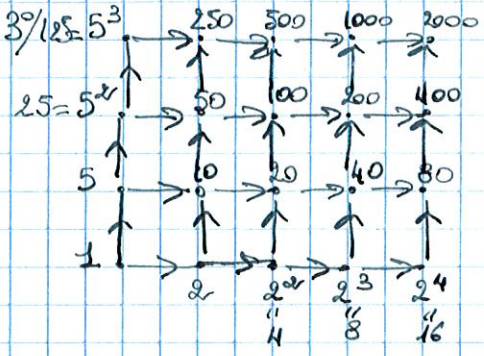
Exo 1 : 1° $2000 = 2^4 \times 5^3$

2° $\#D_{\mathbb{N}}(2000) = (4+1)(3+1) = 20$ $\quad \#D_{\mathbb{Z}}(2000) = 40$

3°



Exo 2 : 1° $97 \wedge 18 = 1$ donc il existe une infinité de solutions.

Une solution particulière est donnée par l'algorithme d'Euclide-Bezout

$97 = 18 \times 5 + 7$ $\qquad 1 = 18 \times 2 - 7 \times 5 = 18 \times 2 - (97 - 18 \times 5) \times 5$

$18 = 7 \times 2 + 4$ $\qquad 1 = (18 - 7 \times 2) \times 2 - 7 = 18 \times 2 - 7 \times 5$

$7 = 4 \times 1 + 3$ $\qquad 1 = 4 - (7 - 4 \times 1) \times 1 = 4 \times 2 - 7$

$4 = 3 \times 1 + 1 \Rightarrow$ $\qquad 1 = 4 - 3 \times 1$

Soit $\begin{cases} 1 = 18 \times 27 - 97 \times 5 \\ 1 = 18 \times v - 97 \times u \end{cases}$ et $(-5, 27)$ une solution particulière

$\Rightarrow 18(v - 27) = 97(u - 5)$ soit d'après Gauss

$v = 27 \in 97\mathbb{Z}$ et $(u, v) = (-5, 27) + (18, 97)\mathbb{Z}$

2° $1818 \wedge 18 = 18$ et $1 \notin 18\mathbb{Z}$ donc $\mathcal{S} = \emptyset$

Exo 3 : 1° $\mathbb{Z}_6 = \{0, \dot{1}, \dot{2}, \dot{3}, \dot{4}, \dot{5}\}$

	$\dot{X}+\dot{1}$	$\dot{2}$	$\dot{3}$	$\dot{4}$	$\dot{5}$	$\dot{0}$
$(\dot{X}+\dot{1})^2$	$\dot{1}$	$\dot{4}$	$\dot{3}$	$\dot{4}$	$\dot{1}$	$\dot{0}$
$(\dot{X}+\dot{1})^3$	$\dot{1}$	$\dot{2}$	$\dot{3}$	$\dot{4}$	$\dot{5}$	$\dot{0}$
$(\dot{X}+\dot{1})^6 = (\dot{X}+\dot{1})^2 \times (\dot{X}+\dot{1})^4$	$\dot{1}$	$\dot{4}$	$\dot{3}$	$\dot{4}$	$\dot{1}$	$\dot{0}$
de même $\dot{X}^6 + \dot{1} = \dot{X}^2 + \dot{1}$	$\dot{1}$	$\dot{2}$	$\dot{5}$	$\dot{4}$	$\dot{5}$	$\dot{2}$

donc $(X+1)^6 \neq_6 X^6 + 1$

2° voir devoir n°1 $\qquad$ 3° voir devoir n°1

4° si $p = 6$ $\quad \binom{6}{2} = 15 \notin 6\mathbb{N}$

5° $(X+1)^p = X^p + \sum_{k=1}^{p-1} \binom{p}{k} X^{p-k} + 1 \overset{(3)}{\equiv}_p X^p + 1$

6° Pour $x=1$, $2^n = 2 \Leftrightarrow n=1$

Exo 4 : 1° $u_0 = 1$; $u_1 = 31$; $u_2 = 331$; $u_3 = 3331$.

2° Par récurrence : . $P(0)$ V

. $P(n) \Rightarrow P(n+1)$

supposons $3u_n = 10^{n+1} - 7$

alors $3u_{n+1} \overset{\text{def}}{=} 3 \times 10\, u_n + 3 \times 21 = 10 \times 3u_n + 63$

$\overset{H(n)}{=} 10[10^{n+1} - 7] + 63 = 10^{n+2} \underbrace{-70+63}_{-7}$

Donc $\forall n \geq 0$ $3u_n = 10^{n+1} - 7$

3° Montrons que $\forall n \geq 1$ $u_n = 3\sum_{k=1}^{n} 10^k + 1$

$= 30 \sum_{k=0}^{n-1} 10^k + 1$

Nous l'avons vérifié pour $1 \leq n \leq 3$.

D'après 2° $3u_n = 10^{n+1} - 7 = 10^n[3 \times 3 + 1] - 7$

$= 3[3.10^n] + 10^n - 7 = 3.3.10^n + 3u_{n-1}$

$\Leftrightarrow u_n = 3.10^n + 3u_{n-1}$

Si $u_{n-1} = 3\sum_{k=1}^{n-1} 10^k + 1$

$u_n = 3\sum_{k=1}^{n} 10^k + 1$ ■

4° Donc, de 3° nous déduisons que

$u_n - 30\sum_{k=0}^{n+1} 10^k = 1$ et $30 = 2 \times 3 \times 5$

D'après le théorème de Bezout, $u_n \wedge 30 = 1 \Rightarrow$

$u_n \wedge 2 = 1$, $u_n \wedge 3 = 1$ et $u_n \wedge 5 = 1$

2, 3, 5 étant premiers, u_n n'est divisible ni par 2, ni par 3, ni par 5.

Exo 5 : $33 \equiv 6 \ (9)$

$33^n \equiv 2^n \times 3^n \equiv (0) \ (9)$ donc $\forall n \geq 2$ $33^n \equiv 0 \ (9)$

Or $2013 = 33 \times 61$ car divisible par 11 et par 3.

Donc $(2013)^{2013} \equiv 33^{2013} \times 61^{2013} \equiv 0 \ (9)$ ■

Exo 6 : $5x \equiv 15 \ (85) \iff x \equiv 3 \ (17)$ car $5 \wedge 15 \wedge 85 = 5$

$4x \equiv 16 \ (11) \iff x \equiv 4 \ (11)$ car $11 \wedge 4 = 1$

donc $(*) \iff \begin{cases} x \equiv 3 \ (17) \\ x \equiv 4 \ (11) \\ x \equiv 5 \ (6) \end{cases}$ $17 \wedge 11 = 1$ donc le théorème chinois s'applique

or $17 \times 2 - 11 \times 3 = 1$ donc

$(*) \iff \begin{cases} x \equiv 4 \times 2 \times 17 + 3 \times (-3) \times 11 = 37 \ (187) \\ x \equiv 5 \ (6) \end{cases}$

sol $x \in 37 + 187\mathbb{Z}$

Les solutions positive cherché est 37

La solution négative cherché est $37 - 187 = -150$

Exercice 7 :

1°/ $*$ n'est pas commutative car $2^3 \neq 3^2$

2°/ $*$ n'est pas associative car $(2^3)^2 = 2^6 \neq 2^{(3^2)} = 2^9$

3°/ $*$ n'est pas distributive à gauche car $a^{(b.c)} \neq a^b . a^c$

$\| \qquad \| \qquad \begin{cases} a=2 \\ b=1 \ c=2 \end{cases}$

$a^{b.c} \neq a^{b+c}$ contre exemple.

4°/ $*$ est distributive à droite car $(a.b)^c = a^c . b^c \quad \forall a, b, c$.

5°/ non d'après 3.

6°/ non $e^a = a \quad \forall a \in \mathbb{N}$ n'a pas de solution

7°/ 1 est élément neutre à droite car $a * 1 = a^1 = a \quad \forall a \in \mathbb{N}$

8°/ non d'après 6

9°/ éléments réguliers à droite $a * c = b * c \Rightarrow a = b$

$a^c = b^c \quad c \neq 0$ est régulier à droite

à gauche $c^a = c^b \ \forall \Rightarrow a = b \quad \forall c \neq 0$

$\forall c \neq 0$ c est régulier (décomposition des entiers)

10°/ pour avoir des éléments inversibles il faut avoir un élément neutre donc non.

Exo 8

1/ si $x \equiv x' \ (n)$ et $y \equiv y' \ (n)$ $\quad x \top y = ax + by \equiv ax' + by' \equiv x' \top y' \ (n)$

2/ toute opération $\top$ dont le résultat modulo (n) est indépendant des représentant des classes $\quad \dot{x} \top \dot{y} = [ax + by]_n$

3/ $([x]_n \top [y]_n)_n = [y]_n \top [x]_n \Leftrightarrow$

$ax + by \equiv by + bx \ (n)$

$\Leftrightarrow (a-b)(x-y) \equiv 0 \ (n) \quad \forall x, y \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow$ en particulier $x=1$ et $y=0$.

$a - b \in n\mathbb{Z}$

• associative

$(x \top y) \top z \equiv x \top (y \top z) \ (n)$

$a[ax+by] + bz \equiv ax + b[ay+bz] \ (n)$

$aax + bz \equiv ax + bbz \ (n)$

$ax(a-1) + bz(1-b) \equiv 0 \ (n) \quad \forall x, \forall z$

pour $x=1$ et $b=0 \quad a(a-1) \equiv 0 \ (n) \quad n = 9 \times 8$

$x=0$ et $b=1 \quad b(1-b) \equiv 0 \ (n)$

$a \equiv 0 \ (n)$ ou $a \equiv 1 \ (n)$

et

$b \equiv 0 \ (n)$ ou $b \equiv 1 \ (n)$

• élément neutre

$e \top x = x \top e = x \quad$ ie $\quad ae + bx \equiv ax + be \equiv x \ (n)$

pour $x=0 \quad ae + be \equiv 0 \ (n)$

$(a+b)e \equiv 0 \ (n)$

$(a-b)(x-e) \equiv 0 \ (n) \quad \forall x \in \mathbb{N} \Rightarrow$

$\Rightarrow a - b \in n\mathbb{Z} \quad ae + bx \equiv ae + ax$

$ae + ax \equiv a(x+e) \equiv x. \ (n)$

$x=0 \quad ae \equiv 0 \ (n) \quad e=0$ ou $a=0$

si $e=0 \quad bx \equiv ax \equiv x \quad x \neq 0$

$b \equiv a \ (n)$

$a \equiv b \equiv 0 \ (n)$

$a \equiv b \equiv 1 \ (n)$

Exo 9 : 1°/ $3^{2r} + 4^{2r} = 5^{2r}$

2°/ a) soit $p \in \mathbb{P}$ / $p \mid a \wedge b \wedge c$ alors $p \mid a$ et $p \mid b$ et $p \mid c$

donc contredit $a \wedge b = a \wedge c = b \wedge c = 1$.

b) $6 \wedge 10 \wedge 15 = 1$ et $6 \wedge 10 = 2$ $6 \wedge 15 = 3$ $10 \wedge 15 = 5$

c) si $a \wedge b \neq 1$ alors $\exists p \in \mathbb{P}$ $p \mid a \wedge b$ donc $p \mid a^{2r} \wedge b^{2r}$

donc $p \mid a^2 + b^{2r} = c^{2r}$ donc $p \mid a \wedge b \wedge c$ contradiction -

même conclusion si $a \wedge b \neq 1$ ou $c \wedge a \neq 1$.

3°/ si $a = 0$ alors $b = c$

si $b = 0$ " $a = c$

donc les solutions évidentes sont $\{(0, n, n), (n, 0, n), n \in \mathbb{N}\}$

4°/ a) si $a \wedge b \wedge c \neq 1$ et (a, b, c) est pythagoricien,

alors $\left(\frac{a}{a \wedge b \wedge c}, \frac{b}{a \wedge b \wedge c}, \frac{c}{a \wedge b \wedge c} \right)$ " " .

b) si $n \in 2\mathbb{Z}$, $n^{2r} \in 4\mathbb{Z}$

si $n \in 1 + 2\mathbb{Z}$, $n^{2r} \in 1 + 4\mathbb{Z}$

c) si a et b sont tous les deux impairs, alors

$a^{2r} + b^{2r} \in 2 + 4\mathbb{Z}$ qui ne peut être un carré.

d) (i) $a = 2r$ $a \wedge b \wedge c = 1 \Rightarrow b, c \in 1 + 2\mathbb{Z}$.

(ii) $a^{2r} + b^{2r} = c^{2r} \Leftrightarrow 4r^{2r} = c^{2r} - b^{2r} = (c+b)(c-b)$

$\Leftrightarrow r^{2r} = \left(\frac{c+b}{2} \right) \left(\frac{c-b}{2} \right)$

(iii) d'après (c) (d) $c \wedge b = 1$ et $c, b \in 1 + 2\mathbb{Z}$

$c, b > 0$ $c > b$

donc $c + b \in 2\mathbb{Z}$ $c - b \in 2\mathbb{Z}$

$\frac{c+b}{2} \in \mathbb{N}$ $\frac{c-b}{2} \in \mathbb{N}$

soit $p \mid \left(\frac{c+b}{2} \right) \wedge \left(\frac{c-b}{2} \right)$

alors $p \mid \frac{c+b}{2} + \frac{c-b}{2} = c$ et $p \mid \frac{c+b}{2} - \frac{c-b}{2} = b$

donc $p \mid c \wedge b = 1 \Rightarrow p = 1$.

(iv) D'après le th. fondamental de l'arithmétique : soit $p \in \mathbb{P}$

et $p \mid r^{2r} \Rightarrow p^{2r} \mid r^{2r}$ et $p^{2r} \mid \frac{c+b}{2}$ ou $p^{2r} \mid \frac{c-b}{2}$ car $\frac{c+b}{2} \wedge \frac{c-b}{2} = 1$

donc $\frac{c+b}{2}$ et $\frac{c-b}{2}$ sont 2r carrés.

$\alpha^2 = \frac{c-b}{2}$ $\quad \beta^2 = \frac{c+b}{2}$ $\quad z^2 = \alpha^2\beta^2$ $\quad (\alpha \wedge \beta = 1) \Rightarrow$

$$\begin{cases} c = \alpha^2 + \beta^2 \\ b = \beta^2 - \alpha^2 \\ a = 2\alpha\beta \end{cases}$$

5°/ si (a,b,c) est un triplet pythagoricien, alors il existe $\alpha, \beta, \delta \in \mathbb{N}$

$\alpha \wedge \beta = 1$ t.q. $\begin{cases} a = 2\alpha\beta\delta \\ c = (\alpha^2+\beta^2)\delta \\ b = (\beta^2-\alpha^2)\delta \end{cases}$