R^M par $R0_M$ avec le produit : $ST = \sum_{w \in M_0} \left(\sum_{w_1 w_2 = w} \langle S \mid w_1 \rangle \langle T \mid w_2 \rangle \right) w$.

Proposition

Soient M un monoïde convolable et I un idéal bilatère de M.

Proposition

Soient M un monoïde convolable et I un idéal bilatère de M.

Alors

$$R_0[[M/I]] = R[[M]]/R[[I]]\ .$$

Proposition

Soient M un monoïde convolable et I un idéal bilatère de M.

Alors

$$R_0[[M/I]] = R[[M]]/R[[I]] \ .$$

On peut alors identifier $R_0[[M/I]]$ avec le sous R-module des séries de la forme $\sum_{w \in M \setminus I} \langle S \mid w \rangle w$ de $R[[M]]$.

Monoïde à zéro localement fini

Soit M un monoïde à zéro.

Monoïde à zéro localement fini

Soit M un monoïde à zéro.

Il est dit être localement fini si tout élément $w \in M_0$ n'admet qu'un nombre fini de décompositions non triviales (les facteurs de la décomposition sont tous distincts de 1_M).

Monoïde à zéro localement fini

Soit M un monoïde à zéro.

Il est dit être localement fini si tout élément $w \in M_0$ n'admet qu'un nombre fini de décompositions non triviales (les facteurs de la décomposition sont tous distincts de 1_M).

Par exemple, si M est un monoïde localement fini et si I est un idéal bilatère de M, alors M/I est un monoïde à zéro localement fini.

Monoïde à zéro localement fini

Soit M un monoïde à zéro.

Il est dit être localement fini si tout élément $w \in M_0$ n'admet qu'un nombre fini de décompositions non triviales (les facteurs de la décomposition sont tous distincts de 1_M).

Par exemple, si M est un monoïde localement fini et si I est un idéal bilatère de M, alors M/I est un monoïde à zéro localement fini.

Évidemment, un monoïde à zéro localement fini est un monoïde à zéro convolable.

Monoïde à zéro localement fini

Soit M un monoïde à zéro.

Il est dit être localement fini si tout élément $w \in M_0$ n'admet qu'un nombre fini de décompositions non triviales (les facteurs de la décomposition sont tous distincts de 1_M).

Par exemple, si M est un monoïde localement fini et si I est un idéal bilatère de M, alors M/I est un monoïde à zéro localement fini.

Évidemment, un monoïde à zéro localement fini est un monoïde à zéro convolable. De plus, un monoïde localement fini n'admet pas d'autres éléments inversibles que 1_M.

Valuation de $R_0[[M]]$

Supposons que M soit un monoïde à zéro localement fini.

Valuation de $R_0[[M]]$

Supposons que M soit un monoïde à zéro localement fini.

Soit $w \in M_0$.

Valuation de $R_0[[M]]$

Supposons que M soit un monoïde à zéro localement fini.

Soit $w \in M_0$. On définit $v(w) = max\{\, n \geq 0 \colon w_1 \cdots w_n = w,\ w_i \neq 1_M \,\}$.

Valuation de $R_0[[M]]$

Supposons que M soit un monoïde à zéro localement fini.

Soit $w \in M_0$. On définit $v(w) = max\{\, n \geq 0 \colon w_1 \cdots w_n = w,\ \ w_i \neq 1_M \,\}$.

Par exemple, si $M = X^*$ et si I est un idéal bilatère de M, alors $v(w) = |w|$ pour tout $w \in (M \setminus I) \sqcup \{\, 0 \,\}$.

Valuation de $R_0[[M]]$

Supposons que M soit un monoïde à zéro localement fini.

Soit $w \in M_0$. On définit $v(w) = max\{ n \geq 0 \colon w_1 \cdots w_n = w,\ w_i \neq 1_M \}$.

Par exemple, si $M = X^*$ et si I est un idéal bilatère de M, alors $v(w) = |w|$ pour tout $w \in (M \setminus I) \sqcup \{ 0 \}$.

Cette fonction d'ordre est étendue à $R_0[[M]]$ tout entier par $v(S) = \inf\{ v(w) \colon w \in M_0,\ \langle S \mid w \rangle \neq 0 \}$ (l'infimum est pris dans $\mathbb{N} \sqcup \{ +\infty \}$).

Valuation de $R_0[[M]]$

Supposons que M soit un monoïde à zéro localement fini.

Soit $w \in M_0$. On définit $v(w) = max\{\, n \geq 0 \colon w_1 \cdots w_n = w,\ w_i \neq 1_M \,\}$.

Par exemple, si $M = X^*$ et si I est un idéal bilatère de M, alors $v(w) = |w|$ pour tout $w \in (M \setminus I) \sqcup \{\, 0 \,\}$.

Cette fonction d'ordre est étendue à $R_0[[M]]$ tout entier par $v(S) = \inf\{\, v(w) \colon w \in M_0,\ \langle S \mid w \rangle \neq 0 \,\}$ (l'infimum est pris dans $\mathbb{N} \sqcup \{\, +\infty \,\}$).

En particulier, $v(S) = +\infty$ si, et seulement si, $S = 0$.

Quelques propriétés de la valuation v

1. $v(1) = 0$.

Quelques propriétés de la valuation v

1. $v(1) = 0$.
2. $v(S + T) \geq \min\{\, v(S), v(T) \,\}$.

Quelques propriétés de la valuation v

1. $v(1) = 0$.
2. $v(S + T) \geq \min\{\, v(S), v(T)\,\}$.
3. $v(ST) \geq v(S) + v(T)$.

Filtration associée à v

Soit $\mathfrak{M} = \{\, S \in R_0[[M]] \colon \langle S \mid 1_M \rangle = 0 \,\}$ (les éléments de $\mathfrak{M}$ sont des séries propres).

Filtration associée à v

Soit $\mathfrak{M} = \{\, S \in R_0[[M]] \colon \langle S \mid 1_M \rangle = 0 \,\}$ (les éléments de $\mathfrak{M}$ sont des séries propres).

Il s'agit de l'idéal d'augmentation de $R_0[[M]]$ en tant que noyau du caractère d'algèbre $\epsilon \colon S \in R_0[[M]] \to \langle S \mid 1_M \rangle \in R$.

Filtration associée à v

Soit $\mathfrak{M} = \{ S \in R_0[[M]] \colon \langle S \mid 1_M \rangle = 0 \}$ (les éléments de $\mathfrak{M}$ sont des séries propres).

Il s'agit de l'idéal d'augmentation de $R_0[[M]]$ en tant que noyau du caractère d'algèbre $\epsilon \colon S \in R_0[[M]] \to \langle S \mid 1_M \rangle \in R$.

Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, on définit $\mathfrak{M}_{\geq n} = \{ S \in R_0[[M]] \mid v(S) \geq n \}$.

Filtration associée à v

Soit $\mathfrak{M} = \{\, S \in R_0[[M]] \colon \langle S \mid 1_M \rangle = 0 \,\}$ (les éléments de $\mathfrak{M}$ sont des séries propres).

Il s'agit de l'idéal d'augmentation de $R_0[[M]]$ en tant que noyau du caractère d'algèbre $\epsilon \colon S \in R_0[[M]] \to \langle S \mid 1_M \rangle \in R$.

Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, on définit $\mathfrak{M}_{\geq n} = \{\, S \in R_0[[M]] \mid v(S) \geq n \,\}$. En particulier, $\mathfrak{M}_{\geq 0} = R_0[[M]]$ et $\mathfrak{M}_{\geq 1} = \mathfrak{M}$.

Filtration associée à v

Soit $\mathfrak{M} = \{ S \in R_0[[M]] \colon \langle S \mid 1_M \rangle = 0 \}$ (les éléments de $\mathfrak{M}$ sont des séries propres).

Il s'agit de l'idéal d'augmentation de $R_0[[M]]$ en tant que noyau du caractère d'algèbre $\epsilon \colon S \in R_0[[M]] \to \langle S \mid 1_M \rangle \in R$.

Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, on définit $\mathfrak{M}_{\geq n} = \{ S \in R_0[[M]] \mid v(S) \geq n \}$. En particulier, $\mathfrak{M}_{\geq 0} = R_0[[M]]$ et $\mathfrak{M}_{\geq 1} = \mathfrak{M}$.

On définit une filtration décroissante $R_0[[M]] = \bigcup_{n\geq 0} \mathfrak{M}_{\geq n}$, $\mathfrak{M}_{\geq n+1} \subseteq \mathfrak{M}_{\geq n}$, et séparante $\bigcap_{n\geq 0} \mathfrak{M}_{\geq n} = (0)$.

Topologie induite par la filtration

Si on prend $\{\,\mathfrak{M}_{\geq n}\,\}_{n\geq 0}$ comme base de voisinages de zéro, alors $R_0[[M]]$ devient une algèbre topologique complète (R étant supposé discret).

Topologie induite par la filtration

Si on prend $\{\mathfrak{M}_{\geq n}\}_{n\geq 0}$ comme base de voisinages de zéro, alors $R_0[[M]]$ devient une algèbre topologique complète (R étant supposé discret).

Remarque

$R_0[[M]]$ est équipé de deux topologies (d'algèbre) qui le rendent complet.

Topologie induite par la filtration

Si on prend $\{\mathfrak{M}_{\geq n}\}_{n\geq 0}$ comme base de voisinages de zéro, alors $R_0[[M]]$ devient une algèbre topologique complète (R étant supposé discret).

Remarque

$R_0[[M]]$ est équipé de deux topologies (d'algèbre) qui le rendent complet. Ces deux topologies peuvent être distinctes.

Topologie induite par la filtration

Si on prend $\{\mathfrak{M}_{\geq n}\}_{n\geq 0}$ comme base de voisinages de zéro, alors $R_0[[M]]$ devient une algèbre topologique complète (R étant supposé discret).

Remarque

$R_0[[M]]$ est équipé de deux topologies (d'algèbre) qui le rendent complet. Ces deux topologies peuvent être distinctes. Soit par exemple un ensemble infini dénombrable $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ d'indéterminées.

Topologie induite par la filtration

Si on prend $\{\,\mathfrak{M}_{\geq n}\,\}_{n\geq 0}$ comme base de voisinages de zéro, alors $R_0[[M]]$ devient une algèbre topologique complète (R étant supposé discret).

Remarque

$R_0[[M]]$ est équipé de deux topologies (d'algèbre) qui le rendent complet. Ces deux topologies peuvent être distinctes. Soit par exemple un ensemble infini dénombrable $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ d'indéterminées. Considérons la suite

$$S_n = \sum_{i=0}^{n} x_i .$$

Topologie induite par la filtration

Si on prend $\{\mathfrak{M}_{\geq n}\}_{n\geq 0}$ comme base de voisinages de zéro, alors $R_0[[M]]$ devient une algèbre topologique complète (R étant supposé discret).

Remarque

$R_0[[M]]$ est équipé de deux topologies (d'algèbre) qui le rendent complet. Ces deux topologies peuvent être distinctes. Soit par exemple un ensemble infini dénombrable $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ d'indéterminées. Considérons la suite $S_n = \sum_{i=0}^{n} x_i$. Alors elle converge vers la série $S = \sum_{i\geq 0} x_i$ dans la topologie produit.

Topologie induite par la filtration

Si on prend $\{\mathfrak{M}_{\geq n}\}_{n\geq 0}$ comme base de voisinages de zéro, alors $R_0[[M]]$ devient une algèbre topologique complète (R étant supposé discret).

Remarque

$R_0[[M]]$ est équipé de deux topologies (d'algèbre) qui le rendent complet. Ces deux topologies peuvent être distinctes. Soit par exemple un ensemble infini dénombrable $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ d'indéterminées. Considérons la suite $S_n = \sum_{i=0}^{n} x_i$. Alors elle converge vers la série $S = \sum_{i\geq 0} x_i$ dans la topologie produit. Par contre, elle ne converge pas dans la topologie associée à la filtration car $v(S - S_n) = 1$ quel que soit n.

Opération étoile

Supposons que $R_0[[M]]$ soit muni de la topologie associée à la filtration.

Opération étoile

Supposons que $R_0[[M]]$ soit muni de la topologie associée à la filtration.

Proposition

Pour chaque $S \in \mathfrak{M}$, $1 - S$ est inversible, et $(1-S)^{-1} = S^* = \sum_{n \geq 0} S^n$. (La famille $(S^n)_n$ est sommable dans la topologie associée à la filtration.)

Opération étoile

Supposons que $R_0[[M]]$ soit muni de la topologie associée à la filtration.

Proposition

Pour chaque $S \in \mathfrak{M}$, $1 - S$ est inversible, et $(1 - S)^{-1} = S^* = \sum_{n \geq 0} S^n$. (La famille $(S^n)_n$ est sommable dans la topologie associée à la filtration.)

Soit $\zeta_0 = \sum_{w \in M_0} w \in R_0[[M]]$.

Opération étoile

Supposons que $R_0[[M]]$ soit muni de la topologie associée à la filtration.

Proposition

Pour chaque $S \in \mathfrak{M}$, $1 - S$ est inversible, et $(1-S)^{-1} = S^* = \sum_{n \geq 0} S^n$. (La famille $(S^n)_n$ est sommable dans la topologie associée à la filtration.)

Soit $\zeta_0 = \sum_{w \in M_0} w \in R_0[[M]]$.

Formule d'inversion de Möbius

La série zêta ζ_0 est inversible.

Cas des quotients de Rees

Soient M un monoïde localement fini et I un idéal bilatère de M.

Cas des quotients de Rees

Soient M un monoïde localement fini et I un idéal bilatère de M. Puisque M est localement fini, sa série zêta ζ est inversible (d'inverse μ sa série de Möbius).

Cas des quotients de Rees

Soient M un monoïde localement fini et I un idéal bilatère de M. Puisque M est localement fini, sa série zêta ζ est inversible (d'inverse μ sa série de Möbius). Par ailleurs, M/I est également localement fini (en tant que monoïde à zéro).

Cas des quotients de Rees

Soient M un monoïde localement fini et I un idéal bilatère de M. Puisque M est localement fini, sa série zêta ζ est inversible (d'inverse μ sa série de Möbius). Par ailleurs, M/I est également localement fini (en tant que monoïde à zéro). Sa série ζ_0 est donc aussi inversible (son inverse est noté μ_0).

Cas des quotients de Rees

Soient M un monoïde localement fini et I un idéal bilatère de M. Puisque M est localement fini, sa série zêta ζ est inversible (d'inverse μ sa série de Möbius). Par ailleurs, M/I est également localement fini (en tant que monoïde à zéro). Sa série ζ_0 est donc aussi inversible (son inverse est noté μ_0).

Soit $\Phi\colon R[[M]] \to R_0[[M/I]]$ définie par

$$\Phi\left(\sum_{w \in M} \langle S \mid w \rangle w\right) = \sum_{w \notin I} \langle S \mid w \rangle w.$$

Cas des quotients de Rees

Soient M un monoïde localement fini et I un idéal bilatère de M. Puisque M est localement fini, sa série zêta ζ est inversible (d'inverse μ sa série de Möbius). Par ailleurs, M/I est également localement fini (en tant que monoïde à zéro). Sa série ζ_0 est donc aussi inversible (son inverse est noté μ_0).

Soit $\Phi\colon R[[M]] \to R_0[[M/I]]$ définie par

$$\Phi\left(\sum_{w\in M}\langle S \mid w\rangle w\right) = \sum_{w\notin I}\langle S \mid w\rangle w.$$

Proposition

On a : $\mu_0 = \Phi(\mu)$.

Cas des quotients de Rees

Soient M un monoïde localement fini et I un idéal bilatère de M. Puisque M est localement fini, sa série zêta ζ est inversible (d'inverse μ sa série de Möbius). Par ailleurs, M/I est également localement fini (en tant que monoïde à zéro). Sa série ζ_0 est donc aussi inversible (son inverse est noté μ_0).

Soit $\Phi\colon R[[M]] \to R_0[[M/I]]$ définie par

$$\Phi\left(\sum_{w\in M} \langle S \mid w\rangle w\right) = \sum_{w\notin I} \langle S \mid w\rangle w.$$

Proposition

On a : $\mu_0 = \Phi(\mu)$. Si de plus $\langle \mu \mid w\rangle = 0$ quel que soit $w \in I$, alors

$$\mu_0 = \mu\ .$$

Corollaire

Soient X un ensemble, et I un idéal bilatère de X^*.

Corollaire

Soient X un ensemble, et I un idéal bilatère de X^*. Alors $\mu_0 = \mu$ si $X \cap I = \emptyset$,

Corollaire

Soient X un ensemble, et I un idéal bilatère de X^*. Alors $\mu_0 = \mu$ si $X \cap I = \emptyset$, et $\mu_0 = \mu'$ si $X \cap I \neq \emptyset$ où μ' est la série de Möbius du monoïde libre sur $X \setminus I$.

Corollaire

Soient X un ensemble, et I un idéal bilatère de X^*. Alors $\mu_0 = \mu$ si $X \cap I = \emptyset$, et $\mu_0 = \mu'$ si $X \cap I \neq \emptyset$ où μ' est la série de Möbius du monoïde libre sur $X \setminus I$.

En particulier, si on considère $M = X^*/I$ où $I = \{\, w \in X^* \colon \exists x \in X,\ |w|_x > 1 \,\}$, alors

$$\mu_0 = 1 - \sum_{x \in X} x \ .$$

Table des matières

Série de Hilbert-Poincaré

Soient $\mathbb{K}$ un corps, et A une $\mathbb{K}$-algèbre.

Série de Hilbert-Poincaré

Soient $\mathbb{K}$ un corps, et A une $\mathbb{K}$-algèbre. Pour chaque entier naturel n, $A_n \subseteq A$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Série de Hilbert-Poincaré

Soient $\mathbb{K}$ un corps, et A une $\mathbb{K}$-algèbre. Pour chaque entier naturel n, $A_n \subseteq A$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. On suppose que $A_m A_n \subseteq A_{m+n}$, et $A = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} A_n$.

Série de Hilbert-Poincaré

Soient $\mathbb{K}$ un corps, et A une $\mathbb{K}$-algèbre. Pour chaque entier naturel n, $A_n \subseteq A$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. On suppose que $A_m A_n \subseteq A_{m+n}$, et $A = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} A_n$. Dans ces conditions, on dit que A est une algèbre graduée (en degrés positifs).

Série de Hilbert-Poincaré

Soient $\mathbb{K}$ un corps, et A une $\mathbb{K}$-algèbre. Pour chaque entier naturel n, $A_n \subseteq A$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. On suppose que $A_m A_n \subseteq A_{m+n}$, et $A = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} A_n$. Dans ces conditions, on dit que A est une algèbre graduée (en degrés positifs).

Si de plus $\dim(A_n) < +\infty$ quel que soit n, on définit la série de Hilbert-Poincaré de A par $Hilb_A = \sum_{n \geq 0} \dim(A_n) t^n \in \mathbb{Z}[[t]]$.

Soient X un ensemble fini et I un idéal bilatère de X^*.

Soient X un ensemble fini et I un idéal bilatère de X^*. Soit A_n, respectivement B_n, l'espace vectoriel (librement) engendré par les mots de longueur n dans X^*, respectivement dans X^*/I (dans ce cas, l'élément 0 de X^*/I est identifié à 0 de l'algèbre).

Soient X un ensemble fini et I un idéal bilatère de X^*. Soit A_n, respectivement B_n, l'espace vectoriel (librement) engendré par les mots de longueur n dans X^*, respectivement dans X^*/I (dans ce cas, l'élément 0 de X^*/I est identifié à 0 de l'algèbre).

Nous avons deux algèbres graduées : $\mathbb{K}\langle X\rangle = \bigoplus_{n\geq 0} A_n$ et

$\mathbb{K}_0[X^*/I] = \bigoplus_{n\geq 0} B_n$ dont on souhaite calculer la série de Hilbert-Poincaré.

Soient X un ensemble fini et I un idéal bilatère de X^*. Soit A_n, respectivement B_n, l'espace vectoriel (librement) engendré par les mots de longueur n dans X^*, respectivement dans X^*/I (dans ce cas, l'élément 0 de X^*/I est identifié à 0 de l'algèbre).

Nous avons deux algèbres graduées : $\mathbb{K}\langle X\rangle = \bigoplus_{n\geq 0} A_n$ et

$\mathbb{K}_0[X^*/I] = \bigoplus_{n\geq 0} B_n$ dont on souhaite calculer la série de Hilbert-Poincaré.

Il est clair que $Hilb_{\mathbb{K}\langle X\rangle} = \frac{1}{1-|X|t}$.

Soient X un ensemble fini et I un idéal bilatère de X^*. Soit A_n, respectivement B_n, l'espace vectoriel (librement) engendré par les mots de longueur n dans X^*, respectivement dans X^*/I (dans ce cas, l'élément 0 de X^*/I est identifié à 0 de l'algèbre).

Nous avons deux algèbres graduées : $\mathbb{K}\langle X\rangle = \bigoplus_{n\geq 0} A_n$ et $\mathbb{K}_0[X^*/I] = \bigoplus_{n\geq 0} B_n$ dont on souhaite calculer la série de Hilbert-Poincaré.

Il est clair que $Hilb_{\mathbb{K}\langle X\rangle} = \frac{1}{1-|X|t}$.

Par ailleurs, $\dim(B_n) = \dim(A_n) - |I_n|$ où I_n désigne l'ensemble des mots de I de longueur n.

Soient X un ensemble fini et I un idéal bilatère de X^*. Soit A_n, respectivement B_n, l'espace vectoriel (librement) engendré par les mots de longueur n dans X^*, respectivement dans X^*/I (dans ce cas, l'élément 0 de X^*/I est identifié à 0 de l'algèbre).

Nous avons deux algèbres graduées : $\mathbb{K}\langle X\rangle = \bigoplus_{n\geq 0} A_n$ et $\mathbb{K}_0[X^*/I] = \bigoplus_{n\geq 0} B_n$ dont on souhaite calculer la série de Hilbert-Poincaré.

Il est clair que $Hilb_{\mathbb{K}\langle X\rangle} = \frac{1}{1-|X|t}$.

Par ailleurs, $\dim(B_n) = \dim(A_n) - |I_n|$ où I_n désigne l'ensemble des mots de I de longueur n. De sorte que : $Hilb_{\mathbb{K}_0[X^*/I]} = \frac{1}{1-|X|t} - \sum_{n\geq 0} |I_n| t^n$.

Soient X un ensemble fini et I un idéal bilatère de X^*. Soit A_n, respectivement B_n, l'espace vectoriel (librement) engendré par les mots de longueur n dans X^*, respectivement dans X^*/I (dans ce cas, l'élément 0 de X^*/I est identifié à 0 de l'algèbre).

Nous avons deux algèbres graduées : $\mathbb{K}\langle X\rangle = \bigoplus_{n\geq 0} A_n$ et

$\mathbb{K}_0[X^*/I] = \bigoplus_{n\geq 0} B_n$ dont on souhaite calculer la série de Hilbert-Poincaré.

Il est clair que $Hilb_{\mathbb{K}\langle X\rangle} = \frac{1}{1-|X|t}$.

Par ailleurs, $\dim(B_n) = \dim(A_n) - |I_n|$ où I_n désigne l'ensemble des mots de I de longueur n. De sorte que : $Hilb_{\mathbb{K}_0[X^*/I]} = \frac{1}{1-|X|t} - \sum_{n\geq 0} |I_n| t^n$.

Cette équation peut être retrouvée *via* les séries zêta de X^*/I et de X^*.

On définit un homomorphisme d'algèbres $e\colon \mathbb{Z}\langle X\rangle \to \mathbb{Z}[t]$ par e(x)=t quel que soit $x \in X$.

On définit un homomorphisme d'algèbres $e\colon \mathbb{Z}\langle X\rangle \to \mathbb{Z}[t]$ par e(x)=t quel que soit $x \in X$.

Il se trouve être continue (pour les topologies produits) de sorte que l'on peut l'étendre par continuité aux complétés : $e\colon \mathbb{Z}\langle\langle X\rangle\rangle \to \mathbb{Z}[[t]]$ par

$$e\Big(\sum_{w\in X^*} n_w w\Big) = \sum_{n\in\mathbb{N}}\Big(\sum_{w\in X_n} n_w\Big)t^n$$

où $X_n = \{\, w \in X^*\colon |w| = n \,\}$.

On définit un homomorphisme d'algèbres $e\colon \mathbb{Z}\langle X\rangle \to \mathbb{Z}[t]$ par e(x)=t quel que soit $x \in X$.

Il se trouve être continue (pour les topologies produits) de sorte que l'on peut l'étendre par continuité aux complétés : $e\colon \mathbb{Z}\langle\langle X\rangle\rangle \to \mathbb{Z}[[t]]$ par

$$e\Big(\sum_{w\in X^*} n_w w\Big) = \sum_{n\in\mathbb{N}}\Big(\sum_{w\in X_n} n_w\Big)t^n$$

où $X_n = \{\, w \in X^*\colon |w| = n \,\}$.

Les séries ζ_0, ζ et $\displaystyle\sum_{w\in I} w$ sont définies dans $\mathbb{Z}\langle\langle X\rangle\rangle$.

On définit un homomorphisme d'algèbres $e\colon \mathbb{Z}\langle X\rangle \to \mathbb{Z}[t]$ par $e(x)=t$ quel que soit $x \in X$.

Il se trouve être continue (pour les topologies produits) de sorte que l'on peut l'étendre par continuité aux complétés : $e\colon \mathbb{Z}\langle\langle X\rangle\rangle \to \mathbb{Z}[[t]]$ par

$$e(\sum_{w\in X^*} n_w w) = \sum_{n\in\mathbb{N}}(\sum_{w\in X_n} n_w)t^n$$

où $X_n = \{\, w \in X^*\colon |w| = n \,\}$.

Les séries ζ_0, ζ et $\sum_{w\in I} w$ sont définies dans $\mathbb{Z}\langle\langle X\rangle\rangle$. Elles vérifient :

$$\zeta_0 = \zeta - \sum_{w\in I} w \ .$$

En appliquant e sur chaque membre de l'égalité précédente, on obtient :

En appliquant e sur chaque membre de l'égalité précédente, on obtient :

$$e(\sum_{w \notin I} w) = e(\sum_{w \in X*} w) - e(\sum_{w \in I} w) \ .$$

En appliquant e sur chaque membre de l'égalité précédente, on obtient :
$$e(\sum_{w \notin I} w) = e(\sum_{w \in X*} w) - e(\sum_{w \in I} w) \ .$$

Ce qui est équivalent à :
$$\sum_{n \geq 0} (|X_n| - |I_n|) t^n = \sum_{n \geq 0} |X_n| t^n - \sum_{n \geq 0} |I_n| t^n \ .$$

En appliquant e sur chaque membre de l'égalité précédente, on obtient :

$$e(\sum_{w \notin I} w) = e(\sum_{w \in X^*} w) - e(\sum_{w \in I} w) \ .$$

Ce qui est équivalent à :

$$\sum_{n \geq 0} (|X_n| - |I_n|) t^n = \sum_{n \geq 0} |X_n| t^n - \sum_{n \geq 0} |I_n| t^n \ .$$

Soit encore :

$$Hilb_{\mathbb{K}_0[X^*/I]} = \frac{1}{1-|X|t} - \sum_{n \geq 0} |I_n| t^n.$$

En appliquant e sur chaque membre de l'égalité précédente, on obtient :
$$e(\sum_{w \notin I} w) = e(\sum_{w \in X^*} w) - e(\sum_{w \in I} w) .$$

Ce qui est équivalent à :
$$\sum_{n \geq 0} (|X_n| - |I_n|) t^n = \sum_{n \geq 0} |X_n| t^n - \sum_{n \geq 0} |I_n| t^n .$$

Soit encore :
$$Hilb_{\mathbb{K}_0[X^*/I]} = \frac{1}{1-|X|t} - \sum_{n \geq 0} |I_n| t^n.$$

On remarque en particulier que les séries de Hilbert-Poincaré de $\mathbb{K}_0[X^*/I]$ et de $\mathbb{K}[X^*]$ sont obtenues comme des spécialisations de leurs séries zêta (à coefficients entiers).

Exemples

Supposons que $I = \{ w \in X^* \colon |w| > n_0 \}$ pour un certain $n_0 \in \mathbb{N}$.

Exemples

Supposons que $I = \{ w \in X^* \colon |w| > n_0 \}$ pour un certain $n_0 \in \mathbb{N}$. Alors on obtient immédiatement que $Hilb_{\mathbb{K}_0[X^*/I]} = \frac{1-|X|^{n_0+1}t^{n_0+1}}{1-|X|t}$.

Exemples

Supposons que $I = \{\, w \in X^* \colon |w| > n_0 \,\}$ pour un certain $n_0 \in \mathbb{N}$. Alors on obtient immédiatement que $Hilb_{\mathbb{K}_0[X^*/I]} = \frac{1-|X|^{n_0+1}t^{n_0+1}}{1-|X|t}$.

Si on suppose maintenant que $I = \{\, w \in X^* \colon \exists x \in X,\ |w|_x > 1 \,\}$.

Exemples

Supposons que $I = \{\, w \in X^* \colon |w| > n_0 \,\}$ pour un certain $n_0 \in \mathbb{N}$. Alors on obtient immédiatement que $Hilb_{\mathbb{K}_0[X^*/I]} = \frac{1-|X|^{n_0+1}t^{n_0+1}}{1-|X|t}$.

Si on suppose maintenant que $I = \{\, w \in X^* \colon \exists x \in X,\ |w|_x > 1 \,\}$. Alors dans ce cas, $Hilb_{\mathbb{K}_0[X^*/I]} = \sum_{n\geq 0}^{|X|} |X|^{\underline{n}} t^n$ où $|X|^{\underline{n}} = \prod_{i=0}^{n-1}(|X| - i)$.