Ludique: une logique sans axiome d'identité?

Alain Lecomte[1]
Université Paris 8 - UMR 7023

Journées du PEPS Relations
Maison des Sciences de l'Homme, Paris-Nord 15-16 dec. 2008

[1] en collaboration avec M. Quatrini, IML, Marseille

Sommaire

Logiques sous-structurelles

- Lambek, 1958 : absence de
  - Contraction
  - Affaiblissement
  - Permutation
- Girard, 1987 : Logique linéaire
  - ni contraction, ni affaiblissement
  - mais ajoût d'exponentielles: **!**, **?** pour pouvoir traduire LC ou LI dans LL

1987 : Logique Linéaire

Girard, 1987:
Consommation de ressources : **de** $A \multimap B$ et A, **déduire** B, mais après, A n'est plus disponible!
Paradoxe de Russell:
Soit $R = \{x; x \notin x\}$, raisonnement classique:

- De $R \in R$ nous pouvons déduire $R \notin R$
- Mais $R \in R$ contredit $R \notin R$!

Raisonnement linéaire:
Le deuxième pas est invalide!

1987 : Logique Linéaire

Girard, 1987:
Consommation de ressources : **de** $A \multimap B$ et A, **déduire** B, mais après, A n'est plus disponible!
Paradoxe de Russell:
Soit $R = \{x; x \notin x\}$, raisonnement classique:

- De $R \in R$ nous pouvons déduire $R \notin R$
- Mais $R \in R$ contredit $R \notin R$!

Raisonnement linéaire:
Le deuxième pas est invalide!

1987 : Logique Linéaire

Girard, 1987:
Consommation de ressources : **de** $A \multimap B$ et A, **déduire** B, mais après, A n'est plus disponible!
Paradoxe de Russell:
Soit $R = \{x; x \notin x\}$, raisonnement classique:

- De $R \in R$ nous pouvons déduire $R \notin R$
- Mais $R \in R$ contredit $R \notin R$!

Raisonnement linéaire:
Le deuxième pas est invalide!

Le Menteur

idem

- De *Je mens* nous déduisons *Je dis la vérité*
- ... et la prémisse est consommée

... pas de contradiction!

Applications

- Lambek $\longrightarrow$ formalisation de la syntaxe comme système sensible à la quantité et à l'ordre des ressources (cf. Chomsky, Programme Minimaliste)
- Lambek, 61, Moortgat : supprimer l'associativité (**NL**)

Que reste-t-il?

$$
\begin{array}{ll}
(\mathit{REFL}) & A \rightarrow A \\
(\mathit{TRANS}) & \mathit{si}\ A \rightarrow B\ \mathit{et}\ B \rightarrow C,\ \mathit{alors}\ A \rightarrow C \\
(\mathit{RES}) & A \rightarrow C/B\ \mathit{ssi}\ A \bullet B \rightarrow C\ \mathit{ssi}\ B \rightarrow A \backslash C
\end{array}
$$

Que reste-t-il?

$$
\begin{array}{ll}
\color{red}{(\mathit{REFL})} & \color{red}{A \longrightarrow A} \\
(\mathit{TRANS}) & \mathit{si}\ A \longrightarrow B\ \mathit{et}\ B \longrightarrow C,\ \mathit{alors}\ A \longrightarrow C \\
(\mathit{RES}) & A \longrightarrow C/B\ \mathit{ssi}\ A \bullet B \longrightarrow C\ \mathit{ssi}\ B \longrightarrow A \backslash C
\end{array}
$$

Un système sans REFL

- pas d'identité entre les formules
- pas d'identité entre les atomes
- ... donc pas d'atomes à proprement parler!

Un système sans REFL

- pas d'identité entre les formules
- pas d'identité entre les atomes
- ... donc pas d'atomes à proprement parler!

Un système sans REFL

- pas d'identité entre les formules
- pas d'identité entre les atomes
- ... donc pas d'atomes à proprement parler!

l'origine des sophismes

C. L. Hamblin, 1970 :

> *an approach such as that of the previous chapter [ie: the formal classical one], by locating most of the properties of the locutions in propositional letters such as 'A', 'B', 'S' and 'T', smuggles in the fiction that the question of meaning can be isolated from that of dialectical properties. When the letter 'S', say, is used twice or more in a given example it is by convention the case that it has the same meaning at each occurrence; but if meanings are to be allowed to change with context, and to be determined by the extended context, the question of whether the meaning of a given symbol changes is to be answered a posteriori and the question should not be begged by writing in an assumption of constancy.*

le rôle des lieux

- idée que les significations peuvent changer selon les **lieux**
- lieux $\longrightarrow$ **adresses**
- soit donc un système d'adresses....

le rôle des lieux

- idée que les significations peuvent changer selon les **lieux**
- lieux $\longrightarrow$ **adresses**
- soit donc un système d'adresses....

le rôle des lieux

- idée que les significations peuvent changer selon les **lieux**
- lieux $\longrightarrow$ **adresses**
- soit donc un système d'adresses....

Adresses

Definition

Un biais, notation i, j, k ..., est un entier naturel. Une ramification, notation I, J, K, ... , est un ensemble fini de biais. Un répertoire est un ensemble quelconque de ramifications. Un locus, ou lieu, adresse, notation $\sigma, \tau, \nu, \xi, \ldots$ est une suite finie $< i_1, i_2, \ldots, i_n >$ de biais. La parité d'un locus est définie comme la parité de sa longueur n.

Réseaux d'adresses

- nous partirons de *proto-formules* comme guides
- réseaux d'adresses = dessins
- dessins $\approx$ preuves (simili-preuves? pré-preuves?)
- mais **pas que** des preuves... il y a aussi des preuves qui échouent!

Réseaux d'adresses

- nous partirons de *proto-formules* comme guides
- réseaux d'adresses = dessins
- dessins $\approx$ preuves (simili-preuves? pré-preuves?)
- mais **pas que** des preuves... il y a aussi des preuves qui échouent!

Polarisation des preuves

- Andréoli, 1992
- connecteurs réversibles, négatifs : $\wp$, &
- connecteurs non réversibles, positifs : $\otimes$ et $\oplus$
- forme normale: suite de pas alternativement positifs et négatifs
- chaque pas sert à l'introduction d'un connecteur synthétique
- vers une *logique hyperséquentialisée*

Fourches

Definition

Un objet $\Gamma \vdash \Theta$ où Γ est un locus et Θ une suite de loci, est appelé une fourche, positive si $\Gamma = \emptyset$, négative sinon

Règles

La règle positive est:

$$\frac{\ldots \quad \xi \star i \vdash \Lambda_i \quad \ldots}{\vdash \xi, \Lambda} (+, \xi, I)$$

- i parcourt I
- les Λ_i sont *deux à deux disjoints* et inclus dans Λ

(choix d'un foyer ξ, distribution de ce foyer sur I avec éclatement du contexte)

La règle négative est:

$$\frac{\ldots \quad \vdash \xi \star J, \Lambda_J \quad \ldots}{\xi \vdash \Lambda} (-, \xi, \mathcal{N})$$

- J parcourt $\mathcal{N}$
- les Λ_J sont inclus dans Λ

(reprise du foyer négativisé, distribution de tous les J du répertoire N)

Daïmon

pas d'axiome d'identité (puisque *exit* les formules!)
mais à la place:

$$\frac{}{\vdash \Lambda}\dagger$$

un *paralogisme*!
En particulier:

$$\frac{}{\vdash}\dagger$$

Dynamicité

pas de formulation explicite de la règle de coupure
mais à la place:
idée que la même adresse apparaisse dans deux dessins avec des polarités opposées
neutralisation des adresses opposées (Normalisation)

$$\dfrac{\begin{array}{c}\mathcal{D}\\ \vdots\\ \sigma \vdash \xi\end{array} \qquad \begin{array}{c}\mathcal{E}\\ \vdots\\ \xi \vdash \rho\end{array}}{} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{c}[[\mathcal{D},\mathcal{E}]]\\ \sigma \vdash \rho\end{array}$$

Interprétation dialogique

dessins $\longrightarrow$ desse *e* ins

Dessine-moi un dialogue

Annie : did you meet some friends yesterday evening to the party ?
Barbara : I only saw Bruno and Pierre.
Annie : Was Pierre still as nice as during the last year ?
Barbara : Yes, he did.
Annie : That is what I wanted to know.

Idée: esquisser non pas le dialogue en lui-même mais son support (comme un ensemble de lieux).
Quels *lieux* sont utilisés? où sont ancrées les interventions, les tours de parole?

Dessine-moi un dialogue

0.1.1.1.1	0.1.1.1.1
0.1.1.1	0.1.1.1
0.1.1 0.1.2	0.1.1 0.1.2
0.1	0.1
0	0

- des *lieux* pour représenter les supports des interventions successives

Dessine-moi un dialogue

$$
\begin{array}{c}
\vdash 0.1.1.1.1 \\
0.1.1.1 \vdash \\
\vdash 0.1.1, 0.1.2 \\
0.1 \vdash \\
\vdash 0
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{c}
0.1.1.1.1 \vdash \\
\vdash 0.1.1.1 \\
0.1.1 \vdash \qquad 0.1.2 \vdash \\
\vdash 0.1 \\
0 \vdash
\end{array}
$$

- un moyen de distinguer entre les lieux actifs et les lieux non actifs

Dessine-moi un dialogue

$$
\begin{array}{c}
\dfrac{}{\vdash 0.1.1.1.1}\dagger \\
0.1.1.1 \vdash \\
\vdash 0.1.1, 0.1.2 \\
0.1 \vdash \\
\vdash 0
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{c}
0.1.1.1.1 \vdash \\
\vdash 0.1.1.1 \\
0.1.1 \vdash \qquad 0.1.2 \vdash \\
\vdash 0.1 \\
0 \vdash
\end{array}
$$

- quelquechose qui signifie que l'échange se termine

Desseins et chroniques

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{}{\vdash 0.1.1.1.1}\dagger}{0.1.1.1 \vdash}}{\vdash 0.1.1, 0.1.2}}{0.1 \vdash}}{\vdash 0}$$

peut aussi être représenté par une suite alternée d'actions (une chronique)

$$(+, 0, \{1\})(-, 0.1, \{1, 2\})(+, 0.1.1, \{1\})(-, 0.1.1.1, \{1\})\dagger$$

Interprétation des règles

- **Règle positive** : produire une intervention
- **Règle négative** : enregistrer ou planifier l'intervention de l'interlocuteur
- **Daïmon** : mettre un terme à l'échange

Example

Soit $\mathcal{D}$ et $\mathcal{E}$ les deux dessins associés aux supports des interventions dans le dialogue précédent:

$$
\dfrac{
\begin{array}{c}
\dfrac{}{\vdash 0.1.1.1.1}\dagger \\
0.1.1.1 \vdash \\
\vdash 0.1.1, 0.1.2 \\
0.1 \vdash \\
\vdash 0
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c}
\begin{array}{cc}
\begin{array}{c}
\vdash 0.1.1.1.1 \\
\vdash 0.1.1.1 \\
0.1.1 \vdash
\end{array}
&
0.1.2 \vdash
\end{array} \\
\vdash 0.1 \\
0 \vdash
\end{array}
}{}
$$

Résultat: $\dfrac{}{\vdash}\dagger$

L'interaction **converge**. On écrit : $\mathcal{D} \perp \mathcal{E}$.

Desseins élémentaires

La "Bombe" de Girard:

$$\mathit{Bombe}^{+} = \frac{}{\vdash \xi}\ \emptyset$$

Si P joue ce dessein, O ne peut jouer que le $\mathcal{D}aimon$
c'est ce qui se produit si P avance dans la discussion un **fait** indéniable
O contraint d'avancer le $\mathcal{D}aimon \longrightarrow$ P a "gagné"

Sémantique interactionnelle

(1) *every linguist speaks an african language*
La "signification" de (1) peut être donnée par la possibilité d'un dialogue tel que le suivant:

1. celui qui soutient (1), que nous appellerons P, se déclare prêt à répondre à toute intervention concernant un individu *d*
2. un opposant O propose un individu *f* dont il prétend qu'il est linguiste et qu'il ne connaît aucune langue africaine
3. P propose une langue africaine e_f dont il prétend que *f* la parle
4. au même moment, O est prêt à recevoir ce genre d'affirmation
5. si O reconnaît la validité de l'affirmation de P, il peut accepter et mettre fin au dialogue

Continuation

Ce dialogue peut aussi se poursuivre plus avant:

6. P veut vérifier que f est bien un linguiste
7. O a la possibilité d'en faire la preuve (au moyen d'une base de données par exemple)
8. corrélativement, O veut vérifier que e_f est bien une langue africaine et que f la parle,
9. ce dont toujours P peut faire la preuve au moyen de *données*

Ce faisant, il utilise des *faits*, autrement dit des atomes assertables au moyen d'une connaissance extérieure.

Protoformules

$$S_1 : \quad \&_x(\uparrow L(x) \multimap \oplus_y (\uparrow A(y) \otimes \uparrow P(x, y)))$$

P	O
$\dfrac{\begin{matrix} \mathcal{D}_{d'} & \mathcal{D}_d & \mathcal{D}_{d''} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ & \vdash \downarrow L^{\perp}(d), \oplus_y(\uparrow A(y) \otimes \uparrow P(d, y))) & \end{matrix}}{(\&_x(\uparrow L(x) \multimap \oplus_y (\uparrow A(y) \otimes \uparrow P(x, y))))^{\perp} \vdash}$	$\dfrac{\downarrow L^{\perp}(f) \vdash \quad (\&_y \uparrow A(y) \multimap \downarrow P^{\perp}(f, y))}{\vdash \oplus_x(\uparrow L(x) \otimes \&_y(\uparrow A(y) \multimap \downarrow P^{\perp}(x, y}$
P prêt à donner ds justifications pour tout individu : d,d',...	*O* propose un individu f (affirmant que f est un linguiste et que f ne connaît aucune langue africaine)

suite

P	O
$$\frac{\downarrow A_{e_f} \vdash \quad \downarrow P_{f,e_f} \vdash}{\vdash \downarrow L^{\perp}(f), \oplus_y(\uparrow A_y \otimes \uparrow P_{f,y}))}$$	$$\frac{\begin{array}{cc} \vdots & \vdots \\ \vdash \downarrow A^{\perp}_{a'}, P^{\perp}_{f,a'} & \vdash \downarrow A^{\perp}_{a}, P^{\perp}_{f,a} \ldots \end{array}}{(\&_y \uparrow A_y \multimap \downarrow P^{\perp}_{f,y})^{\perp} \vdash}$$
P met en évidence une langue e_f (affirmant que e_f est une langue africaine et que f parle e_f)	au même moment,, O est prêt à recevoir une telle affrirmation de P, pour une certaine langue parmi a, a' . .

suite

P	O
$$\dfrac{\downarrow A_{e_f} \vdash \quad \downarrow P_{f,e_f} \vdash}{\vdash \oplus_y(\uparrow A_y \otimes \uparrow P_{f,y}))}$$	$$\dfrac{\dfrac{}{\vdash \downarrow A_{a'}^{\perp}, P_{f,a'}^{\perp}}\dagger \quad \dfrac{}{\vdash \downarrow A_{a}^{\perp}, P_{f,a}^{\perp}}\dagger \ \ldots}{(\&_y \uparrow A_y \multimap \downarrow P_{f,y}^{\perp})^{\perp} \vdash}$$
P donne une langue africaine a (ou a' ou …)	O est prêt à accepter

Le dialogue peut se poursuivre davantage:

P	O
$$\dfrac{\mathcal{D}_{d'} \quad \dfrac{\dfrac{\overset{\mathcal{D}_f}{\vdots}}{\vdash \oplus_y(\uparrow A_y \otimes \uparrow P_{f,y}))}}{\dfrac{L_f \vdash \oplus_y(\uparrow A_y \otimes \uparrow P_{f,y}))}{\vdash \downarrow L_f^{\perp}, \oplus_y(\uparrow A_y \otimes \uparrow P_{f,y}))}} \quad \mathcal{D}_d}{(\&_x(\uparrow L(x) \multimap \oplus_y (\uparrow A(y) \otimes \uparrow P(x,y))))^{\perp} \vdash}$$	$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\vdash L_f}\emptyset}{\downarrow L_f^{\perp} \vdash} \quad (\&_y \uparrow A_y \multimap \downarrow P_{f,y}^{\perp})^{\perp} \vdash}{\vdash \oplus_x(\uparrow L_x \otimes \&_y(\uparrow A_y \multimap \downarrow P_{x,y}^{\perp})}$$
P vérifie et accorde que *f* est un linguiste.	*O* peut assurer que *f* est un linguiste (en tant que d

Dessins

Point de vue de P:

$$\mathcal{D} = \cfrac{\cfrac{\begin{array}{c}\mathcal{D}_{d'}\\ \vdots\end{array} \quad \cfrac{\xi.0.3^d.7 \vdash \qquad \xi.0.3^d.5 \vdash}{\vdash \xi.0.2^d, \xi.0.3^d} \quad \begin{array}{c}\mathcal{D}_{d''}\\ \vdots\end{array}}{\xi.0 \vdash}}{\vdash \xi}$$

Contre-preuve du côté de O

$$\mathcal{E} = \cfrac{\cfrac{}{\xi.0.2^d \vdash}\emptyset \quad \cfrac{\cfrac{}{\vdash \xi.0.3^d.7}\dagger \quad \cfrac{}{\vdash \xi.0.3^d.5}\dagger}{\xi.0.3^d \vdash}}{\cfrac{\vdash \xi.0}{\xi \vdash}}$$

Interaction

L'interaction entre $\mathcal{D}$ et $\mathcal{E}$ (coïncidence des lieux de polarités opposées dans les deux dessins) conduit à une neutralisation desdits lieux et au dessin élémentaire:

$$\frac{}{\vdash}\dagger$$

Comportements

$$\mathcal{D} \perp \mathcal{E}$$

[[,]]: sorte de *produit scalaire* entre dessins qui apparaît lorsque nous les faisons interagir (on parle aussi de *normalisation* du réseau qu'ils forment).
Dans le cas d'orthogonalité, nous avons:

$$[[\mathcal{D}, \mathcal{E}]] = \frac{}{\vdash} \dagger$$

$\mathcal{E} \in \mathcal{D}^{\perp}$
$\mathcal{D} \in \mathcal{D}^{\perp\perp}$
mais ce dernier ensemble (le **bi-orthogonal** de $\mathcal{D}$) contient bien d'autres dessins : on dira qu'il est engendré par un dessin (ou un ensemble de dessins), ici $\mathcal{D}$.
On appelle **comportement** *engendré par* $\mathcal{D}$ l'ensemble $\mathcal{D}^{\perp\perp}$.

Tour de force de la ludique!

On peut retrouver tous les connecteurs de la logique linéaire comme des opérations sur les comportements!

Par exemple,

La forme logique associée à la phrase *S* dans sa lecture "scope large pour *every*" devient maintenant le comportement:

$$\mathbb{S}_1 = \&_x(\downarrow \mathbb{L}(x) \multimap \oplus_y (\downarrow \mathbb{A}(y) \otimes \downarrow \mathbb{P}(x, y)))$$

construit à partir des comportements $\mathbb{L}(x)$, $\mathbb{A}(y)$ et $\mathbb{P}(x, y)$!

NB: le comportement engendré par *Bombe*$^+$ ne contient que *Bombe*$^+$ ce comportement est l'élément neutre de $\otimes$: **1**

Un cadre sans atomes

- Pas d'atomes $\rightarrow$ pas d' **axiome logique d'identité!**
- à la place : un dessin spécial, appelé: $\mathcal{F}ax$
- un dessin récursivement défini

$$\cfrac{\cfrac{\begin{array}{c}\mathcal{F}ax_{\xi'_i,\xi_i}\\ \xi'.i \vdash \xi.i\end{array}}{\vdash \xi.I, \xi'}(\xi',I) \quad \dots \quad \cfrac{\begin{array}{c}\mathcal{F}ax_{\xi'_j,\xi_j}\\ \xi'.j \vdash \xi.j\end{array}}{\vdash \xi.J, \xi'}(\xi',J) \quad \dots}{\xi \vdash \xi'}(\xi,\mathcal{P}_f(\mathbb{N}))$$

- l'interaction de $\mathcal{F}ax_{\xi\sigma}$ avec $\mathcal{D}$ déplace le contenu de l'adresse ξ dans $\mathcal{D}$ vers l'adresse σ (**délocalisation**)

Exemple

A titre d'exemple, prenons pour $\mathcal{D}$ le dessin :

$$\dfrac{\dfrac{\mathcal{D}_1}{\xi \star 1 \vdash} \quad \dfrac{\mathcal{D}_2}{\xi \star 2 \vdash}}{\vdash \xi}$$

La normalisation a lieu en sélectionnant la "tranche" correspondant au sous ensemble $\{1, 2\}$ de sorte qu'une fois éliminée la première coupure, il reste :

$$\dfrac{\mathcal{D}_1}{\xi \star 1 \vdash} \qquad \dfrac{\mathcal{D}_2}{\xi \star 2 \vdash} \qquad \dfrac{\dfrac{\mathcal{F}ax}{\rho \star 1 \vdash \xi \star 1} \quad \dfrac{\mathcal{F}ax}{\rho \star 2 \vdash \xi \star 2}}{\vdash \xi \star 1, \xi \star 2, \rho}$$

Les deux dessins de gauche normalisent avec celui de droite, donnant finalement:

suite

$$\dfrac{\dfrac{\mathcal{D}'_1}{\rho \star 1 \vdash} \quad \dfrac{\mathcal{D}'_2}{\rho \star 2 \vdash}}{\vdash \rho}$$

où, dans $\mathcal{D}'_1$ and $\mathcal{D}'_2$, l'addresse ξ est systématiquement remplacée par ρ.

Speach Acts

Ceci peut être utilisé pour formaliser la notion d'acte de langage:

- dialogue question - réponse : la réponse peut être transférée en un lieu distingué, de sorte que par normalisation, il ne reste plus que le dessin correspondant à la réponse
- un acte de langage (ordonner, promettre, concéder, ...) peut se traduire en la délocalisation d'un ensemble d'énoncés d'un contexte vers un autre (P. Livet, S. Tronçon, M-R. Fleury)

petitio principii

La pertinence des *lieux* se révèle particulièrement dans l'étude des sophismes
ex : la pétition de principe

> *"smuggling the conclusion into the wording of the premises"*

- de fait, presque tous les systèmes de logique formelle admettent *PP*! (cf. axiome d'identité $A \vdash A$)
- le fait que la ludique n'ait pas cet axiome la rend apte à analyser *PP*

petitio principii

La pertinence des *lieux* se révèle particulièrement dans l'étude des sophismes
ex : la pétition de principe

> *"smuggling the conclusion into the wording of the premises"*

- de fait, presque tous les systèmes de logique formelle admettent *PP*! (cf. axiome d'identité $A \vdash A$)
- le fait que la ludique n'ait pas cet axiome la rend apte à analyser *PP*

petitio principii-2

petitio principii vient de ce que:

1. une assertion *s* est faite en un lieu ξ
2. et justifiée par s' en $\xi.1$
3. s' est supposée être justifiée par $\mathcal{D}_{\xi.1.1}$
4. mais il apparaît que ce dessin est la délocalisation d'un autre, qui est précisément celui qu'on est en train de construire en ξ

Pour résumer:

$$\mathcal{D}_{\vdash \xi} = [[\mathcal{D}'_{\vdash \sigma}, \mathcal{F}ax_{\sigma \vdash \xi}]]$$

and

$$\mathcal{D}'_{\vdash \sigma} = [[\mathcal{D}_{\vdash \xi}, \mathcal{F}ax_{\xi \vdash \sigma}]]$$

PP-3

Remarque : sans **délocalisation**, il n'y aurait **pas** de problème (!) seulement une répétition infinie!
cf. en Logique Linéaire: sans **exponentielless**, il n' y a pas de paradoxe du **Menteur**! (seulement une suite infinie alternée d'affirmations et négations)

Présupposition

B présuppose A

- B : Peter stopped smoking
- A : Peter was a smoker

$$\dfrac{\begin{array}{c}\mathcal{L}oc_1 : \\ \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\mathcal{D}}{B^\perp \vdash}}{\vdash A^\perp , B}\,W}{A \otimes B^\perp \vdash}}{\vdash {\color{red}A} \multimap B}\end{array} \qquad \begin{array}{c}\mathcal{L}oc_2 : \\ \dfrac{\dfrac{}{\vdash {\color{red}A} \qquad \vdash B^\perp}}{{\color{red}A} \multimap B \vdash}\end{array}}{}$$

En utilisant $\mathcal{D}$ (qui comporte une instance de *weakening*), $\mathcal{L}oc_1$ prive $\mathcal{L}oc_2$ de son droit à jouer en A

Presupposition et assertion : une symétrie

ceci est un autre jeu: $\mathcal{L}oc_2$ joue d'abord:

$$\dfrac{\dfrac{B \vdash}{\vdash {\color{red}A} \wp B} \qquad \dfrac{\dfrac{}{\vdash {\color{red}A}}\emptyset \qquad \vdash B}{{\color{red}A} \wp B \vdash}}{}$$

En jouant la Bombe, $\mathcal{L}oc_2$ prive $\mathcal{L}oc_1$ de son droit de jouer sur A et l'oblige à jouer le $\mathcal{D}aimon$ (concéder A)

Conclusion

Un système sans identité des formules (donc où la relation de déduction n'est pas réflexive)

- met en valeurs les adresses où sont localisées les formules
- remplace l'axiome d'identité par une procédure de transfert d'une adresse à une autre (normalisation par $\mathcal{F}ax$
- permet de rendre compte
  - de dialogues
  - du sens interactionnel des énoncés
  - de l'origine des sophismes
- d'une façon générale, on peut distinguer :
  - un sens localisé attaché aux énonciations concrètes
  - un sens délocalisé, invariant dans les déplacements par $\mathcal{F}ax$