PRES Sorbonne-Paris Cité.
Université Paris 13
Institut Galilée
Licence Informatique Semestre 4 **feuille TD n° 2**

Divisibilité dans $\mathbb{N}$

Exercice 1 – On demande de faire les 4 premières questions pour ce TD et de chercher les suivantes pour le TD 4 (congruences).

Soit n un entier naturel, si $n = \sum_{i=0}^{k}(10)^i a_i$, avec $0 \geq a_i < 10$, on note sa représentation en base décimale $\underline{a_k \cdots a_1 a_0}$ Prouver les critères de divisibilité dans le système décimal :

(*i*) Un nombre est divisible par 2 ssi le dernier chiffre a_0 représente un nombre divisible par 2.

(*ii*) Un nombre est divisible par 3 ssi la somme de ses chiffres $\sum_{i=0}^{k} a_i$ est divisible par 3.

(*iii*) Un nombre est divisible par 5 ssi le dernier chiffre a_0 est un nombre divisible par 5.

(*iv*) Un nombre est divisible par 10 ssi son dernier chiffre a_0 est 0.

(*v*) Un nombre est divisible par 4 ssi $\underline{a_1 a_0}$ représente un nombre divisible par 4.

(*vi*) Un nombre est divisible par 9 ssi la somme de ses chiffres $\sum_{i=0}^{k} a_i$ est divisible par 9.

(*vii*) Un nombre est divisible par 25 si et seulement si $\underline{a_1 a_0}$ représente un nombre divisible par 25.

(*viii*) Un nombre est divisible par 8 ssi $\underline{a_2 a_1 a_0}$ représente un nombre divisible par 8.

(*ix*) Montrer que n est divisible par 11 si et seulement si $\sum_{i=0}^{k}(-1)^i a_i$ est divisible par 11. En déduire que 11 divise 19382.

(*x*) Supposons que $k = 3q + r$ avec $q, r \in \mathbf{N}$, $r < 3$ et posons $a_m := 0$ pour tout $m > k$. Montrer que n est divisible par 7 si et seulement si

$$\sum_{i=0}^{q}(-1)^i \underline{a_{3i+2} a_{3i+1} a_{3i}}$$

est divisible par 7. En déduire que 5527579818992 est divisible par 7.

Exercice 2 – Discuter de la validité de la proposition suivante : "Si la somme des chiffres d'un nombre entier est multiple de 6, comme par exemple 42, alors ce nombre est un multiple de 6".

Exercice 3 – Discuter de la validité du critère suivant : « Un nombre est divisible par $n \times p$ ssi il est divisible par n et par p. »

Exercice 4 – Montrer que $n(n+1)$ est divisible par 2.

Exercice 5 – Peut-on trouver trois entiers consécutifs dont la somme est 207 ? 329 ?

Caractériser les entiers naturels qui sont la somme de trois entiers consécutifs. En déduire tous les nombres dont l'écriture en base 10 est 47d5 et qui sont la somme de trois entiers consécutifs.

Exercice 6 – Pour $n > 2$, montrer que $n^2(n^2-1)(n^4-16)$ est divisible par 60.

Exercice 7 – Pour $n > 2$, montrer que $n^2(n^2-1)(n^4-16)$ est divisible par 360.

Exercice 8 – Pour quels entiers $a \in \mathbb{N}_*$, le nombre $a^2 - 1$ est-il divisible par 8 ?

Exercice 9 – Que dire de la division d'un carré par 2, 3, 5, 10.

Exercice 10 – [Olympiades 1975] Soit A la somme des chiffres du nombre 4444^{4444} dans la représentation décimale et
B la somme des chiffres du nombre A dans cette même représentation.

Trouver la somme des chiffres du nombre B.

Indication : On pourra commencer par prouver que

(i) la différence entre un nombre et la somme de ses chiffres est divisible par 9.

(ii) 9 divise $4444^{4444} - B$

(iii) 9 divise $4444 - B$

En majorant 4444 par la puissance convenable de 10 (en justifiant l'expression "la puissance convenable de 10", trouver un majorant de B et conclure.

Exercice 11 – Trois cents personnes font la queue devant un bloc de 300 tiroirs fermés numérotés de 1 à 300 ;

- La première personne ouvre tous les tiroirs
- La deuxième personne ferme tous les tiroirs portant un numéro pair
- La troisième personne ouvre les tiroirs fermés portant un numéro divisible par 3 et ferme les tiroirs ouverts dont le numéro est divisible par 3
- La quatrième personne ouvre les tiroirs fermés portant un numéro divisible par 4 et ferme les tiroirs ouverts dont le numéro est divisible par 4
- la nième personne ouvre les tiroirs fermés portant un numéro divisible par n et ferme les tiroirs ouverts dont le numéro est divisible par n (n allant de 1 à $n = 300$)

A la fin de la manipulation

(i) Le tiroir $p = 21$ est-il ouvert ou fermé ?

(ii) combien de fois a-t-il été ouvert ?

(iii) Combien y-a-t-il de tiroirs ouverts et quels sont-ils ?

(iv) généraliser pour un nombre n de tiroirs quelconques et pour un tiroir p quelconque

Exercice 12 – Montrer que, pour tout $n \geq 1$, 5 divise $n^5 - n$.

Exercice 13 – Réfléchir à la proposition suivante :

$$?? \quad a|c \quad \text{et} \quad b|c \Leftrightarrow ab|c \quad ??$$

Exercice 14 – [crible d'Erathostène] Soit $n \in \mathbb{N}$, Soit l'algorithme suivant :
(0) supprimer 1.
Tant que *cond* non réalisé faire :
(1) Entourer le plus petit nombre restant
(2) Entourez-le et supprimer tous ses multiples propres.
Fin de faire.

(i) Appliquer l'algorithme avec *cond*= "il existe un nombre ni entouré ni rayé" et $n = 120$

(ii) Montrer que tous les nombres entourés sont des nombres premiers ?

(iii) Peut-on améliorer *cond* ?

Exercice 15 –
Pour quels nombres premiers p l'entier $17p + 1$ est-il un carré ?

Exercice 16 – On suppose que les chiffres utilisés pour une base sont pris dans la suite des nombres entiers que l'on séparera par des points.

(i) Trouver les diviseurs premiers de 2014.

(*ii*) Ecrire '2014' en base 20.

(*iii*) En quelle base '2014' s'écrit-il "11.11.12" ?

(*iv*) Existe-t-il une base dans laquelle '2014' s'écrit avec un seul chiffre ?

(*v*) Quelle est la longueur maximale de l'expression de '2014'. Pour quelle base ?

(*vi*) Pour quelles bases b l'expression $\underline{2.0.1.4}_b$ a-t-elle un sens ?

(*vii*) Pour quelles bases b, le nombre '2014' s'exprime avec exactement 4 chiffres ?

(*viii*) Existe-t-il une base dans laquelle '2014' s'écrit avec exactement deux chiffres et ces chiffres sont identiques ?

(*ix*) Existe-t-il une base dans laquelle '2014' s'écrit avec exactement trois chiffres et ces chiffres sont identiques ?

(*x*) Existe-t-il une base dans laquelle '2014' s'écrit avec exactement quatre chiffres et ces chiffres sont identiques ?

Exercice 17 –

(*i*) Soient $a, b, n \in \mathbf{N}$, $n > 0$. Montrer que, si $a^n \mid b^n$, alors $a \mid b$.

(*ii*) Soient p un nombre premier, $a, n \in \mathbf{N}$. Montrer que, si $p \mid a^n$, alors $\forall k \in \mathbb{N}, p^k \mid a^k$.

Exercice 18 –

(*i*) Étant donné un tableau à dix lignes et à dix colonnes dont la cellule de la i-ième ligne et de la j-ième colonne contient le chiffre $10(i-1)+j$, définir un algorithme qui produit une liste exhaustive des entiers premiers p compris entre 1 et 100.

(*ii*) Avec la notation de l'exercice , combien de couples (p, q) y a-t-il avec p et q premiers tels que $p = \underline{a_1 a_0}$ et $q = \underline{a_0 a_1}$?

Exercice 19 – Construire les diagrammes de Hasse des nombres suivants :

(*i*) 6561 ; (*ii*) 871 ; (*iii*) 14641 ; (*iv*) 4879 ; (*v*) 513 ; (*vi*) 4592 ; (*vii*) 67925 ; (*viii*) 472500.

Pour quels types de nombres, les diagrammes de Hasse sont linéaires ?

Exercice 20 – Combien de couples d'entiers naturels (a,b) vérifient $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} = \dfrac{1}{2000}$.

Exercice 21 – Déterminer les naturels m et n tels que $m^4 + 4n^2$ est un nombre premier. On pourra utiliser l'égalité $m^4 + 4n^2 = [(m-n)^2 + n^2][(m+n)^2 + n^2]$.

Exercice 22 – Appliquer l'algorithme d'Euclide aux couples d'entiers suivants :

(*i*) $a = 325$ et $b = 312$;

(*ii*) $a = 1225$ et $b = 972$;

(*iii*) $a = 1597$ et $b = 987$.

Exercice 23 –

(*i*) Soient $p, q \in \mathbb{N}$. Montrer que $2^p - 1$ divise $2^{pq} - 1$.

(*ii*) En déduire que si $m_n = 2^n - 1$ est un nombre premier, alors n est un nombre premier. On dit alors que $2^n - 1$ est un nombre premier de Mersenne. Quelle est l'écriture de m_n en base 2 ?

(*iii*) Montrer que m_2, m_3, m_5, m_7 sont premiers.

(*iv*) Montrer que m_{11} n'est pas premier.

Remarque "culturelle" : les plus grand nombres premiers connus sont des nombres de Mersenne car on connaît des bons algorithmes de primalité dans ce cas, et on les retrouvera pour cette raison dans la suite du cours. Le plus grand exemple de nombre premier connu est $2^{43112609} - 1$.
Question : combien de chiffres ce nombre a-t-il en base 10 ?

Exercice 24 – Posons $F_0 := 1$, $F_1 := 1$ et $F_n := F_{n-1} + F_{n-2}$ pour tout $n > 1$. On appelle $(F_n)_{n \geq 0}$ la *suite de Fibonacci.*

(i) Calculer F_n pour $n \leq 12$.

(ii) Soient φ le *nombre d'or*, c'est-à-dire la racine positive de l'équation quadratique $x^2 = x + 1$, et ψ sa racine négative. Trouver deux nombres a et b tels que

$$F_n = a\varphi^n + b\psi^n$$

pour tout n.

Exercice 25 – Le but de cet exercice est de calculer la complexité (en nombre d'appels récursifs, dans le pire cas) de l'algorithme d'Euclide. Soient $a, b \in \mathbf{N}$, $a > b$. En appliquant l'algorithme d'Euclide au couple (a, b), on effectue un nombre de divisions euclidiennes de reste non nul noté $C(a, b)$. Par exemple pour $a = 13, b = 5$, on écrit $13 = 2 \cdot 5 + 3$ puis $5 = 1 \cdot 3 + 2$, $3 = 1 \cdot 2 + 1$, donc on arrive au dernier reste non nul en 3 divisions, soit $C(13, 5)$=3.

(i) Donner $C(325, 312)$ et $C(1225, 972)$.

(ii) Montrer que pour tout $q \in \mathbf{N}, C(qa, qb) = C(a, b)$.

(iii) Montrer la propriété suivante par récurrence sur $k \geq 1$: Si $C(a, b) \geq k$, alors $a \geq F_{k+2}$ et $b \geq F_{k+1}$ et $C(F_{k+2}, F_{k+1}) = k$, où F_n $(n \geq 0)$ est le n-ième nombre de Fibonacci introduit dans l'exercice précédent.

(iv) En déduire le résultat suivant (théorème de Lamé, 1844) : si $b < F_{k+1}$, alors $C(a, b) \leq k$.

En particulier, on peut montrer que

$$F_n \sim_{n\to\infty} \frac{\varphi^{n+1}}{\sqrt{5}},$$

où φ est le nombre d'or, et la complexité en nombre d'appels récursifs de l'algorithme d'Euclide est donc $O(\log(b))$.