Sur le groupoïde de géométrie d'une variété équationnelle équilibrée

Laurent Poinsot

LIPN - UMR CNRS 7030
Université Paris XIII, Sorbonne Paris Cité - Institut Galilée

Séminaire Logique et Interactions
Vendredi 25 avril 2014

Table des matières

Équations équilibrées

Soit Σ une signature (ensemble gradué par les entiers naturels). Une équation $u = v$ sur l'algèbre libre $\Sigma[X]$ (sur un ensemble X) est équilibrée lorsque u, v sont des termes qui possèdent les mêmes ensembles de variables.

Équations équilibrées

Soit Σ une signature (ensemble gradué par les entiers naturels). Une équation $u = v$ sur l'algèbre libre $\Sigma[X]$ (sur un ensemble X) est équilibrée lorsque u, v sont des termes qui possèdent les mêmes ensembles de variables.

Par exemple, l'associativité $(x_0 * x_1) * x_2 = x_0 * (x_1 * x_2)$, neutralité gauche $1 * x_0 = x_0$ ou droite $x_0 * 1 = x_0$, commutativité $x_0 * x_1 = x_1 * x_0$, inverse (au sens des semi-groupes inversifs) $x_0^\star \cdot x_0 \cdot x_0^\star = x_0$, sont toutes des équations équilibrées.

Équations équilibrées

Soit Σ une signature (ensemble gradué par les entiers naturels). Une équation $u = v$ sur l'algèbre libre $\Sigma[X]$ (sur un ensemble X) est équilibrée lorsque u, v sont des termes qui possèdent les mêmes ensembles de variables.

Par exemple, l'associativité $(x_0 * x_1) * x_2 = x_0 * (x_1 * x_2)$, neutralité gauche $1 * x_0 = x_0$ ou droite $x_0 * 1 = x_0$, commutativité $x_0 * x_1 = x_1 * x_0$, inverse (au sens des semi-groupes inversifs) $x_0^\star \cdot x_0 \cdot x_0^\star = x_0$, sont toutes des équations équilibrées.

Contre-exemple : inverse à gauche (ou à droite) $x_0^{-1} * x_0 = 1$.

Variété équilibrée

Une variété équationnelle **V** de Σ-algèbres est dite équilibrée lorsque elle est déterminée par des équations sur $\Sigma[\mathbb{N}]$ qui sont équilibrées.

Variété équilibrée

Une variété équationnelle **V** de Σ-algèbres est dite équilibrée lorsque elle est déterminée par des équations sur $\Sigma[\mathbb{N}]$ qui sont équilibrées.

Par exemple, la variété des semi-groupes, celle des monoïdes, ou encore celle des semi-groupes inversifs (chacune en version commutative ou non) sont équilibrées, alors que la variété des groupes ne l'est pas.

Opérations de substitution

Étant donné une signature Σ, un ensemble X et un terme $t \in \Sigma[\mathbb{N}]$, posons

$$\mathbf{Subst}_X(t) := \{\, \hat{\sigma}(t) \in \Sigma[X] \colon \sigma \colon \mathbb{N} \to \Sigma[X] \,\} \,.$$

Opérations de substitution

Étant donné une signature Σ, un ensemble X et un terme $t \in \Sigma[\mathbb{N}]$, posons

$$\mathbf{Subst}_X(t) := \{\, \hat{\sigma}(t) \in \Sigma[X] \colon \sigma \colon \mathbb{N} \to \Sigma[X] \,\} \ .$$

Par exemple, $\mathbf{Subst}_X(n) = \Sigma[X]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Opérations de substitution

Étant donné une signature Σ, un ensemble X et un terme $t \in \Sigma[\mathbb{N}]$, posons

$$\mathbf{Subst}_X(t) := \{\, \hat{\sigma}(t) \in \Sigma[X] \colon \sigma \colon \mathbb{N} \to \Sigma[X] \,\} \,.$$

Par exemple, $\mathbf{Subst}_X(n) = \Sigma[X]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Soit (s, t) une paire de termes équilibrés (i.e., $s = t$ est une équation équilibrée dans $\Sigma[\mathbb{N}]$).

Opérations de substitution

Étant donné une signature Σ, un ensemble X et un terme $t \in \Sigma[\mathbb{N}]$, posons

$$\mathbf{Subst}_X(t) := \{\, \hat{\sigma}(t) \in \Sigma[X] \colon \sigma \colon \mathbb{N} \to \Sigma[X] \,\} \ .$$

Par exemple, $\mathbf{Subst}_X(n) = \Sigma[X]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Soit (s, t) une paire de termes équilibrés (i.e., $s = t$ est une équation équilibrée dans $\Sigma[\mathbb{N}]$). On définit une application $\rho^{(s,t)} \colon \mathbf{Subst}_X(s) \to \mathbf{Subst}_X(t)$ par

$$\rho^{(s,t)}(\hat{\sigma}(s)) := \hat{\sigma}(t) \ .$$

Opérations de substitution

Étant donné une signature Σ, un ensemble X et un terme $t \in \Sigma[\mathbb{N}]$, posons

$$\mathbf{Subst}_X(t) := \{\, \hat{\sigma}(t) \in \Sigma[X] \colon \sigma \colon \mathbb{N} \to \Sigma[X] \,\} \ .$$

Par exemple, $\mathbf{Subst}_X(n) = \Sigma[X]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Soit (s, t) une paire de termes équilibrés (i.e., $s = t$ est une équation équilibrée dans $\Sigma[\mathbb{N}]$). On définit une application $\rho^{(s,t)} \colon \mathbf{Subst}_X(s) \to \mathbf{Subst}_X(t)$ par

$$\rho^{(s,t)}(\hat{\sigma}(s)) := \hat{\sigma}(t) \ .$$

(La relation est bien fonctionnelle puisque toutes les variables de t figurent dans s de sorte que la valeur de $\hat{\sigma}(t)$ est entièrement déterminée par celle de $\hat{\sigma}(s)$.)

Opérations de substitution

Étant donné une signature Σ, un ensemble X et un terme $t \in \Sigma[\mathbb{N}]$, posons

$$\mathbf{Subst}_X(t) := \{\, \hat{\sigma}(t) \in \Sigma[X] \colon \sigma \colon \mathbb{N} \to \Sigma[X] \,\} \ .$$

Par exemple, $\mathbf{Subst}_X(n) = \Sigma[X]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Soit (s, t) une paire de termes équilibrés (i.e., $s = t$ est une équation équilibrée dans $\Sigma[\mathbb{N}]$). On définit une application $\rho^{(s,t)} \colon \mathbf{Subst}_X(s) \to \mathbf{Subst}_X(t)$ par

$$\rho^{(s,t)}(\hat{\sigma}(s)) := \hat{\sigma}(t) \ .$$

(La relation est bien fonctionnelle puisque toutes les variables de t figurent dans s de sorte que la valeur de $\hat{\sigma}(t)$ est entièrement déterminée par celle de $\hat{\sigma}(s)$.)

Plus généralement, étant donné une position p, on définit le translaté $\rho_p^{(s,t)}$ de $\rho^{(s,t)}$ qui agit de façon identique sur les sous-termes à la position p.

Opérations de substitution

Étant donné une signature Σ, un ensemble X et un terme $t \in \Sigma[\mathbb{N}]$, posons

$$\mathbf{Subst}_X(t) := \{\, \hat{\sigma}(t) \in \Sigma[X] \colon \sigma \colon \mathbb{N} \to \Sigma[X] \,\} \ .$$

Par exemple, $\mathbf{Subst}_X(n) = \Sigma[X]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Soit (s, t) une paire de termes équilibrés (i.e., $s = t$ est une équation équilibrée dans $\Sigma[\mathbb{N}]$). On définit une application $\rho^{(s,t)} \colon \mathbf{Subst}_X(s) \to \mathbf{Subst}_X(t)$ par

$$\rho^{(s,t)}(\hat{\sigma}(s)) := \hat{\sigma}(t) \ .$$

(La relation est bien fonctionnelle puisque toutes les variables de t figurent dans s de sorte que la valeur de $\hat{\sigma}(t)$ est entièrement déterminée par celle de $\hat{\sigma}(s)$.)

Plus généralement, étant donné une position p, on définit le translaté $\rho_p^{(s,t)}$ de $\rho^{(s,t)}$ qui agit de façon identique sur les sous-termes à la position p. En particulier $\rho_\epsilon^{(s,t)} = \rho^{(s,t)}$.

Le monoïde de géométrie de P. Dehornoy

Fixons maintenant un ensemble de $R \subseteq \Sigma[\mathbb{N}]^2$ d'équations équilibrées : des *relations*.

Le monoïde de géométrie de P. Dehornoy

Fixons maintenant un ensemble de $R \subseteq \Sigma[\mathbb{N}]^2$ d'équations équilibrées : des *relations*.

D'après le théorème HSP de G. Birkhoff, la congruence $\cong$ totalement invariante, i.e., invariante par endomorphismes, de $\Sigma[\mathbb{N}]$ engendrée par R (elle est équilibrée puisque R l'est) détermine une unique variété équationnelle équilibrée $\mathbf{V}$ de Σ-algèbres.

Le monoïde de géométrie de P. Dehornoy

Fixons maintenant un ensemble de $R \subseteq \Sigma[\mathbb{N}]^2$ d'équations équilibrées : des *relations*.

D'après le théorème HSP de G. Birkhoff, la congruence $\cong$ totalement invariante, i.e., invariante par endomorphismes, de $\Sigma[\mathbb{N}]$ engendrée par R (elle est équilibrée puisque R l'est) détermine une unique variété équationnelle équilibrée $\mathbf{V}$ de Σ-algèbres. Par exemple, $R = \{ ((0 * 1) * 2, 0 * (1 * 2)), (0 * e, 0), (e * 0, 0) \}$ détermine la variété des monoïdes.

Le monoïde de géométrie de P. Dehornoy

Fixons maintenant un ensemble de $R \subseteq \Sigma[\mathbb{N}]^2$ d'équations équilibrées : des *relations*.

D'après le théorème HSP de G. Birkhoff, la congruence $\cong$ totalement invariante, i.e., invariante par endomorphismes, de $\Sigma[\mathbb{N}]$ engendrée par R (elle est équilibrée puisque R l'est) détermine une unique variété équationnelle équilibrée $\mathbf{V}$ de Σ-algèbres. Par exemple, $R = \{\, ((0 * 1) * 2, 0 * (1 * 2)), (0 * e, 0), (e * 0, 0) \,\}$ détermine la variété des monoïdes.

Considérons le sous-monoïde $\mathbf{G}_R(\mathbf{V})$ (aussi noté $\mathbf{G}(\mathbf{V})$) des bijections partielles de $\Sigma[X]$ engendré par $\rho_p^{(s,t)} : \Sigma[X] \to \Sigma[X]$, $(s, t) \in R$ ou $(t, s) \in R$, et p une position.

Le monoïde de géométrie de P. Dehornoy

Fixons maintenant un ensemble de $R \subseteq \Sigma[\mathbb{N}]^2$ d'équations équilibrées : des *relations*.

D'après le théorème HSP de G. Birkhoff, la congruence $\cong$ totalement invariante, i.e., invariante par endomorphismes, de $\Sigma[\mathbb{N}]$ engendrée par R (elle est équilibrée puisque R l'est) détermine une unique variété équationnelle équilibrée $\mathbf{V}$ de Σ-algèbres. Par exemple, $R = \{ ((0 * 1) * 2, 0 * (1 * 2)), (0 * e, 0), (e * 0, 0) \}$ détermine la variété des monoïdes.

Considérons le sous-monoïde $\mathbf{G}_R(\mathbf{V})$ (aussi noté $\mathbf{G}(\mathbf{V})$) des bijections partielles de $\Sigma[X]$ engendré par $\rho_p^{(s,t)} : \Sigma[X] \to \Sigma[X]$, $(s, t) \in R$ ou $(t, s) \in R$, et p une position.

C'est cet objet $\mathbf{G}(\mathbf{V})$ que P. Dehornoy a nommé monoïde de géométrie de la variété $\mathbf{V}$.

Remarque

On peut définir une version orientée de $\mathbf{G}(\mathbf{V})$ en ne considérant que les générateurs de la forme $\rho_p^{(s,t)}$ pour $(s,t) \in R$

Remarque

On peut définir une version orientée de $\mathbf{G}(\mathbf{V})$ en ne considérant que les générateurs de la forme $\rho_p^{(s,t)}$ pour $(s,t) \in R$:

C'est une version adaptée aux systèmes de réécriture de termes.

Propriétés

$\mathbf{G}(\mathbf{V})$ est un monoïde inversif.

Propriétés

$\mathbf{G}(\mathbf{V})$ est un monoïde inversif.

Rappelons qu'un monoïde inversif est un monoïde avec une opération unaire $(-)^\star \colon M \to M$ satisfaisant les relations $xx^\star x = x$, $(x^\star)^\star = x$, $x^\star x y^\star y = y^\star y x^\star x$, et $(xy)^\star = y^\star x^\star$.

Propriétés

$\mathbf{G}(\mathbf{V})$ est un monoïde inversif.

Rappelons qu'un monoïde inversif est un monoïde avec une opération unaire $(-)^\star \colon M \to M$ satisfaisant les relations $xx^\star x = x$, $(x^\star)^\star = x$, $x^\star x y^\star y = y^\star y x^\star x$, et $(xy)^\star = y^\star x^\star$. Les monoïdes inversifs forment une variété équilibrée (avec les homomorphismes de monoïdes commutant avec les involutions $(-)^\star$).

Géométrie ?

Propriété géométrique (Dehornoy)

Le monoïde $\mathbf{G}(\mathbf{V})$ agit sur $\Sigma[X]$ et l'espace homogène $\Sigma[X]/\mathbf{G}(\mathbf{V})$ (l'ensemble des orbites) associé à cette action est l'algèbre libre $\mathbf{V}[X]$ dans $\mathbf{V}$ sur X.

Relation entre $\mathbf{G(V)}$ et $\cong$

P. Dehornoy a démontré le résultat suivant :

Relation entre $\mathbf{G}(\mathbf{V})$ et $\cong$

P. Dehornoy a démontré le résultat suivant :

Théorème (Dehornoy)

Pour chaque bijection partielle θ (non vide) de $\mathbf{G}(\mathbf{V})$, il existe une paire de termes équilibrés $(s_\theta, t_\theta) \in \Sigma[\mathbb{N}]^2$, unique à renommage près des variables, tel que $s_\theta \cong t_\theta$ et

$$\theta = \rho^{(s_\theta, t_\theta)} .$$

De plus quels que soient les ensembles de relations R et R' engendrant $\cong$, $\mathbf{G}_R(\mathbf{V}) \cong \mathbf{G}_{R'}(\mathbf{V})$.

Relation entre $\mathbf{G}(\mathbf{V})$ et $\cong$

P. Dehornoy a démontré le résultat suivant :

Théorème (Dehornoy)

Pour chaque bijection partielle θ (non vide) de $\mathbf{G}(\mathbf{V})$, il existe une paire de termes équilibrés $(s_\theta, t_\theta) \in \Sigma[\mathbb{N}]^2$, unique à renommage près des variables, tel que $s_\theta \cong t_\theta$ et

$$\theta = \rho^{(s_\theta, t_\theta)} \; .$$

De plus quels que soient les ensembles de relations R et R' engendrant $\cong$, $\mathbf{G}_R(\mathbf{V}) \cong \mathbf{G}_{R'}(\mathbf{V})$.

Autrement dit, le monoïde de géométrie $\mathbf{G}(\mathbf{V})$ est essentiellement la congruence totalement invariante $\cong$ sur $\Sigma[\mathbb{N}]$ engendrée par les relations R,

Relation entre $\mathbf{G(V)}$ et $\cong$

P. Dehornoy a démontré le résultat suivant :

Théorème (Dehornoy)

Pour chaque bijection partielle θ (non vide) de $\mathbf{G(V)}$, il existe une paire de termes équilibrés $(s_\theta, t_\theta) \in \Sigma[\mathbb{N}]^2$, unique à renommage près des variables, tel que $s_\theta \cong t_\theta$ et

$$\theta = \rho^{(s_\theta, t_\theta)} \ .$$

De plus quels que soient les ensembles de relations R et R' engendrant $\cong$, $\mathbf{G}_R(\mathbf{V}) \cong \mathbf{G}_{R'}(\mathbf{V})$.

Autrement dit, le monoïde de géométrie $\mathbf{G(V)}$ est essentiellement la congruence totalement invariante $\cong$ sur $\Sigma[\mathbb{N}]$ engendrée par les relations R, et est donc largement indépendant du choix de R et de l'ensemble X,

Relation entre $\mathbf{G}(\mathbf{V})$ et $\cong$

P. Dehornoy a démontré le résultat suivant :

Théorème (Dehornoy)

Pour chaque bijection partielle θ (non vide) de $\mathbf{G}(\mathbf{V})$, il existe une paire de termes équilibrés $(s_\theta, t_\theta) \in \Sigma[\mathbb{N}]^2$, unique à renommage près des variables, tel que $s_\theta \cong t_\theta$ et

$$\theta = \rho^{(s_\theta, t_\theta)} \ .$$

De plus quels que soient les ensembles de relations R et R' engendrant $\cong$, $\mathbf{G}_R(\mathbf{V}) \cong \mathbf{G}_{R'}(\mathbf{V})$.

Autrement dit, le monoïde de géométrie $\mathbf{G}(\mathbf{V})$ est essentiellement la congruence totalement invariante $\cong$ sur $\Sigma[\mathbb{N}]$ engendrée par les relations R, et est donc largement indépendant du choix de R et de l'ensemble X, et, par le théorème HSP de G. Birkhoff, intrinsèquement lié à la variété $\mathbf{V}$ elle-même.

Structure de groupoïde sur $\mathbf{G}(\mathbf{V})$

Pour $\theta_1, \theta_2 \in \mathbf{G}(\mathbf{V})$, on définit le produit restreint $\theta_2 \cdot \theta_1 := \theta_2 \circ \theta_1$ si, et seulement, $\mathrm{dom}(\theta_2) = \mathrm{im}(\theta_1)$.

Structure de groupoïde sur $\mathbf{G(V)}$

Pour $\theta_1, \theta_2 \in \mathbf{G(V)}$, on définit le produit restreint $\theta_2 \cdot \theta_1 := \theta_2 \circ \theta_1$ si, et seulement, $\mathrm{dom}(\theta_2) = \mathrm{im}(\theta_1)$.

Remarque

Isomorphisme de catégories entre semi-groupes inversifs et groupoïdes ordonnés inductifs (C. Ehresmann).

Table des matières

Action d'un groupoïde

Soit **G** un groupoïde, et notons **Bij** le groupoïde des ensembles avec les bijections.

Action d'un groupoïde

Soit **G** un groupoïde, et notons **Bij** le groupoïde des ensembles avec les bijections. Une action de **G** est un foncteur F de **G** dans **Bij**.

Action d'un groupoïde

Soit $\mathbf{G}$ un groupoïde, et notons $\mathbf{Bij}$ le groupoïde des ensembles avec les bijections. Une action de $\mathbf{G}$ est un foncteur F de $\mathbf{G}$ dans $\mathbf{Bij}$.

Si la classe $\mathbf{Ob}(\mathbf{G})$ des objets de $\mathbf{G}$ est un petit ensemble, alors on pose $\Sigma_F := \bigsqcup_{A \in \mathbf{Ob}(\mathbf{G})} F(A)$.

Action d'un groupoïde

Soit **G** un groupoïde, et notons **Bij** le groupoïde des ensembles avec les bijections. Une action de **G** est un foncteur F de **G** dans **Bij**.

Si la classe **Ob**(**G**) des objets de **G** est un petit ensemble, alors on pose $\Sigma_F := \bigsqcup_{A \in \mathbf{Ob}(\mathbf{G})} F(A)$.

Supposons pour simplifier que $F(A) \cap F(B) = \emptyset$, $A \neq B$.

Action d'un groupoïde

Soit $\mathbf{G}$ un groupoïde, et notons $\mathbf{Bij}$ le groupoïde des ensembles avec les bijections. Une action de $\mathbf{G}$ est un foncteur F de $\mathbf{G}$ dans $\mathbf{Bij}$.

Si la classe $\mathbf{Ob}(\mathbf{G})$ des objets de $\mathbf{G}$ est un petit ensemble, alors on pose $\Sigma_F := \bigsqcup_{A \in \mathbf{Ob}(\mathbf{G})} F(A)$.

Supposons pour simplifier que $F(A) \cap F(B) = \emptyset$, $A \neq B$. L'orbite $\mathcal{O}(x)$ de $x \in F(A)$ est défini par $\{\, F(f)(x) \colon d_0(f) = A \,\} \subseteq \Sigma_F$.

Action d'un groupoïde

Soit $\mathbf{G}$ un groupoïde, et notons $\mathbf{Bij}$ le groupoïde des ensembles avec les bijections. Une action de $\mathbf{G}$ est un foncteur F de $\mathbf{G}$ dans $\mathbf{Bij}$.

Si la classe $\mathbf{Ob}(\mathbf{G})$ des objets de $\mathbf{G}$ est un petit ensemble, alors on pose $\Sigma_F := \bigsqcup_{A \in \mathbf{Ob}(\mathbf{G})} F(A)$.

Supposons pour simplifier que $F(A) \cap F(B) = \emptyset$, $A \neq B$. L'orbite $\mathcal{O}(x)$ de $x \in F(A)$ est défini par $\{\, F(f)(x) \colon d_0(f) = A \,\} \subseteq \Sigma_F$.

Étant donné $x, y \in \Sigma_F$, on défini $x \sim_F y$ si, et seulement si, il existe une flèche f telle que $x \in F(d_0(f))$ et $F(f)(x) = y$.

Action d'un groupoïde

Soit $\mathbf{G}$ un groupoïde, et notons $\mathbf{Bij}$ le groupoïde des ensembles avec les bijections. Une action de $\mathbf{G}$ est un foncteur F de $\mathbf{G}$ dans $\mathbf{Bij}$.

Si la classe $\mathbf{Ob}(\mathbf{G})$ des objets de $\mathbf{G}$ est un petit ensemble, alors on pose $\Sigma_F := \bigsqcup_{A \in \mathbf{Ob}(\mathbf{G})} F(A)$.

Supposons pour simplifier que $F(A) \cap F(B) = \emptyset$, $A \neq B$. L'orbite $\mathcal{O}(x)$ de $x \in F(A)$ est défini par $\{\, F(f)(x) \colon d_0(f) = A \,\} \subseteq \Sigma_F$.

Étant donné $x, y \in \Sigma_F$, on défini $x \sim_F y$ si, et seulement si, il existe une flèche f telle que $x \in F(d_0(f))$ et $F(f)(x) = y$.

On montre que $\sim_F$ est une relation d'équivalence sur Σ_F et que $x \sim_F y$ si, et seulement si, $\mathcal{O}(x) = \mathcal{O}(y)$.

Action d'un groupoïde

Soit $\mathbf{G}$ un groupoïde, et notons $\mathbf{Bij}$ le groupoïde des ensembles avec les bijections. Une action de $\mathbf{G}$ est un foncteur F de $\mathbf{G}$ dans $\mathbf{Bij}$.

Si la classe $\mathbf{Ob}(\mathbf{G})$ des objets de $\mathbf{G}$ est un petit ensemble, alors on pose $\Sigma_F := \bigsqcup_{A \in \mathbf{Ob}(\mathbf{G})} F(A)$.

Supposons pour simplifier que $F(A) \cap F(B) = \emptyset$, $A \neq B$. L'orbite $\mathcal{O}(x)$ de $x \in F(A)$ est défini par $\{\, F(f)(x) \colon d_0(f) = A \,\} \subseteq \Sigma_F$.

Étant donné $x, y \in \Sigma_F$, on défini $x \sim_F y$ si, et seulement si, il existe une flèche f telle que $x \in F(d_0(f))$ et $F(f)(x) = y$.

On montre que $\sim_F$ est une relation d'équivalence sur Σ_F et que $x \sim_F y$ si, et seulement si, $\mathcal{O}(x) = \mathcal{O}(y)$.

On définit l'espace des orbites $\Sigma_F/\mathbf{G}$ comme $\Sigma_F/\sim_F$.

Autre définition d'une action

Mark V. Lawson a introduit la notion d'action d'un groupoïde sur un ensemble comme suit.

Autre définition d'une action

Mark V. Lawson a introduit la notion d'action d'un groupoïde sur un ensemble comme suit. Supposons que E soit un ensemble avec une application $\pi \colon E \to \mathbf{Ob(G)}$.

Autre définition d'une action

Mark V. Lawson a introduit la notion d'action d'un groupoïde sur un ensemble comme suit. Supposons que E soit un ensemble avec une application $\pi\colon E \to \mathbf{Ob(G)}$.

Une action (à gauche) de $\mathbf{G}$ sur (E, π) est une application du produit fibré $\mathbf{Arr}(G)\ {}_{d_0}\!\times_{\pi} E$ dans E, notée $(f, x) \mapsto f \cdot x$, satisfaisant un certain nombre d'axiomes.

Autre définition d'une action

Mark V. Lawson a introduit la notion d'action d'un groupoïde sur un ensemble comme suit. Supposons que E soit un ensemble avec une application $\pi\colon E \to \mathbf{Ob(G)}$.

Une action (à gauche) de **G** sur (E, π) est une application du produit fibré $\mathbf{Arr}(G)\ {}_{d_0}\!\times_{\pi} E$ dans E, notée $(f, x) \mapsto f \cdot x$, satisfaisant un certain nombre d'axiomes.

Théorème (PL, 2014)

Les deux versions de la définition d'une action d'un groupoïde sont équivalentes.

Renommage des variables

Le groupe symétrique $\mathfrak{S}(X)$ agit sur $\Sigma[X]$ par renommage des variables : $\pi \cdot t := \hat{\pi}(t)$.

Renommage des variables

Le groupe symétrique $\mathfrak{S}(X)$ agit sur $\Sigma[X]$ par renommage des variables : $\pi \cdot t := \hat{\pi}(t)$.

La valeur de $\pi \cdot t$ ne dépend que de $\pi_{|_{\mathsf{var}(t)}}$.

Renommage des variables

Le groupe symétrique $\mathfrak{S}(X)$ agit sur $\Sigma[X]$ par renommage des variables : $\pi \cdot t := \hat{\pi}(t)$.

La valeur de $\pi \cdot t$ ne dépend que de $\pi_{|_{\mathsf{var}(t)}}$. On peut donc considérer l'action du groupe symétrique infini $\mathfrak{S}_\infty(X)$ (permutations de X fixant tous les éléments sauf un ensemble fini).

Renommage des variables

Le groupe symétrique $\mathfrak{S}(X)$ agit sur $\Sigma[X]$ par renommage des variables : $\pi \cdot t := \hat{\pi}(t)$.

La valeur de $\pi \cdot t$ ne dépend que de $\pi_{|_{\mathsf{var}(t)}}$. On peut donc considérer l'action du groupe symétrique infini $\mathfrak{S}_\infty(X)$ (permutations de X fixant tous les éléments sauf un ensemble fini).

Mais en fait peu importe que π soit une permutation sur X tout entier.

Renommage des variables

Le groupe symétrique $\mathfrak{S}(X)$ agit sur $\Sigma[X]$ par renommage des variables : $\pi \cdot t := \hat{\pi}(t)$.

La valeur de $\pi \cdot t$ ne dépend que de $\pi_{|_{\mathsf{var}(t)}}$. On peut donc considérer l'action du groupe symétrique infini $\mathfrak{S}_\infty(X)$ (permutations de X fixant tous les éléments sauf un ensemble fini).

Mais en fait peu importe que π soit une permutation sur X tout entier. On peut donc se restreindre aux endo-fonctions de X qui des bijections seulement sur un sous-ensemble fini,

Renommage des variables

Le groupe symétrique $\mathfrak{S}(X)$ agit sur $\Sigma[X]$ par renommage des variables : $\pi \cdot t := \hat{\pi}(t)$.

La valeur de $\pi \cdot t$ ne dépend que de $\pi_{|_{\mathsf{var}(t)}}$. On peut donc considérer l'action du groupe symétrique infini $\mathfrak{S}_\infty(X)$ (permutations de X fixant tous les éléments sauf un ensemble fini).

Mais en fait peu importe que π soit une permutation sur X tout entier. On peut donc se restreindre aux endo-fonctions de X qui des bijections seulement sur un sous-ensemble fini, et considérer deux telles fonctions comme égales si elles coïncident sur cet ensemble : germes de bijections locales.

Groupoïde des germes de bijection locale

Soit X un ensemble, et notons $\mathfrak{P}_{\mathsf{fin}}(X)$ l'ensemble de ses parties finies.

Groupoïde des germes de bijection locale

Soit X un ensemble, et notons $\mathfrak{P}_{\mathsf{fin}}(X)$ l'ensemble de ses parties finies.

On définit la catégorie $\mathbf{LocBij}(X)$ des bijections locales (mais non partielles) sur X

Groupoïde des germes de bijection locale

Soit X un ensemble, et notons $\mathfrak{P}_{\mathsf{fin}}(X)$ l'ensemble de ses parties finies.

On définit la catégorie $\mathbf{LocBij}(X)$ des bijections locales (mais non partielles) sur X : les objets sont les éléments de $\mathfrak{P}_{\mathsf{fin}}(X)$,

Groupoïde des germes de bijection locale

Soit X un ensemble, et notons $\mathfrak{P}_{\mathsf{fin}}(X)$ l'ensemble de ses parties finies.

On définit la catégorie $\mathbf{LocBij}(X)$ des bijections locales (mais non partielles) sur X : les objets sont les éléments de $\mathfrak{P}_{\mathsf{fin}}(X)$, une flèche de A vers B est une paire (σ, A) où $\sigma \colon X \to X$ telle que $\sigma_{|_A} \colon A \to B$ est bijective (donc en particulier $|A| = |B|$).

Groupoïde des germes de bijection locale

Soit X un ensemble, et notons $\mathfrak{P}_{\mathsf{fin}}(X)$ l'ensemble de ses parties finies.

On définit la catégorie **LocBij**(X) des bijections locales (mais non partielles) sur X : les objets sont les éléments de $\mathfrak{P}_{\mathsf{fin}}(X)$, une flèche de A vers B est une paire (σ, A) où $\sigma \colon X \to X$ telle que $\sigma_{|_A} \colon A \to B$ est bijective (donc en particulier $|A| = |B|$).

Pour $A, B \subseteq X$ finis de même cardinal, on pose $(\sigma, A) \equiv_{A,B} (\tau, A)$ si, et seulement si, $\sigma_{|_A} = \tau_{|_A}$.

Groupoïde des germes de bijection locale

Soit X un ensemble, et notons $\mathfrak{P}_{\mathsf{fin}}(X)$ l'ensemble de ses parties finies.

On définit la catégorie $\mathbf{LocBij}(X)$ des bijections locales (mais non partielles) sur X : les objets sont les éléments de $\mathfrak{P}_{\mathsf{fin}}(X)$, une flèche de A vers B est une paire (σ, A) où $\sigma \colon X \to X$ telle que $\sigma_{|_A} \colon A \to B$ est bijective (donc en particulier $|A| = |B|$).

Pour $A, B \subseteq X$ finis de même cardinal, on pose $(\sigma, A) \equiv_{A,B} (\tau, A)$ si, et seulement si, $\sigma_{|_A} = \tau_{|_A}$. La famille $(\equiv_{A,B})_{A,B}$ est une congruence.

Groupoïde des germes de bijection locale

Soit X un ensemble, et notons $\mathfrak{P}_{\mathsf{fin}}(X)$ l'ensemble de ses parties finies.

On définit la catégorie **LocBij**(X) des bijections locales (mais non partielles) sur X : les objets sont les éléments de $\mathfrak{P}_{\mathsf{fin}}(X)$, une flèche de A vers B est une paire (σ, A) où $\sigma \colon X \to X$ telle que $\sigma_{|_A} \colon A \to B$ est bijective (donc en particulier $|A| = |B|$).

Pour $A, B \subseteq X$ finis de même cardinal, on pose $(\sigma, A) \equiv_{A,B} (\tau, A)$ si, et seulement si, $\sigma_{|_A} = \tau_{|_A}$. La famille $(\equiv_{A,B})_{A,B}$ est une congruence.

La catégorie quotient **Germ**$_\infty(X)$ est en fait un groupoïde, avec $[\sigma, A]^{-1} = [(\sigma_{|_A})^{-1}, \sigma(A)]$, appelé le groupoïde des germes de bijection de X.

Action de $\mathbf{Germ}_\infty(X)$ sur $\Sigma[X]$

On pose $[\sigma, A] \cdot t := \hat{\sigma}_{|_A}(t)$ pour tout terme t tel que $\mathbf{var}(t) = A$.

Action de $\mathbf{Germ}_\infty(X)$ sur $\Sigma[X]$

On pose $[\sigma, A] \cdot t := \hat{\sigma}_{|_A}(t)$ pour tout terme t tel que $\mathbf{var}(t) = A$. Cela définit une action (à gauche) de $\mathbf{Germ}_\infty(X)$ sur $\Sigma[X]$.

Action de $\mathbf{Germ}_\infty(X)$ sur $\Sigma[X]$

On pose $[\sigma, A] \cdot t := \hat{\sigma}_{|A}(t)$ pour tout terme t tel que $\mathbf{var}(t) = A$. Cela définit une action (à gauche) de $\mathbf{Germ}_\infty(X)$ sur $\Sigma[X]$.

L'orbite $\mathcal{O}(t)$ n'est rien d'autre que l'ensemble des termes obtenus à partir de t par renommage des variables,

Action de $\mathbf{Germ}_\infty(X)$ sur $\Sigma[X]$

On pose $[\sigma, A] \cdot t := \hat{\sigma}_{|A}(t)$ pour tout terme t tel que $\mathbf{var}(t) = A$. Cela définit une action (à gauche) de $\mathbf{Germ}_\infty(X)$ sur $\Sigma[X]$.

L'orbite $\mathcal{O}(t)$ n'est rien d'autre que l'ensemble des termes obtenus à partir de t par renommage des variables, et donc $s \sim t$ si, et seulement si, s et t sont égaux modulo renommage des variables.

Action sur une congruence équilibrée

Si $\cong$ est une congruence équilibrée (i.e., $u \cong v \Rightarrow \mathbf{var}(s) = \mathbf{var}(t)$) et totalement invariante (i.e., invariante par les endomorphismes) de $\Sigma[X]$,

Action sur une congruence équilibrée

Si $\cong$ est une congruence équilibrée (i.e., $u \cong v \Rightarrow \mathbf{var}(s) = \mathbf{var}(t)$) et totalement invariante (i.e., invariante par les endomorphismes) de $\Sigma[X]$,

alors $\mathbf{Germ}_\infty(X)$ agit aussi sur $\cong$ par l'action diagonale

Action sur une congruence équilibrée

Si $\cong$ est une congruence équilibrée (i.e., $u \cong v \Rightarrow \mathbf{var}(s) = \mathbf{var}(t)$) et totalement invariante (i.e., invariante par les endomorphismes) de $\Sigma[X]$,

alors $\mathbf{Germ}_\infty(X)$ agit aussi sur $\cong$ par l'action diagonale

$$[\sigma, A] \cdot (u, v) := (\hat{\sigma}_{|_A}(u), \hat{\sigma}_{|_A}(v))$$

pour tous $u \cong v$ tels que $\mathbf{var}(u) = A = \mathbf{var}(v)$.

Table des matières

Notations

Soient X un ensemble et $\cong$ une congruence équilibrée et totalement invariante de $\Sigma[X]$.

Notations

Soient X un ensemble et $\cong$ une congruence équilibrée et totalement invariante de $\Sigma[X]$.

Notations

$\mathcal{O}(t)$ et $\mathcal{O}$ désignent respectivement l'orbite de $t \in \Sigma[X]$ et une orbite quelconque sous l'action du groupoïde des germes de bijection,

Notations

Soient X un ensemble et $\cong$ une congruence équilibrée et totalement invariante de $\Sigma[X]$.

Notations

$\mathcal{O}(t)$ et $\mathcal{O}$ désignent respectivement l'orbite de $t \in \Sigma[X]$ et une orbite quelconque sous l'action du groupoïde des germes de bijection, $\mathcal{O}^{(2)}(s,t)$ et $\mathcal{O}^{(2)}$ dénotent respectivement l'orbite de (s,t) tel que $s \cong t$, et une orbite quelconque sous l'action (diagonale) de $\mathbf{Germ}_\infty(X)$ sur $\cong$.

Graphe orienté réflexif

On définit une structure de (petit) graphe (orienté) :

Graphe orienté réflexif

On définit une structure de (petit) graphe (orienté) :

- L'ensemble des sommets est $\Sigma[X]/\mathbf{Germ}_{\infty}(X)$,

Graphe orienté réflexif

On définit une structure de (petit) graphe (orienté) :

- L'ensemble des sommets est $\Sigma[X]/\mathbf{Germ}_\infty(X)$,

- L'ensemble des arcs est $\cong /\mathbf{Germ}_\infty(X)$,

Graphe orienté réflexif

On définit une structure de (petit) graphe (orienté) :

- L'ensemble des sommets est $\Sigma[X]/\mathbf{Germ}_\infty(X)$,

- L'ensemble des arcs est $\cong /\mathbf{Germ}_\infty(X)$,

- Les applications source et cible :

Graphe orienté réflexif

On définit une structure de (petit) graphe (orienté) :

- L'ensemble des sommets est $\Sigma[X]/\mathbf{Germ}_\infty(X)$,

- L'ensemble des arcs est $\cong /\mathbf{Germ}_\infty(X)$,

- Les applications source et cible : si on pose $\partial_0(s,t) = s$ et $\partial_1(s,t) = t$ pour tout $s \cong t$,

Graphe orienté réflexif

On définit une structure de (petit) graphe (orienté) :

- L'ensemble des sommets est $\Sigma[X]/\mathbf{Germ}_\infty(X)$,

- L'ensemble des arcs est $\cong /\mathbf{Germ}_\infty(X)$,

- Les applications source et cible : si on pose $\partial_0(s,t) = s$ et $\partial_1(s,t) = t$ pour tout $s \cong t$, alors il existe une unique application (bien définie) $d_i\colon \cong /\mathbf{Germ}_\infty(X) \to \Sigma[X]/\mathbf{Germ}_\infty(X)$ telle que

$$d_i(\mathcal{O}^{(2)}(s,t)) = \mathcal{O}_{\partial_i(s,t)}$$

$i = 0, 1$.

Structure de graphe multiplicatif

Déformation de la structure de groupoïde d'une relation d'équivalence

- Définissons $m\colon \{\, ((s,t),(r,s')) \in \cong^2 \colon s' \in \mathcal{O}(s) \,\} \to \Sigma[X] \times \Sigma[X]$ par

$$m((s,t),(r,s')) := (r, [\sigma, \mathbf{var}(s)] \cdot t)$$

où $[\sigma, \mathbf{var}(s)] \cdot s = s'$.

- On observe que $\mathrm{im}(m) \subseteq \cong$.

- On peut montrer qu'il existe une unique application bien définie $\gamma\colon (\cong /\mathbf{Germ}_\infty(X)) \;{}_{d_0}\!\times_{d_1} (\cong /\mathbf{Germ}_\infty(X)) \to (\cong /\mathbf{Germ}_\infty(X))$ telle que

$$\gamma(\mathcal{O}^{(2)}(s,t), \mathcal{O}^{(2)}(r,s')) = \mathcal{O}^{(2)}_{m((s,t),(r,s'))} \,.$$

Structure de groupoïde

Alors $\cong / \mathbf{Germ}_\infty(X)$ est une (petite) catégorie.

Structure de groupoïde

Alors $\cong /\mathbf{Germ}_\infty(X)$ est une (petite) catégorie. De plus, tout orbite $\mathcal{O}^{(2)}(s,t) \in \cong /\mathbf{Germ}_\infty(X)$ admet pour inverse l'orbite $\mathcal{O}^{(2)}(t,s)$

Structure de groupoïde

Alors $\cong/\mathbf{Germ}_\infty(X)$ est une (petite) catégorie. De plus, tout orbite $\mathcal{O}^{(2)}(s,t) \in \cong/\mathbf{Germ}_\infty(X)$ admet pour inverse l'orbite $\mathcal{O}^{(2)}(t,s)$: on obtient donc une structure de groupoïde.

Structure de groupoïde

Alors $\cong/\mathbf{Germ}_\infty(X)$ est une (petite) catégorie. De plus, tout orbite $\mathcal{O}^{(2)}(s,t) \in \cong/\mathbf{Germ}_\infty(X)$ admet pour inverse l'orbite $\mathcal{O}^{(2)}(t,s)$: on obtient donc une structure de groupoïde.

C'est le groupoïde de géométrie $\mathbf{Geom(V)}$ de la variété équilibrée déterminée par $\cong$.

Raffinement du théorème HSP de Birkhoff

Théorème (PL, 2014)

L'application $\mathbf{V} \mapsto \mathbf{Geom}(\mathbf{V})$ est une correspondance de Galois des sous-variétés équilibrées de Σ-algèbres sur un sous-poset de la classe des petits groupoïdes.

Action du groupoïde sur $\Sigma[X]$

Soit X un ensemble.

Lemme (Dehornoy)

Pour tous termes $s, t \in \Sigma[\mathbb{N}]$, $\mathbf{Subst}_X(s) = \mathbf{Subst}_X(t)$ si, et seulement si, $\mathcal{O}(s) = \mathcal{O}(t)$.

Action du groupoïde sur $\Sigma[X]$

Soit X un ensemble.

Lemme (Dehornoy)

Pour tous termes $s, t \in \Sigma[\mathbb{N}]$, $\mathbf{Subst}_X(s) = \mathbf{Subst}_X(t)$ si, et seulement si, $\mathcal{O}(s) = \mathcal{O}(t)$.

Il en résulte que l'on peut définir $\mathbf{Subst}_X(\mathcal{O}(t)) := \mathbf{Subst}_X(t)$ indépendamment du choix du représentant t.

Action du groupoïde sur $\Sigma[X]$

Soit X un ensemble.

Lemme (Dehornoy)

Pour tous termes $s, t \in \Sigma[\mathbb{N}]$, $\mathbf{Subst}_X(s) = \mathbf{Subst}_X(t)$ si, et seulement si, $\mathcal{O}(s) = \mathcal{O}(t)$.

Il en résulte que l'on peut définir $\mathbf{Subst}_X(\mathcal{O}(t)) := \mathbf{Subst}_X(t)$ indépendamment du choix du représentant t.

Pour tout X, on définit une action de $\mathbf{Geom}(\mathbf{V})$ à l'aide du foncteur F_X défini par $F_X(\mathcal{O}) = \mathbf{Subst}_X(\mathcal{O})$

Action du groupoïde sur $\Sigma[X]$

Soit X un ensemble.

Lemme (Dehornoy)

Pour tous termes $s, t \in \Sigma[\mathbb{N}]$, $\mathbf{Subst}_X(s) = \mathbf{Subst}_X(t)$ si, et seulement si, $\mathcal{O}(s) = \mathcal{O}(t)$.

Il en résulte que l'on peut définir $\mathbf{Subst}_X(\mathcal{O}(t)) := \mathbf{Subst}_X(t)$ indépendamment du choix du représentant t.

Pour tout X, on définit une action de $\mathbf{Geom(V)}$ à l'aide du foncteur F_X défini par $F_X(\mathcal{O}) = \mathbf{Subst}_X(\mathcal{O})$ et $F_X(\mathcal{O}^{(2)}(s,t))\colon \mathbf{Subst}_X(\mathcal{O}(s)) \to \mathbf{Subst}_X(\mathcal{O}(t))$, $F_X(\mathcal{O}^{(2)}(s,t)) := \rho^{(s,t)}$ (ne dépend pas du choix de (s,t)).

Retrouver $\mathbf{G(V)}$ à partir de $\mathbf{Geom(V)}$

Si X n'est pas vide, alors F_X est fidèle et injectif sur les objets.

Retrouver $\mathbf{G(V)}$ à partir de $\mathbf{Geom(V)}$

Si X n'est pas vide, alors F_X est fidèle et injectif sur les objets.

Il s'ensuit que l'image de F_X (i.e., les classes d'ensembles $F_X(\Sigma[\mathbb{N}]/\mathbf{Germ}_\infty(\mathbb{N}))$ et de bijections $F_X(\cong/\mathbf{Germ}_\infty(\mathbb{N})))$

Retrouver $\mathbf{G(V)}$ à partir de $\mathbf{Geom(V)}$

Si X n'est pas vide, alors F_X est fidèle et injectif sur les objets.

Il s'ensuit que l'image de F_X (i.e., les classes d'ensembles $F_X(\Sigma[\mathbb{N}]/\mathbf{Germ}_\infty(\mathbb{N}))$ et de bijections $F_X(\cong/\mathbf{Germ}_\infty(\mathbb{N}))$) est un sous-groupoïde de $\mathbf{Bij}$

Retrouver $\mathbf{G(V)}$ à partir de $\mathbf{Geom(V)}$

Si X n'est pas vide, alors F_X est fidèle et injectif sur les objets.

Il s'ensuit que l'image de F_X (i.e., les classes d'ensembles $F_X(\Sigma[\mathbb{N}]/\mathbf{Germ}_\infty(\mathbb{N}))$ et de bijections $F_X(\cong /\mathbf{Germ}_\infty(\mathbb{N})))$ est un sous-groupoïde de $\mathbf{Bij}$: c'est précisément le groupoïde associé au monoïde (inversif) de géométrie $\mathbf{G(V)}$ de P. Dehornoy.

Remarque

La relation d'équivalence $\sim$ induite par l'action de $\mathbf{Germ}_\infty(X)$ sur $\Sigma[X]$ (i.e., $u \sim v$ si, et seulement si, $\mathcal{O}(s) = \mathcal{O}(t)$) n'est en général pas une congruence,

Remarque

La relation d'équivalence $\sim$ induite par l'action de $\mathbf{Germ}_\infty(X)$ sur $\Sigma[X]$ (i.e., $u \sim v$ si, et seulement si, $\mathcal{O}(s) = \mathcal{O}(t)$) n'est en général pas une congruence, de sorte que l'espace des orbites $\Sigma[X]/\mathbf{Germ}_\infty(X)$ n'est pas muni canoniquement d'une structure de Σ-algèbre.

Remarque

La relation d'équivalence $\sim$ induite par l'action de $\mathbf{Germ}_\infty(X)$ sur $\Sigma[X]$ (i.e., $u \sim v$ si, et seulement si, $\mathcal{O}(s) = \mathcal{O}(t)$) n'est en général pas une congruence, de sorte que l'espace des orbites $\Sigma[X]/\mathbf{Germ}_\infty(X)$ n'est pas muni canoniquement d'une structure de Σ-algèbre.

Par exemple, soient $x, y \in X$, $x \neq y$. Alors $x \sim x$ et $x \sim y$ mais $x * x \not\sim x * y$.

Une structure de Σ-algèbre sur l'espace des orbites

Cependant, dans le cas où $X = \mathbb{N}$, il est possible d'en définir une

Une structure de Σ-algèbre sur l'espace des orbites

Cependant, dans le cas où $X = \mathbb{N}$, il est possible d'en définir une : soient $f \in \Sigma(n)$, et $u_1, \cdots, u_n \in \Sigma[\mathbb{N}]$,

Une structure de Σ-algèbre sur l'espace des orbites

Cependant, dans le cas où $X = \mathbb{N}$, il est possible d'en définir une : soient $f \in \Sigma(n)$, et $u_1, \cdots, u_n \in \Sigma[\mathbb{N}]$, on pose

$$f'(u_1, \cdots, u_n) := \mathcal{O}(f(v_1, \cdots, v_n))$$

pour $v_i \in \mathcal{O}(u_i)$, $i = 1, \cdots, n$ tels que $\mathbf{var}(v_i) \cap \mathbf{var}(v_j) = \emptyset$, $i \neq j$ (c'est possible car l'ensemble des variables est infinis).

Une structure de Σ-algèbre sur l'espace des orbites

Cependant, dans le cas où $X = \mathbb{N}$, il est possible d'en définir une : soient $f \in \Sigma(n)$, et $u_1, \cdots, u_n \in \Sigma[\mathbb{N}]$, on pose

$$f'(u_1, \cdots, u_n) := \mathcal{O}(f(v_1, \cdots, v_n))$$

pour $v_i \in \mathcal{O}(u_i)$, $i = 1, \cdots, n$ tels que $\mathbf{var}(v_i) \cap \mathbf{var}(v_j) = \emptyset$, $i \neq j$ (c'est possible car l'ensemble des variables est infinis). Bien sûr cette définition ne dépend pas du choix de $v_1, \cdots, v_n$ tels que $\mathbf{var}(v_i) \cap \mathbf{var}(v_j) = \emptyset$.

Une structure de Σ-algèbre sur l'espace des orbites

Cependant, dans le cas où $X = \mathbb{N}$, il est possible d'en définir une : soient $f \in \Sigma(n)$, et $u_1, \cdots, u_n \in \Sigma[\mathbb{N}]$, on pose

$$f'(u_1, \cdots, u_n) := \mathcal{O}(f(v_1, \cdots, v_n))$$

pour $v_i \in \mathcal{O}(u_i)$, $i = 1, \cdots, n$ tels que $\mathbf{var}(v_i) \cap \mathbf{var}(v_j) = \emptyset$, $i \neq j$ (c'est possible car l'ensemble des variables est infinis). Bien sûr cette définition ne dépend pas du choix de $v_1, \cdots, v_n$ tels que $\mathbf{var}(v_i) \cap \mathbf{var}(v_j) = \emptyset$.

On montre alors qu'il existe une application bien définie, et une seule, telle que $\overline{f}(\mathcal{O}(u_1), \cdots, \mathcal{O}(u_n)) = \mathcal{O}(f(v_1, \cdots, v_n))$ pour $v_i \in \mathcal{O}(u_i)$, $i = 1, \cdots, n$ tels que $\mathbf{var}(v_i) \cap \mathbf{var}(v_j) = \emptyset$, $i \neq j$.

Une structure de Σ-algèbre sur $\mathbf{Geom(V)}$

La construction précédente s'applique aussi à $\cong / \mathbf{Germ}_\infty(X)$.

Une structure de Σ-algèbre sur $\mathbf{Geom}(\mathbf{V})$

La construction précédente s'applique aussi à $\cong / \mathbf{Germ}_\infty(X)$.

Proposition (PL, 2014)

$\mathbf{Geom}(\mathbf{V})$ est une Σ-algèbre dans la catégorie des (petits) groupoïdes.

Table des matières

Action du groupoïde des germes sur $\mathbf{V}[X]$

Le groupoïde $\mathbf{Germ}_\infty(X)$ des germes de bijections agit également sur $\mathbf{V}[X]$ par une action quotient

$$[\sigma, A] \cdot \pi(t) = \pi([\sigma, A] \cdot t)$$

où $t \in \Sigma[X]$ tel que $\mathbf{var}(t) = A$, et $\pi\colon \Sigma[X] \to \mathbf{V}[X]$ est l'épimorphisme canonique.

Action du groupoïde des germes sur $\mathbf{V}[X]$

Le groupoïde $\mathbf{Germ}_\infty(X)$ des germes de bijections agit également sur $\mathbf{V}[X]$ par une action quotient

$$[\sigma, A] \cdot \pi(t) = \pi([\sigma, A] \cdot t)$$

où $t \in \Sigma[X]$ tel que $\mathbf{var}(t) = A$, et $\pi \colon \Sigma[X] \to \mathbf{V}[X]$ est l'épimorphisme canonique.

Puisque $\mathbf{V}$ est une variété équilibrée, la notion d'ensemble de variables est bien définie dans $\mathbf{V}[X]$.

Action du groupoïde des germes sur $\mathbf{V}[X]$

Le groupoïde $\mathbf{Germ}_\infty(X)$ des germes de bijections agit également sur $\mathbf{V}[X]$ par une action quotient

$$[\sigma, A] \cdot \pi(t) = \pi([\sigma, A] \cdot t)$$

où $t \in \Sigma[X]$ tel que $\mathbf{var}(t) = A$, et $\pi \colon \Sigma[X] \to \mathbf{V}[X]$ est l'épimorphisme canonique.

Puisque $\mathbf{V}$ est une variété équilibrée, la notion d'ensemble de variables est bien définie dans $\mathbf{V}[X]$. Il s'ensuit que l'on peut parler de congruences équilibrées sur $\mathbf{V}[X]$.

Action du groupoïde des germes sur $\mathbf{V}[X]$

Le groupoïde $\mathbf{Germ}_\infty(X)$ des germes de bijections agit également sur $\mathbf{V}[X]$ par une action quotient

$$[\sigma, A] \cdot \pi(t) = \pi([\sigma, A] \cdot t)$$

où $t \in \Sigma[X]$ tel que $\mathbf{var}(t) = A$, et $\pi \colon \Sigma[X] \to \mathbf{V}[X]$ est l'épimorphisme canonique.

Puisque $\mathbf{V}$ est une variété équilibrée, la notion d'ensemble de variables est bien définie dans $\mathbf{V}[X]$. Il s'ensuit que l'on peut parler de congruences équilibrées sur $\mathbf{V}[X]$. On montre que si $\cong$ est une congruence équilibrée (et totalement invariante) de $\mathbf{V}[X]$, alors $\mathbf{Germ}_\infty(X)$ agit sur $\cong$ par une action diagonale.

Le groupoïde de géométrie d'une sous-variété équilibrée

Soient $\mathbf{V}$ une variété équilibrée de Σ-algèbres et $\cong$ une congruence totalement invariante et équilibrée de $\mathbf{V}[\mathbb{N}]$.

Le groupoïde de géométrie d'une sous-variété équilibrée

Soient $\mathbf{V}$ une variété équilibrée de Σ-algèbres et $\cong$ une congruence totalement invariante et équilibrée de $\mathbf{V}[\mathbb{N}]$.

$\cong$ détermine une unique sous-variété équilibrée $\mathbf{W}$ de $\mathbf{V}$.

Le groupoïde de géométrie d'une sous-variété équilibrée

Soient $\mathbf{V}$ une variété équilibrée de Σ-algèbres et $\cong$ une congruence totalement invariante et équilibrée de $\mathbf{V}[\mathbb{N}]$.

$\cong$ détermine une unique sous-variété équilibrée $\mathbf{W}$ de $\mathbf{V}$.

On peut alors définir un (petit) groupoïde $\mathbf{Geom}_{\mathbf{V}}(\mathbf{W})$ dont l'ensemble des objets est $\mathbf{V}[\mathbb{N}]/\mathbf{Germ}_{\infty}(\mathbb{N})$ et celui des flèches est $\cong/\mathbf{Germ}_{\infty}(\mathbb{N})$, que l'on appelle le groupoïde de géométrie de $\mathbf{W}$ (relatif à $\mathbf{V}$).

Le groupoïde de géométrie d'une sous-variété équilibrée

Soient $\mathbf{V}$ une variété équilibrée de Σ-algèbres et $\cong$ une congruence totalement invariante et équilibrée de $\mathbf{V}[\mathbb{N}]$.

$\cong$ détermine une unique sous-variété équilibrée $\mathbf{W}$ de $\mathbf{V}$.

On peut alors définir un (petit) groupoïde $\mathbf{Geom_V(W)}$ dont l'ensemble des objets est $\mathbf{V}[\mathbb{N}]/\mathbf{Germ}_\infty(\mathbb{N})$ et celui des flèches est $\cong /\mathbf{Germ}_\infty(\mathbb{N})$, que l'on appelle le groupoïde de géométrie de $\mathbf{W}$ (relatif à $\mathbf{V}$).

Remarque

Bien sûr on retrouve $\mathbf{Geom(W)}$ en considérant $\mathbf{Geom_V(W)}$ avec $\mathbf{V}$ la variété de toutes les Σ-algèbres (qui est bien entendu équilibrée).

On peut également munir $\mathbf{V}[\mathbb{N}]/\mathbf{Germ}_{\infty}(\mathbb{N})$ et $\cong /\mathbf{Germ}_{\infty}(\mathbb{N})$ d'une structure de Σ-algèbre (comme on vient de le voir).

On peut également munir $\mathbf{V}[\mathbb{N}]/\mathbf{Germ}_\infty(\mathbb{N})$ et $\cong/\mathbf{Germ}_\infty(\mathbb{N})$ d'une structure de Σ-algèbre (comme on vient de le voir).

Néanmoins on ne peut pas aller plus loin dans le cas général : $\mathbf{V}[\mathbb{N}]/\mathbf{Germ}_\infty(\mathbb{N})$ n'est pas, en général, une algèbre de la variété $\mathbf{V}$. (Un nombre différent d'occurrences d'une même variable dans deux termes congrus est une obstruction à cela.)

Définition

Une congruence équilibrée de $\Sigma[X]$ est dite linéairement engendrée (ou simplement linéaire) si elle admet un ensemble générateur $R \subseteq \Sigma[X]^2$ tel que pour tout $(s, t) \in R$, chaque variable de s (et donc de t) apparaît une et une seule fois dans s et dans t.

Définition

Une congruence équilibrée de $\Sigma[X]$ est dite linéairement engendrée (ou simplement linéaire) si elle admet un ensemble générateur $R \subseteq \Sigma[X]^2$ tel que pour tout $(s, t) \in R$, chaque variable de s (et donc de t) apparaît une et une seule fois dans s et dans t.

Par exemple l'associativité, la neutralité à gauche (ou à droite) sont linéaires.

Définition

Une congruence équilibrée de $\Sigma[X]$ est dite linéairement engendrée (ou simplement linéaire) si elle admet un ensemble générateur $R \subseteq \Sigma[X]^2$ tel que pour tout $(s, t) \in R$, chaque variable de s (et donc de t) apparaît une et une seule fois dans s et dans t.

Par exemple l'associativité, la neutralité à gauche (ou à droite) sont linéaires. Par contre la relation d'inversion (dans les semi-groupes inversifs) $x^\star \cdot x \cdot x^\star = x$ ne l'est pas.

Définition

Une congruence équilibrée de $\Sigma[X]$ est dite linéairement engendrée (ou simplement linéaire) si elle admet un ensemble générateur $R \subseteq \Sigma[X]^2$ tel que pour tout $(s, t) \in R$, chaque variable de s (et donc de t) apparaît une et une seule fois dans s et dans t.

Par exemple l'associativité, la neutralité à gauche (ou à droite) sont linéaires. Par contre la relation d'inversion (dans les semi-groupes inversifs) $x^\star \cdot x \cdot x^\star = x$ ne l'est pas.

Définition

Une variété équilibrée déterminée par une congruence linéaire est également dite linéaire.

Algèbre dans la variété $\mathbf{V}$

Théorème (PL, 2014)

Soient une variété $\mathbf{V}$ linéaire de Σ-algèbres et soit $\cong$ une congruence totalement invariante et équilibrée sur $\mathbf{V}[\mathbb{N}]$ qui détermine (de façon unique) la sous-variété équilibrée $\mathbf{W}$ de $\mathbf{V}$.

Algèbre dans la variété $\mathbf{V}$

Théorème (PL, 2014)

Soient une variété $\mathbf{V}$ linéaire de Σ-algèbres et soit $\cong$ une congruence totalement invariante et équilibrée sur $\mathbf{V}[\mathbb{N}]$ qui détermine (de façon unique) la sous-variété équilibrée $\mathbf{W}$ de $\mathbf{V}$.

Alors $\mathbf{Geom_V}(\mathbf{W})$ est une algèbre de $\mathbf{V}$ dans la catégorie des (petits) groupoïdes.

Quelques exemples

- Soit $\cong$ une congruence équilibrée et totalement invariante sur $\mathbb{N}^\star = \mathbf{Mon}[\mathbb{N}]$, et soit $\mathbf{W}$ la sous-variété équilibrée de monoïdes associée.

Quelques exemples

- Soit $\cong$ une congruence équilibrée et totalement invariante sur $\mathbb{N}^\star = \mathbf{Mon}[\mathbb{N}]$, et soit $\mathbf{W}$ la sous-variété équilibrée de monoïdes associée. Alors $\mathbf{Geom}_{\mathbf{Mon}}(\mathbf{W})$ est un groupoïde (strictement) monoïdal.

Quelques exemples

- Soit $\cong$ une congruence équilibrée et totalement invariante sur $\mathbb{N}^\star = \mathbf{Mon}[\mathbb{N}]$, et soit $\mathbf{W}$ la sous-variété équilibrée de monoïdes associée. Alors $\mathbf{Geom}_{\mathbf{Mon}}(\mathbf{W})$ est un groupoïde (strictement) monoïdal.

- En particulier, cela s'applique en prenant pour $\cong$ la commutativité, de sorte que $\mathbf{Geom}_{\mathbf{Mon}}(\mathbf{ComMon})$ est un groupoïde symétrique monoïdal.

Quelques exemples

- Soit $\cong$ une congruence équilibrée et totalement invariante sur $\mathbb{N}^{\star} = \mathbf{Mon}[\mathbb{N}]$, et soit $\mathbf{W}$ la sous-variété équilibrée de monoïdes associée. Alors $\mathbf{Geom}_{\mathbf{Mon}}(\mathbf{W})$ est un groupoïde (strictement) monoïdal.

- En particulier, cela s'applique en prenant pour $\cong$ la commutativité, de sorte que $\mathbf{Geom}_{\mathbf{Mon}}(\mathbf{ComMon})$ est un groupoïde symétrique monoïdal.

- De même $\mathbf{Geom}_{\star\mathbf{Mon}}(\mathbf{InvMon})$ est un groupoïde monoidal “involutif”.

Table des matières

Perspectives

- Version non symétrique adaptée aux systèmes de réécriture de termes (voire de mots) à l'aide d'une catégorie de géométrie ?

Perspectives

- Version non symétrique adaptée aux systèmes de réécriture de termes (voire de mots) à l'aide d'une catégorie de géométrie ?

- Les variétés linéaires s'étendent aux variétés de modules (par exemple, la variété des monoïdes correspond à celle des algèbres sur un anneau).

Perspectives

- Version non symétrique adaptée aux systèmes de réécriture de termes (voire de mots) à l'aide d'une catégorie de géométrie ?

- Les variétés linéaires s'étendent aux variétés de modules (par exemple, la variété des monoïdes correspond à celle des algèbres sur un anneau). Cette approche doit pouvoir s'appliquer aux opérades (ensemblistes non symétriques) de même qu'aux systèmes de réécriture de polynômes (systèmes de réduction de Bergman ou bases de Gröbner).

Perspectives

- Version non symétrique adaptée aux systèmes de réécriture de termes (voire de mots) à l'aide d'une catégorie de géométrie ?

- Les variétés linéaires s'étendent aux variétés de modules (par exemple, la variété des monoïdes correspond à celle des algèbres sur un anneau). Cette approche doit pouvoir s'appliquer aux opérades (ensemblistes non symétriques) de même qu'aux systèmes de réécriture de polynômes (systèmes de réduction de Bergman ou bases de Gröbner).

- Liens avec les monades, théories de Lawvere et clones.

Exemple : Associativité (cas particulier)

On choisit un représentant pour chaque orbite.

Exemple : Associativité (cas particulier)

On choisit un représentant pour chaque orbite. Par exemple, le plus petit mot bien parenthésé de l'orbite pour l'ordre lexicographique (c'est un bon ordre).

Exemple : Associativité (cas particulier)

On choisit un représentant pour chaque orbite. Par exemple, le plus petit mot bien parenthésé de l'orbite pour l'ordre lexicographique (c'est un bon ordre). C'est $(0 * 1) * (0 * 2)$ pour $\mathcal{O}((i * j) * (i * k))$ où i, j, k sont trois entiers deux à deux distincts.

Exemple : Associativité (cas particulier)

On choisit un représentant pour chaque orbite. Par exemple, le plus petit mot bien parenthésé de l'orbite pour l'ordre lexicographique (c'est un bon ordre). C'est $(0 * 1) * (0 * 2)$ pour $\mathcal{O}((i * j) * (i * k))$ où i, j, k sont trois entiers deux à deux distincts.

Si deux mots s'obtiennent l'un à partir de l'autre par l'application d'un nombre fini de fois (y compris zéro) de la règle d'associativité, alors on a une unique flèche.

Exemple : Associativité (cas particulier)

On choisit un représentant pour chaque orbite. Par exemple, le plus petit mot bien parenthésé de l'orbite pour l'ordre lexicographique (c'est un bon ordre). C'est $(0 * 1) * (0 * 2)$ pour $\mathcal{O}((i * j) * (i * k))$ où i, j, k sont trois entiers deux à deux distincts.

Si deux mots s'obtiennent l'un à partir de l'autre par l'application d'un nombre fini de fois (y compris zéro) de la règle d'associativité, alors on a une unique flèche. Par exemple, $(0 * 1) * (0 * 2) \to 0 * ((1 * 0) * 2))$.

Exemple : Associativité (cas particulier)

On choisit un représentant pour chaque orbite. Par exemple, le plus petit mot bien parenthésé de l'orbite pour l'ordre lexicographique (c'est un bon ordre). C'est $(0 * 1) * (0 * 2)$ pour $\mathcal{O}((i * j) * (i * k))$ où i, j, k sont trois entiers deux à deux distincts.

Si deux mots s'obtiennent l'un à partir de l'autre par l'application d'un nombre fini de fois (y compris zéro) de la règle d'associativité, alors on a une unique flèche. Par exemple, $(0 * 1) * (0 * 2) \to 0 * ((1 * 0) * 2))$.

C'est donc le groupoïde de la relation d'équivalence engendrée par l'associativité sur ces mots (sous-groupoïde de la relation d'associativité sur le magma libre sur $\mathbb{N}$).

Exemple : Commutativité

Avec le même choix pour les représentants, on peut avoir plusieurs flèches.

Exemple : Commutativité

Avec le même choix pour les représentants, on peut avoir plusieurs flèches.

Par exemple, $(0 * 1) * (0 * 2) \xrightarrow{\text{id}} (0 * 1) * (0 * 2)$ (identité) mais aussi $(0 * 1) * (0 * 2) \xrightarrow{\mathcal{O}^{(2)}} (0 * 1) * (0 * 2)$ où $\mathcal{O}^{(2)} = \mathcal{O}^{(2)}((0 * 1) * (0 * 2), (1 * 0) * (0 * 2))$.

Exemple : Commutativité

Avec le même choix pour les représentants, on peut avoir plusieurs flèches.

Par exemple, $(0*1)*(0*2) \xrightarrow{\mathrm{id}} (0*1)*(0*2)$ (identité) mais aussi $(0*1)*(0*2) \xrightarrow{\mathcal{O}^{(2)}} (0*1)*(0*2)$ où $\mathcal{O}^{(2)} = \mathcal{O}^{(2)}((0*1)*(0*2), (1*0)*(0*2))$.

Remarque

En général le groupoïde **Geom**$(\mathbf{V})$ n'est pas (isomorphe à) un sous-groupoïde de $\cong$.