Sur l'enveloppe wronskienne d'une algèbre de Lie différentielle

Laurent Poinsot

LIPN, Université Paris XIII, Sorbonne Paris Cité
Seconde adresse : CReA, École de l'Air, France.

Jeudi 12 mai 2016

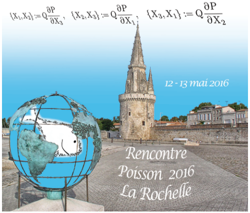

Table des matières

Donnons-nous une algèbre commutative différentielle $((A, *), d)$ (sur un anneau R).

Autrement dit, $d \colon A \to A$ est R-linéaire et satisfait la règle de Leibniz

$$d(a * b) = d(a) * b + a * d(b).$$

Une telle structure permet de définir un crochet de Lie, à savoir le wronskien

$$W_d(a, b) := a * d(b) - d(a) * b.$$

La relation $((A, *), d) \mapsto (A, W_d)$ s'étend en un foncteur $W : \mathbf{DiffCom} \to \mathbf{Lie}$.

Ce foncteur possède un adjoint à gauche $\mathscr{W} : \mathbf{Lie} \to \mathbf{DiffCom}$ lequel permet de définir une nouvelle sorte d'enveloppe universelle, l'enveloppe (universelle) wronskienne d'une algèbre de Lie.

Le problème de l'immersion :

À quelles conditions une algèbre de Lie se plonge-t-elle dans son enveloppe wronskienne (avec le crochet wronskien) ?

Le problème de l'immersion :

À quelles conditions une algèbre de Lie se plonge-t-elle dans son enveloppe wronskienne (avec le crochet wronskien) ?

Par exemple, $\mathfrak{sl}_2(R)$, pour R un corps de caractéristique zéro, se plonge dans son enveloppe wronskienne.

En effet $\mathfrak{sl}_2(R) \hookrightarrow (R[x], W_{\frac{d}{dx}})$, au travers du plongement classique $e = -1$, $h = -2x$ et $f = x^2$, ce qui est suffisant pour s'assurer de son immersion dans son enveloppe wronskienne.

L'exemple de $\mathfrak{sl}_2(R)$ peut servir de guide pour la résolution du problème de l'immersion.

Quelle est, de ce point de vue, la propriété cruciale satisfaite par $\mathfrak{sl}_2(R)$? Il se trouve qu'il s'agit d'une algèbre de Lie de champs de vecteurs polynomiaux ($e = -\frac{d}{dx}$, $h = -2x\frac{d}{dx}$ et $f = x^2\frac{d}{dx}$).

L'exemple de $\mathfrak{sl}_2(R)$ peut servir de guide pour la résolution du problème de l'immersion.

Quelle est, de ce point de vue, la propriété cruciale satisfaite par $\mathfrak{sl}_2(R)$? Il se trouve qu'il s'agit d'une algèbre de Lie de champs de vecteurs polynomiaux ($e = -\frac{d}{dx}$, $h = -2x\frac{d}{dx}$ et $f = x^2\frac{d}{dx}$).

On peut raisonnablement conjecturer que toute algèbre de champs de vecteurs (sur une ligne) se plonge dans son enveloppe wronskienne.

C'est au demeurant le résultat qui vient d'être démontré et qui sera exposé.

Table des matières

Une algèbre de Lie différentielle est la donnée de $(\mathfrak{g}, d)$ où $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie et $d\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ est une dérivation (pour le crochet de Lie).

Autrement dit, d est R-linéaire et

$$d([x, y]) = [d(x), y] + [x, d(y)].$$

Une algèbre de Lie différentielle est la donnée de $(\mathfrak{g}, d)$ où $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie et $d\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ est une dérivation (pour le crochet de Lie).

Autrement dit, d est R-linéaire et

$$d([x, y]) = [d(x), y] + [x, d(y)].$$

La définition $W(A, d) := ((A, W_d), d)$ fournit un foncteur $W\colon \mathbf{DiffCom} \to \mathbf{DiffLie}$. Le diagramme suivant commute.

$$\begin{tikzcd} \mathbf{DiffCom} \arrow[rr, "W"] \arrow[dr, "W"'] & & \mathbf{DiffLie} \arrow[dl, "dLie"] \\ & \mathbf{Lie} & \end{tikzcd} \quad (1)$$

Chacun de ces foncteurs admet un adjoint à gauche.

- $(\mathcal{D}i\!f\!f(\mathfrak{g}), d)$ désigne l'enveloppe différentielle de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ (adjoint à gauche de *dLie*).
- $(\mathcal{W}(\mathfrak{g}, d), D)$ désigne l'enveloppe wronskienne de l'algèbre de Lie différentielle $(\mathfrak{g}, d)$.
- $(\mathcal{W}(\mathfrak{g}), D) := (\mathcal{W}(\mathcal{D}i\!f\!f(\mathfrak{g})), D)$ est l'enveloppe wronskienne de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ telle qu'évoquée dans l'introduction.

Construction

Soit $(\mathfrak{g}, d)$ une algèbre de Lie différentielle.

Il existe une unique dérivation D sur $\mathcal{S}(|\mathfrak{g}|)$ qui étend d.

Construction

Soit $(\mathfrak{g}, d)$ une algèbre de Lie différentielle.

Il existe une unique dérivation D sur $\mathcal{S}(|\mathfrak{g}|)$ qui étend d.

Soit I l'idéal de $\mathcal{S}(|\mathfrak{g}|)$ engendré par $xd(y) - d(x)y - [x, y]$, $x, y \in \mathfrak{g}$. C'est en fait un idéal différentiel.

Alors, $\mathcal{W}(\mathfrak{g}, d) = \mathcal{S}(|\mathfrak{g}|)/I$ avec la dérivation quotient $\tilde{D}$.

Exemple ($\mathfrak{sl}_2(R)$)

Soit R un anneau commutatif dans lequel 2 est inversible.

Soit $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie librement engendrée par e, f, h comme R-module et vérifiant $[e, h] = e$, $[e, f] = 2h$ et $[h, f] = f$.

Exemple ($\mathfrak{sl}_2(R)$)

Soit R un anneau commutatif dans lequel 2 est inversible.

Soit $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie librement engendrée par e, f, h comme R-module et vérifiant $[e, h] = e$, $[e, f] = 2h$ et $[h, f] = f$.

C'est une algèbre de Lie différentielle avec la dérivation $d(e) = 0$, $d(h) = e$ et $d(f) = 2h$.

Exemple ($\mathfrak{sl}_2(R)$)

Soit R un anneau commutatif dans lequel 2 est inversible.

Soit $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie librement engendrée par e, f, h comme R-module et vérifiant $[e, h] = e$, $[e, f] = 2h$ et $[h, f] = f$.

C'est une algèbre de Lie différentielle avec la dérivation $d(e) = 0$, $d(h) = e$ et $d(f) = 2h$.

Alors $\mathcal{W}(\mathfrak{g}, d) = R[e, h, f]/\langle e^2 - e, h(e-1), 2h^2 - f(1+e)\rangle$.

Le problème de l'immersion est le suivant :

Étant donné une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ (resp. algèbre de Lie différentielle $(\mathfrak{g}, d)$), sous quelles conditions $can_{\mathfrak{g}} \colon \mathfrak{g} \hookrightarrow W(\mathcal{W}(\mathcal{D}\!\mathit{iff}(\mathfrak{g}), d), D)$ (respectivement, $can_{(\mathfrak{g},d)} \colon (\mathfrak{g}, d) \hookrightarrow W(\mathcal{W}(\mathfrak{g}, d), D)$) ?

Le problème de l'immersion est le suivant :

Étant donné une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ (resp. algèbre de Lie différentielle $(\mathfrak{g}, d)$), sous quelles conditions $can_{\mathfrak{g}} : \mathfrak{g} \hookrightarrow W(\mathcal{W}(\mathcal{Diff}(\mathfrak{g}), d), D)$ (respectivement, $can_{(\mathfrak{g},d)} : (\mathfrak{g}, d) \hookrightarrow W(\mathcal{W}(\mathfrak{g}, d), D)$) ?

Remarques :

1. Bien sûr, $can_{\mathfrak{g}}$ est injectif si, et seulement si, il existe une algèbre commutative différentielle (A, d) et un homomorphisme d'algèbres de Lie injectif $\mathfrak{g} \hookrightarrow W(A, d)$.

Le problème de l'immersion est le suivant :

Étant donné une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ (resp. algèbre de Lie différentielle $(\mathfrak{g}, d)$), sous quelles conditions $can_{\mathfrak{g}} \colon \mathfrak{g} \hookrightarrow W(\mathcal{W}(\mathcal{D}iff(\mathfrak{g}), d), D)$ (respectivement, $can_{(\mathfrak{g},d)} \colon (\mathfrak{g}, d) \hookrightarrow W(\mathcal{W}(\mathfrak{g}, d), D)$) ?

Remarques :

1. Bien sûr, $can_{\mathfrak{g}}$ est injectif si, et seulement si, il existe une algèbre commutative différentielle (A, d) et un homomorphisme d'algèbres de Lie injectif $\mathfrak{g} \hookrightarrow W(A, d)$.
2. On a toujours $\mathfrak{g} \hookrightarrow \mathcal{D}iff(\mathfrak{g})$. (Il suffit de remarquer que $(\mathfrak{g}, 0)$ est une algèbre de Lie différentielle.)

Un premier résultat positif : toute algèbre de Lie abélienne se plonge dans son enveloppe wronskienne.

Cela tient au fait que $M \hookrightarrow \mathcal{S}(M)$ et que cette injection est un morphisme de l'algèbre Lie abélienne M dans $W(\mathcal{S}(M), 0)$.

Introduisons l'ingrédient principal.

Soit (A, d) une algèbre commutative différentielle. Considérons le sous-A-module cyclique $A \cdot d$ de $\mathfrak{Der}_R(A)$ engendré par d. Donc $A \cdot d = \{\, a \cdot d \colon a \in A \,\}$, avec $(a \cdot d)(x) = a(d(x))$, $a, x \in A$.

Introduisons l'ingrédient principal.

Soit (A, d) une algèbre commutative différentielle. Considérons le sous-A-module cyclique $A \cdot d$ de $\mathfrak{Der}_R(A)$ engendré par d. Donc $A \cdot d = \{\, a \cdot d \colon a \in A \,\}$, avec $(a \cdot d)(x) = a(d(x))$, $a, x \in A$.

$A \cdot d$ est une sous-algèbre de Lie (sur R) de $\mathfrak{Der}_R(A)$. On remarque que $[a \cdot d, b \cdot d] = W_d(a, b) \cdot d$, $a, b \in A$.

Introduisons l'ingrédient principal.

Soit (A, d) une algèbre commutative différentielle. Considérons le sous-A-module cyclique $A \cdot d$ de $\mathfrak{Der}_R(A)$ engendré par d. Donc $A \cdot d = \{\, a \cdot d \colon a \in A \,\}$, avec $(a \cdot d)(x) = a(d(x))$, $a, x \in A$.

$A \cdot d$ est une sous-algèbre de Lie (sur R) de $\mathfrak{Der}_R(A)$. On remarque que $[a \cdot d, b \cdot d] = W_d(a, b) \cdot d$, $a, b \in A$.

Soit $ann(d) = \{\, a \in A \colon \forall x \in A,\ a(d(x)) = 0 \,\}$.

Introduisons l'ingrédient principal.

Soit (A, d) une algèbre commutative différentielle. Considérons le sous-A-module cyclique $A \cdot d$ de $\mathfrak{Der}_R(A)$ engendré par d. Donc $A \cdot d = \{\, a \cdot d \colon a \in A \,\}$, avec $(a \cdot d)(x) = a(d(x))$, $a, x \in A$.

$A \cdot d$ est une sous-algèbre de Lie (sur R) de $\mathfrak{Der}_R(A)$. On remarque que $[a \cdot d, b \cdot d] = W_d(a, b) \cdot d$, $a, b \in A$.

Soit $ann(d) = \{\, a \in A \colon \forall x \in A,\ a(d(x)) = 0 \,\}$.

C'est un idéal différentiel de A : il est en effet clos par d car si $a \in ann(d)$,

Introduisons l'ingrédient principal.

Soit (A, d) une algèbre commutative différentielle. Considérons le sous-A-module cyclique $A \cdot d$ de $\mathfrak{Der}_R(A)$ engendré par d. Donc $A \cdot d = \{ a \cdot d \colon a \in A \}$, avec $(a \cdot d)(x) = a(d(x))$, $a, x \in A$.

$A \cdot d$ est une sous-algèbre de Lie (sur R) de $\mathfrak{Der}_R(A)$. On remarque que $[a \cdot d, b \cdot d] = W_d(a, b) \cdot d$, $a, b \in A$.

Soit $ann(d) = \{ a \in A \colon \forall x \in A,\ a(d(x)) = 0 \}$.

C'est un idéal différentiel de A : il est en effet clos par d car si $a \in ann(d)$, $0 = d(ad(x))$

Introduisons l'ingrédient principal.

Soit (A, d) une algèbre commutative différentielle. Considérons le sous-A-module cyclique $A \cdot d$ de $\mathfrak{Der}_R(A)$ engendré par d. Donc $A \cdot d = \{ a \cdot d \colon a \in A \}$, avec $(a \cdot d)(x) = a(d(x))$, $a, x \in A$.

$A \cdot d$ est une sous-algèbre de Lie (sur R) de $\mathfrak{Der}_R(A)$. On remarque que $[a \cdot d, b \cdot d] = W_d(a, b) \cdot d$, $a, b \in A$.

Soit $ann(d) = \{ a \in A \colon \forall x \in A,\ a(d(x)) = 0 \}$.

C'est un idéal différentiel de A : il est en effet clos par d car si $a \in ann(d)$, $0 = d(ad(x)) = d(a)d(x) + ad^2(x)$

Introduisons l'ingrédient principal.

Soit (A, d) une algèbre commutative différentielle. Considérons le sous-A-module cyclique $A \cdot d$ de $\mathfrak{Der}_R(A)$ engendré par d. Donc $A \cdot d = \{\, a \cdot d \colon a \in A \,\}$, avec $(a \cdot d)(x) = a(d(x))$, $a, x \in A$.

$A \cdot d$ est une sous-algèbre de Lie (sur R) de $\mathfrak{Der}_R(A)$. On remarque que $[a \cdot d, b \cdot d] = W_d(a, b) \cdot d$, $a, b \in A$.

Soit $ann(d) = \{\, a \in A \colon \forall x \in A,\ a(d(x)) = 0 \,\}$.

C'est un idéal différentiel de A : il est en effet clos par d car si $a \in ann(d)$, $0 = d(ad(x)) = d(a)d(x) + ad^2(x) = d(a)d(x)$, $x \in A$.

Introduisons l'ingrédient principal.

Soit (A, d) une algèbre commutative différentielle. Considérons le sous-A-module cyclique $A \cdot d$ de $\mathfrak{Der}_R(A)$ engendré par d. Donc $A \cdot d = \{ a \cdot d \colon a \in A \}$, avec $(a \cdot d)(x) = a(d(x))$, $a, x \in A$.

$A \cdot d$ est une sous-algèbre de Lie (sur R) de $\mathfrak{Der}_R(A)$. On remarque que $[a \cdot d, b \cdot d] = W_d(a, b) \cdot d$, $a, b \in A$.

Soit $ann(d) = \{ a \in A \colon \forall x \in A,\ a(d(x)) = 0 \}$.

C'est un idéal différentiel de A : il est en effet clos par d car si $a \in ann(d)$, $0 = d(ad(x)) = d(a)d(x) + ad^2(x) = d(a)d(x)$, $x \in A$. On a

$$(A/ann(d), W_{\tilde{d}}) \simeq A \cdot d$$

et la dérivée quotient $\tilde{d}$ fait de $A \cdot d$ une algèbre de Lie différentielle.

Appelons algèbre de Lie (différentielle) de champs de vecteurs sur une ligne toute algèbre de Lie (différentielle) qui est isomorphe à une sous-algèbre de Lie (différentielle) de $A \cdot d$.

Appelons algèbre de Lie (différentielle) de champs de vecteurs sur une ligne toute algèbre de Lie (différentielle) qui est isomorphe à une sous-algèbre de Lie (différentielle) de $A \cdot d$.

Les algèbres de Lie (différentielles) de champs de vecteurs sur une ligne engendrent une sous-catégorie pleine de **Lie** (respectivement, **DiffLie**).

Notons la **Vect** (respectivement, **DiffVect**).

Par définition, **Vect** et **DiffVect** sont fermées par sous-algèbres de Lie.

Autrement dit, toute sous-algèbre de Lie d'un objet de **Vect** (respectivement, **DiffVect**) est elle-même un objet du même type.

Par définition, **Vect** et **DiffVect** sont fermées par sous-algèbres de Lie.

Autrement dit, toute sous-algèbre de Lie d'un objet de **Vect** (respectivement, **DiffVect**) est elle-même un objet du même type.

Condition suffisante pour l'immersion

Puisque $A \cdot d \simeq W(A/ann(d), \tilde{d})$, il s'ensuit en particulier que $A \cdot d$ se plonge dans son enveloppe wronskienne et il en est donc de même de toute algèbre de Lie (différentielle) de champs de vecteurs sur une ligne.

Condition nécessaire à l'immersion

Quelle que soit l'algèbre commutative différentielle (A, d), $W(A, d) = ((A, W_d), d)$ est une algèbre de champs de vecteurs sur une ligne.

Condition nécessaire à l'immersion

Quelle que soit l'algèbre commutative différentielle (A, d), $W(A, d) = ((A, W_d), d)$ est une algèbre de champs de vecteurs sur une ligne.

Preuve

Considérons sur $A[x]$ l'unique dérivation D_d telle que $D_d(ax) = d(a)x + a$, $a \in A$, $x \in X$.

Condition nécessaire à l'immersion

Quelle que soit l'algèbre commutative différentielle (A, d), $W(A, d) = ((A, W_d), d)$ est une algèbre de champs de vecteurs sur une ligne.

Preuve

Considérons sur $A[x]$ l'unique dérivation D_d telle que $D_d(ax) = d(a)x + a$, $a \in A$, $x \in X$.

Alors $ann(D_d) = (0)$ de telle sorte que $W(A[x], D_d) \simeq A[x] \cdot D_d$.

Le fait que $W(A, d) \hookrightarrow W(A[x], D_d)$ complète la preuve.

Solution au problème de l'immersion

Une algèbre de Lie (différentielle) se plonge dans son enveloppe wronskienne si, et seulement si, c'est une algèbre de Lie (différentielle) de champs de vecteurs sur une ligne.

Solution au problème de l'immersion

Une algèbre de Lie (différentielle) se plonge dans son enveloppe wronskienne si, et seulement si, c'est une algèbre de Lie (différentielle) de champs de vecteurs sur une ligne.

Exemples

Outre $\mathfrak{sl}_2(R)$, l'algèbre de Witt $(\mathbb{C}[x], W_{\frac{d}{dx}})$, l'algèbre de Witt bilatère $(\mathbf{C}[x, x^{-1}], W_{\frac{d}{dx}})$, l'algèbre de Virasoro (sans extension centrale) ou encore l'algèbre de Lie $Diff(S^1)$ des champs de vecteurs lisses sur le cercle se plongent toutes dans leur enveloppe wronskienne.

Les inclusions d'algèbres de Lie

$$\mathfrak{g} \hookrightarrow A \cdot d \hookrightarrow \mathfrak{Der}_R(A) \hookrightarrow End_R(A)$$

montrent que toute algèbre de champs de vecteurs sur une ligne se plonge aussi dans son algèbre enveloppante universelle.

La réciproque est fausse (cf. transparent suivant).

Se peut-il que toute algèbre de Lie se plonge dans son enveloppe wronskienne ?

Se peut-il que toute algèbre de Lie se plonge dans son enveloppe wronskienne ?

Peut-on toujours réaliser fidèlement une algèbre de Lie par une algèbre de Lie de champs de vecteurs sur une ligne ?

Se peut-il que toute algèbre de Lie se plonge dans son enveloppe wronskienne ?

Peut-on toujours réaliser fidèlement une algèbre de Lie par une algèbre de Lie de champs de vecteurs sur une ligne ?

Et bien non. En effet on sait (Bergman 1979, Razmyslov 1986, Kirillov 1991) que les algèbres de champs de vecteurs sur une ligne vérifient une identité non triviale, à savoir,

$$\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_4} \epsilon(\sigma)[x_{\sigma(1)},[x_{\sigma(2)},[x_{\sigma(3)},[x_{\sigma(4)},y]]]] = 0$$

quels que soient x_1, x_2, x_3, x_4, y.

Se peut-il que toute algèbre de Lie se plonge dans son enveloppe wronskienne ?

Peut-on toujours réaliser fidèlement une algèbre de Lie par une algèbre de Lie de champs de vecteurs sur une ligne ?

Et bien non. En effet on sait (Bergman 1979, Razmyslov 1986, Kirillov 1991) que les algèbres de champs de vecteurs sur une ligne vérifient une identité non triviale, à savoir,

$$\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_4} \epsilon(\sigma)[x_{\sigma(1)}, [x_{\sigma(2)}, [x_{\sigma(3)}, [x_{\sigma(4)}, y]]]] = 0$$

quels que soient x_1, x_2, x_3, x_4, y.

Or aucune algèbre de Lie libre sur au moins deux générateurs ne la vérifie (pour peu que l'anneau de base R soit non trivial).

Table des matières

Considérons la situation suivante (ici $\mathbf{V}, \mathbf{W}$ sont des variétés au sens de l'algèbre universelle)

$$\begin{tikzcd} \mathbf{V} \arrow[rr, "U"] \arrow[dr] & & \mathbf{W} \arrow[dl] \\ & \mathbf{Set} & \end{tikzcd} \tag{2}$$

U admet un adjoint à gauche. Notons $\mathbf{V}[A, F]$ l'algèbre de $\mathbf{V}$ libre sur $(A, F) \in \mathbf{W}$ ou encore la $\mathbf{V}$-envelope universelle de (A, F).

Considérons la situation suivante (ici $\mathbf{V}, \mathbf{W}$ sont des variétés au sens de l'algèbre universelle)

$$\begin{tikzcd} \mathbf{V} \arrow[rr, "U"] \arrow[dr] & & \mathbf{W} \arrow[dl] \\ & \mathbf{Set} & \end{tikzcd} \tag{2}$$

U admet un adjoint à gauche. Notons $\mathbf{V}[A, F]$ l'algèbre de $\mathbf{V}$ libre sur $(A, F) \in \mathbf{W}$ ou encore la $\mathbf{V}$-envelope universelle de (A, F).

Problème d'immersion associé

Soit (A, F) une algèbre de $\mathbf{W}$. À quelle condition l'unité de l'adjonction $can_{(A,F)} : (A, F) \to U(\mathbf{V}[A, F])$ est-elle injective ?

Soit $\mathbf{W}_U$ la sous-catéorie pleine de $\mathbf{W}$ engendrée par les algèbres $(A, F) \in \mathbf{W}$ pour lesquelles $can_{(A,F)}$ est injectif.

Soit $\mathbf{W}_U$ la sous-catéorie pleine de $\mathbf{W}$ engendrée par les algèbres $(A, F) \in \mathbf{W}$ pour lesquelles $can_{(A,F)}$ est injectif.

Exemples

- Pour $\mathbf{V} = \mathbf{DiffCom}$, $\mathbf{W} = \mathbf{Lie}$ et $U = W$, alors $\mathbf{W}_U = \mathbf{Vect}$.

Soit $\mathbf{W}_U$ la sous-catéorie pleine de $\mathbf{W}$ engendrée par les algèbres $(A, F) \in \mathbf{W}$ pour lesquelles $can_{(A,F)}$ est injectif.

Exemples

- Pour $\mathbf{V} = \mathbf{DiffCom}$, $\mathbf{W} = \mathbf{Lie}$ et $U = W$, alors $\mathbf{W}_U = \mathbf{Vect}$.
- Lorsque R est un corps, $\mathbf{V} = \mathbf{Ass}$, et $U = C$ transformant une algèbre associative en une algèbre de Lie pour le commutateur, alors $\mathbf{Lie}_C = \mathbf{Lie}$.

Soit $\mathbf{W}_U$ la sous-catéorie pleine de $\mathbf{W}$ engendrée par les algèbres $(A, F) \in \mathbf{W}$ pour lesquelles $can_{(A,F)}$ est injectif.

Exemples

- Pour $\mathbf{V} = \mathbf{DiffCom}$, $\mathbf{W} = \mathbf{Lie}$ et $U = W$, alors $\mathbf{W}_U = \mathbf{Vect}$.
- Lorsque R est un corps, $\mathbf{V} = \mathbf{Ass}$, et $U = C$ transformant une algèbre associative en une algèbre de Lie pour le commutateur, alors $\mathbf{Lie}_C = \mathbf{Lie}$.
- Dans la situation $U\colon \mathbf{Ab} \to \mathbf{CMon}$, $\mathbf{CMon}_U$ est la catégorie des monoïdes commutatifs cancellatifs.

Soit $\mathbf{W}_U$ la sous-catéorie pleine de $\mathbf{W}$ engendrée par les algèbres $(A, F) \in \mathbf{W}$ pour lesquelles $can_{(A,F)}$ est injectif.

Exemples

- Pour $\mathbf{V} = \mathbf{DiffCom}$, $\mathbf{W} = \mathbf{Lie}$ et $U = W$, alors $\mathbf{W}_U = \mathbf{Vect}$.
- Lorsque R est un corps, $\mathbf{V} = \mathbf{Ass}$, et $U = C$ transformant une algèbre associative en une algèbre de Lie pour le commutateur, alors $\mathbf{Lie}_C = \mathbf{Lie}$.
- Dans la situation $U\colon \mathbf{Ab} \to \mathbf{CMon}$, $\mathbf{CMon}_U$ est la catégorie des monoïdes commutatifs cancellatifs.

Quel que soit $(A, F) \in \mathbf{W}$, $im(can_{(A,F)}) \in \mathbf{W}_U$.

Soit $\mathbf{W}_U$ la sous-catéorie pleine de $\mathbf{W}$ engendrée par les algèbres $(A, F) \in \mathbf{W}$ pour lesquelles $can_{(A,F)}$ est injectif.

Exemples

- Pour $\mathbf{V} = \mathbf{DiffCom}$, $\mathbf{W} = \mathbf{Lie}$ et $U = W$, alors $\mathbf{W}_U = \mathbf{Vect}$.
- Lorsque R est un corps, $\mathbf{V} = \mathbf{Ass}$, et $U = C$ transformant une algèbre associative en une algèbre de Lie pour le commutateur, alors $\mathbf{Lie}_C = \mathbf{Lie}$.
- Dans la situation $U \colon \mathbf{Ab} \to \mathbf{CMon}$, $\mathbf{CMon}_U$ est la catégorie des monoïdes commutatifs cancellatifs.

Quel que soit $(A, F) \in \mathbf{W}$, $im(can_{(A,F)}) \in \mathbf{W}_U$. Cela permet de définir un foncteur $\mathbf{Sp}_U \colon \mathbf{W} \to \mathbf{W}_U$ qui se trouve être l'adjoint à gauche du plongement plein et fidèle $\mathbf{W}_U \hookrightarrow \mathbf{W}$ (de sorte que $\mathbf{W}_U$ est une sous-catégorie réflexive de $\mathbf{W}$).

En règle générale, si $\mathbf{W}_U$ n'est pas une variété d'algèbres universelles (elle ne possède pas la qualité d'être fermée par images homomorphiques), il n'en demeure pas moins que son foncteur d'oubli évident vers la catégorie des ensembles admet un adjoint à gauche.

En règle générale, si $\mathbf{W}_U$ n'est pas une variété d'algèbres universelles (elle ne possède pas la qualité d'être fermée par images homomorphiques), il n'en demeure pas moins que son foncteur d'oubli évident vers la catégorie des ensembles admet un adjoint à gauche.

Il devient donc possible de considérer l'algèbre $\mathbf{W}_U[X]$ de $\mathbf{W}$, qui se plonge dans sa $\mathbf{V}$-enveloppe universelle, librement engendrée par l'ensemble X. (Prudence : en général, $\mathbf{W}_U[X]$ n'est pas $\mathbf{W}[X]$.)

En règle générale, si $\mathbf{W}_U$ n'est pas une variété d'algèbres universelles (elle ne possède pas la qualité d'être fermée par images homomorphiques), il n'en demeure pas moins que son foncteur d'oubli évident vers la catégorie des ensembles admet un adjoint à gauche.

Il devient donc possible de considérer l'algèbre $\mathbf{W}_U[X]$ de $\mathbf{W}$, qui se plonge dans sa $\mathbf{V}$-enveloppe universelle, librement engendrée par l'ensemble X. (Prudence : en général, $\mathbf{W}_U[X]$ n'est pas $\mathbf{W}[X]$.)

Construction inductive :

$\mathbf{W}_U[X]$ est la plus petite sous-algèbre (objet de $\mathbf{W}$) de $U(\mathbf{V}[X])$ engendrée par X.

En règle générale, si $\mathbf{W}_U$ n'est pas une variété d'algèbres universelles (elle ne possède pas la qualité d'être fermée par images homomorphiques), il n'en demeure pas moins que son foncteur d'oubli évident vers la catégorie des ensembles admet un adjoint à gauche.

Il devient donc possible de considérer l'algèbre $\mathbf{W}_U[X]$ de $\mathbf{W}$, qui se plonge dans sa $\mathbf{V}$-enveloppe universelle, librement engendrée par l'ensemble X. (Prudence : en général, $\mathbf{W}_U[X]$ n'est pas $\mathbf{W}[X]$.)

Construction inductive :

$\mathbf{W}_U[X]$ est la plus petite sous-algèbre (objet de $\mathbf{W}$) de $U(\mathbf{V}[X])$ engendrée par X. Posons $X_0 = X$ et $X_{n+1} = X_n \cup \bigcup_f \{ f(t_1, \cdots, t_n) \colon t_i \in X_n \}$ (où f parcourt l'ensemble des opérations de base du type de $\mathbf{W}$). Alors

$$\mathbf{W}_U[X] = \bigcup_{n \geq 0} X_n.$$

On peut donc appliquer les résultats précédents au cas où $\mathbf{V} = \mathbf{DiffCom}$, $\mathbf{W} = \mathbf{Lie}$ (ou $\mathbf{W} = \mathbf{DiffLie}$) et $U = W$.

Pour tout ensemble X, il existe donc un objet libre $\mathbf{Vect}[X]$ (ou $\mathbf{DiffVect}[X]$) qui se plonge dans son enveloppe wronskienne.

Une algèbre de Lie libre $\mathbf{Lie}[X]$ est libre en tant que module, donc se plonge dans son algèbre universelle enveloppante $\mathcal{U}(\mathbf{Lie}[X]) \simeq R\langle X\rangle$, et ainsi $\mathbf{Lie}[X]$ est isomorphe à son image canonique, à savoir, l'algèbre de Lie des polynômes de Lie.

Une algèbre de Lie libre $\mathbf{Lie}[X]$ est libre en tant que module, donc se plonge dans son algèbre universelle enveloppante $\mathcal{U}(\mathbf{Lie}[X]) \simeq R\langle X\rangle$, et ainsi $\mathbf{Lie}[X]$ est isomorphe à son image canonique, à savoir, l'algèbre de Lie des polynômes de Lie.

On vient de voir en revanche que si $|X| \geq 2$, alors $\mathbf{Lie}[X]$ ne se plonge pas dans $\mathcal{W}(\mathbf{Lie}[X]) \simeq R\{X\}$.

Une algèbre de Lie libre $\mathbf{Lie}[X]$ est libre en tant que module, donc se plonge dans son algèbre universelle enveloppante $\mathcal{U}(\mathbf{Lie}[X]) \simeq R\langle X\rangle$, et ainsi $\mathbf{Lie}[X]$ est isomorphe à son image canonique, à savoir, l'algèbre de Lie des polynômes de Lie.

On vient de voir en revanche que si $|X| \geq 2$, alors $\mathbf{Lie}[X]$ ne se plonge pas dans $\mathcal{W}(\mathbf{Lie}[X]) \simeq R\{X\}$.

Rappelons que $R\{X\}$ est l'algèbre des polynômes différentiels sur X. En tant qu'algèbre c'est $R[X \times \mathbb{N}]$. Sa dérivation vérifie

$$d(x^{(i)}) = x^{(i+1)}$$

$x \in X$, $i \geq 0$.

Une algèbre de Lie libre $\mathbf{Lie}[X]$ est libre en tant que module, donc se plonge dans son algèbre universelle enveloppante $\mathcal{U}(\mathbf{Lie}[X]) \simeq R\langle X\rangle$, et ainsi $\mathbf{Lie}[X]$ est isomorphe à son image canonique, à savoir, l'algèbre de Lie des polynômes de Lie.

On vient de voir en revanche que si $|X| \geq 2$, alors $\mathbf{Lie}[X]$ ne se plonge pas dans $\mathcal{W}(\mathbf{Lie}[X]) \simeq R\{X\}$.

Rappelons que $R\{X\}$ est l'algèbre des polynômes différentiels sur X. En tant qu'algèbre c'est $R[X \times \mathbb{N}]$. Sa dérivation vérifie

$$d(x^{(i)}) = x^{(i+1)}$$

$x \in X$, $i \geq 0$.

Cela signifie que pour $|X| \geq 2$, $\mathbf{Lie}[X]$ n'est pas isomorphe à $\mathbf{Vect}[X]$.

Essayons également de comparer $\mathbf{DiffLie}[X]$ et $\mathbf{DiffVect}[X]$.

Essayons également de comparer $\mathbf{DiffLie}[X]$ et $\mathbf{DiffVect}[X]$.

Considérons le magma libre $\mathbf{Mag}[X \times \mathbb{N}]$ sur $X \times \mathbb{N}$, et l'algèbre (non associative) libre $\mathbf{Alg}[X \times \mathbb{N}]$ sur $X \times \mathbb{N}$ obtenue comme le module libre de base $\mathbf{Mag}[X \times \mathbb{N}]$ et dont la multiplication étend celle du magma.

Essayons également de comparer **DiffLie**$[X]$ et **DiffVect**$[X]$.

Considérons le magma libre **Mag**$[X \times \mathbb{N}]$ sur $X \times \mathbb{N}$, et l'algèbre (non associative) libre **Alg**$[X \times \mathbb{N}]$ sur $X \times \mathbb{N}$ obtenue comme le module libre de base **Mag**$[X \times \mathbb{N}]$ et dont la multiplication étend celle du magma.

Les relations $d(x^{(i)}) = x^{(i+1)}$, $x \in X$, $i \geq 0$, définissent une dérivation sur **Alg**$[X \times \mathbb{N}]$, de telle sorte que (**Alg**$[X \times \mathbb{N}], d)$ est l'algèbre (non-associative) différentielle libre sur X.

Essayons également de comparer $\mathbf{DiffLie}[X]$ et $\mathbf{DiffVect}[X]$.

Considérons le magma libre $\mathbf{Mag}[X \times \mathbb{N}]$ sur $X \times \mathbb{N}$, et l'algèbre (non associative) libre $\mathbf{Alg}[X \times \mathbb{N}]$ sur $X \times \mathbb{N}$ obtenue comme le module libre de base $\mathbf{Mag}[X \times \mathbb{N}]$ et dont la multiplication étend celle du magma.

Les relations $d(x^{(i)}) = x^{(i+1)}$, $x \in X$, $i \geq 0$, définissent une dérivation sur $\mathbf{Alg}[X \times \mathbb{N}]$, de telle sorte que $(\mathbf{Alg}[X \times \mathbb{N}], d)$ est l'algèbre (non-associative) différentielle libre sur X.

Soit l'idéal $\mathfrak{L}$ engendré par tt, $s(tu) + t(su) + u(st)$, $s, t, u \in \mathbf{Alg}[X \times \mathbb{N}]$. On sait que $\mathbf{Alg}[X \times \mathbb{N}]/\mathfrak{L} \simeq \mathbf{Lie}[X \times \mathbb{N}]$.

Essayons également de comparer $\mathbf{DiffLie}[X]$ et $\mathbf{DiffVect}[X]$.

Considérons le magma libre $\mathbf{Mag}[X \times \mathbb{N}]$ sur $X \times \mathbb{N}$, et l'algèbre (non associative) libre $\mathbf{Alg}[X \times \mathbb{N}]$ sur $X \times \mathbb{N}$ obtenue comme le module libre de base $\mathbf{Mag}[X \times \mathbb{N}]$ et dont la multiplication étend celle du magma.

Les relations $d(x^{(i)}) = x^{(i+1)}$, $x \in X$, $i \geq 0$, définissent une dérivation sur $\mathbf{Alg}[X \times \mathbb{N}]$, de telle sorte que $(\mathbf{Alg}[X \times \mathbb{N}], d)$ est l'algèbre (non-associative) différentielle libre sur X.

Soit l'idéal $\mathfrak{L}$ engendré par tt, $s(tu) + t(su) + u(st)$, $s, t, u \in \mathbf{Alg}[X \times \mathbb{N}]$. On sait que $\mathbf{Alg}[X \times \mathbb{N}]/\mathfrak{L} \simeq \mathbf{Lie}[X \times \mathbb{N}]$.

En fait, $\mathfrak{L}$ est un idéal différentiel et $(\mathbf{Alg}[X \times \mathbb{N}]/\mathfrak{L}, \tilde{d}) \simeq (\mathbf{DiffLie}[X], d)$.

Il résulte de la description précédente de $\mathbf{DiffLie}[X]$ qu'aucune algèbre de Lie différentielle libre sur au moins un générateur ne se plonge dans son enveloppe wronskienne.

Il résulte de la description précédente de **DiffLie**$[X]$ qu'aucune algèbre de Lie différentielle libre sur au moins un générateur ne se plonge dans son enveloppe wronskienne.

Pour peu que $|X| \geq 1$, **DiffLie**$[X]$ n'est pas isomorphe à son image canonique **DiffVect**$[X]$ dans $R\{X\}$, qui est l'algèbre de Lie de champs de vecteurs, libre sur X.

Table des matières

Une algèbre de Lie-Rinehart (sur R) est un triplet $(A, \mathfrak{g}, \partial)$ où

1. A est une algèbre commutative,
2. $\mathfrak{g}$ est une R-algèbre de Lie qui est aussi un A-module à gauche,
3. $\partial \colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{Der}_R(A)$ est à la fois un morphisme d'algèbres de Lie sur R (de sorte que A est un $\mathfrak{g}$-module) et une application A-linéaire,

le tout vérifiant

$$[x, a \cdot y] = a \cdot [x, y] + \partial(x)(a) \cdot y,$$

$x, y \in \mathfrak{g}$, $a \in A$.

Une algèbre de Lie-Rinehart (sur R) est un triplet $(A, \mathfrak{g}, \partial)$ où

1. A est une algèbre commutative,
2. $\mathfrak{g}$ est une R-algèbre de Lie qui est aussi un A-module à gauche,
3. $\partial\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{Der}_R(A)$ est à la fois un morphisme d'algèbres de Lie sur R (de sorte que A est un $\mathfrak{g}$-module) et une application A-linéaire,

le tout vérifiant

$$[x, a \cdot y] = a \cdot [x, y] + \partial(x)(a) \cdot y,$$

$x, y \in \mathfrak{g}$, $a \in A$.

Remarque

Les équations définissant une algèbre de Lie-Rinehart ont pour modèle celles satisfaites par $(C^\infty(V), \mathfrak{X}(V))$, où V est une variété lisse de dimension finie, et $\mathfrak{X}(V)$ est l'algèbre de Lie des champs de vecteurs sur V.

Un morphisme d'algèbres de Lie-Rinehart est une paire d'applications constituée d'une morphisme d'algèbres et d'un morphisme d'algèbres de Lie qui sont équivariantes pour les actions de A et de $\mathfrak{g}$.

Un morphisme d'algèbres de Lie-Rinehart est une paire d'applications constituée d'une morphisme d'algèbres et d'un morphisme d'algèbres de Lie qui sont équivariantes pour les actions de A et de $\mathfrak{g}$.

Deux foncteurs d'oubli : $\mathit{Com}\colon \mathbf{LieRin} \to \mathbf{Com}$ et $\mathit{Lie}\colon \mathbf{LieRin} \to \mathbf{Lie}$.

Un morphisme d'algèbres de Lie-Rinehart est une paire d'applications constituée d'une morphisme d'algèbres et d'un morphisme d'algèbres de Lie qui sont équivariantes pour les actions de A et de $\mathfrak{g}$.

Deux foncteurs d'oubli : $\mathit{Com}\colon \mathbf{LieRin} \to \mathbf{Com}$ et $\mathit{Lie}\colon \mathbf{LieRin} \to \mathbf{Lie}$.

Remarques

- **LieRin** n'est pas une variété d'algèbres universelles "homogènes", le premier foncteur d'oubli est une fibration et la fibre au-dessus de l'algèbre commutative A est la catégorie des pseudo-algèbres de Lie sur A (J. C. Herz, 1954).
- L'espace des sections globales d'un algébroïde de Lie (de J. Pradines) est précisément une pseudo-algèbre de Lie.

Remarque

Comme $\mathfrak{Der}_R(R) = (0)$, les catégories de pseudo-algèbres de Lie sur R et d'algèbres de Lie sur R sont les mêmes. Le foncteur $Lie\colon \mathbf{LieRin} \to \mathbf{Lie}$ correspond à la projection sur la fibre au-dessus de R.

Remarque

Comme $\mathfrak{Der}_R(R) = (0)$, les catégories de pseudo-algèbres de Lie sur R et d'algèbres de Lie sur R sont les mêmes. Le foncteur $Lie\colon \mathbf{LieRin} \to \mathbf{Lie}$ correspond à la projection sur la fibre au-dessus de R.

Exemples

- $(A, \mathfrak{Der}_R(A), id)$.

- Soit $(A, \{\cdot,\cdot\})$ une algèbre de Poisson. Alors, $(A, \Omega_{A/R}, \partial)$ est une algèbre de Lie-Rinehart, où $A \xrightarrow{d} \Omega_{A/R}$ désigne le module des différentielles de Kähler, lequel est une R-algèbre de Lie pour $(a, b, x, y \in A)$

$$[adx, bdy] = a\{x, b\}dy + b\{a, y\}dx + abd\{x, y\},$$

et

$$\partial(adx)(b) = a\{x, b\}.$$

- *Com* : **LieRin** $\to$ **Com** admet un adjoint à gauche : $\mathbf{LieRin}(A) = (A, (0), i_{\mathfrak{Der}_R(A)})$. Toute algèbre commutative se plonge dans son enveloppe de Lie-Rinehart universelle.

- *Lie* : **LieRin** $\to$ **Lie** admet également un adjoint à gauche : $\mathbf{LieRin}(\mathfrak{g}) = (R, \mathfrak{g}, t_{\mathfrak{g}})$. Toute algèbre de Lie se plonge dans son enveloppe de Lie-Rinehart universelle.

$LR(A, d) := (A, (A, W_d), \partial)$,
avec $\partial \colon (A, W_d) \to \mathfrak{Der}_R(A)$, $a \mapsto a \cdot d$,
définit un foncteur $LR \colon$ **DiffCom** $\to$ **LieRin**.

$LR(A, d) := (A, (A, W_d), \partial)$,
avec $\partial\colon (A, W_d) \to \mathfrak{Der}_R(A)$, $a \mapsto a \cdot d$,
définit un foncteur $LR\colon$ **DiffCom** $\to$ **LieRin**.

Une autre enveloppe wronskienne :

Toute algèbre $(A, \mathfrak{g}, \partial)$ de Lie-Rinehart engendre "librement" une algèbre commutative différentielle $(\mathcal{W}(A, \mathfrak{g}, \partial), D)$.

$LR(A, d) := (A, (A, W_d), \partial)$,
avec $\partial \colon (A, W_d) \to \mathfrak{Der}_R(A)$, $a \mapsto a \cdot d$,
définit un foncteur $LR \colon$ **DiffCom** $\to$ **LieRin**.

Une autre enveloppe wronskienne :

Toute algèbre $(A, \mathfrak{g}, \partial)$ de Lie-Rinehart engendre "librement" une algèbre commutative différentielle $(\mathcal{W}(A, \mathfrak{g}, \partial), D)$.

Construction :

$\mathcal{W}(A, \mathfrak{g}, \partial) = R\{|A| \sqcup |\mathfrak{g}|\}/I(A, \mathfrak{g}, \partial)$ où $I(A, \mathfrak{g}, \partial)$ est l'idéal différentiel engendré par les relations qui font de $(q_A, q_{\mathfrak{g}}) \colon (A, \mathfrak{g}, \partial) \to LR(R\{|A| \sqcup |\mathfrak{g}|\})$ un morphisme d'algèbres de Lie-Rinehart (modulo $I(A, \mathfrak{g}, \partial)$).

Remarque

On peut aussi définir l'algèbre enveloppante universelle d'une algèbre de Lie-Rinehart (J.-C. Herz, 1954, et G. Rinehart, 1963).

C'est une algèbre associative (en général non commutative) portant une structure de module sur l'algèbre de Lie-Rinehart considérée, universelle au sens où il existe un morphisme d'algèbre de celle-ci vers toute autre algèbre qui est aussi un module sur la même algèbre de Lie-Rinehart.

Cette construction n'est pas conséquence d'une adjonction entre algèbres de Lie-Rinehart et algèbres associatives.

Une algèbre de Jacobi est la donnée d'une algèbre (unitaire) commutative A et d'un crochet de Lie satisfaisant la relation de Jacobi-Leibniz

$$[ab, c] = a[b, c] + b[a, c] - ab[1, c],$$

$a, b, c \in A$.

Un morphisme d'algèbres de Jacobi est un morphisme d'algèbres (unitaires) qui est aussi un morphisme d'algèbres de Lie.

Une algèbre de Jacobi est la donnée d'une algèbre (unitaire) commutative A et d'un crochet de Lie satisfaisant la relation de Jacobi-Leibniz

$$[ab, c] = a[b, c] + b[a, c] - ab[1, c],$$

$a, b, c \in A$.

Un morphisme d'algèbres de Jacobi est un morphisme d'algèbres (unitaires) qui est aussi un morphisme d'algèbres de Lie.

Remarque

Les algèbres de Jacobi forment la contrepartie algébrique des variétés de Jacobi d'A. Lichnerowicz ou des algèbres de Lie locales de A. A. Kirillov.

À partir d'une algèbre commutative différentielle (A, d) on obtient une algèbre de Jacobi (A, W_d). Cela permet d'identifier **DiffCom** à une sous-catégorie pleine de **Jac**.

À partir d'une algèbre commutative différentielle (A, d) on obtient une algèbre de Jacobi (A, W_d). Cela permet d'identifier **DiffCom** à une sous-catégorie pleine de **Jac**.

De même **Poi** est une sous-catégorie pleine de **Jac** (une algèbre de Jacobi est une algèbre de Poisson si, et seulement si, $ad_1 = 0$).

À partir d'une algèbre commutative différentielle (A, d) on obtient une algèbre de Jacobi (A, W_d). Cela permet d'identifier **DiffCom** à une sous-catégorie pleine de **Jac**.

De même **Poi** est une sous-catégorie pleine de **Jac** (une algèbre de Jacobi est une algèbre de Poisson si, et seulement si, $ad_1 = 0$).

Enfin, pour une algèbre de Jacobi $(A, [\cdot, \cdot])$, ad_1 définit une dérivation de l'algèbre A, de sorte que (A, ad_1) est une algèbre commutative différentielle.

À partir d'une algèbre commutative différentielle (A, d) on obtient une algèbre de Jacobi (A, W_d). Cela permet d'identifier **DiffCom** à une sous-catégorie pleine de **Jac**.

De même **Poi** est une sous-catégorie pleine de **Jac** (une algèbre de Jacobi est une algèbre de Poisson si, et seulement si, $ad_1 = 0$).

Enfin, pour une algèbre de Jacobi $(A, [\cdot, \cdot])$, ad_1 définit une dérivation de l'algèbre A, de sorte que (A, ad_1) est une algèbre commutative différentielle. Cela donne un foncteur $AD_1 \colon \mathbf{Jac} \to \mathbf{DiffCom}$. De plus le foncteur d'inclusion $\mathbf{DiffCom} \hookrightarrow \mathbf{Jac}$ est un inverse à droite de AD_1.

- **Poi** $\hookrightarrow$ **Jac** permet de définir l'enveloppe de Poisson universelle $\mathbf{Poi}(A, [\cdot, \cdot])$ d'une algèbre de Jacobi $(A, [\cdot, \cdot])$. Elle est donnée par A/I où I est l'idéal de Jacobi engendré par $[1, x]$, $x \in A$.

- **Poi** $\hookrightarrow$ **Jac** permet de définir l'enveloppe de Poisson universelle **Poi**$(A, [\cdot, \cdot])$ d'une algèbre de Jacobi $(A, [\cdot, \cdot])$. Elle est donnée par A/I où I est l'idéal de Jacobi engendré par $[1, x]$, $x \in A$.

- **DiffCom** $\hookrightarrow$ **Jac** conduit à l'enveloppe wronskienne universelle $\mathcal{W}(A, [\cdot, \cdot])$ d'une algèbre de Jacobi $(A, [\cdot, \cdot])$.

- **Poi** $\hookrightarrow$ **Jac** permet de définir l'enveloppe de Poisson universelle **Poi**$(A, [\cdot, \cdot])$ d'une algèbre de Jacobi $(A, [\cdot, \cdot])$. Elle est donnée par A/I où I est l'idéal de Jacobi engendré par $[1, x]$, $x \in A$.

- **DiffCom** $\hookrightarrow$ **Jac** conduit à l'enveloppe wronskienne universelle $\mathcal{W}(A, [\cdot, \cdot])$ d'une algèbre de Jacobi $(A, [\cdot, \cdot])$.

- L'adjoint à gauche de AD_1 : **Jac** $\to$ **DiffCom**, quant à lui, mène à l'enveloppe de Jacobi universelle **Jac**(A, d) d'une algèbre commutative différentielle (A, d). Du fait que **DiffCom** $\hookrightarrow$ **Jac**, toute algèbre différentielle se plonge dans son enveloppe de Jacobi.

Dans le diagramme (seulement partiellement commutatif) suivant, tous les foncteurs admettent un adjoint à gauche.

$$
\begin{tikzcd}
& \mathbf{Jac} \arrow[dl, bend right, "AD_1"'] \arrow[dddr, bend left=60] & \\
\mathbf{DiffCom} \arrow[ur, hook] \arrow[r, "W"] \arrow[dr, "LR"'] \arrow[ddrr, bend left, "W"] \arrow[dd] & \mathbf{DiffLie} \arrow[ddr, bend left] & \mathbf{Poi} \arrow[ul, hook'] \arrow[dd] \\
& \mathbf{LieRin} \arrow[dl, "Com"] \arrow[dr, "Lie"'] & \\
\mathbf{Com} & & \mathbf{Lie}
\end{tikzcd}
\tag{3}
$$

$$
\begin{tikzcd}
 & \mathbf{Jac} \arrow[dl, bend right, "AD_1"'] \arrow[dddr, bend left] & \\
\mathbf{DiffCom} \arrow[ur, hook] \arrow[r, "W"] \arrow[dd] \arrow[dr, "LR"'] \arrow[ddrr, bend left, "W"] & \mathbf{DiffLie} \arrow[ddr, bend left] & \mathbf{Poi} \arrow[ul, hook'] \arrow[dd] \\
 & \mathbf{LieRin} \arrow[dl, "Com"] \arrow[dr, "Lie"'] & \\
\mathbf{Com} & & \mathbf{Lie}
\end{tikzcd}
\tag{4}
$$

La factorisation de $W\colon \mathbf{DiffCom} \to \mathbf{Lie}$ par LR conduit à $\mathcal{W}(\mathfrak{g}) \simeq \mathcal{W}(\mathbf{LieRin}(\mathfrak{g})) = \mathcal{W}(R, \mathfrak{g}, t_{\mathfrak{g}})$.

Il y a deux foncteurs distincts $L, L' \colon \mathbf{Jac} \to \mathbf{Lie}$.

$$\begin{tikzcd} \mathbf{DiffCom} \arrow[rr, hook] \arrow[dr, "W"'] & & \mathbf{Jac} \arrow[dl, "L"] \\ & \mathbf{Lie} & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathbf{DiffCom} \arrow[dr, "W"'] & & \mathbf{Jac} \arrow[ll, "AD_1"'] \arrow[dl, "L'"] \\ & \mathbf{Lie} & \end{tikzcd} \tag{5}$$

Donc $L'(A, [\cdot, \cdot]) = W(A, ad_1) = (A, W_{ad_1})$.

Proposition

Toute algèbre de Lie champs de vecteurs sur une ligne se plonge dans son enveloppe universelle de Jacobi (indifféremment par rapport à L ou à L').

$$\begin{tikzcd} \mathbf{Poi} \arrow[rr, hook] \arrow[dr] & & \mathbf{Jac} \arrow[dl, "L"] \\ & \mathbf{Lie} & \end{tikzcd} \tag{6}$$

Proposition

Si une algèbre de Lie se plonge dans son enveloppe de Poisson universelle, alors elle se plonge dans son enveloppe universelle de Jacobi (par rapport au foncteur L).

Table des matières

L'enveloppe wronskienne $\mathcal{W}(\mathfrak{g})$ possède une augmentation ϵ qui est l'unique morphisme d'algèbres différentielles induit par la flèche terminale $t_{\mathfrak{g}} \colon \mathfrak{g} \to (0)$.

(Puisque $\mathcal{W}$ est un adjoint à gauche, il préserve les colimites donc notamment les objets initiaux, de sorte que $\mathcal{W}(0) \simeq (R, 0)$.)

Rappelons que $\mathcal{U}\colon (\mathbf{Lie}, \times) \to (\mathbf{Ass}, \otimes_R)$ est un foncteur fortement monoïdal, avec $\Phi_{\mathfrak{g},\mathfrak{h}}\colon \mathcal{U}(\mathfrak{g}\times\mathfrak{h}) \to \mathcal{U}(\mathfrak{g}) \otimes_R \mathcal{U}(\mathfrak{h})$ l'isomorphisme $\Phi_{\mathfrak{g},\mathfrak{h}}(x,y) = x\otimes 1 + 1\otimes y$.

Bien sûr, $\Delta = \mathcal{U}(\mathfrak{g}) \xrightarrow{\mathcal{U}(\delta)} \mathcal{U}(\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}) \xrightarrow{\Phi_{\mathfrak{g},\mathfrak{g}}} \mathcal{U}(\mathfrak{g}) \otimes_R \mathcal{U}(\mathfrak{g})$ où $\delta\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}\times\mathfrak{g}$ est l'application diagonale usuelle.

Peut-on définir un coproduit sur $\mathcal{W}(\mathfrak{g})$ de façon similaire à celui de $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$?

Peut-on définir un coproduit sur $\mathcal{W}(\mathfrak{g})$ de façon similaire à celui de $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$?

$\otimes_R$ est le coproduit catégorique de **DiffCom** avec $(A, d) \otimes_R (B, e) = (A \otimes_R B, d \otimes id + id \otimes e)$.

Il existe donc un morphisme d'algèbres différentielles $\Phi_{\mathfrak{g},\mathfrak{h}} \colon \mathcal{W}(\mathfrak{g}) \otimes_R \mathcal{W}(\mathfrak{h}) \to \mathcal{W}(\mathfrak{g} \times \mathfrak{h})$, et un seul, tel que $\Phi_{\mathfrak{g},\mathfrak{h}}(x \otimes 1 + 1 \otimes y) = (x, y)$.

Supposons que l'on ait un morphisme d'algèbres différentielles $\Psi\colon \mathcal{W}(\mathfrak{g} \times \mathfrak{h}) \to \mathcal{W}(\mathfrak{g}) \otimes_R \mathcal{W}(\mathfrak{h})$ tel que $\Psi(x, y) = x \otimes 1 + 1 \otimes y$.

Supposons que l'on ait un morphisme d'algèbres différentielles $\Psi \colon \mathcal{W}(\mathfrak{g} \times \mathfrak{h}) \to \mathcal{W}(\mathfrak{g}) \otimes_R \mathcal{W}(\mathfrak{h})$ tel que $\Psi(x, y) = x \otimes 1 + 1 \otimes y$.

Il doit donc vérifier $\Psi([(x_1, y_1), (x_2, y_2)]) = W(\Psi(x_1, x_2), \Psi(y_1, y_2))$, $x_1, x_2 \in \mathfrak{g}$, $y_1, y_2 \in \mathfrak{h}$.

Supposons que l'on ait un morphisme d'algèbres différentielles $\Psi \colon \mathcal{W}(\mathfrak{g} \times \mathfrak{h}) \to \mathcal{W}(\mathfrak{g}) \otimes_R \mathcal{W}(\mathfrak{h})$ tel que $\Psi(x, y) = x \otimes 1 + 1 \otimes y$.

Il doit donc vérifier $\Psi([(x_1, y_1), (x_2, y_2)]) = W(\Psi(x_1, x_2), \Psi(y_1, y_2))$, $x_1, x_2 \in \mathfrak{g}$, $y_1, y_2 \in \mathfrak{h}$.

Or $\Psi([(x_1, y_1), (x_2, y_2)]) = [x_1, x_2] \otimes 1 + 1 \otimes [y_1, y_2]$.

Supposons que l'on ait un morphisme d'algèbres différentielles $\Psi \colon \mathcal{W}(\mathfrak{g} \times \mathfrak{h}) \to \mathcal{W}(\mathfrak{g}) \otimes_R \mathcal{W}(\mathfrak{h})$ tel que $\Psi(x, y) = x \otimes 1 + 1 \otimes y$.

Il doit donc vérifier $\Psi([(x_1, y_1), (x_2, y_2)]) = W(\Psi(x_1, x_2), \Psi(y_1, y_2))$, $x_1, x_2 \in \mathfrak{g}$, $y_1, y_2 \in \mathfrak{h}$.

Or $\Psi([(x_1, y_1), (x_2, y_2)]) = [x_1, x_2] \otimes 1 + 1 \otimes [y_1, y_2]$.

Alors que $W(\Psi(x_1, x_2), \Psi(y_1, y_2)) = [x_1, x_2] \otimes 1 + 1 \otimes [y_1, y_2] + W(x_1 \otimes 1, 1 \otimes y_2) + W(1 \otimes x_2, y_1 \otimes 1)$.

Tout algèbre de Lie libre $\mathbf{Lie}[X]$ possède une structure "naturelle" de co-groupe abélien, i.e., des morphismes d'algèbres de Lie

Tout algèbre de Lie libre $\mathbf{Lie}[X]$ possède une structure "naturelle" de co-groupe abélien, i.e., des morphismes d'algèbres de Lie

- une co-addition $\mathfrak{e}\colon \mathbf{Lie}[X] \to \mathbf{Lie}[X] \coprod \mathbf{Lie}[X]$, $\mathfrak{e}(x) = x_1 + x_2$,

Tout algèbre de Lie libre $\mathbf{Lie}[X]$ possède une structure "naturelle" de co-groupe abélien, i.e., des morphismes d'algèbres de Lie

- une co-addition $\mathfrak{e}\colon \mathbf{Lie}[X] \to \mathbf{Lie}[X] \coprod \mathbf{Lie}[X]$, $\mathfrak{e}(x) = x_1 + x_2$,
- une co-unité $\mathsf{n}\colon \mathbf{Lie}[X] \to \mathbf{Lie}[\emptyset] \simeq (0)$, $\mathsf{n}(x) = 0$ (bien sûr, $\mathsf{n} = t_{\mathbf{Lie}[X]}$),

Tout algèbre de Lie libre $\mathbf{Lie}[X]$ possède une structure "naturelle" de co-groupe abélien, i.e., des morphismes d'algèbres de Lie

- une co-addition $\mathsf{e}\colon \mathbf{Lie}[X] \to \mathbf{Lie}[X] \coprod \mathbf{Lie}[X]$, $\mathsf{e}(x) = x_1 + x_2$,
- une co-unité $\mathsf{n}\colon \mathbf{Lie}[X] \to \mathbf{Lie}[\emptyset] \simeq (0)$, $\mathsf{n}(x) = 0$ (bien sûr, $\mathsf{n} = t_{\mathbf{Lie}[X]}$),
- une co-inversion $!\colon \mathbf{Lie}[X] \to \mathbf{Lie}[X]$, $!(x) = -x$.

Tout algèbre de Lie libre $\mathbf{Lie}[X]$ possède une structure "naturelle" de co-groupe abélien, i.e., des morphismes d'algèbres de Lie

- une co-addition $\mathfrak{e}\colon \mathbf{Lie}[X] \to \mathbf{Lie}[X] \coprod \mathbf{Lie}[X]$, $\mathfrak{e}(x) = x_1 + x_2$,
- une co-unité $\mathsf{n}\colon \mathbf{Lie}[X] \to \mathbf{Lie}[\emptyset] \simeq (0)$, $\mathsf{n}(x) = 0$ (bien sûr, $\mathsf{n} = t_{\mathbf{Lie}[X]}$),
- une co-inversion $!\colon \mathbf{Lie}[X] \to \mathbf{Lie}[X]$, $!(x) = -x$.

qui munissent, via le lemme de Yoneda, le foncteur représentable $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Lie}}(\mathbf{Lie}[X], \cdot)\colon \mathbf{Lie} \to \mathbf{Set}$ d'une structure de groupe abélien (dans $\mathbf{Set}^{\mathbf{Lie}}$).

Tout algèbre de Lie libre $\mathbf{Lie}[X]$ possède une structure "naturelle" de co-groupe abélien, i.e., des morphismes d'algèbres de Lie

- une co-addition $\mathfrak{e}\colon \mathbf{Lie}[X] \to \mathbf{Lie}[X] \coprod \mathbf{Lie}[X]$, $\mathfrak{e}(x) = x_1 + x_2$,
- une co-unité $\mathsf{n}\colon \mathbf{Lie}[X] \to \mathbf{Lie}[\emptyset] \simeq (0)$, $\mathsf{n}(x) = 0$ (bien sûr, $\mathsf{n} = t_{\mathbf{Lie}[X]}$),
- une co-inversion $!\colon \mathbf{Lie}[X] \to \mathbf{Lie}[X]$, $!(x) = -x$.

qui munissent, via le lemme de Yoneda, le foncteur représentable $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Lie}}(\mathbf{Lie}[X], \cdot)\colon \mathbf{Lie} \to \mathbf{Set}$ d'une structure de groupe abélien (dans $\mathbf{Set}^{\mathbf{Lie}}$).

Dit autrement, $(\mathbf{Lie}[X], \mathfrak{e}, \mathsf{n}, !)$ est un groupe abélien dans $(\mathbf{Lie}^{\mathrm{op}}, \coprod)$.

Comme $\mathcal{W}$ est un adjoint à gauche, il préserve les colimites, donc les limites dans $\mathbf{Lie}^{\mathrm{op}}$, et, en particulier, il transforme un groupe dans $(\mathbf{Lie}^{\mathrm{op}}, \coprod)$ en un groupe dans $(\mathbf{DiffCom}^{\mathrm{op}}, \otimes_R)$.

Comme $\mathcal{W}$ est un adjoint à gauche, il préserve les colimites, donc les limites dans $\mathbf{Lie}^{\mathrm{op}}$, et, en particulier, il transforme un groupe dans $(\mathbf{Lie}^{\mathrm{op}}, \coprod)$ en un groupe dans $(\mathbf{DiffCom}^{\mathrm{op}}, \otimes_R)$.

En résumé,

$(\mathcal{W}(\mathbf{Lie}[X]), \mathcal{W}(\mathfrak{e}), \mathcal{W}(\mathfrak{n}), \mathcal{W}(!))$ est une algèbre de Hopf différentielle cocommutative.

Comme $\mathcal{W}$ est un adjoint à gauche, il préserve les colimites, donc les limites dans $\mathbf{Lie}^{\mathrm{op}}$, et, en particulier, il transforme un groupe dans $(\mathbf{Lie}^{\mathrm{op}}, \coprod)$ en un groupe dans $(\mathbf{DiffCom}^{\mathrm{op}}, \otimes_R)$.

En résumé,
$(\mathcal{W}(\mathbf{Lie}[X]), \mathcal{W}(\mathfrak{e}), \mathcal{W}(\mathfrak{n}), \mathcal{W}(!))$ est une algèbre de Hopf différentielle cocommutative.

Or $\mathcal{W}(\mathbf{Lie}[X]) \simeq R\{X\}$, $\mathcal{W}(\mathfrak{e})(x) = x \otimes 1 + 1 \otimes x$, $\mathcal{W}(\mathfrak{n})(x) = 0$ et $\mathcal{W}(!(x)) = -x$, $x \in X$. (C'est la structure usuelle d'algèbre de Hopf "primitive" de $R[X \times \mathbb{N}]$.)

Comme $\mathcal{W}$ est un adjoint à gauche, il préserve les colimites, donc les limites dans $\mathbf{Lie}^{\mathrm{op}}$, et, en particulier, il transforme un groupe dans $(\mathbf{Lie}^{\mathrm{op}}, \coprod)$ en un groupe dans $(\mathbf{DiffCom}^{\mathrm{op}}, \otimes_R)$.

En résumé,

$(\mathcal{W}(\mathbf{Lie}[X]), \mathcal{W}(\mathfrak{e}), \mathcal{W}(\mathfrak{n}), \mathcal{W}(!))$ est une algèbre de Hopf différentielle cocommutative.

Or $\mathcal{W}(\mathbf{Lie}[X]) \simeq R\{X\}$, $\mathcal{W}(\mathfrak{e})(x) = x \otimes 1 + 1 \otimes x$, $\mathcal{W}(\mathfrak{n})(x) = 0$ et $\mathcal{W}(!(x)) = -x$, $x \in X$. (C'est la structure usuelle d'algèbre de Hopf "primitive" de $R[X \times \mathbb{N}]$.)

Remarque

Si R est une $\mathbb{Q}$-algèbre, alors $\mathbf{Prim}(R[X \times \mathbb{N}]) = R^{(X \times \mathbb{N})}$ (algèbre de Lie abélienne). $\mathbf{DiffLie}[X]$ n'est donc pas reconstruite comme l'algèbre de Lie des éléments primitifs de son envelope wronskienne.

Table des matières

- Description du noyau de l'application canonique $\mathbf{DiffLie}[X] \to \mathbf{DiffVect}[X]$. (C'est un épimorphisme d'algèbres de Lie différentielles graduées en degré positif.)

- Théorème de type Poincaré-Birkhoff-Witt (au moins dans le cas où R est un corps) ? Peut-on construire une base de $\mathcal{W}(\mathfrak{g})$ en fonction d'une base de $\mathfrak{g}$?

- Peut-on obtenir une description (plus) explicite de $\mathbf{DiffVect}[X]$? (Rappelons qu'en caractéristique zéro, l'algèbre de Lie des polynômes de Lie est exactement l'algèbre de Lie des éléments primitifs de $R\langle X\rangle$.)

Les travaux originaux présentés ici sont tirés des publications suivantes

- L. P., Differential (monoid) algebra and more, Comptes-rendus de Algebraic and Algorithmic Aspects of Differential and Integral Operators, AAADIOS 2012, volume 8372 de Lecture Notes in Computer Science, pp. 164-189, 2014.
- L. P., Differential (Lie) algebras from a functorial point of view, Advances in Applied Mathematics 72: 38-76 (2016).

et de la pré-publication

L. P., The solution to the embedding problem of a (differential) Lie algebra into its Wronskian envelope, soumis, 58 pages (disponible sur ma page web dans l'onglet "Prépublications et notes").