

AÉRONAUTIQUE / ESPACE

DÉFENSE

SÉCURITÉ

Analyse Factorielle Relationnelle: Calcul des Inerties Interclasses et du nombre de classes latentes.

J.F. Marcotorchino

Directeur Scientifique Thales Land&Joint Systems & Directeur de Recherche LSTA Paris VI

Présentation Succincte du Codage Relationnel

A	1
B	1
C	1
D	2
E	2
F	3

Codage Linéaire (Nx1)

	M1	M2	M3
A	1	0	0
B	1	0	0
C	1	0	0
D	0	1	0
E	0	1	0
F	0	0	1

Codage Disjonctif (NxP)

	A	B	C	D	E	F
A	1	1	1	0	0	0
B	1	1	1	0	0	0
C	1	1	1	0	0	0
D	0	0	0	1	1	0
E	0	0	0	1	1	0
F	0	0	0	0	0	1

Codage Relationnel (NxN)



	A	B	C	D	E	F
A	1	1	1	0	0	0
B	1	1	1	0	0	0
C	1	1	1	1	0	0
D	0	0	0	1	1	0
E	1	0	0	1	1	0
F	0	0	0	0	0	0

Boucles de préférences incohérentes

A > B > C > D > E > A

	A	B	C	D	E	F
A	1	1	1	0	0	0
B	1	1	1	0	0	0
C	1	1	1	1	1	0
D	0	0	1	1	1	0
E	0	0	1	1	1	1
F	0	0	0	0	0	1

Appartenances multiples
 « C » appartient à la classe de « A,B » et à celle de « D »
Similarités non symétriques

Représentations duales dans le cas le plus simple

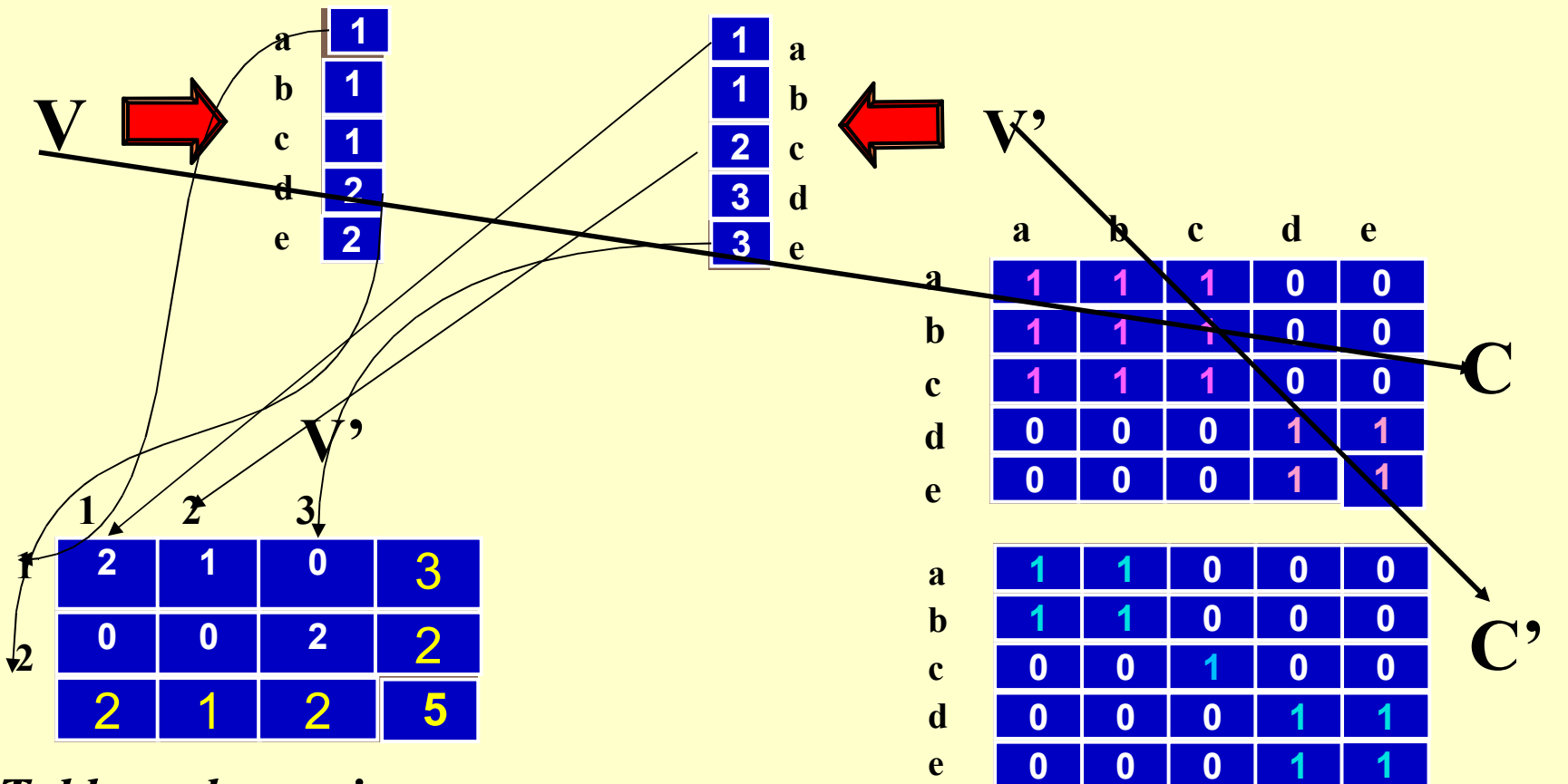
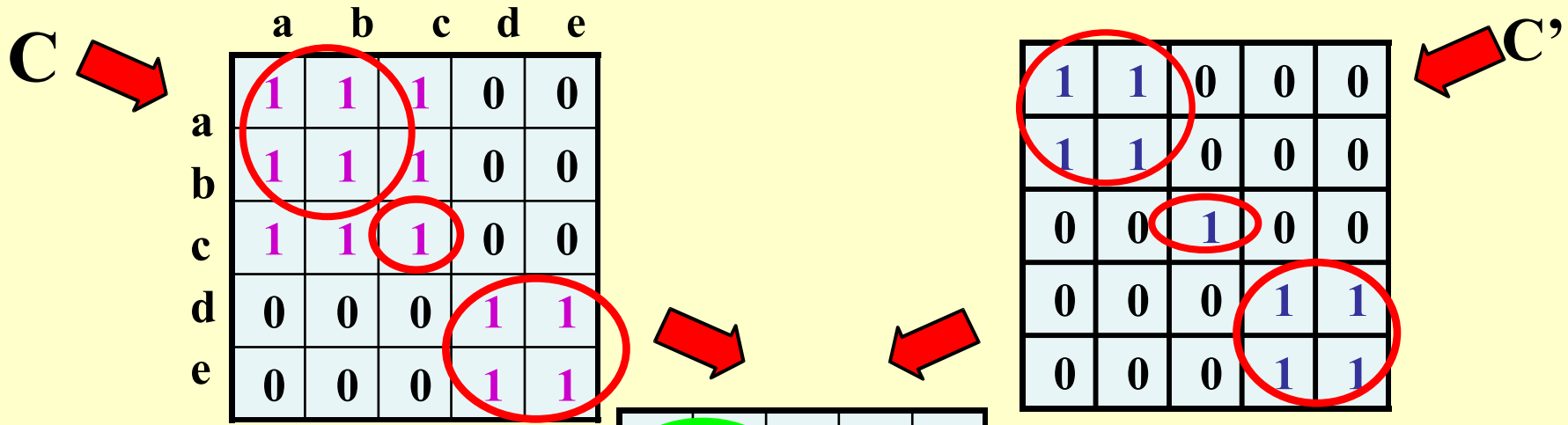


Tableau de contingence croisée entre V et V'

Codage Relationnel de V et V'

Une formule de Transfert Fondamentale



Fusion de tableaux
(intersection=produit terme à terme)

(Relational Trick)

$$\sum_{u,v} n_{uv}^2 = \sum_{ij} C_{ij} C'_{ij}$$

Table V':

	1	2	3	
V ₁	2	1	0	3
V ₂	0	0	2	2
	2	1	2	5

Formule Multiplicative de Transfert Pondéré



$$\hat{C} \left\{ \hat{C}_{ij} = \frac{C_{ij}}{C_i} \right\}$$

$$\hat{C}' \left\{ \hat{C}'_{ij} = \frac{C'_{ij}}{C'_i} \right\}$$

C

	a	b	c	d
a	1	1	0	0
b	1	1	0	0
c	0	0	1	1
d	0	0	1	1

1/2	1/2	0	0
1/2	1/2	0	0
0	0	1/2	1/2
0	0	1/2	1/2

1/2	1/2	0	0
1/2	1/2	0	0
0	0	1	0
0	0	0	1

1/4	1/4	0	0
1/4	1/4	0	0
0	0	1/2	0
0	0	0	1/2

C'

1	1	0	0
1	1	0	0
0	0	1	0
0	0	0	1

$$\Phi^2(V, V') + 1 = \sum_{u=1}^p \sum_{v=1}^q \frac{n_{uv}^2}{n_u \cdot n_v} = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \frac{C_{ij}}{C_i} \frac{C'_{ij}}{C'_j} = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \hat{C}_{ij} \hat{C}'_{ij}$$

V'

1	2	3	
2	1	0	3
0	0	2	2
2	1	2	5

$\frac{1}{2}V$

$$(4/6 + 1/3 + 4/4) = (1/4 + 1/4 + 1/4 + 1/4 + 1/2 + 1/2) = 2$$

Formule Additive Relationnelle Pondérée



C

	a	b	c	d
a	1	1	0	0
b	1	1	0	0
c	0	0	1	1
d	0	0	1	1

C'

1	1	0	0
1	1	0	0
0	0	1	0
0	0	0	1

$\hat{C} + \hat{C}'$

1	1	0	0
1	1	0	0
0	0	3/2	1/2
0	0	1/2	3/2

$$\hat{C}_{ii'}^k = \frac{C_{ii'}^k}{C_i^k} = \sum_{j=1}^{P_k} \frac{k_{ij} k_{i'j}}{k_j}$$

Tableaux disjonctifs associés

1	0	1	0	0
1	0	1	0	0
0	1	0	1	0
0	1	0	0	1

$$\hat{C}_{33} = \frac{C_{33}}{C_3} + \frac{C'_{33}}{C'_3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{1} = \frac{3}{2} = \sum_{k=1}^5 \frac{k_{3j} k_{3j}}{k_j} = 0 + \frac{1}{2} + 0 + 1 + 0$$

$$\hat{C}_{ii'} = \sum_{k=1}^m \hat{C}_{ii'}^k = \sum_{k=1}^m \frac{C_{ii'}^k}{C_i^k} = \sum_{k=1}^m \sum_{j=1}^{P_k} \frac{k_{ij} k_{i'j}}{k_j}$$

Tableaux disjonctifs associés

Quelques Formules de Base(1)



$$\begin{array}{c} C^1 \\ \begin{array}{c|c|c|c} a & b & c & d \\ \hline 1 & 1 & 0 & 0 \\ \hline b & 1 & 1 & 0 & 0 \\ \hline c & 0 & 0 & 1 & 1 \\ \hline d & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \\ + \\ \begin{array}{c|c|c|c} C^2 \\ \hline 1 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \\ + \\ \begin{array}{c|c|c|c} C^3 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \\ + \dots = C = \begin{array}{c|c|c|c} 3 & 3 & 1 & 0 \\ \hline 3 & 3 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 3 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}
 \end{array}$$

$$\mathbf{K} = \begin{array}{c|c|c|c|c|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ \hline K1 & \cup & K2 & \cup & K3 & & \end{array}$$

Tableaux disjonctifs associés

Matrice de

« Condorcet »

$$\mathbf{C} = \mathbf{K} \mathbf{K}^t \rightarrow C_{ii'} = \sum_{k=1}^m C_{ii'}^k = \sum_{j=1}^P k_{ij} k_{i'j}$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{K}^t \mathbf{K} \rightarrow B_{jj'} = \sum_{i=1}^N b_{jj'}^i = \sum_{i=1}^N k_{ij} k_{i'j}$$

Matrice de

« Burt »

Quelques Formules de Base(2)



$$\hat{C}_1 + \hat{C}_2 + \hat{C}_3 + \dots = \hat{C}$$

a	b	c	d
1/2	1/2	0	0
1/2	1/2	0	0
0	0	1/2	1/2
0	0	1/2	1/2

1/2	1/2	0	0
1/2	1/2	0	0
0	0	1	0
0	0	0	1

1/3	1/3	1/3	0
1/3	1/3	1/3	0
1/3	1/3	1/3	0
0	0	0	1

4/3	4/3	1/3	0
4/3	4/3	1/3	0
1/3	1/3	11/6	1/2
0	0	1/2	5/2

$$\hat{K} =$$

1/√6	0
1/√6	0
0	1/√6
0	1/√6

1/√6	0	0
1/√6	0	0
0	1/√3	0
0	0	1/√3

1/3	0
1/3	0
1/3	0
0	1/√3

$\hat{K}^1 \quad \hat{K}^2 \quad \hat{K}^3$

Matrice de

« Condorcet Pondéré »

$$\hat{C} = m \hat{K} \hat{K}^t \rightarrow \hat{C}_{ii'} = \sum_{j=1}^P \frac{k_{ij} k_{ij'}}{k_j} = m \sum_{j=1}^P \frac{k_{ij}}{\sqrt{k_i} \sqrt{k_j}} \frac{k_{i'j}}{\sqrt{k_{i'}} \sqrt{k_j}}$$

Tableaux disjonctifs pondérés associés

$$\hat{k}_{ij} = \frac{k_{ij}}{\sqrt{k_i} \sqrt{k_j}}$$

$$\hat{b}_{jj'} = \sum_{i=1}^N \frac{k_{ij} k_{ij'}}{k_i}$$

Quelques Formules de Base(3)



En Analyse Factorielle des Correspondances on utilise comme métrique la distance du χ^2 donnée par:

$$d_{\chi^2}(i,i') = \sum_{j=1}^P \frac{n}{n_j} \left[\frac{n_{ij}}{n_{i.}} - \frac{n_{i'j}}{n_{i'.}} \right]^2$$

Dans le cas de l'AFCM (Analyse des Correspondances Multiples), cette même Distance s'écrit:

$$d_{\chi^2}(i,i') = \sum_{j=1}^P \frac{Nm}{k_j} \left[\frac{k_{ij}}{k_{i.}} - \frac{k_{i'j}}{k_{i'.}} \right]^2 = \frac{N}{m} \left[\hat{C}_{ii} + \hat{C}_{i'i'} - 2\hat{C}_{ii'} \right] = 2 \frac{N}{m} \bar{\hat{C}}_{ii'}$$

Avec: $\bar{\hat{C}}_{ii'} = \frac{\hat{C}_{ii} + \hat{C}_{i'i'}}{2} - \hat{C}_{ii'}$

Rappelons que dans le cas non pondéré: on a le tableau Dual de Condorcet :

$$\bar{C}_{ii'} = \frac{C_{ii} + C_{i'i'}}{2} - C_{ii'} = \frac{m+m}{2} - C_{ii'} = m - C_{ii'}$$

Quelques Formules de Base(4)



Supposons maintenant que nous disposons de deux matrices relationnelles C et X
Alors nous définissons la relation X (par exemple) en posant:

$$\begin{cases} X_{ii'} = 1 & \text{si } i \text{ et } i' \text{ sont semblables (c'est à dire ont la même valeur)} \\ X_{ii'} = 0 & \text{dans le cas contraire} \end{cases}$$

C'est également un indice de similarité brut qu'on qualifera de « logique »
Dans le cas d'une variable relationnelle pondérée on a :

$$\begin{cases} \hat{X}_{ii'} = \frac{X_{ii'}}{X_i} = \frac{1}{\text{Nb d'objets semblables à } i} & \text{si } i \text{ et } i' \text{ sont semblables} \\ \hat{X}_{ii'} = \frac{X_{ii'}}{X_i} = 0 & \text{dans le cas contraire} \end{cases}$$

Sous cette forme on voit que la présentation relationnelle « pondérée » transforme
Tout terme général d'une relation en un indice de similarité de « présence rareté »

$$\Phi^2(C, X) + 1 = \sum_{u=1}^p \sum_{v=1}^q \frac{n_{uv}^2}{n_u \cdot n_v} = \sum_{i=1}^N \sum_{i'=1}^N \frac{C_{ii'}}{C_i} \frac{X_{ii'}}{X_i} = \sum_{i=1}^N \sum_{i'=1}^N \hat{C}_{ii'} \hat{X}_{ii'}$$

Le ϕ^2 entre deux variables n'est rien d'autre que le produit de deux indices de similarité de présence rareté

Quelques Formules de Base(5)



Calculons alors la distance entre deux profils similaritaires de « présence rareté » à partir des deux matrices relationnelles C et X, alors nous définissons la « distance de profils » entre C et X comme la quantité:

$$d_{DP}^2(i, i') = \sum_{i=1}^N \sum_{i'=1}^N \left[\frac{C_{ii'}}{C_{i.}} - \frac{X_{ii'}}{X_{i'.}} \right]^2$$

Comme:

$$p = \sum_{i=1}^N \sum_{i'=1}^N \frac{C_{ii'}}{C_{i.}^2} = \text{Nombre de classes de C}$$

$$\kappa = \sum_{i=1}^N \sum_{i'=1}^N \frac{X_{ii'}}{X_{i'.}^2} = \text{Nombre de classes de X}$$

Il vient:

$$d_{DP}^2(i, i') = p + \kappa - 2[\Phi^2(C, X) + 1]$$

Question comment calculer la « distance de profils » minimale entre une relation X Inconnue et « m » variables C^k ? Réponse: il faut calculer la quantité:

$$\Psi(X) = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m \sum_{i=1}^N \sum_{i'=1}^N \left[\frac{C_{ii'}^k}{C_{i.}^k} - \frac{X_{ii'}}{X_{i'.}} \right]^2$$

Quelques Formules de Base(6)



Développons la formule précédente en se servant de l'expression simplifiée de d_{DP}^2 ,
Nous obtenons la formule suivante:

$$\Psi(X) = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m \sum_{i=1}^N \sum_{i'=1}^N \left[\frac{C_{ii'}^k}{C_i^k} - \frac{X_{ii'}}{X_i} \right]^2$$

Comme:

$$p^k = \sum_{i=1}^N \sum_{i'=1}^N \frac{C_{ii'}^k}{C_i^k} = \text{Nombre de classes de } C^k$$

Il vient:

$$\Psi(X) = \frac{\sum_{k=1}^m p^k}{m} + \kappa - 2 \sum_{i=1}^N \sum_{i'=1}^N \left[\frac{\hat{C}_{ii'} X_{ii'}}{m X_i} \right]$$

Il existe cependant une formule fondamentale en Analyse Factorielle Relationnelle
qui Donne le résultat suivant:

$$I_B(X) = \sum_{i=1}^N \sum_{i'=1}^N \left[\frac{\hat{C}_{ii'} X_{ii'}}{m X_i} \right] - 1$$

Où $I_B(X)$ représente l'Inertie « between » des classes de la partition
inconnue X, Selon les principes émis par IC. Lerman (1979)

Quelques Formules de Base(7)



Développons la formule précédente en se servant de l'expression simplifiée de d_{DP}^2 .
Nous obtenons la formule suivante:

$$\Psi(X) = \frac{\sum_{k=1}^m p^k}{m} + \kappa - 2 \sum_{i=1}^N \sum_{i'=1}^N \left[\frac{\hat{C}_{ii'}}{m} \frac{X_{ii'}}{X_i} \right]$$

Comme: $P = \sum_{k=1}^m p^k$ et comme $\frac{P}{m} - 1 = I_T$ (Inertie Totale du Nuage de points)

Il vient:

$$\Psi(X) = \frac{P}{m} - 1 - 2 I_B(X) + \kappa - 1 = I_T - 2 I_B(X) + \kappa - 1$$

La minimisation de cette fonction $\Psi(X)$ ne donne pas une solution triviale car elle fait intervenir le nombre de classes de X , à savoir la quantité κ .

La solution triviale où tous les individus sont isolés donne: $\kappa=N$, alors $I_B = I_T$ d'où

$$\Psi(X) = I_T - 2I_T + N - 1 = N - P/m$$

La solution où tous les individus sont regroupés ensemble donne : $\kappa=1$ alors $I_B=0$

$$\Psi(X) = I_T - 0 + 1 - 1 = P/m$$

Trois Critères Fondamentaux



Les trois critères (parmi d'autres) qui sont fondamentaux en Analyse Relationnelle sont les suivants:

2. Critère de « Condorcet »

$$\text{Max}_X : C(X) = \sum_{i=1}^N \sum_{i'=1}^N [C_{ii'} X_{ii'} + \bar{C}_{ii'} \bar{X}_{ii'}] = \sum_{i=1}^N \sum_{i'=1}^N [C_{ii'} - \bar{C}_{ii'}] X_{ii'} + \text{Cste}$$

$$\text{Avec: } X_{ii'} \in \{0, 1\}$$

$$X_{ii} = 1 \text{ (Réflexivité)}$$

$$X_{ii'} - X_{i'i} = 0 \text{ (Symétrie)}$$

$$X_{ii'} + X_{i'i''} - X_{ii''} \leq 1 \text{ (Transitivité)}$$

**PAS de FIXATION
du Nombre de classes**

10. Critère de Condorcet « Pondéré »

$$\text{Max}_X : \hat{C}(X) = \sum_{i=1}^N \sum_{i'=1}^N [\hat{C}_{ii'} X_{ii'} + \bar{\hat{C}}_{ii'} \bar{X}_{ii'}] = \sum_{i=1}^N \sum_{i'=1}^N [\hat{C}_{ii'} - \bar{\hat{C}}_{ii'}] X_{ii'} + \text{Cste}$$

3. Critère de la « Différence Inertielle »

$$\text{Max}_X : \hat{C}(X) = \sum_{i=1}^N \sum_{i'=1}^N [\hat{C}_{ii'} \hat{X}_{ii'} + \bar{\hat{C}}_{ii'} \bar{\hat{X}}_{ii'}] = \sum_{i=1}^N \sum_{i'=1}^N [\hat{C}_{ii'} - \bar{\hat{C}}_{ii'}] \hat{X}_{ii'} + \text{Cste}$$

$$\text{Avec: } \text{Max}[I_B(X) - I_W(X)] = \sum_{i=1}^N \sum_{i'=1}^N \frac{1}{m} [\hat{C}_{ii'} - \bar{\hat{C}}_{ii'}] \frac{X_{ii'} - 1}{X_i}$$



Relation entre Critère de la Différence Inertielle et Critère de la Différence de profils

On peut montrer que : $\frac{1}{m} \sum_{k=1}^m \|\hat{C}^k - \hat{X}\|^2 = (\kappa - 1) - [I_B(X) - I_W(X)]$

$$\Psi(X) = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m \sum_{i=1}^N \sum_{i'=1}^N \left[\frac{C_{ii'}^k}{C_{i.}^k} - \frac{X_{ii'}}{X_{i.}} \right]^2 = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m \|\hat{C}^k - \hat{X}\|^2$$

D'où:

$$\Psi(X) = (\kappa - 1) - [I_B(X) - I_W(X)] \quad \text{Or}$$

$$\Psi(X) = I_T - 2I_B(X) + \kappa - 1 = \frac{P}{m} - 1 - 2I_B(X) + \kappa - 1$$

Ce qui implique:

$$I_W(X) = \frac{P}{m} - 1 - I_B(X) = \sum_{i=1}^N \sum_{i'=1}^N \frac{\bar{C}_{ii'}}{m} \frac{X_{ii'}}{X_{i.}}$$

Le critère de la Différence Inertielle est un critère qui donne une solution

Triviale où tous les objets sont isolés $\rightarrow X_{ii'} = 0 \forall (i \neq i')$ et $X_{ii} = 1 \forall i$ et $\kappa = N$

D'où solution: Résoudre le Problème de Condorcet Pondéré $\rightarrow X^{opt}$ non trivial

avec un κ^{opt} non trivial et $\neq N$, puis remplacer κ par κ^{opt} dans le problème

de Maximisation de la Différence Inertielle (type k-means)

Généralisation de la « Différence de Profils »(1)

Puisque nous avons montré que résoudre le Pb de la Différence Inertielle revenait à résoudre le Problème de Condorcet Pondéré. Question pouvons nous « **serrer** » encore l'écart entre chaque C^k pondéré et la partition inconnue X dans son expression de profil? **REPONSE OUI: PAR LES MOINDRES CARRÉS**

Posons:

$$F_{a,b}(X) = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m \left\| \hat{C}^k - [a\hat{X} + b] \right\|^2 = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m \sum_{i=1}^N \sum_{i'=1}^N \left(\frac{C_{ii'}^k}{C_i^k} - \left[a \frac{X_{ii'}}{X_i} + b \right] \right)^2$$

On sait alors que : $\text{Min}_{a,b} F_{a,b}(X) \leq F_{1,0}(X) = \Psi(X)$

Si nous développons l'expression précédente de $F_{a,b}(X)$, elle se simplifie

drastiquement en: $\text{Min}_{a,b} F_{a,b}(X) = \frac{P}{m} - 2a[I_B(X)+1] - 2bN + a^2\kappa(X) + 2abN + b^2N^2$

L'Optimum de cette fonctionnelle est obtenu pour a^* et b^* tels que:

$$\frac{\partial F_{a,b}(X)}{\partial a} = -2[I_B(X)+1] + 2a\kappa(X) + 2bN = 0$$
$$\frac{\partial F_{a,b}(X)}{\partial b} = -2N + 2aN + 2bN^2 = 0$$

Généralisation de la « Différence de Profils »(2)

La solution est donnée par: $b^* = \frac{1-a}{N}$ et $a^* = \frac{I_B(X)}{\kappa(X)-1}$

En remplaçant ces valeurs dans la fonctionnelle: $F_{a^*,b^*}(X)$, il vient, après de nombreuses simplifications :

$$F_{a^*,b^*}(X) = I_T - \frac{[I_B(X)]^2}{\kappa(X)-1}$$

On veut maintenant minimiser cette fonction par rapport à X , il vient :

$$\text{Min}_X F_{a^*,b^*}(X) = \text{Min}_X \left[I_T - \frac{[I_B(X)]^2}{\kappa(X)-1} \right] \Leftrightarrow \text{Max}_X \frac{[I_B(X)]^2}{\kappa(X)-1}$$

Application de la borne Spectrale de Hoffman –Wielandt

Pour 2 matrices Symétriques, on a l'inégalité suivante, où les valeurs propres des matrices A et B sont rangées en ordre décroissant (notations de Bhatia)

$$\|A - B\|^2 \geq \sum_{u=1}^N (\lambda_u^\downarrow - \mu_u^\downarrow)^2$$

Généralisation de la « Différence de Profils »(3))

Appliquons la borne Spectrale de Hoffman –Wielandt aux matrices: $\frac{\hat{C}}{\hat{m}}$ et \hat{X}

Il vient:

$$\left\| \frac{\hat{C}}{\hat{m}} - \hat{X} \right\|^2 \geq \sum_{u=1}^N (\lambda_u^\downarrow - \mu_u^\downarrow)^2$$

Or les λ_u sont les valeurs propres de « l'Analyse Factorielle » de la matrice des données, et les μ_u valent 1 (en nombre égal à $\kappa(X)$), puisque la matrice X pondérée est « bi-stochastique ».

$$\left\| \frac{\hat{C}}{\hat{m}} - \hat{X} \right\|^2 \geq \sum_{u=1}^{\kappa} (\lambda_u^\downarrow - 1)^2 + \sum_{u=\kappa+1}^N \lambda_u^2$$

En développant les deux côtés de l'inégalité il vient:

$$\sum_{u=1}^{\kappa-2} \lambda_u \leq I_B(X) \leq \sum_{u=1}^{\kappa-1} \lambda_u$$

Vers la Définition d'un indicateur du nombre de classes latentes pour la « Différence Inertielle »

élevons au carré l'inégalité précédente et divisons la par $(\kappa-1)$, il vient:

$$\frac{\left(\sum_{u=1}^{\kappa-2} \lambda_u\right)^2}{\kappa-1} \leq \frac{[I_B(X)]^2}{\kappa-1} \leq \frac{\left(\sum_{u=1}^{\kappa-1} \lambda_u\right)^2}{\kappa-1}$$

De ce fait on a :

$$F_{a^*,b^*}(X) = I_T - \frac{[I_B(X)]^2}{\kappa(X)-1} \geq I_T - \frac{\left(\sum_{u=1}^{\kappa-1} \lambda_u\right)^2}{\kappa-1}$$

Calculons alors:

$$\Omega(\kappa) = \frac{\left(\sum_{u=1}^{\kappa-1} \lambda_u\right)^2}{\kappa-1}$$

Cette quantité, l'Indice de Classes Latentes, passe par un maximum par rapport à κ

Indicateur du Nombre de classes latentes = $\left\{ \kappa^* \mid \underset{\kappa}{\text{Max}} \Omega(\kappa) \text{ est atteint} \right\}$

EXEMPLE

(Canidés, Saporta)

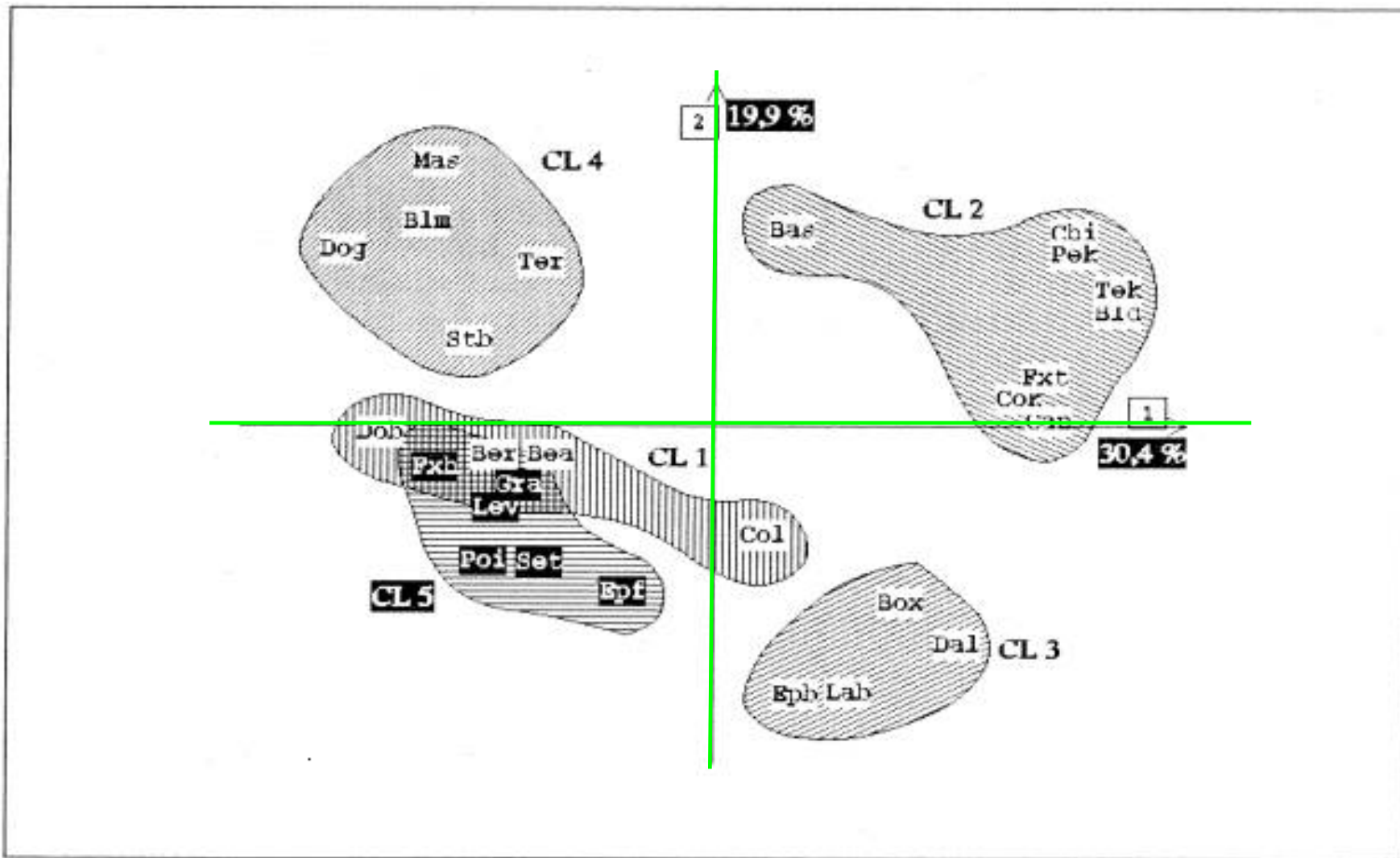


Figure 1. . Les classes de P^* sont entourées sur le premier plan factoriel

Ici $N=27$, $M=7$, $P=19$, $I_B(4) = 1,0531$

$$\frac{[I_B(X)]^2}{\kappa-1} = 0,3696$$

EXEMPLE (Canidés suite)



Liste des Valeurs Propres de la Matrice $\frac{\hat{C}}{m}$

$$\lambda_1 = 0,5208 \quad \Omega(2) = \frac{(0,5208)^2}{1} = 0,2712$$

$$\lambda_2 = 0,3428 \quad \Omega(3) = \frac{(0,8636)^2}{2} = 0,3729$$

$$\lambda_3 = 0,2268 \quad \Omega(4) = \frac{(1,0904)^2}{3} = 0,3963$$

$$\lambda_4 = 0,1638 \quad \Omega(5) = \frac{(1,2542)^2}{4} = 0,3952$$

$$\lambda_5 = 0,1309$$
$$\lambda_6 = 0,1122 \quad \Omega(6) = \frac{(1,3851)^2}{5} = 0,3837$$

Les deux solutions possibles au millièème près

EXEMPLE (Canidés suite)



Liste des Valeurs Propres de la Matrice

$$\Omega(2) = \frac{(0,5208)^2}{1} = 0,2712$$

$$\Omega(3) = \frac{(0,8636)^2}{2} = 0,3729$$

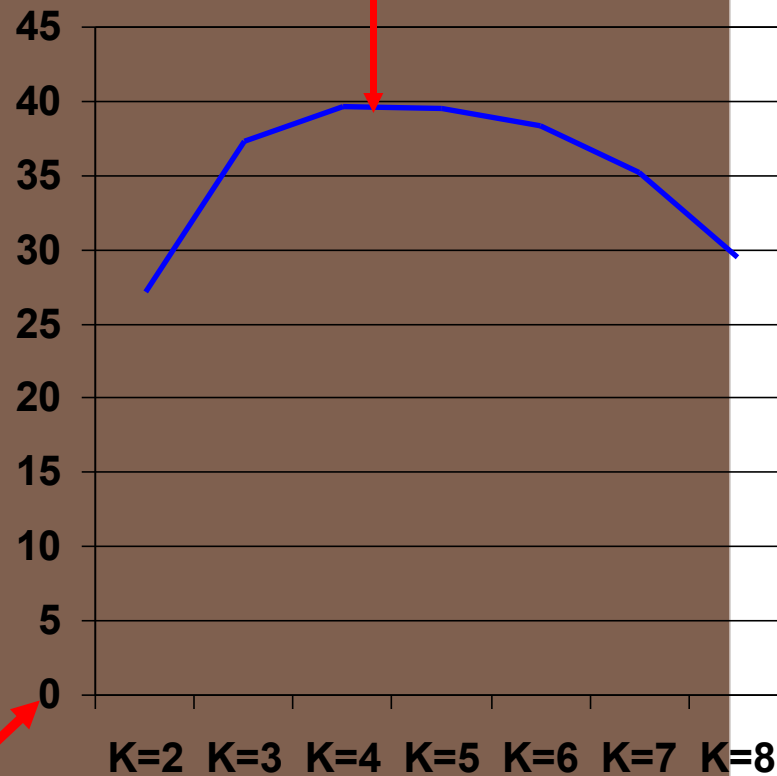
$$\Omega(4) = \frac{(1,0904)^2}{3} = 0,3963$$

$$\Omega(5) = \frac{(1,2542)^2}{4} = 0,3952$$

$$\Omega(6) = \frac{(1,3851)^2}{5} = 0,3837$$

\hat{c}
m

Valeurs maximales de $\Omega(\kappa)$



Graphe du Ratio Indicateur 10xΩ(k)