PRES Sorbonne-Paris Cité.
Université Paris 13
Institut Galilée
Licence Informatique Semestre 4 **feuille TD n° 9**

Injections, Surjections, Bijections, Cardinaux

exercice 1 – [fonction caractéristique d'un ensemble] Soit E un ensemble quelconque, et

$$\chi \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{P}(E) & \longrightarrow & \{0,1\}^E \\ U & \longmapsto & \chi_U \left| \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \{0,1\} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} \chi_U(x) = 1 & si\ x \in U \\ \chi_U(x) = 0 & si\ x \notin U \end{cases} \end{array} \right. \end{array} \right.$$

(i) Montrer que χ est une bijection
(ii) Soit $U \subseteq E$, étudier les propriétés (injection, surjection, bijection) de χ_U
(iii) Montrer que $\chi_{U \cap V} = \chi_U \times \chi_V$,
(iv) Montrer que $\chi_{U-V} = \chi_U - \chi_V$,
(v) Montrer que $\chi_{U \cup V} = \chi_U + \chi_V - \chi_U . \chi_V$.
(vi) Après avoir montré l'égalité $T \Delta S = (T \cup S) - (T \cap S)$, déduire une expression de $\chi_{T \Delta S}$ en fonction de χ_T et χ_S. Remarquer que $\chi_{T \Delta S} = \chi_{S \Delta T}$. A, B et C étant trois sous-ensembles quelconques de E,
(vii) En déduire $\chi_{(A \Delta B) \Delta C} = \chi_{A \Delta (B \Delta C)}$
($viii$) En déduire $(A \Delta B) \Delta C = A \Delta (B \Delta C)$

exercice 2 – Dans cet exercice, nous allons montrer que pour tout ensemble E, même infini, E et $\mathfrak{P}(E)$ n'ont pas le même cardinal.

(i) Comparer les cardinaux de E et de $\mathfrak{P}(E)$ si E est fini. En déduire le résultat dans ce cas.
(ii) Supposons à présent E quelconque. Raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe une surjection $f : E \to \mathfrak{P}(E)$. Considérons $A = \{x \in E, x \notin f(x)\}$. Montrer qu'il existe $a \in E$ tel que $f(a) = A$.
(iii) Est-ce que $a \in A$? Aboutir à une contradiction et conclure.

exercice 3 – Montrer que l'ensemble des suites infinies de $\mathbb{N}$ est indénombrable.