

Fonction à 2 points des constellations

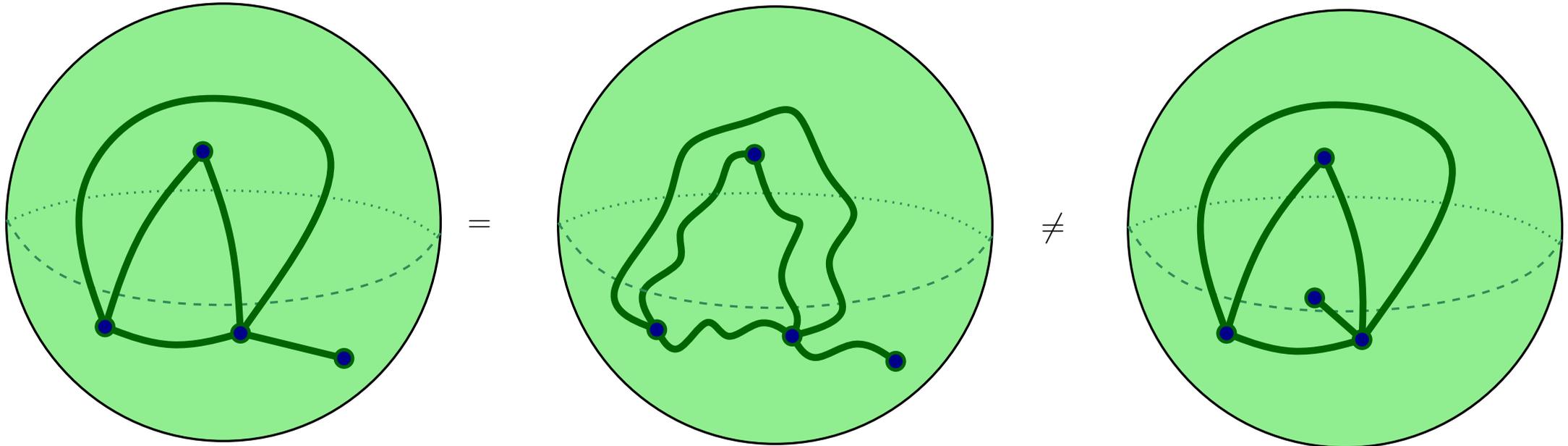
Marie Albenque (LIX)

Travail commun avec Jérémie Bouttier (CEA)

Alea, 7 Mars 2012

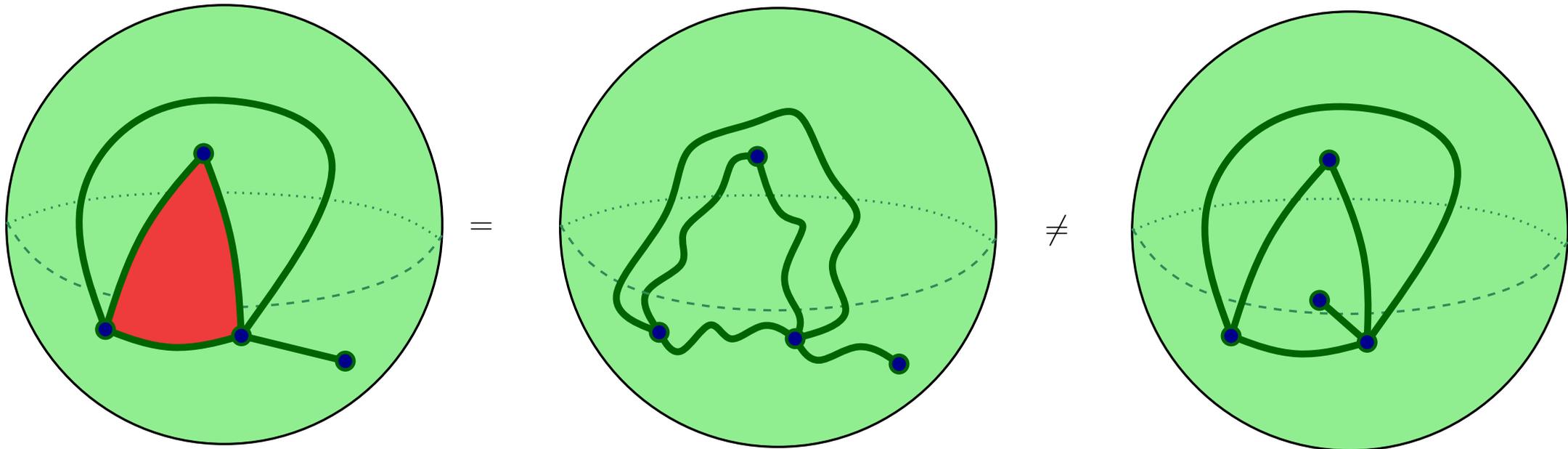
Cartes planaires.

Une **Carte planaire** est un graphe connecté plongé dans la sphère considérée à déformations continues près.



Cartes planaires.

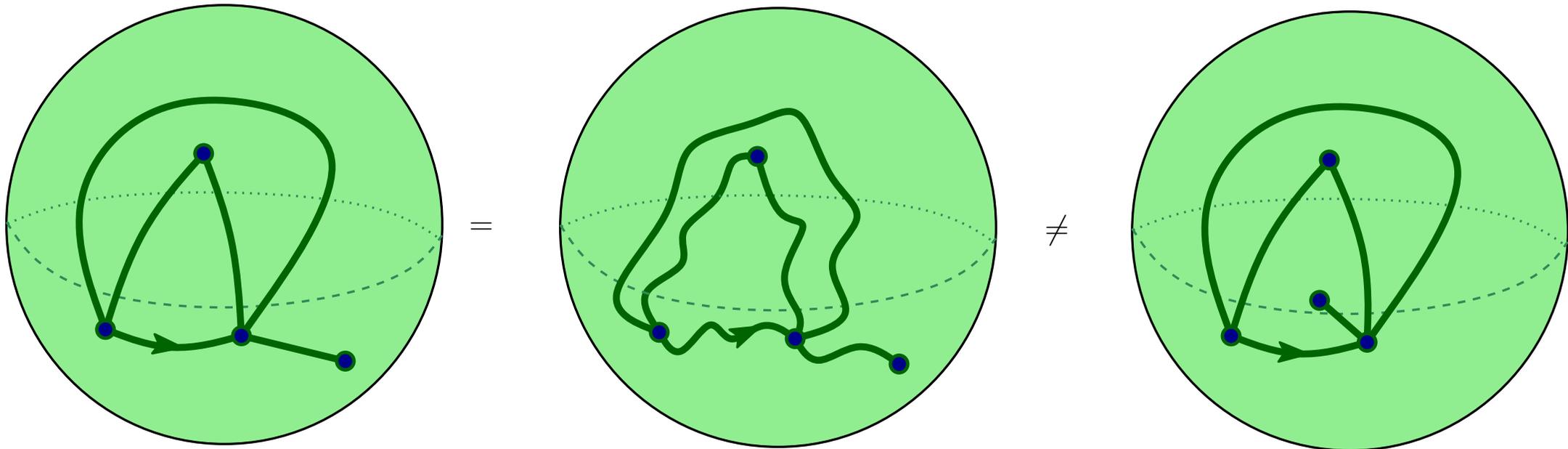
Une **Carte planaire** est un graphe connecté plongé dans la sphère considérée à déformations continues près.



Faces = composantes connexes de la sphère privée des arêtes.

Cartes planaires.

Une **Carte planaire** est un graphe connecté plongé dans la sphère considérée à déformations continues près.

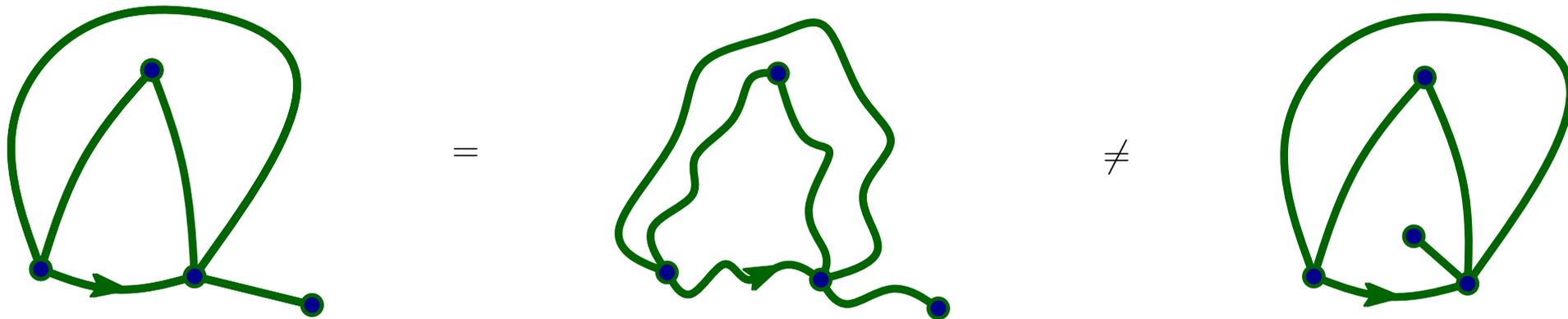


Faces = composantes connexes de la sphère privée des arêtes.

Les cartes sont **enracinées**.

Cartes planaires.

Une **Carte planaire** est un graphe connecté plongé dans la sphère considérée à déformations continues près.



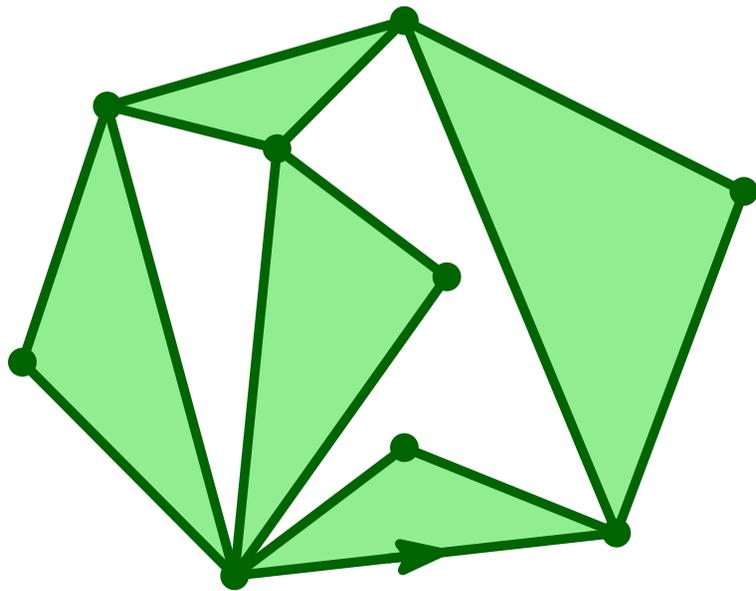
Faces = composantes connexes de la sphère privée des arêtes.

Les cartes sont **enracinées**.

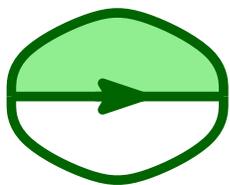
Constellations

Une p -constellation est une carte planaire telle que :

- les faces sont bicoloriées en noir et blanc
- les faces noires sont de degré p .
- les faces blanches sont de degré multiple de p .



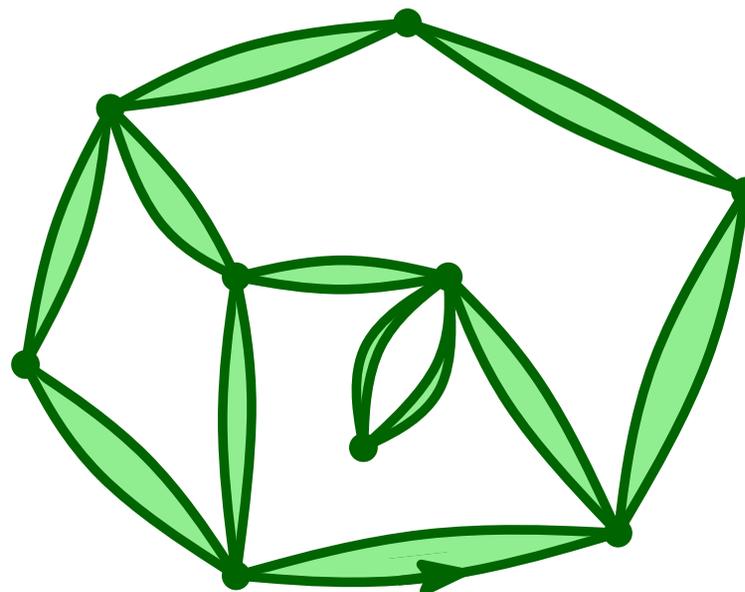
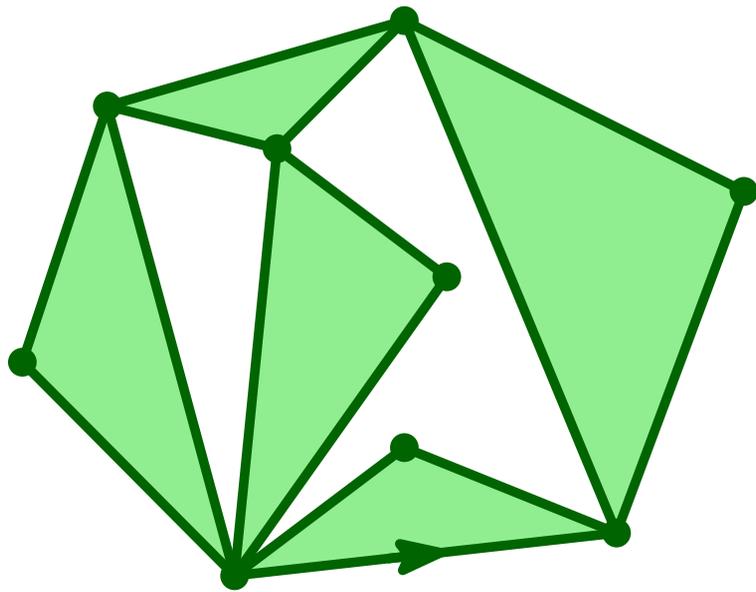
Convention :



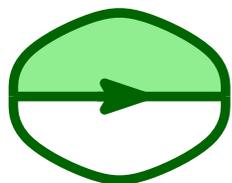
Constellations

Une p -constellation est une carte planaire telle que :

- les faces sont bicoloriées en noir et blanc
- les faces noires sont de degré p .
- les faces blanches sont de degré multiple de p .



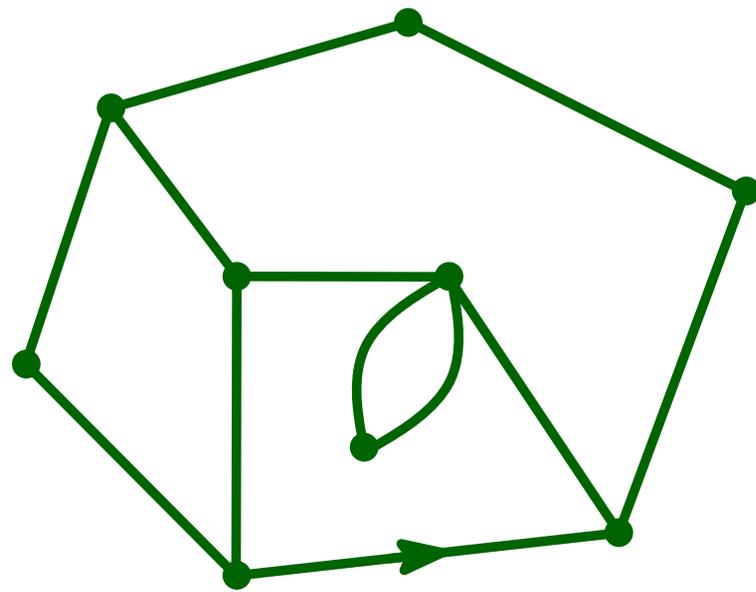
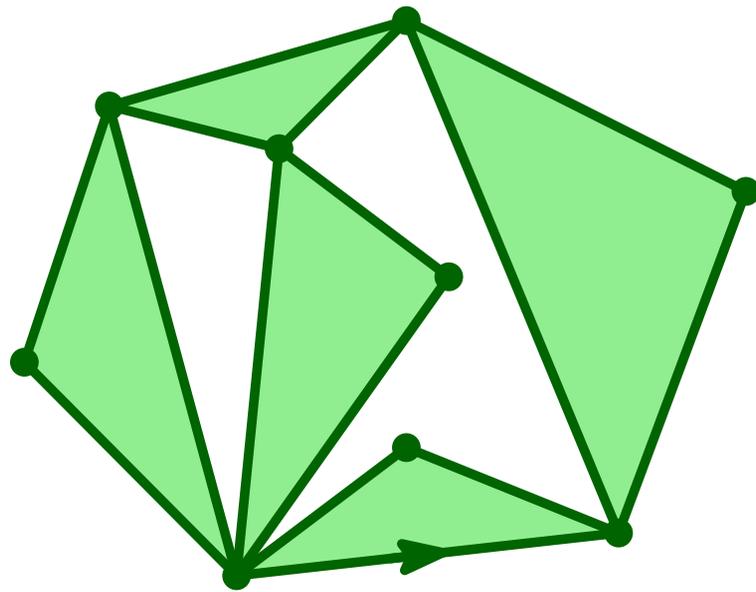
Convention :



Constellations

Une p -constellation est une carte planaire telle que :

- les faces sont bicoloriées en noir et blanc
- les faces noires sont de degré p .
- les faces blanches sont de degré multiple de p .



Convention :

2-constellations = cartes biparties

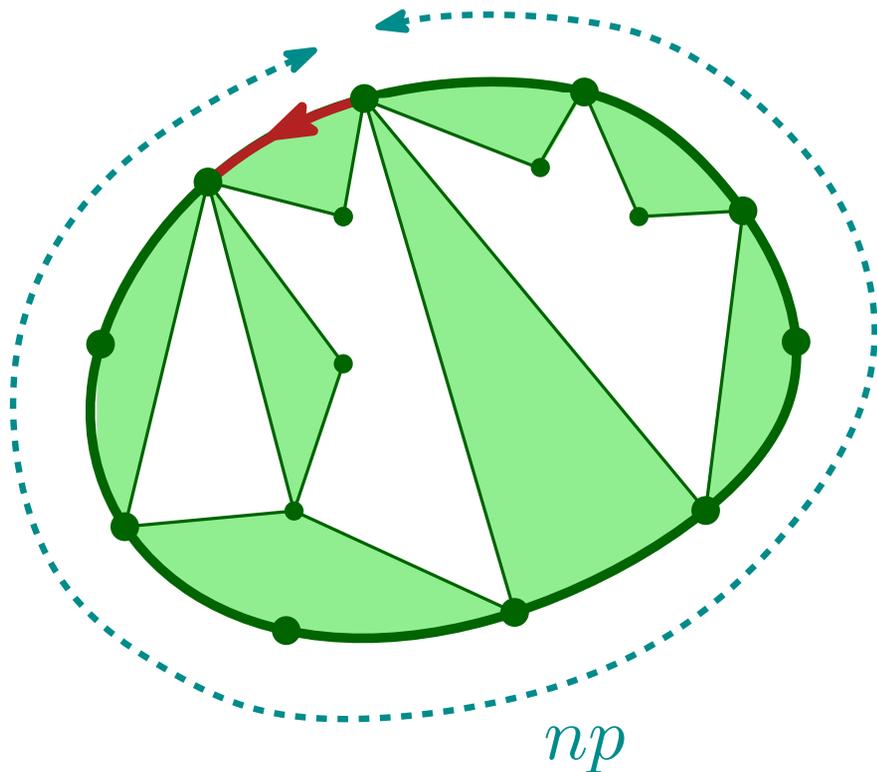
Constellations : Différents contextes

- Factorisation de permutations [Hurwitz (1891)]
- Revêtements ramifiés de la sphère [Goulden and Jackson '97]
- Cartes planaires :
 - Bijection avec arbres décorés [Bousquet-Mélou, Schaeffer '00]
 - Bijection avec mobiles [Bouttier, Di Francesco, Guitter '04]
 - Énumération à la Tutte [Bousquet-Mélou, Jehanne '06]

À lire : 1er chapitre de [Lando et Zvonkin '00]

Méthode à la Tutte

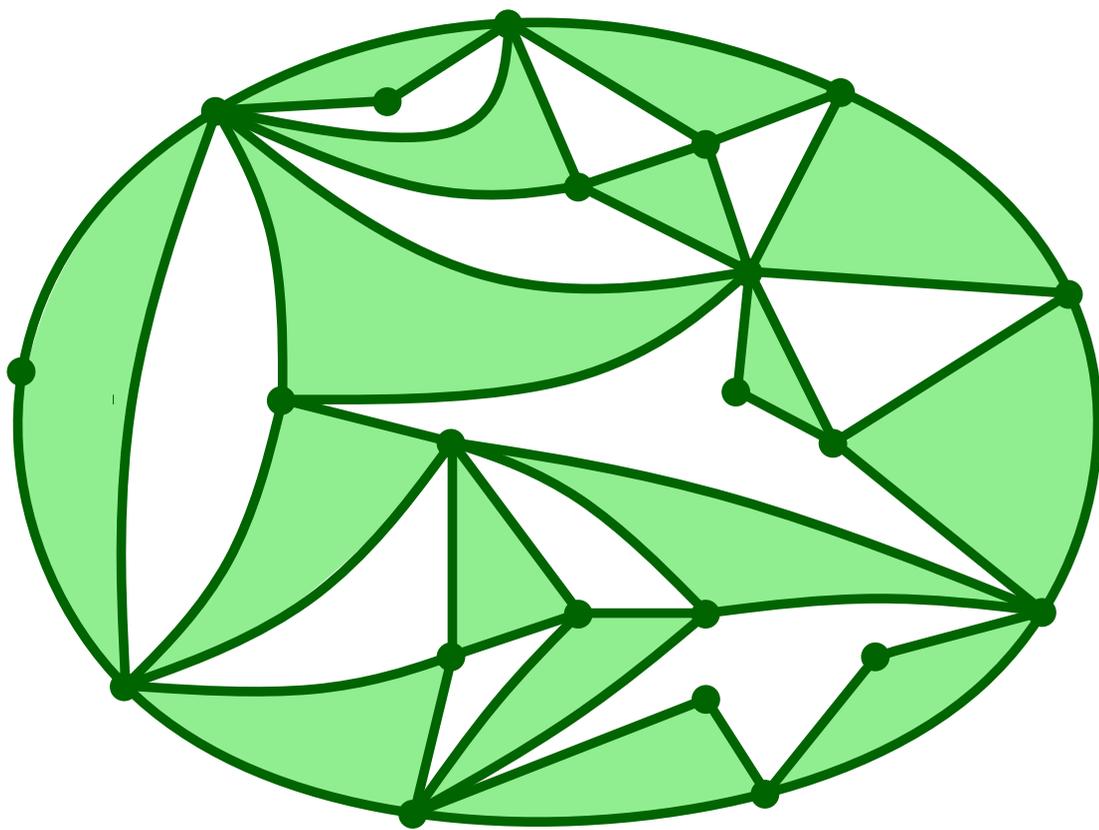
F_n = série génératrice des constellations comptées selon leur nombre de faces blanches telle que la face racine est de degré np



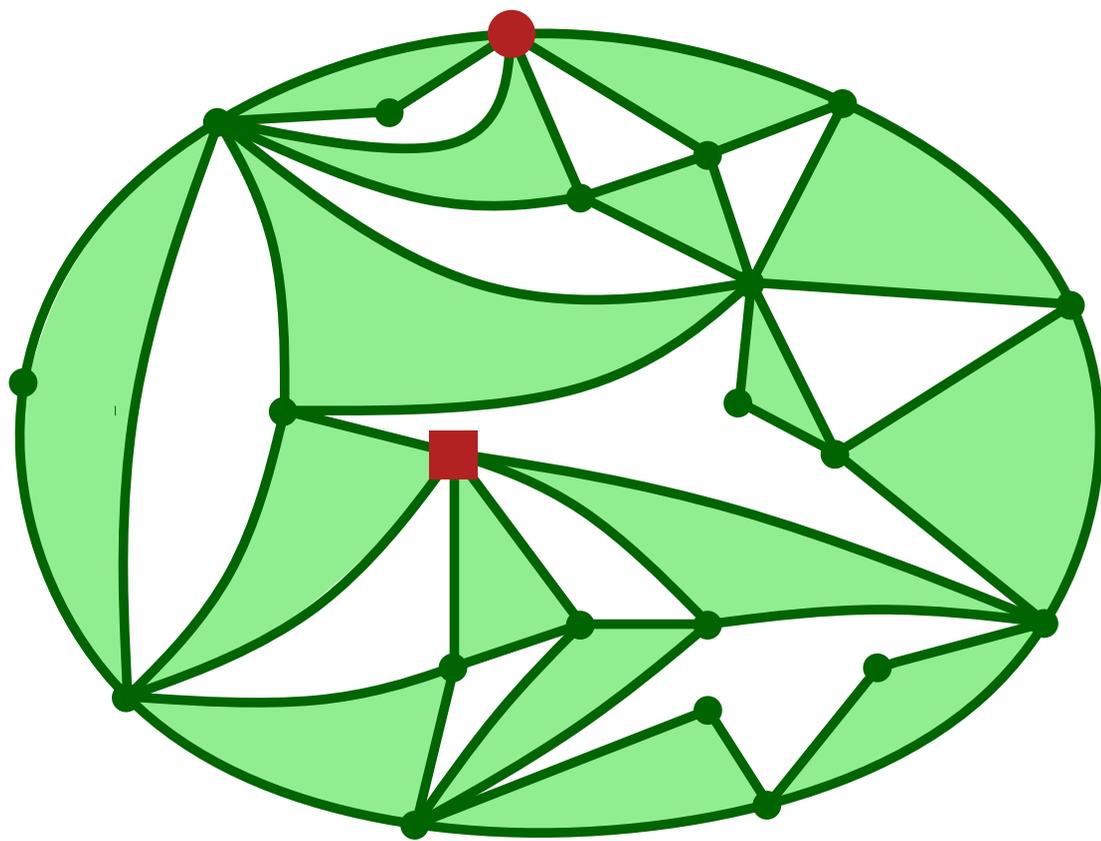
[Bousquet-Mélou, Schaeffer ('00)]

[Bousquet-Mélou, Jehanne ('06)]

Distances et constellations

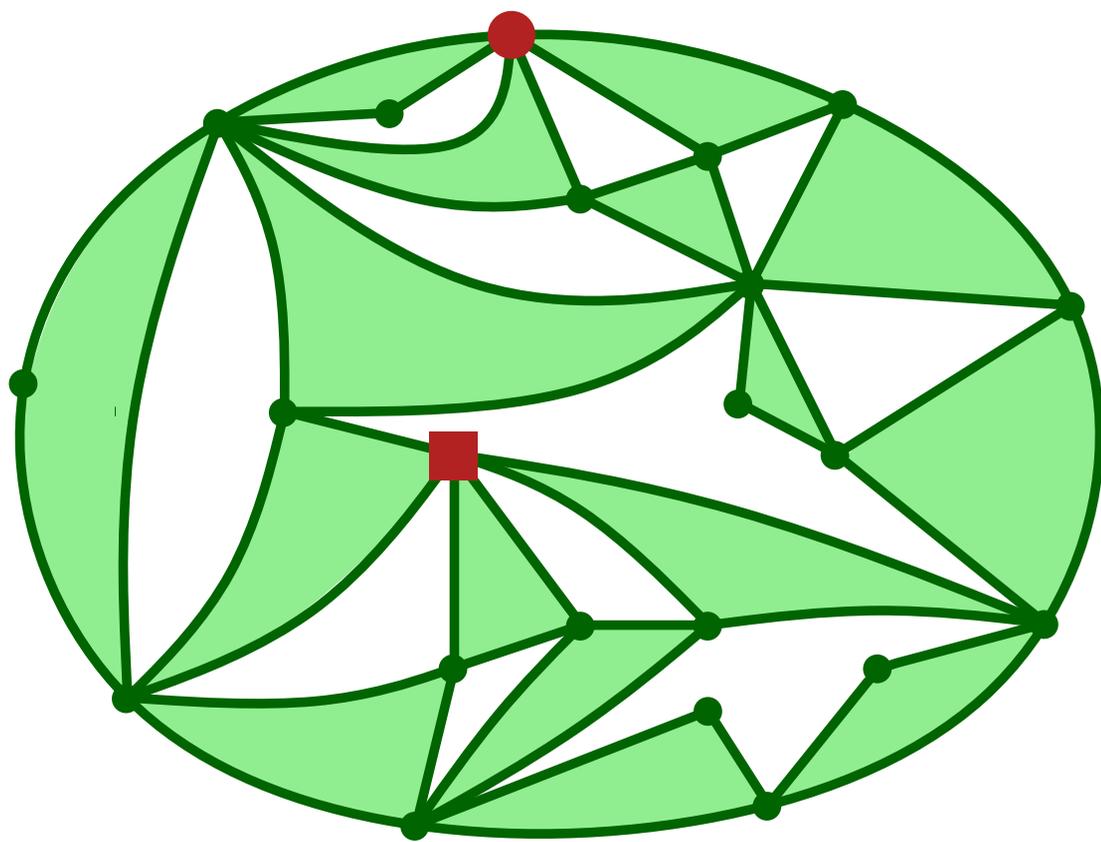


Distances et constellations



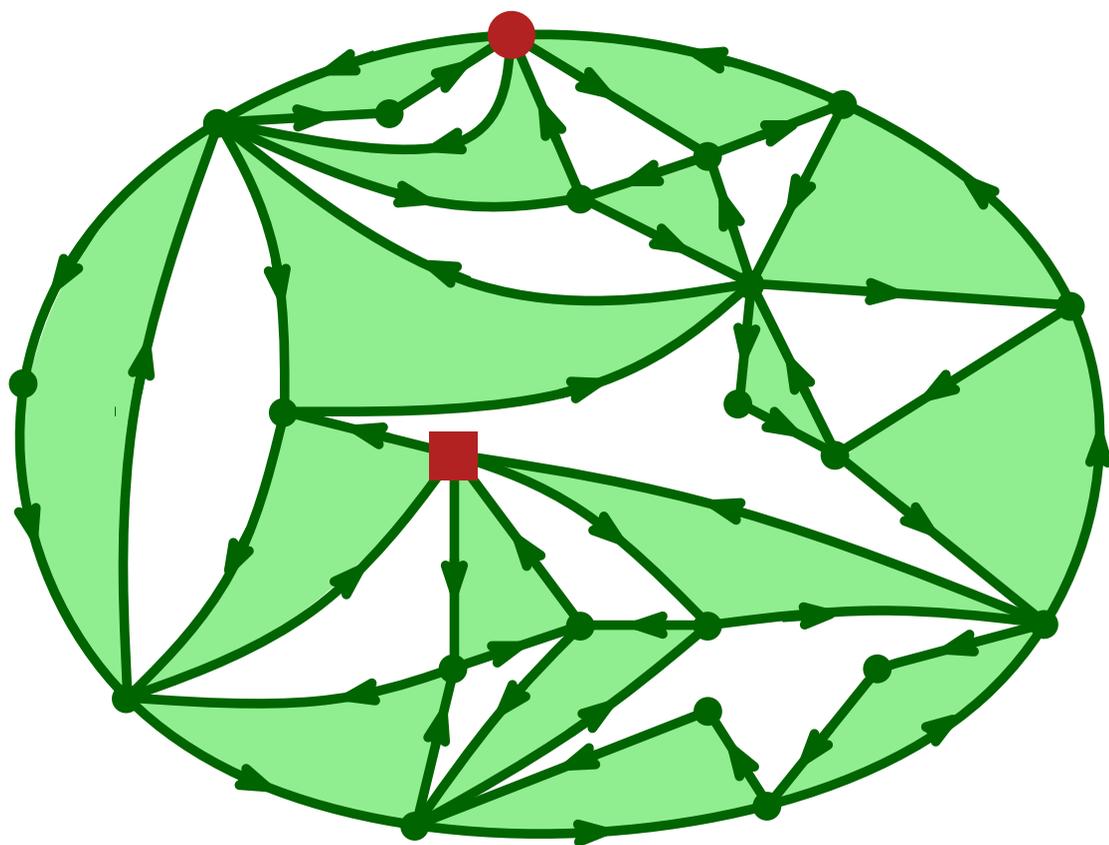
2 sommets marqués

Distances et constellations



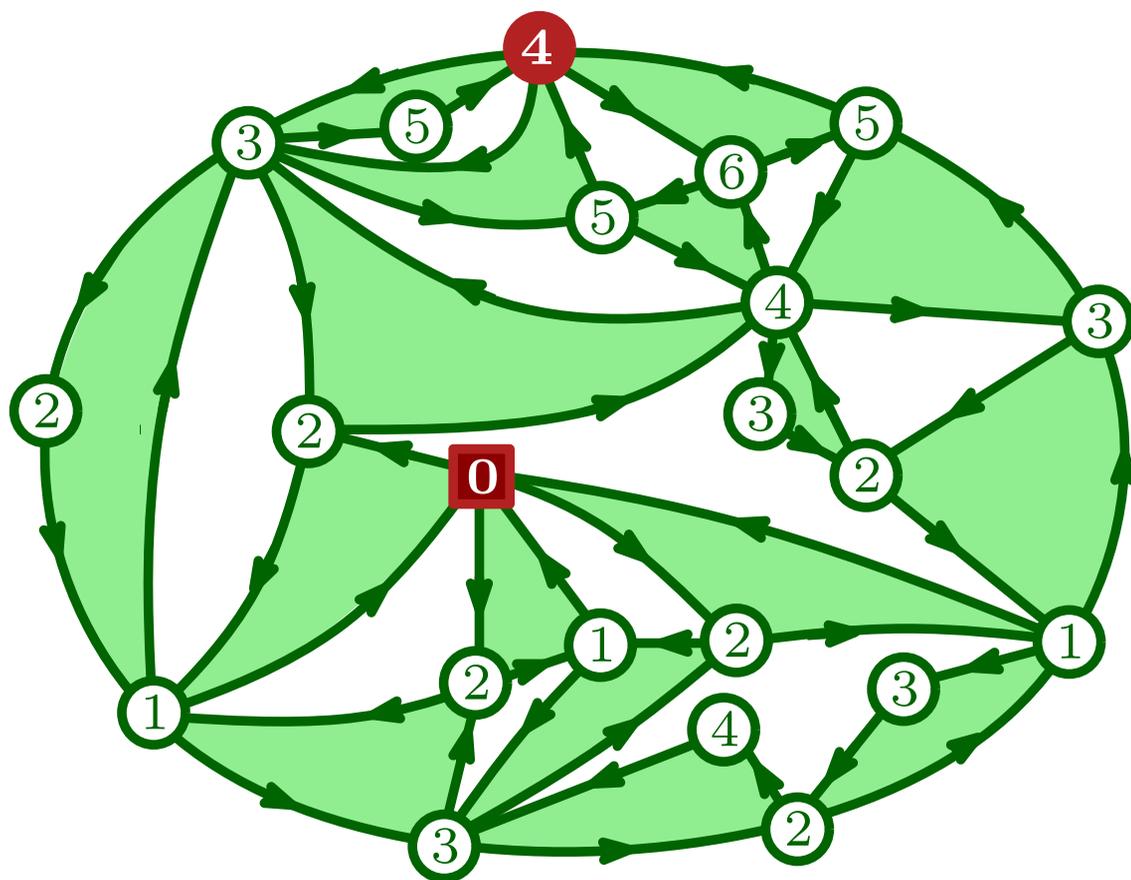
2 sommets marqués

Distances et constellations



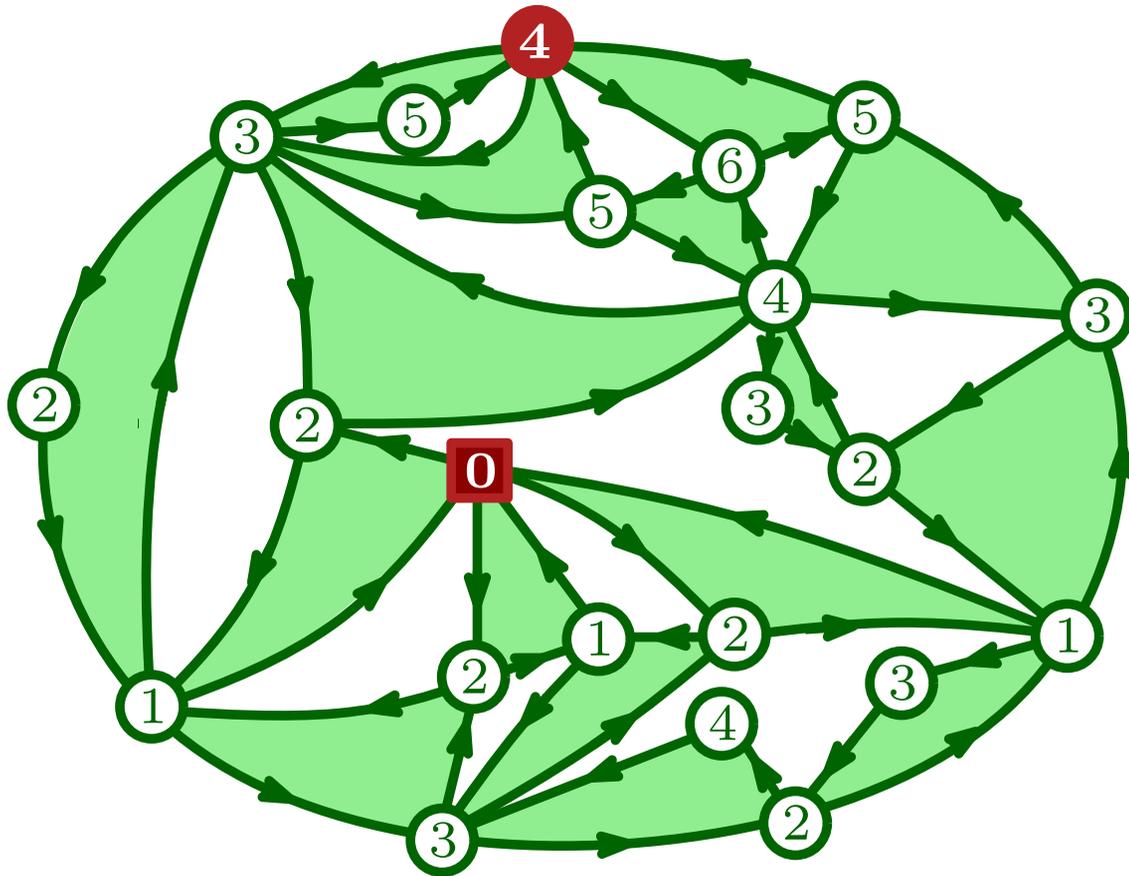
2 sommets marqués

Distances et constellations



2 sommets marqués

Distances et constellations



2 sommets marqués

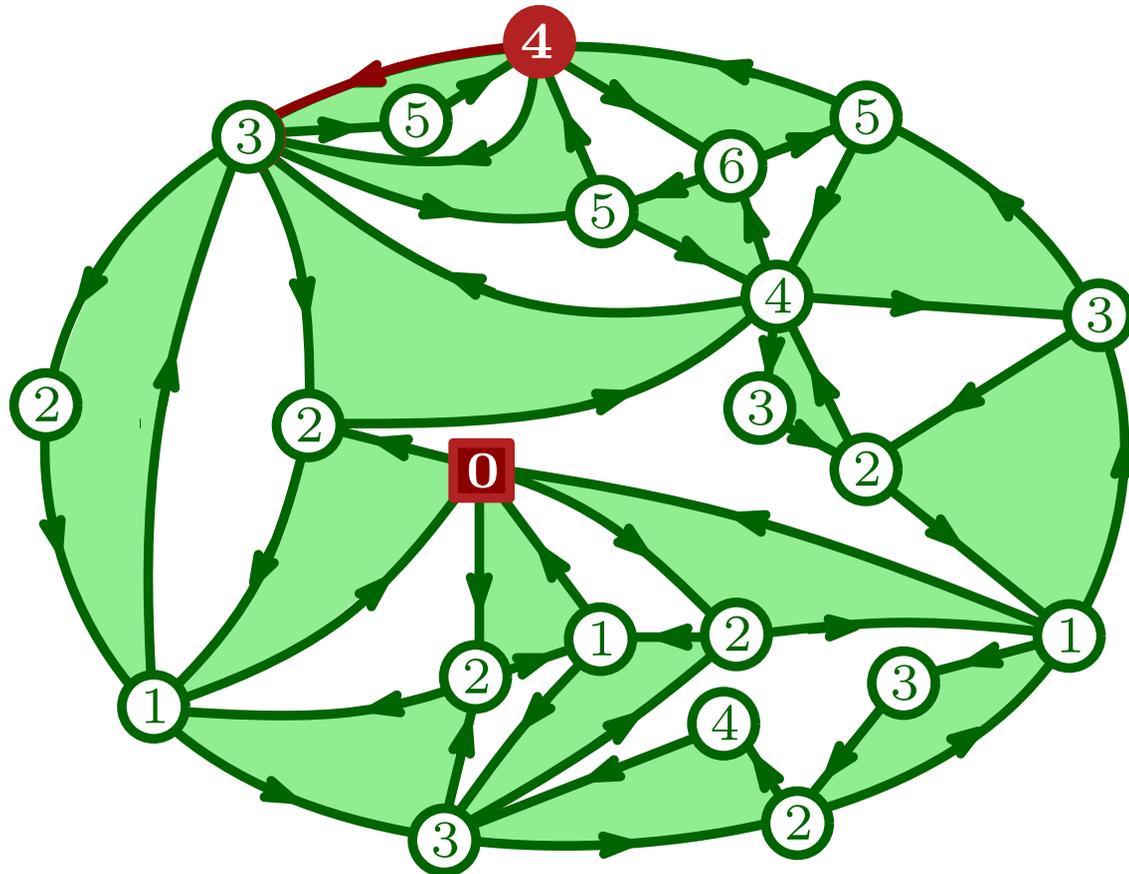


Propriété :

Les arêtes sont de 2 types possibles :

- $i \rightarrow i-1$
- $i \rightarrow i+p-1$

Distances et constellations



Propriété :

Les arêtes sont de 2 types possibles :

- $i \rightarrow i-1$
- $i \rightarrow i+p-1$

~~2 sommets marqués~~



1 sommet origine marqué
+ une racine de type $(i, i-1)$

$V_j = \text{SG des constellations pointées} + \text{racine } (i, i-1), i \leq j$

Résultats précédents

$V_j = \text{SG des constellations pointées} + \text{racine } (i, i - 1), i \leq j$

- Bijection avec des mobiles

[Bouttier, di Francesco]

[Gutierrez '03 et '04]

\Rightarrow

Equations de récurrence
pour les V_i

Résultats précédents

$V_j =$ SG des constellations pointées + racine $(i, i - 1)$, $i \leq j$

- Bijection avec des mobiles
[Bouttier, di Francesco]
[Guitter '03 et '04] \Rightarrow Equations de récurrence pour les V_i

- Certaines solutions "devinées" puis vérifiées :

Triangulations eulériennes : $\rightarrow V_i = V \frac{(1 - y^i)(1 - y^{i+4})}{(1 - y^{i+1})(1 - y^{i+3})}$,
 $p = 3$ et $\deg(\text{f.b.}) = 3$

où $V = 1 + 2xV^2$ et $y + y^{-1} = (xV)^{-1} - 2$

+ Conjectures par di Francesco

Résultats précédents

$V_j =$ SG des constellations pointées + racine $(i, i - 1)$, $i \leq j$

- Bijection avec des mobiles
[Bouttier, di Francesco]
[Guitter '03 et '04] \Rightarrow Equations de récurrence pour les V_i

- Certaines solutions "devinées" puis vérifiées :

Triangulations eulériennes : $\rightarrow V_i = V \frac{(1 - y^i)(1 - y^{i+4})}{(1 - y^{i+1})(1 - y^{i+3})}$,
 $p = 3$ et $\deg(\text{f.b.}) = 3$

où $V = 1 + 2xV^2$ et $y + y^{-1} = (xV)^{-1} - 2$

+ Conjectures par di Francesco

- Lien entre V_i et fractions continues pour les cartes planaires
[Bouttier, Guitter '10]

Objectif

Généraliser le travail de Bouttier et Gitter au cadre des constellations.

- Lien entre F_n et V_i sous forme de fractions continues
- Calcul des V_i

Motivation:

- Interprétation combinatoire des formules.
- Preuve des conjectures.

F_n en fonction des V_i

Proposition : Il existe une bijection entre :

- Les constellations comptées par F_n
- les p -excursions constellées de longueur np .

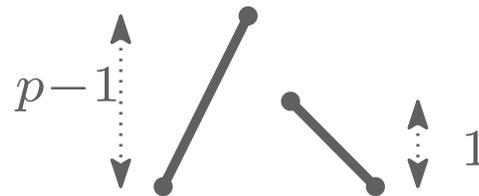
F_n en fonction des V_i

Proposition : Il existe une bijection entre :

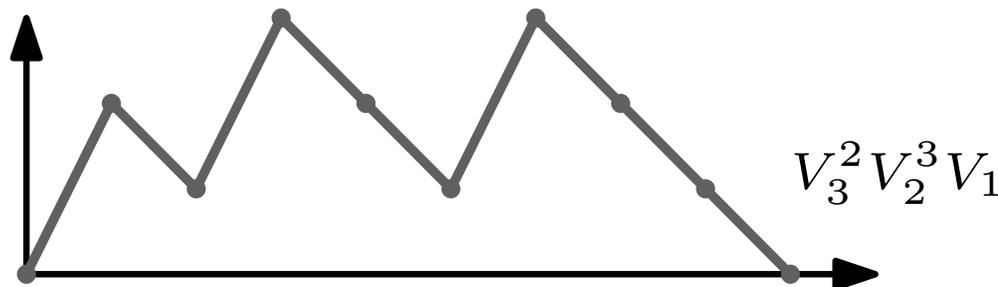
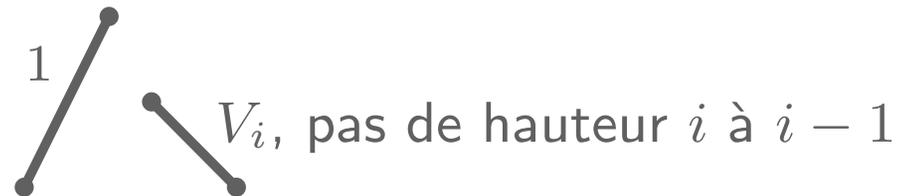
- Les constellations comptées par F_n
- les p -excursions constellées de longueur np .

p -excursions constellées = chemin ≥ 0 de $(0, 0)$ à $(np, 0)$.

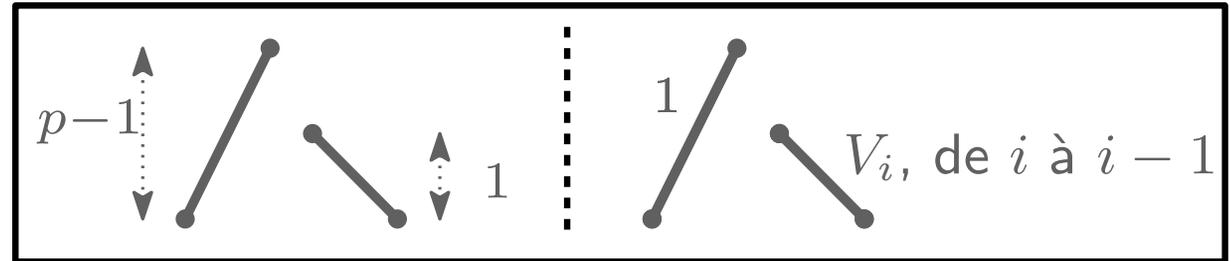
- 2 types de pas :



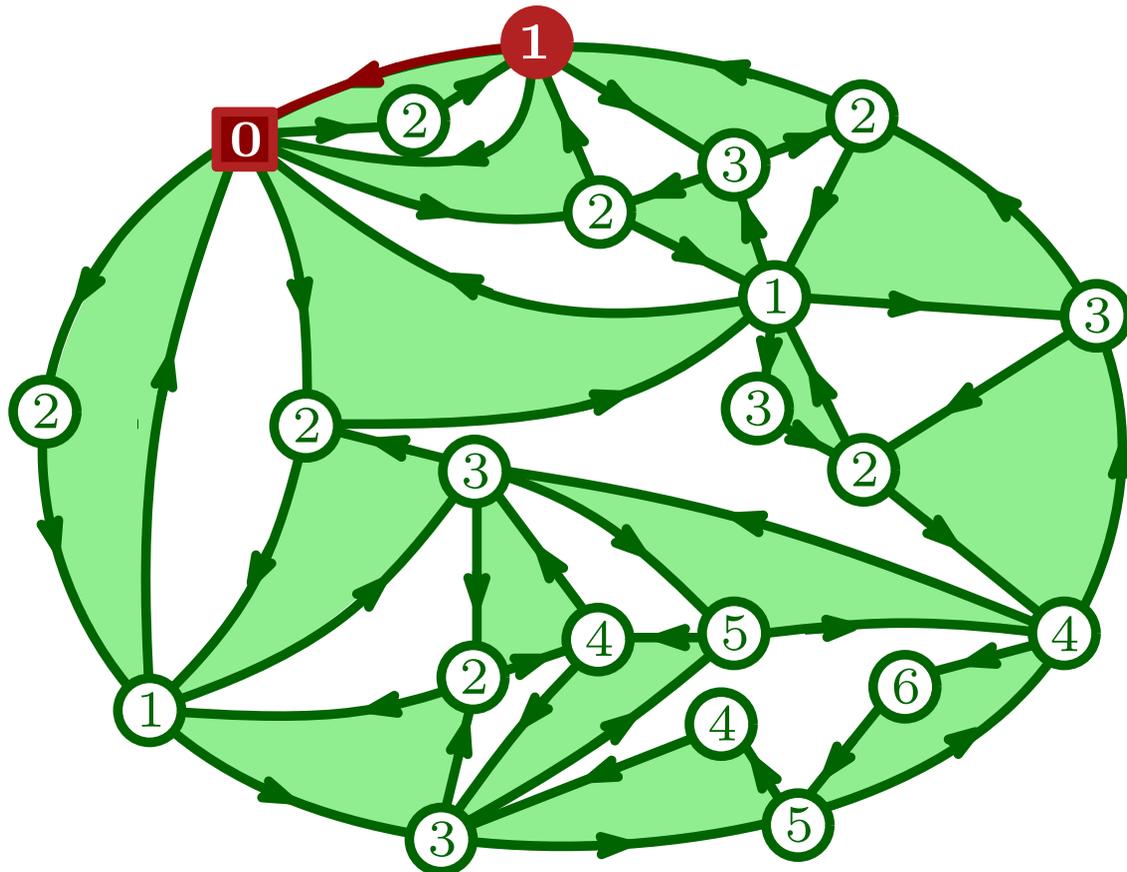
- poids sur les pas :



F_n en fonction des V_i

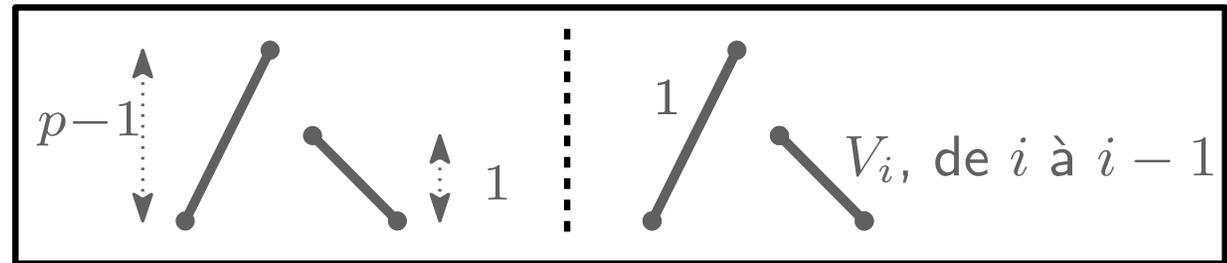


Décomposition en tranches :

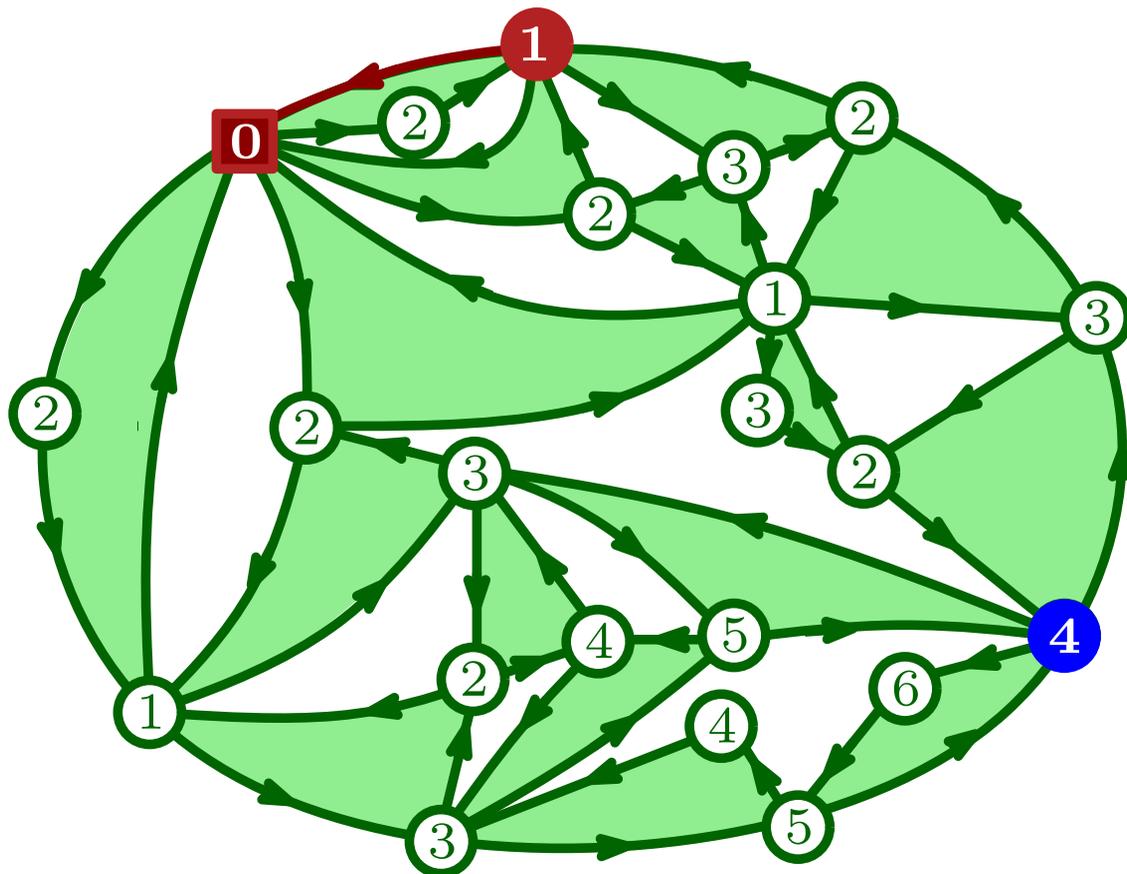


On part du bord et on suit le chemin géodésique le plus à gauche.

F_n en fonction des V_i

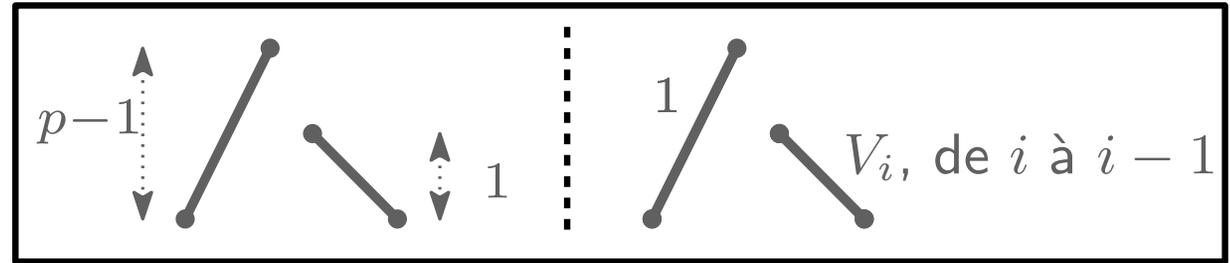


Décomposition en tranches :

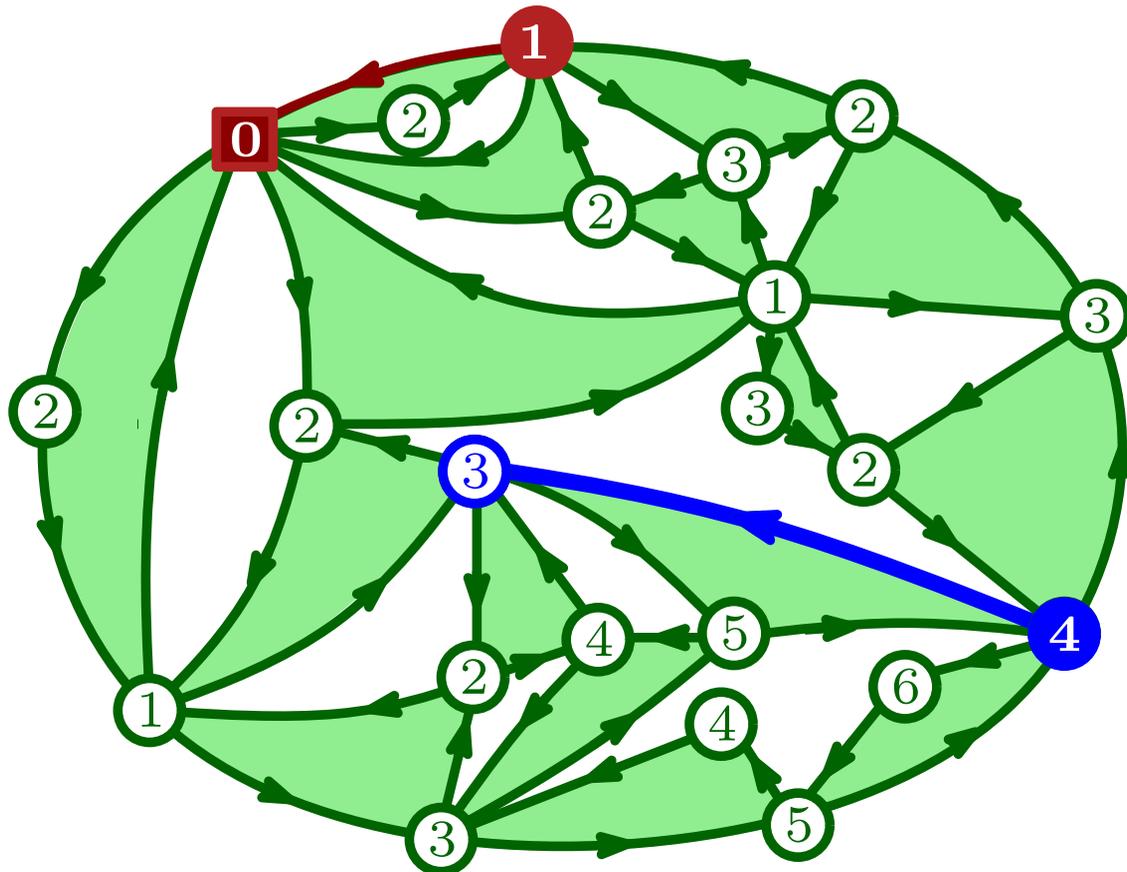


On part du bord et on suit le chemin géodésique le plus à gauche.

F_n en fonction des V_i

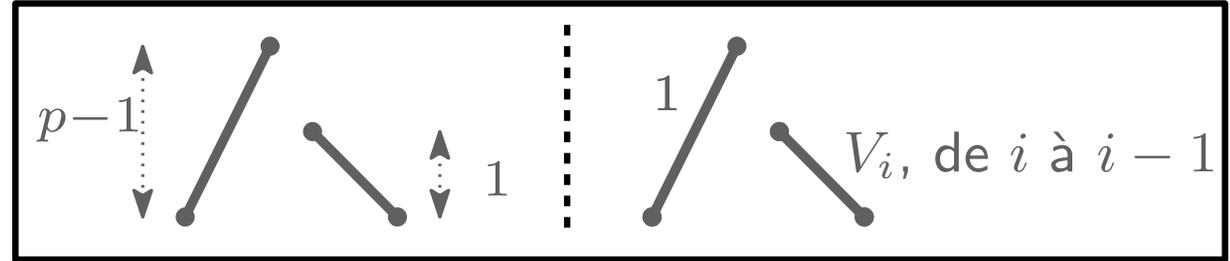


Décomposition en tranches :

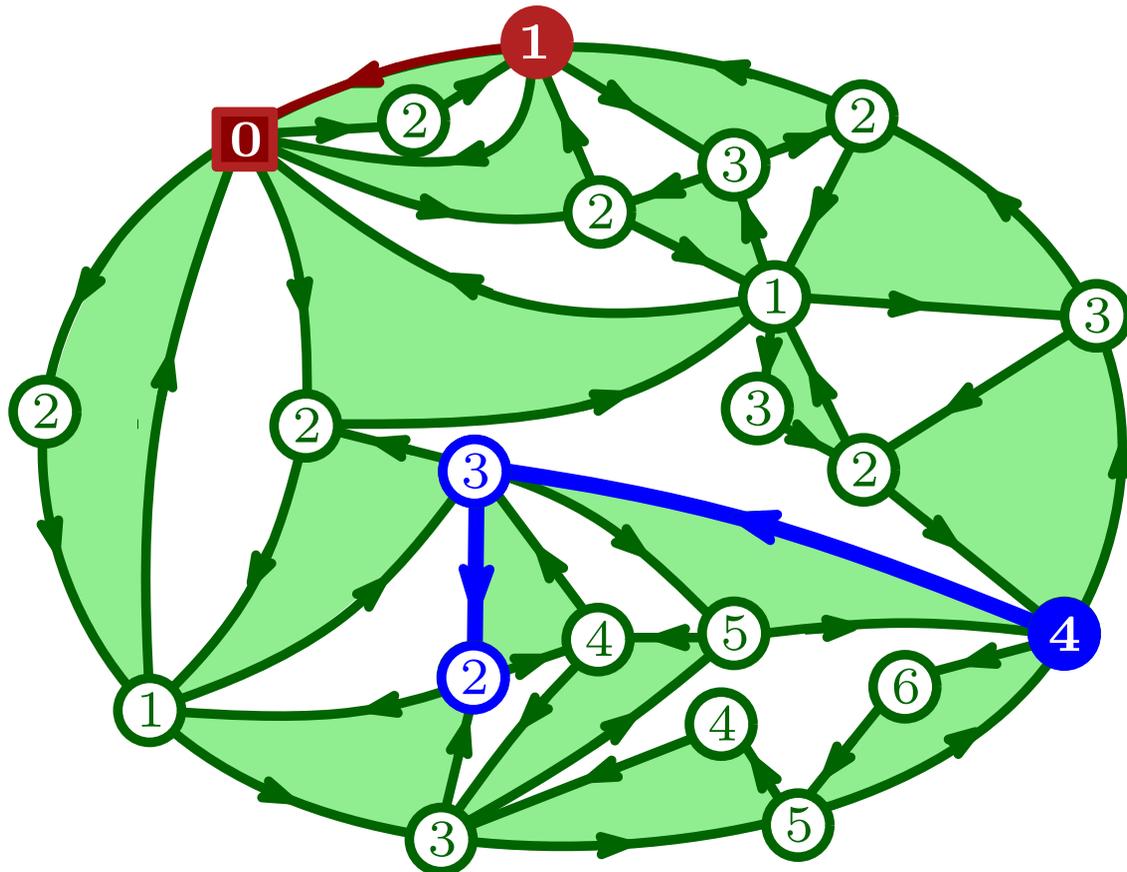


On part du bord et on suit le chemin géodésique le plus à gauche.

F_n en fonction des V_i

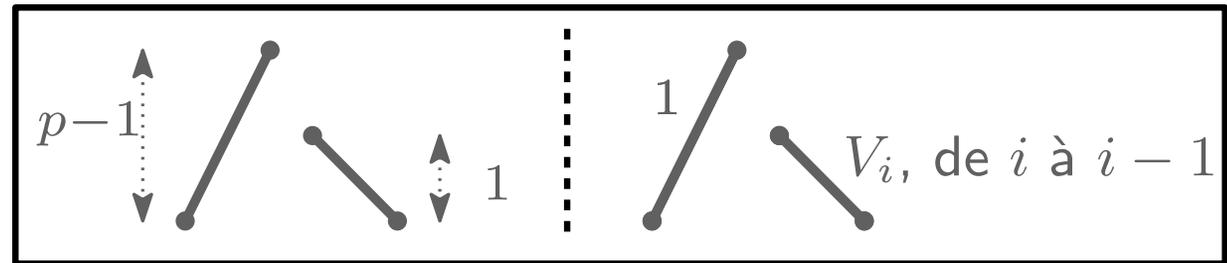


Décomposition en tranches :

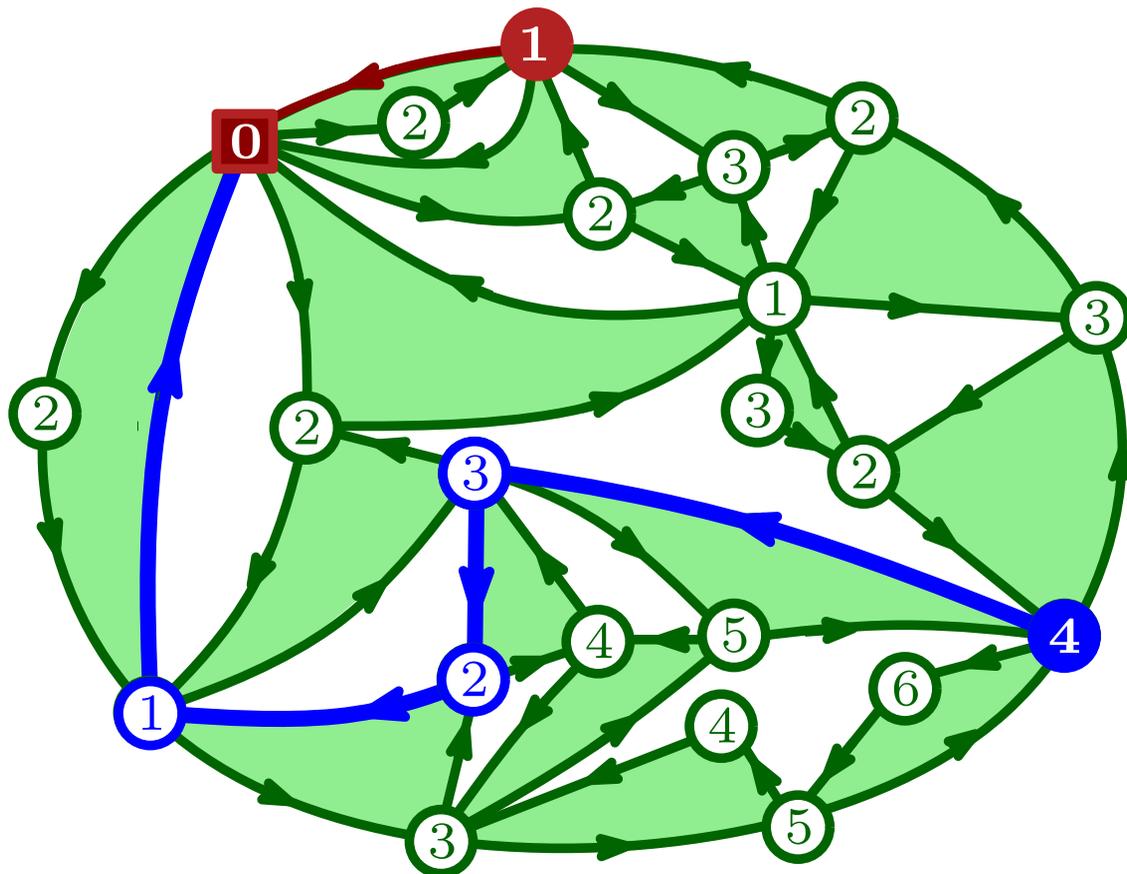


On part du bord et on suit le chemin géodésique le plus à gauche.

F_n en fonction des V_i

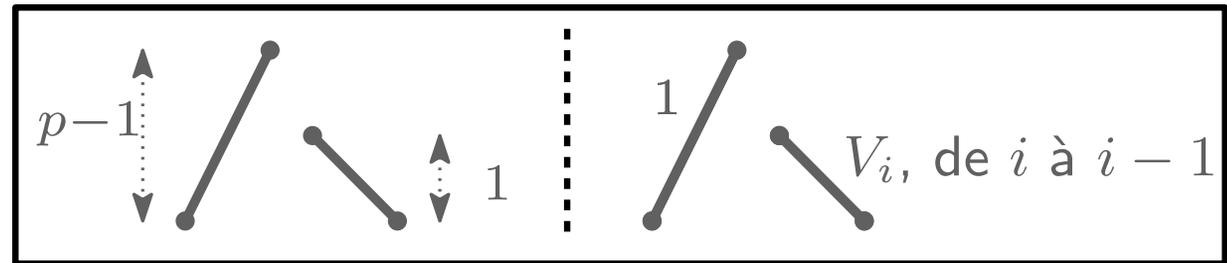


Décomposition en tranches :

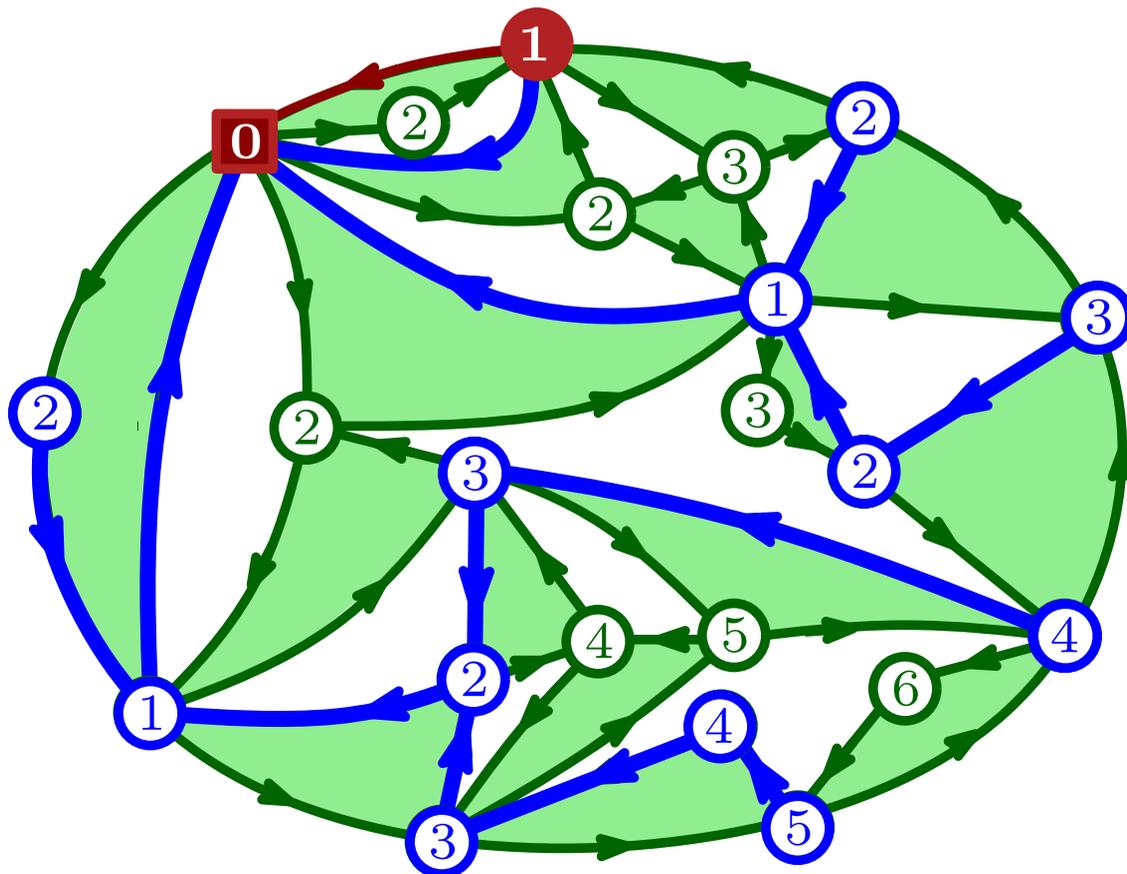


On part du bord et on suit le chemin géodésique le plus à gauche.

F_n en fonction des V_i

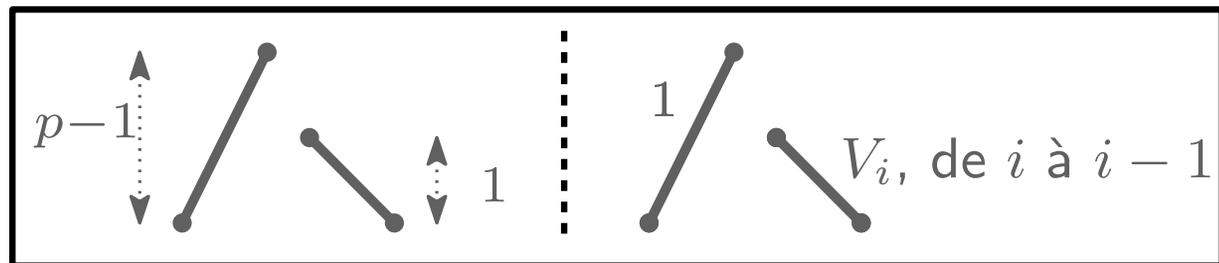


Décomposition en tranches :

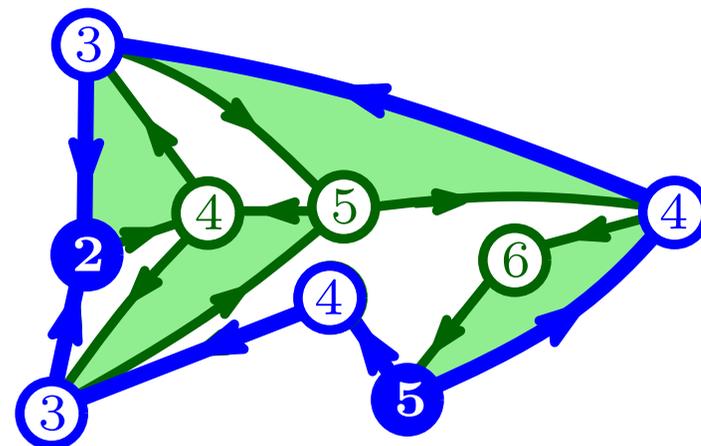
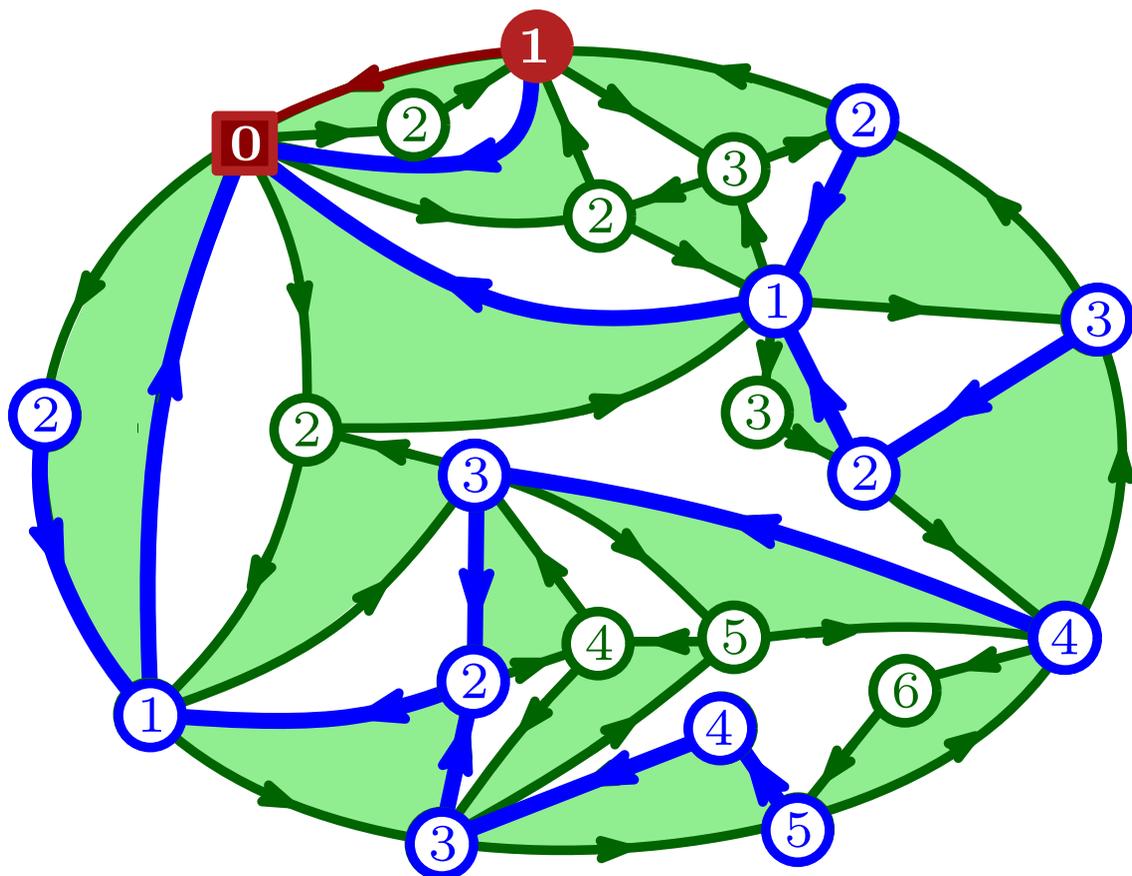


On part du bord et on suit le chemin géodésique le plus à gauche.

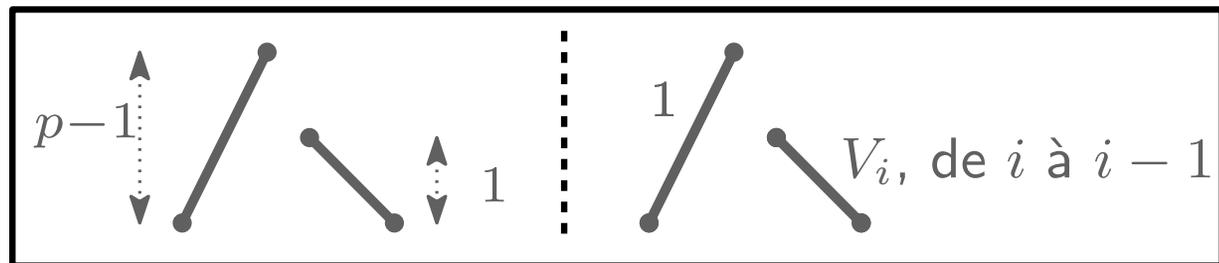
F_n en fonction des V_i



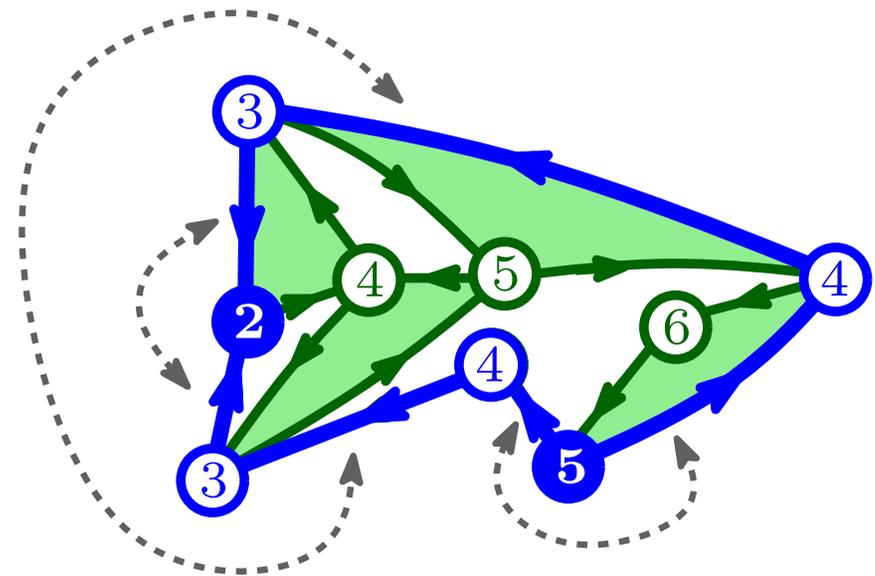
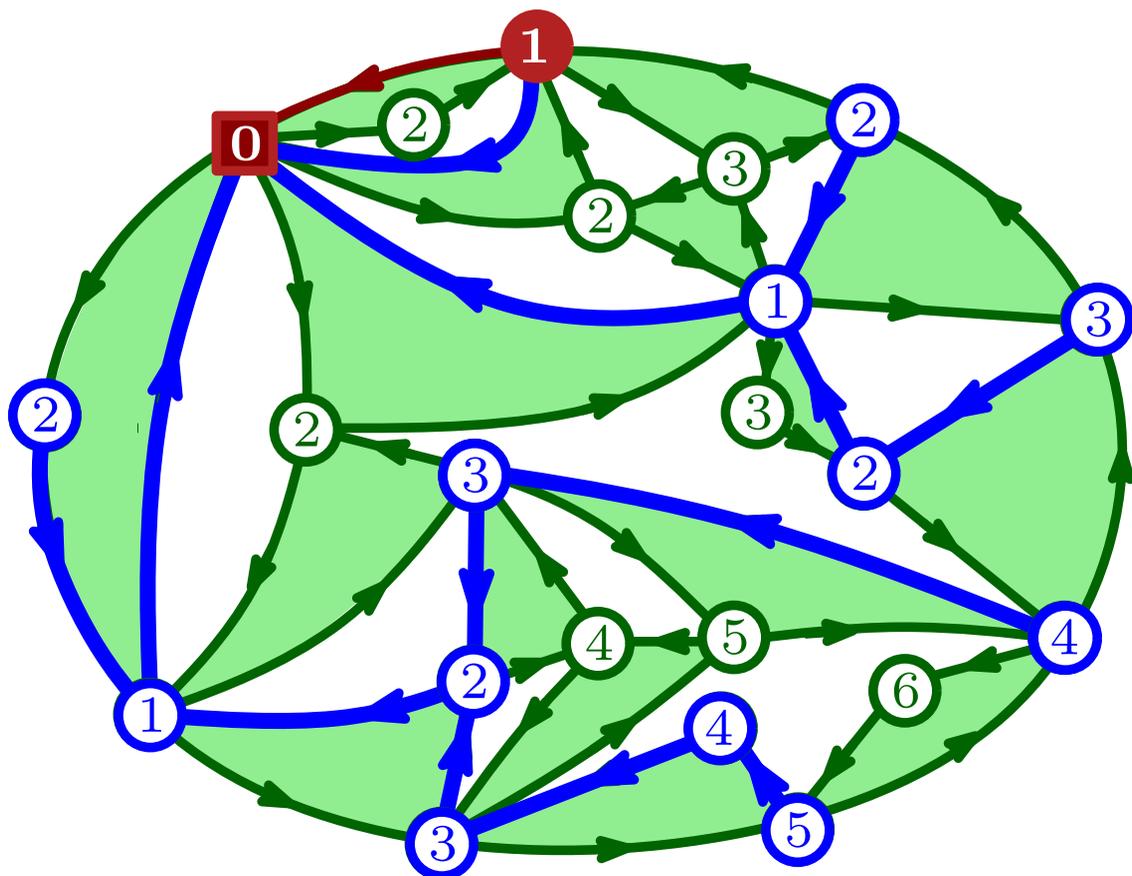
Décomposition en tranches :



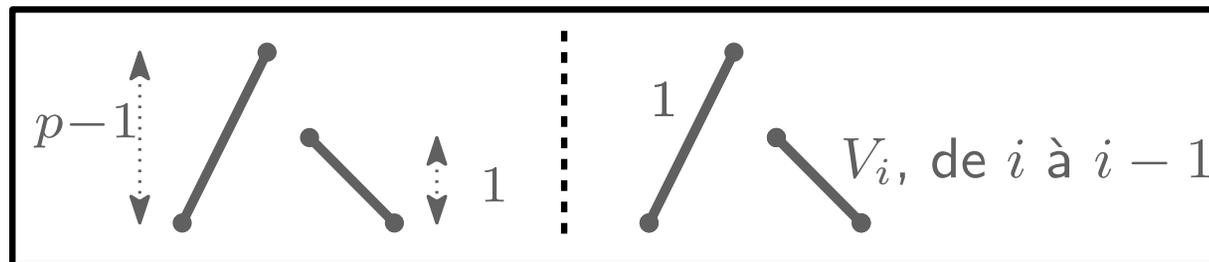
F_n en fonction des V_i



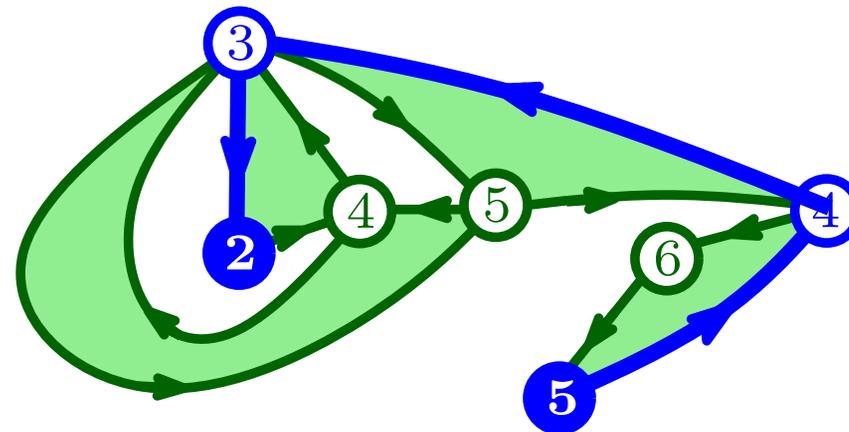
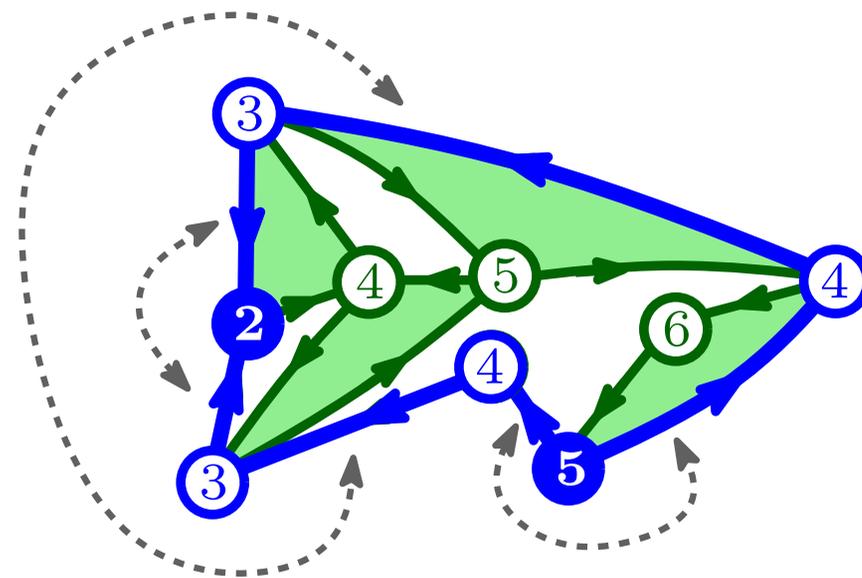
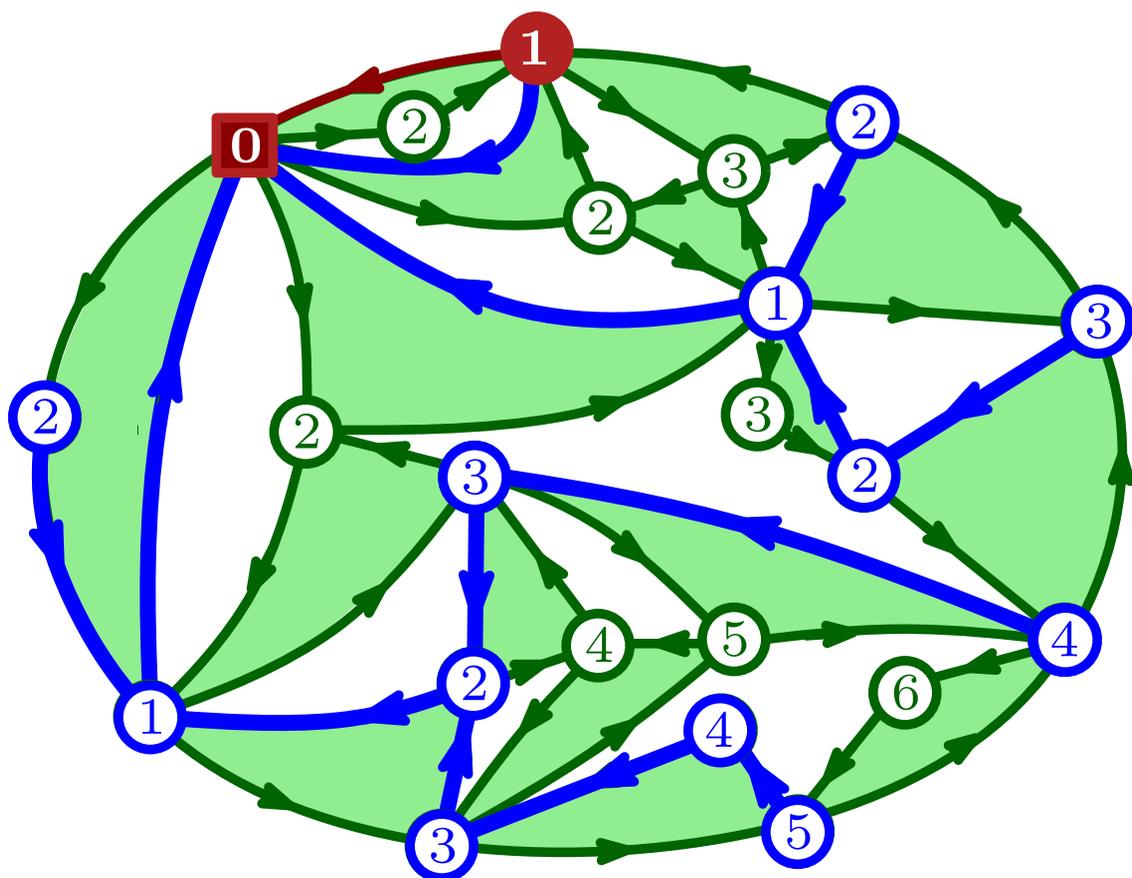
Décomposition en tranches :



F_n en fonction des V_i



Décomposition en tranches :

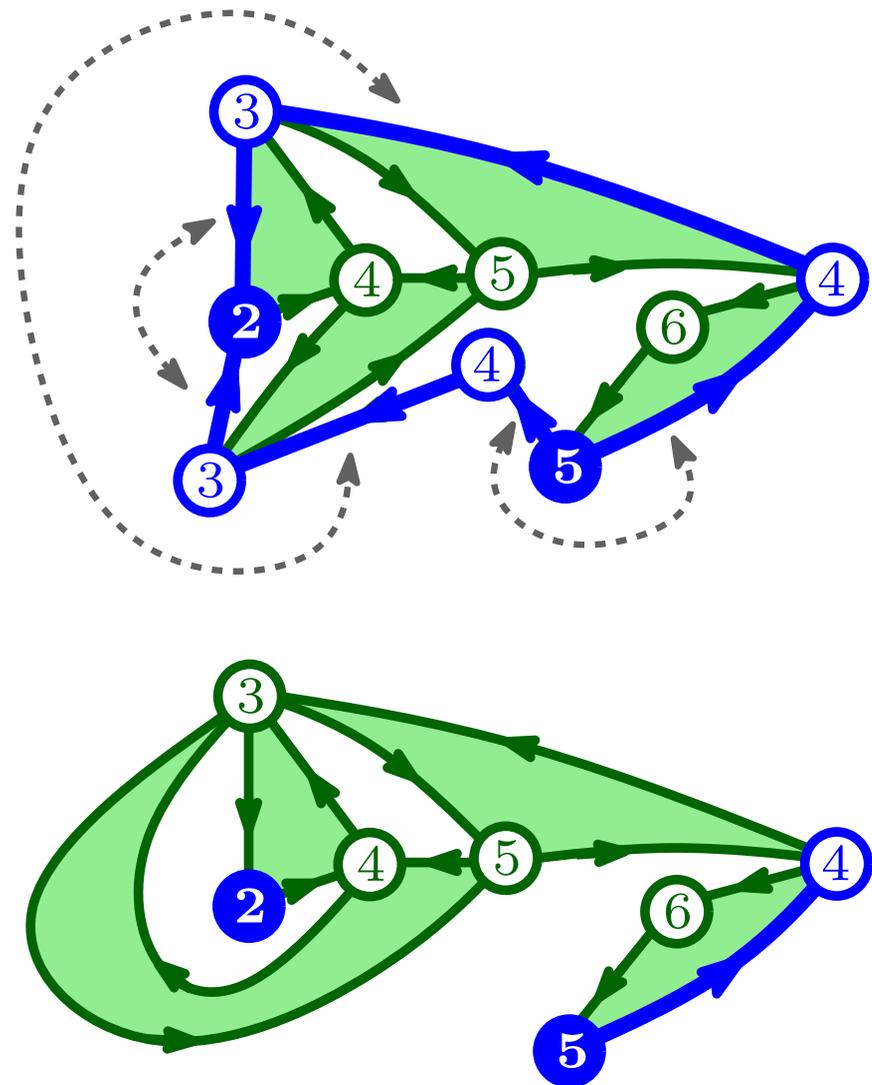
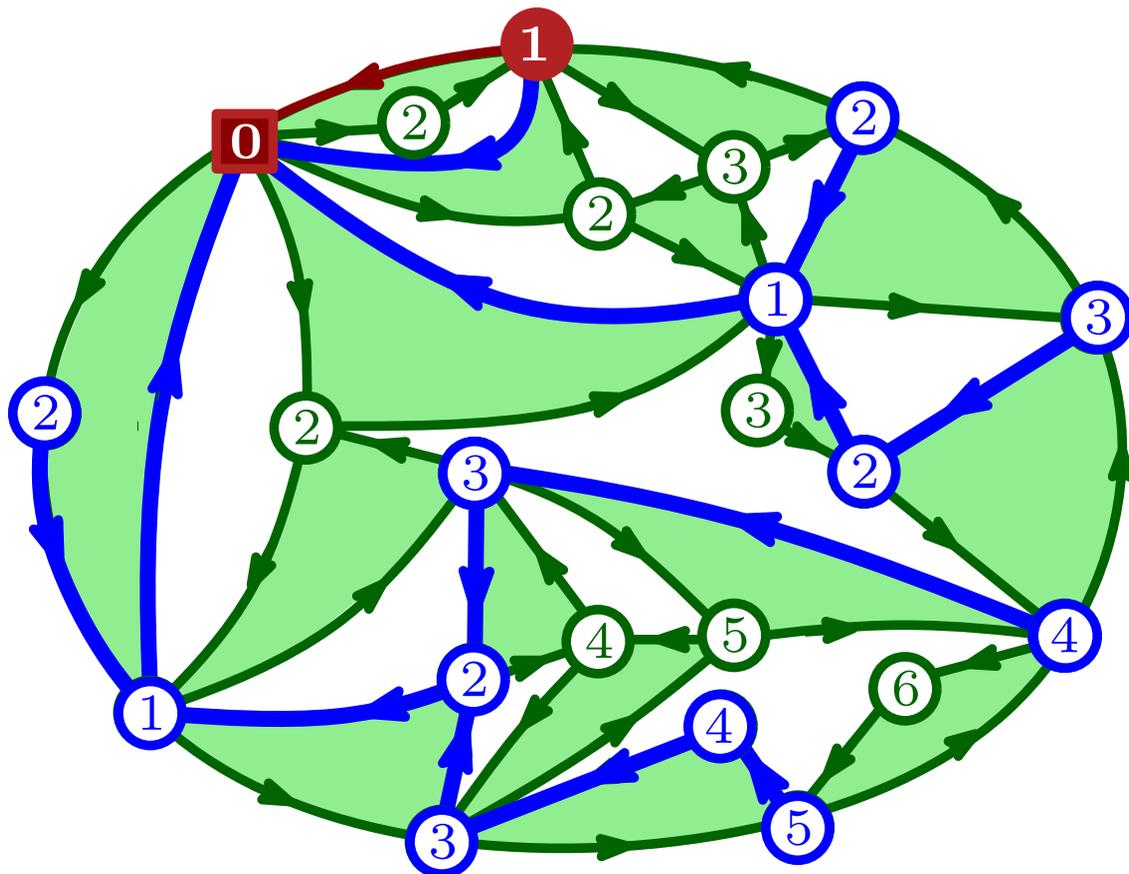


F_n en fonction des V_i

Proposition : Il existe une bijection entre :

- Les constellations comptées par F_n
- les p -excursions constellées de longueur np .

Décomposition en tranches :



V_i en fonction des F_n ??

Proposition : Il existe une bijection entre :

- Les constellations comptées par F_n
- les p -excursions constellées de longueur np .

V_i en fonction des F_n ??

Proposition : Il existe une bijection entre :

- Les constellations comptées par F_n
- les p -excursions constellées de longueur np .

$$F_0 = \bullet = 1$$

V_i en fonction des F_n ??

Proposition : Il existe une bijection entre :

- Les constellations comptées par F_n
- les p -excursions constellées de longueur np .

$$F_0 = \bullet = 1$$

$$F_1 = \begin{array}{c} \bullet \\ / \quad \backslash \\ \bullet \quad \bullet \end{array} = V_2 V_1$$

V_i en fonction des F_n ??

Proposition : Il existe une bijection entre :

- Les constellations comptées par F_n
- les p -excursions constellées de longueur np .

$$F_0 = \bullet = 1$$

$$F_1 = \begin{array}{c} \bullet \\ / \quad \backslash \\ \bullet \quad \bullet \end{array} = V_2 V_1$$

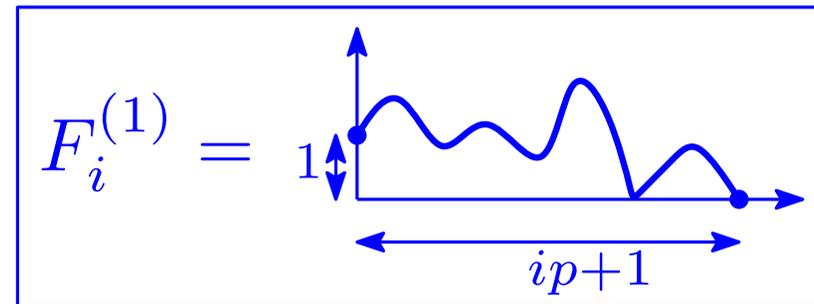
$$F_2 = \begin{array}{c} \bullet \\ / \quad \backslash \\ \bullet \quad \bullet \\ / \quad \backslash \\ \bullet \quad \bullet \end{array} + \begin{array}{c} \bullet \\ / \quad \backslash \\ \bullet \quad \bullet \\ / \quad \backslash \\ \bullet \quad \bullet \end{array} + \begin{array}{c} \bullet \\ / \quad \backslash \\ \bullet \quad \bullet \\ / \quad \backslash \\ \bullet \quad \bullet \end{array}$$
$$= V_2^2 V_1^2 + V_3 V_2^2 V_1 + V_4 V_3 V_2 V_1$$

V_i en fonction des F_n ??

Proposition : Il existe une bijection entre :

- Les constellations comptées par F_n
- les p -excursions constellées de longueur np .

$$F_0 = \bullet = 1$$



$$F_1 = \text{diagram} = V_2 V_1$$

$$F_2 = \text{diagram 1} + \text{diagram 2} + \text{diagram 3}$$

$$= V_2^2 V_1^2 + V_3 V_2^2 V_1 + V_4 V_3 V_2 V_1$$

V_i en fonction des F_n ??

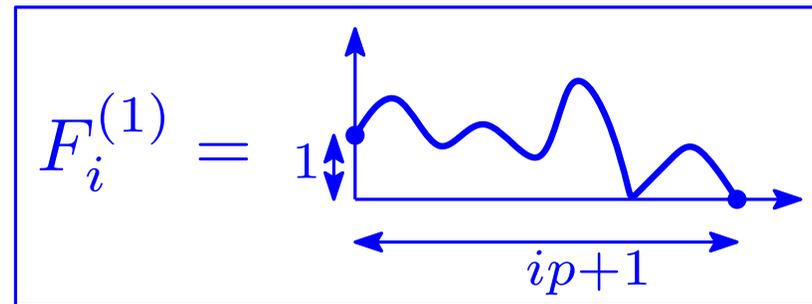
Proposition : Il existe une bijection entre :

- Les constellations comptées par F_n
- les p -excursions constellées de longueur np .

$$F_0 = \bullet = 1$$

$$F_0^{(1)} = \text{---} \bullet = V_1$$

$$F_1 = \text{---} \bullet \text{---} \bullet = V_2 V_1$$



$$F_2 = \text{---} \bullet \text{---} \bullet \text{---} \bullet + \text{---} \bullet \text{---} \bullet \text{---} \bullet \text{---} \bullet + \text{---} \bullet \text{---} \bullet \text{---} \bullet \text{---} \bullet \text{---} \bullet$$

$$= V_2^2 V_1^2 + V_3 V_2^2 V_1 + V_4 V_3 V_2 V_1$$

V_i en fonction des F_n ??

Proposition : Il existe une bijection entre :

- Les constellations comptées par F_n
- les p -excursions constellées de longueur np .

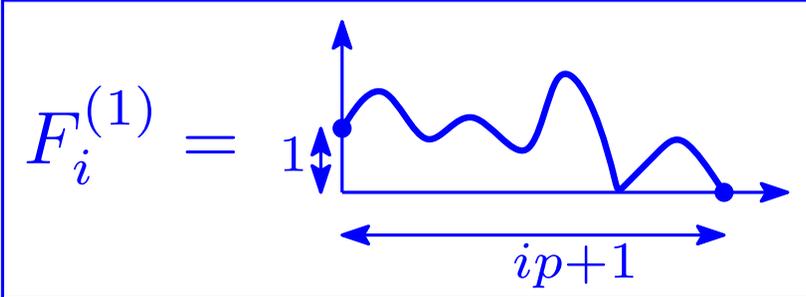
$$F_0 = \bullet = 1$$

$$F_0^{(1)} = \text{diagram} = V_1$$

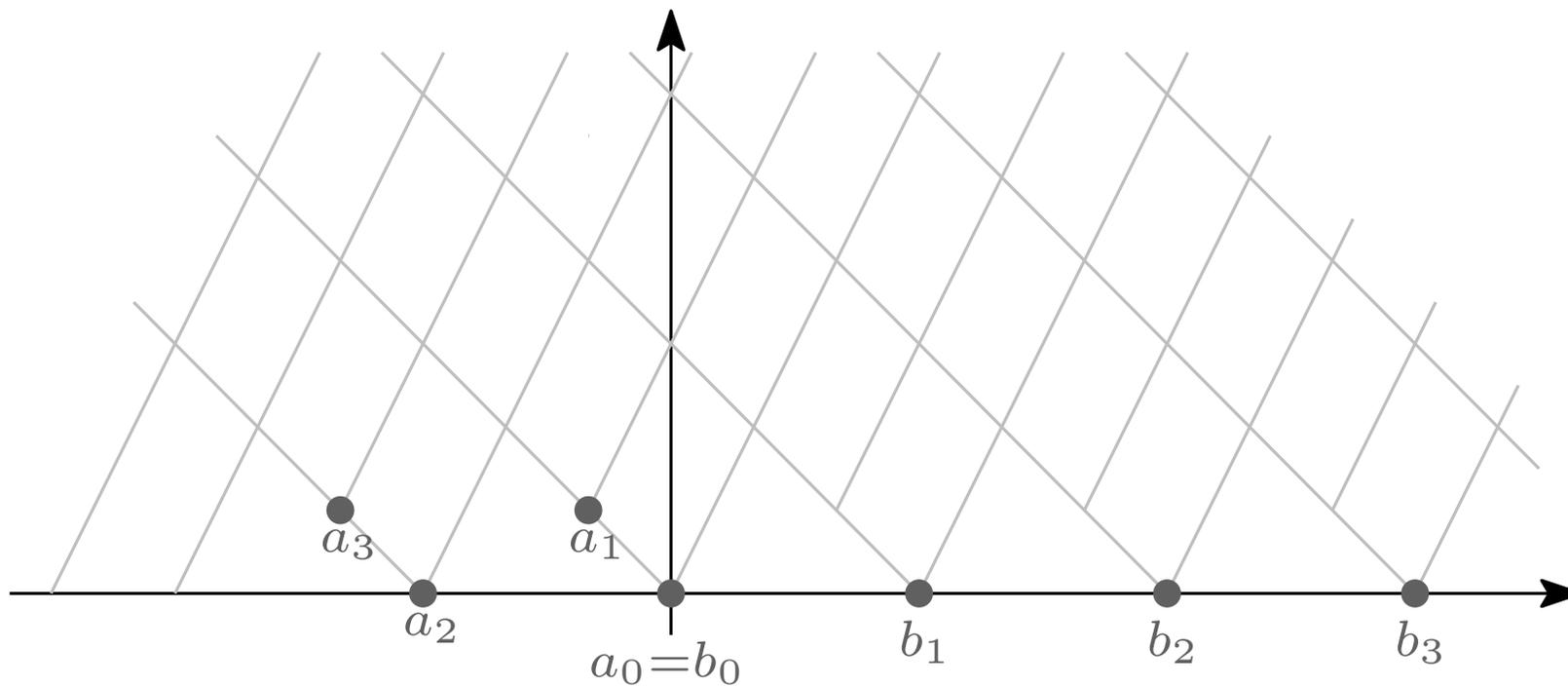
$$F_1 = \text{diagram} = V_2 V_1$$

$$F_1^{(1)} = \text{diagram} + \text{diagram} = V_2 V_1^2 + V_3 V_2 V_1$$

$$F_2 = \text{diagram} + \text{diagram} + \text{diagram} = V_2^2 V_1^2 + V_3 V_2^2 V_1 + V_4 V_3 V_2 V_1$$



LGV Lemma et généralisation des déterminants de Hankel

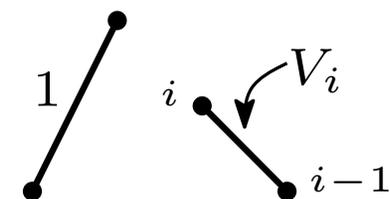


$$b_i = (3i, 0)$$

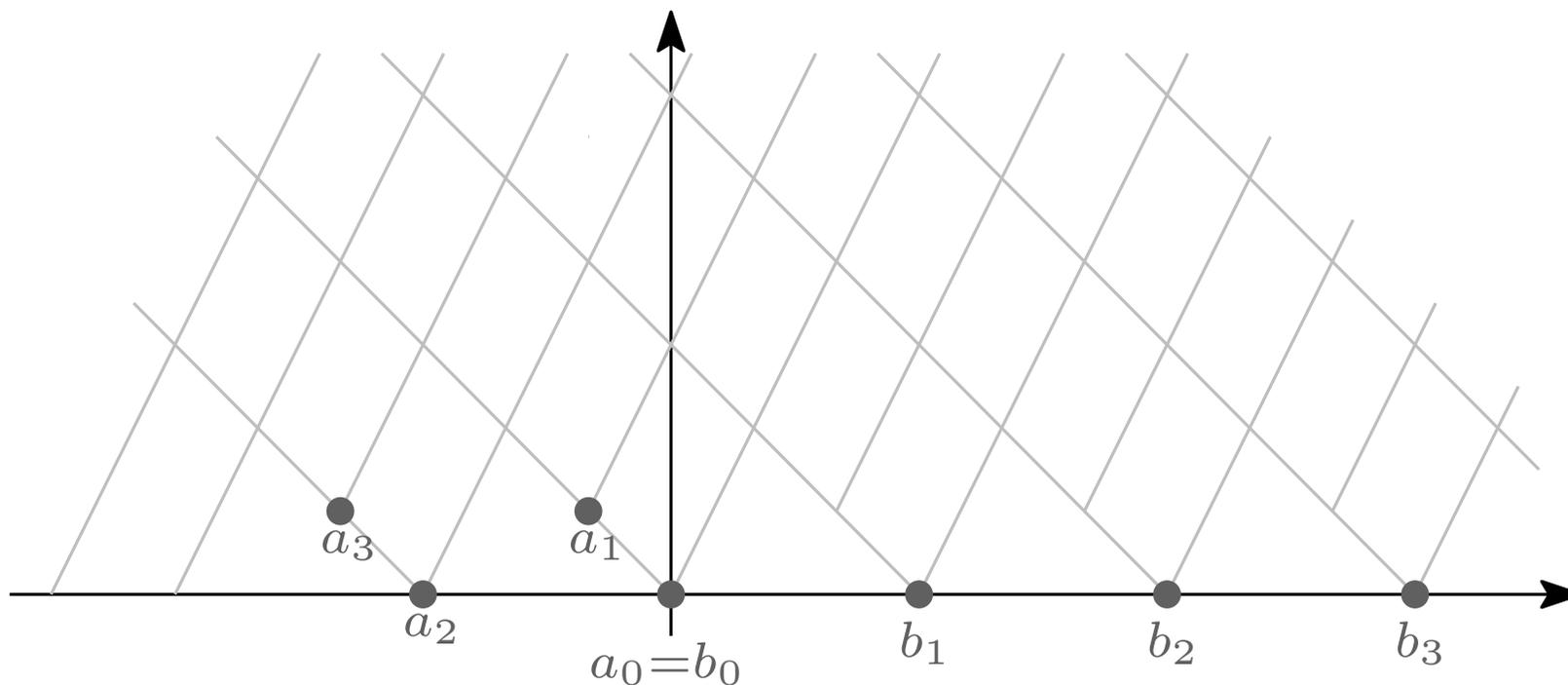
$$a_{2i} = (-3i, 0)$$

$$a_{2i+1} = (-3i - 1, 1)$$

poids :



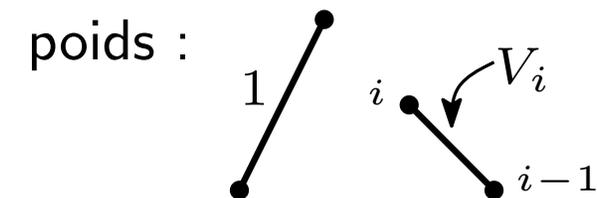
LGV Lemma et généralisation des déterminants de Hankel



$$b_i = (3i, 0)$$

$$a_{2i} = (-3i, 0)$$

$$a_{2i+1} = (-3i - 1, 1)$$

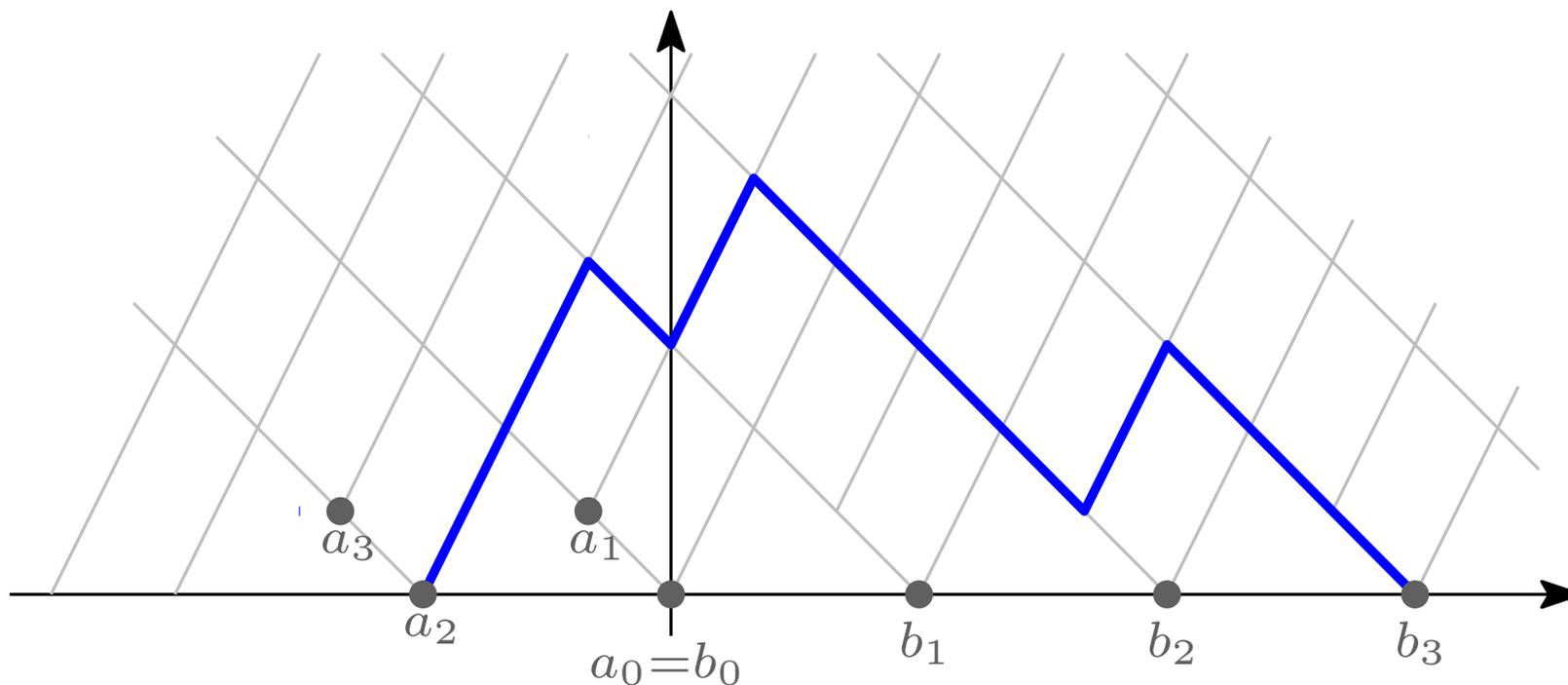


Lindström-Gessel-Viennot Lemma :

$$\det((C_{ij})_{i,j}) = \sum_{\sigma} (-1)^{\epsilon(\sigma)} \text{non-inter}(\sigma),$$

- $C_{ij} := \text{poids}(\text{chemins de } a_i \text{ à } b_j)$
- $\text{non-inter}(\sigma) := \text{poids}(\text{non-intersect de } a_i \text{ à } b_{\sigma(i)})$

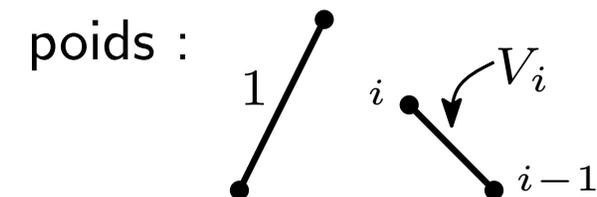
LGV Lemma et généralisation des déterminants de Hankel



$$b_i = (3i, 0)$$

$$a_{2i} = (-3i, 0)$$

$$a_{2i+1} = (-3i - 1, 1)$$



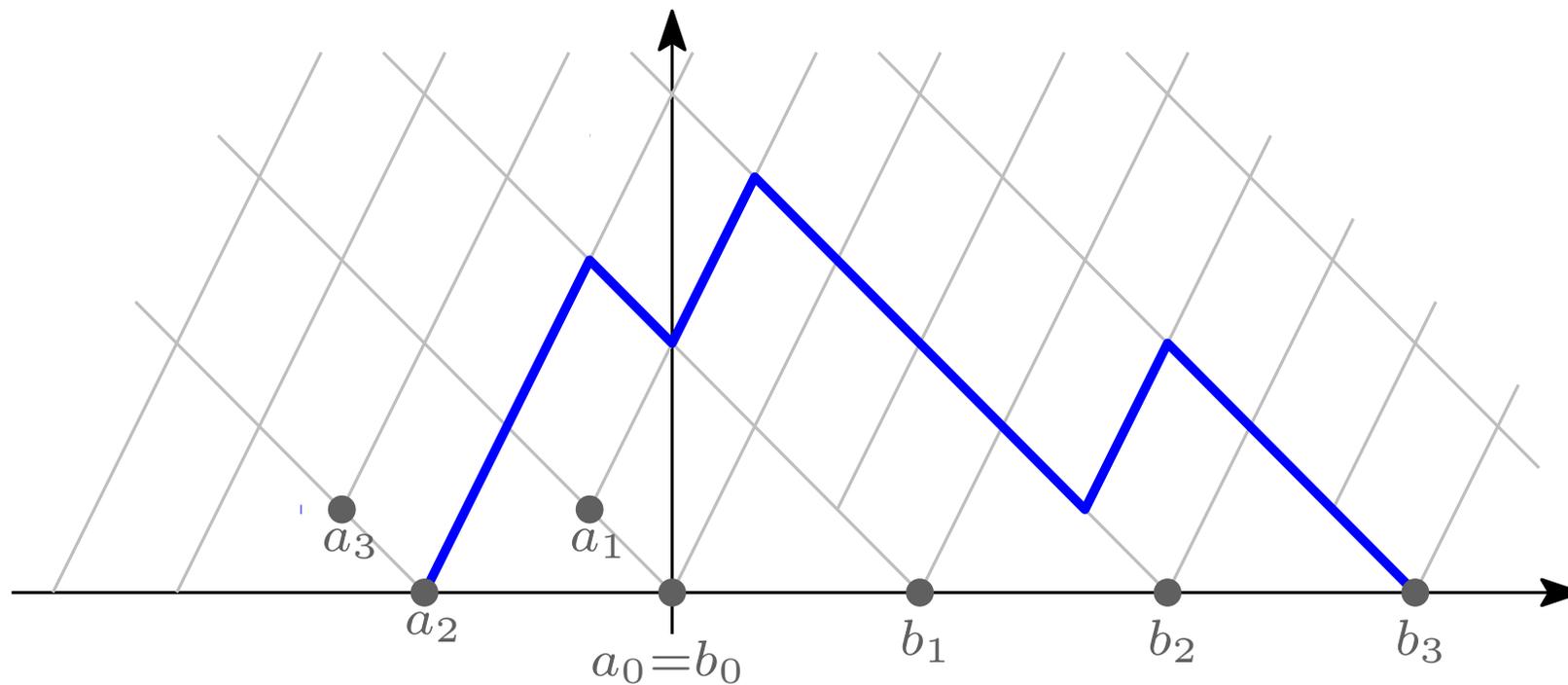
Lindström-Gessel-Viennot Lemma :

$$\det((C_{ij})_{i,j}) = \sum_{\sigma} (-1)^{\epsilon(\sigma)} \text{non-inter}(\sigma),$$

- $C_{ij} := \text{poids}(\text{chemins de } a_i \text{ à } b_j)$
- $\text{non-inter}(\sigma) := \text{poids}(\text{non-intersect de } a_i \text{ à } b_{\sigma(i)})$

$$C_{2i,j} =$$

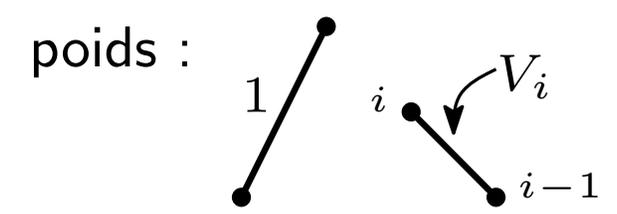
LGV Lemma et généralisation des déterminants de Hankel



$$b_i = (3i, 0)$$

$$a_{2i} = (-3i, 0)$$

$$a_{2i+1} = (-3i - 1, 1)$$



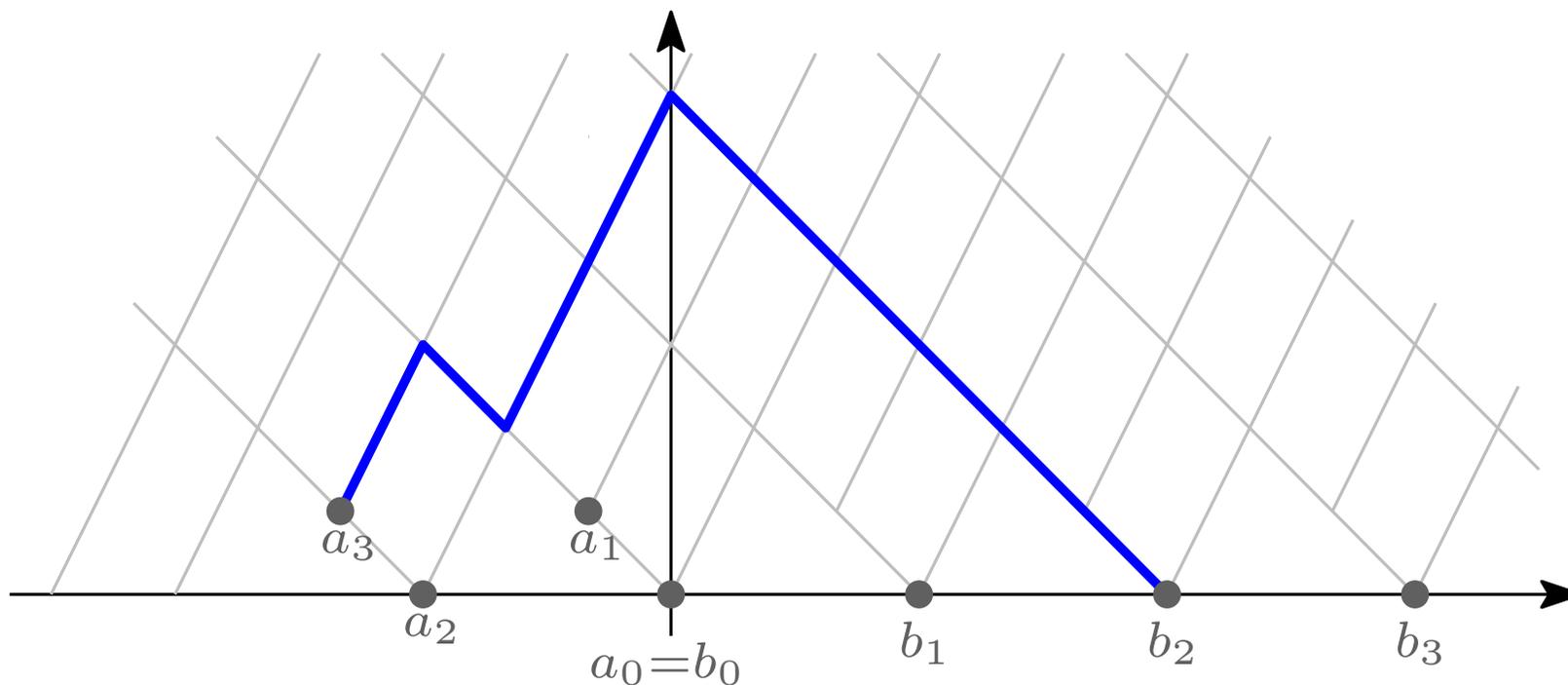
Lindström-Gessel-Viennot Lemma :

$$\det((C_{ij})_{i,j}) = \sum_{\sigma} (-1)^{\epsilon(\sigma)} \text{non-inter}(\sigma),$$

- $C_{ij} := \text{poids}(\text{chemins de } a_i \text{ à } b_j)$
- $\text{non-inter}(\sigma) := \text{poids}(\text{non-intersect de } a_i \text{ à } b_{\sigma(i)})$

$$C_{2i,j} = F_{i+j}$$

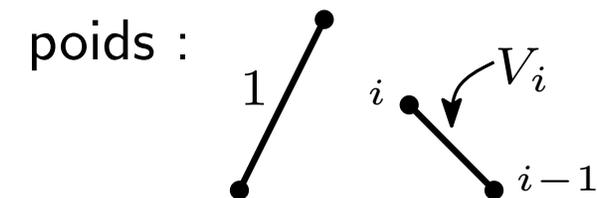
LGV Lemma et généralisation des déterminants de Hankel



$$b_i = (3i, 0)$$

$$a_{2i} = (-3i, 0)$$

$$a_{2i+1} = (-3i - 1, 1)$$



Lindström-Gessel-Viennot Lemma :

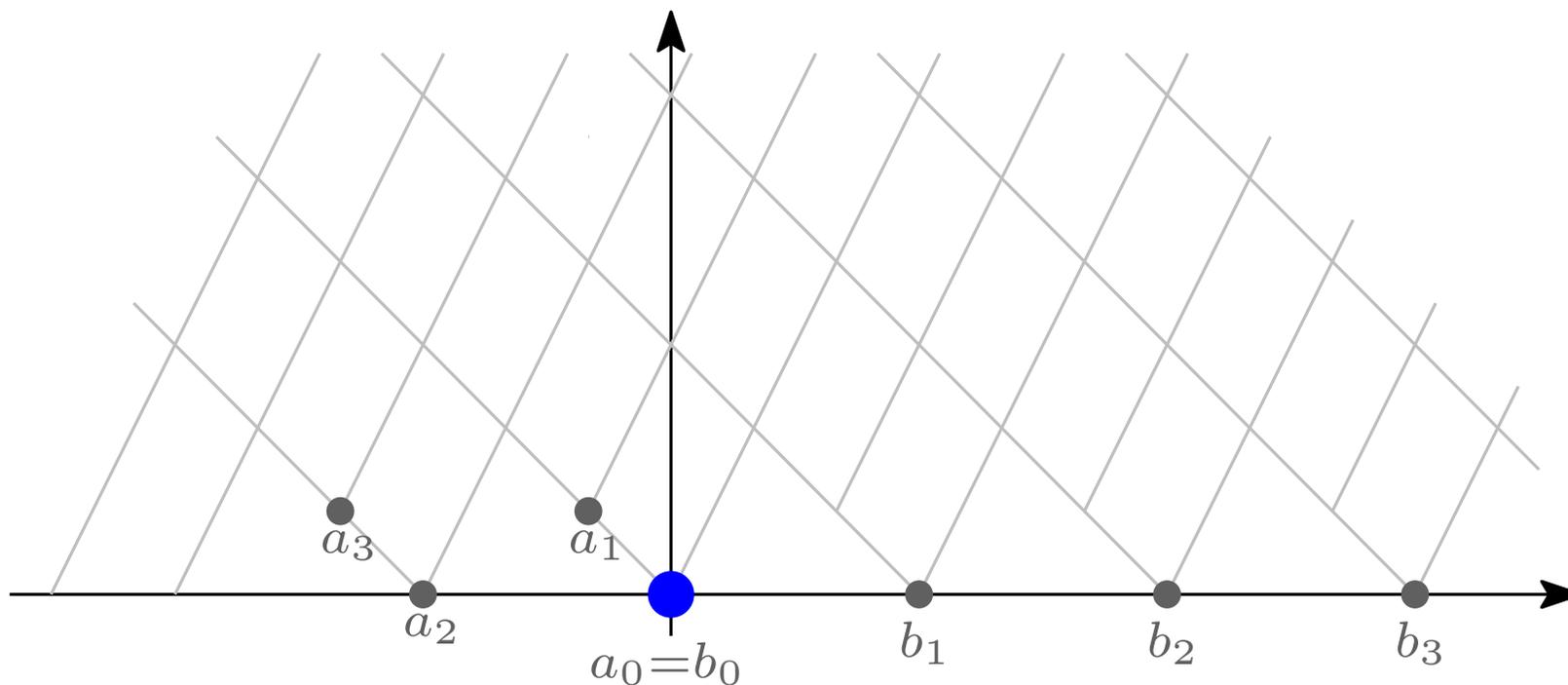
$$\det((C_{ij})_{i,j}) = \sum_{\sigma} (-1)^{\epsilon(\sigma)} \text{non-inter}(\sigma),$$

- $C_{ij} := \text{poids}(\text{chemins de } a_i \text{ à } b_j)$
- $\text{non-inter}(\sigma) := \text{poids}(\text{non-intersect de } a_i \text{ à } b_{\sigma(i)})$

$$C_{2i,j} = F_{i+j}$$

$$C_{2i+1,j} = F_{i+j}^{(1)}$$

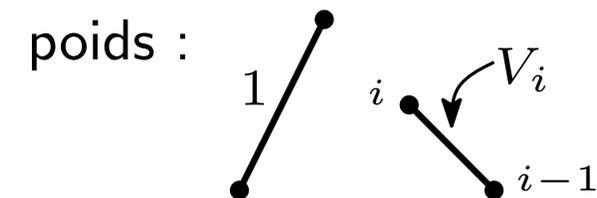
LGV Lemma et généralisation des déterminants de Hankel



$$b_i = (3i, 0)$$

$$a_{2i} = (-3i, 0)$$

$$a_{2i+1} = (-3i - 1, 1)$$



Lindström-Gessel-Viennot Lemma :

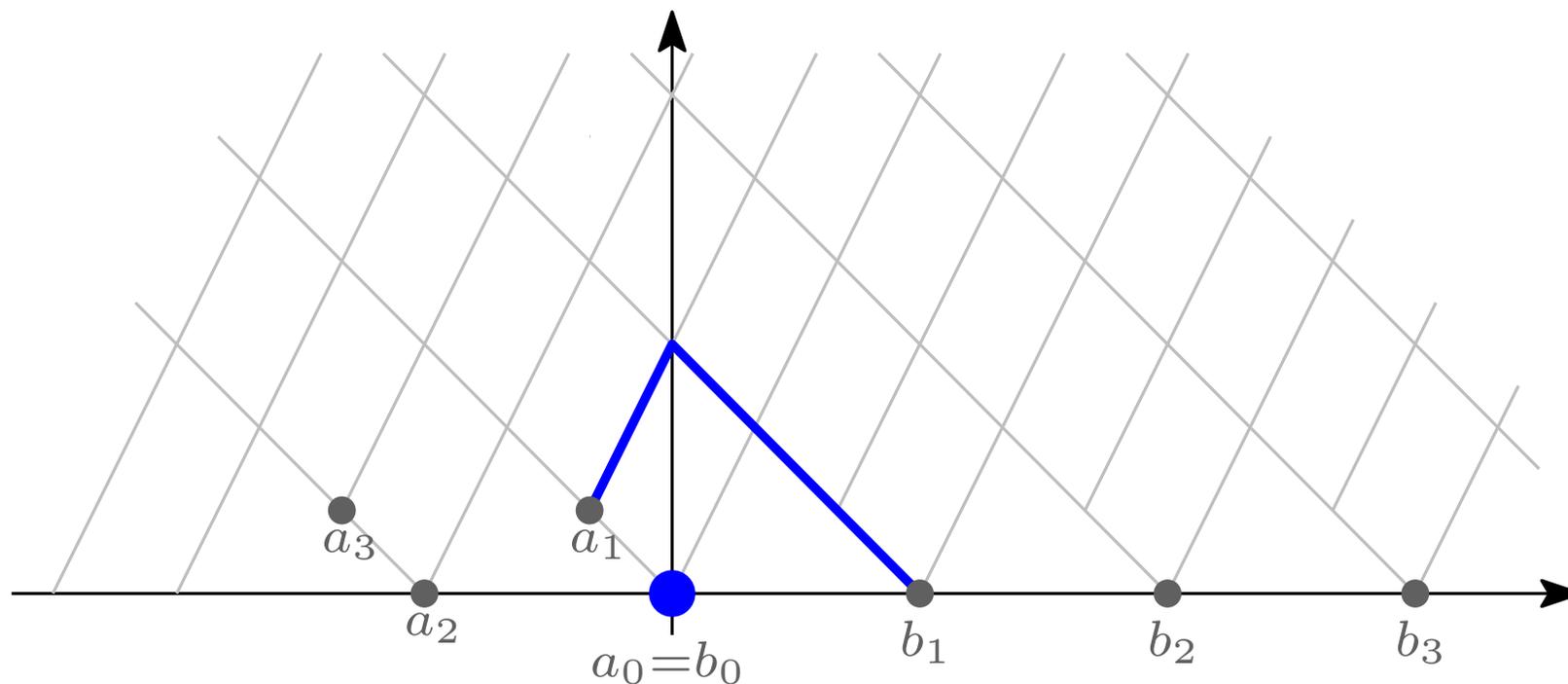
$$\det((C_{ij})_{i,j}) = \sum_{\sigma} (-1)^{\epsilon(\sigma)} \text{non-inter}(\sigma),$$

- $C_{ij} := \text{poids}(\text{chemins de } a_i \text{ à } b_j)$
- $\text{non-inter}(\sigma) := \text{poids}(\text{non-intersect de } a_i \text{ à } b_{\sigma(i)})$

$$C_{2i,j} = F_{i+j}$$

$$C_{2i+1,j} = F_{i+j}^{(1)}$$

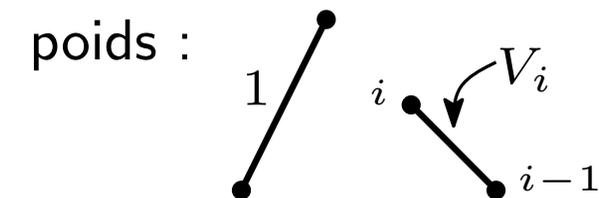
LGV Lemma et généralisation des déterminants de Hankel



$$b_i = (3i, 0)$$

$$a_{2i} = (-3i, 0)$$

$$a_{2i+1} = (-3i - 1, 1)$$



Lindström-Gessel-Viennot Lemma :

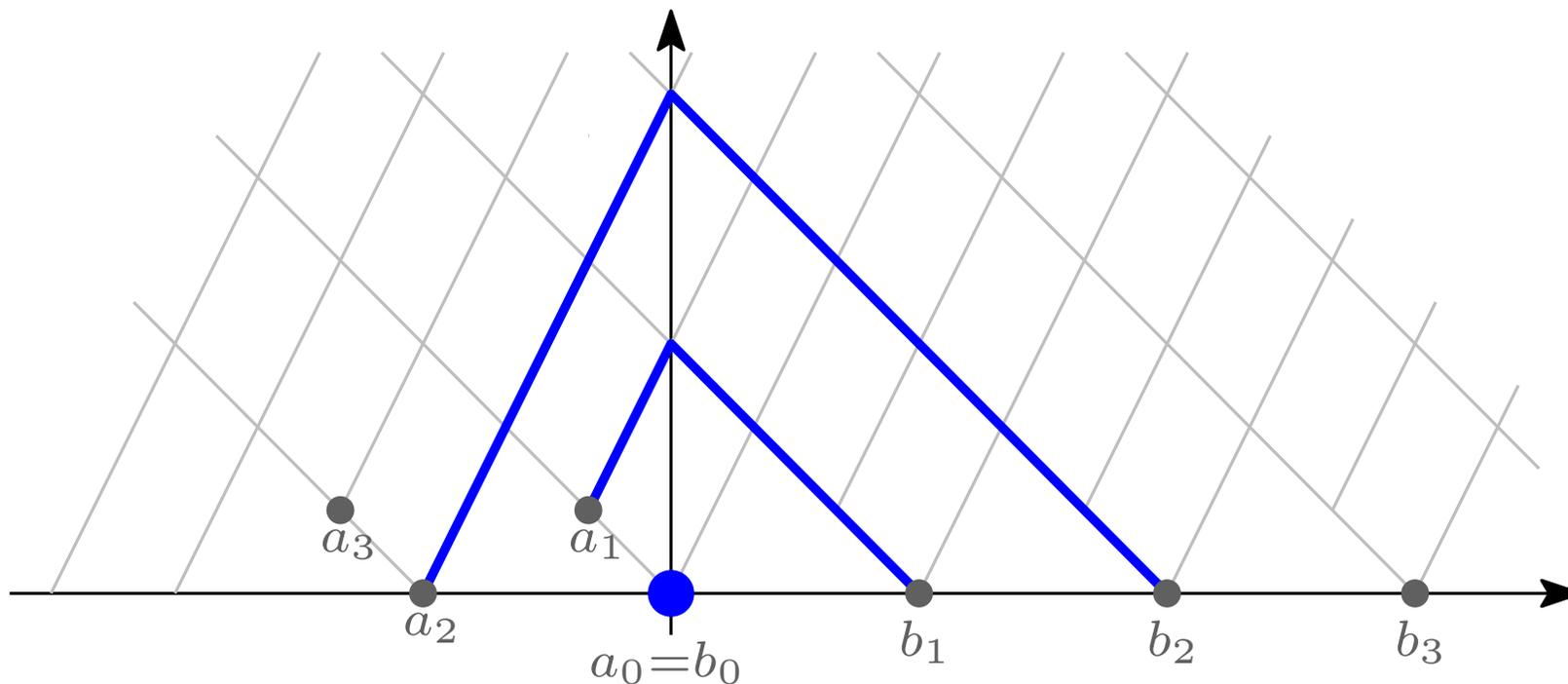
$$\det((C_{ij})_{i,j}) = \sum_{\sigma} (-1)^{\epsilon(\sigma)} \text{non-inter}(\sigma),$$

- $C_{ij} := \text{poids}(\text{chemins de } a_i \text{ à } b_j)$
- $\text{non-inter}(\sigma) := \text{poids}(\text{non-intersect de } a_i \text{ à } b_{\sigma(i)})$

$$C_{2i,j} = F_{i+j}$$

$$C_{2i+1,j} = F_{i+j}^{(1)}$$

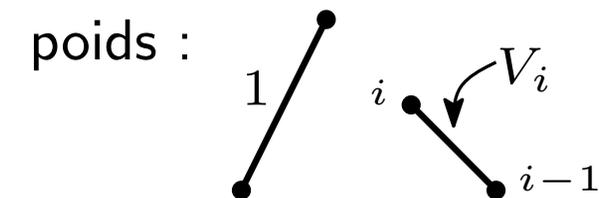
LGV Lemma et généralisation des déterminants de Hankel



$$b_i = (3i, 0)$$

$$a_{2i} = (-3i, 0)$$

$$a_{2i+1} = (-3i - 1, 1)$$



Lindström-Gessel-Viennot Lemma :

$$\det((C_{ij})_{i,j}) = \sum_{\sigma} (-1)^{\epsilon(\sigma)} \text{non-inter}(\sigma),$$

- $C_{ij} := \text{poids}(\text{chemins de } a_i \text{ à } b_j)$
- $\text{non-inter}(\sigma) := \text{poids}(\text{non-intersect de } a_i \text{ à } b_{\sigma(i)})$

$$C_{2i,j} = F_{i+j}$$

$$C_{2i+1,j} = F_{i+j}^{(1)}$$

seule config non-intersect :
 poids = $1(V_3V_2V_1)(V_6 \cdots V_1)$

LGV Lemma et généralisation des déterminants de Hankel

Lindström-Gessel-Viennot Lemma :

$$\det((C_{ij})_{i,j}) = \sum_{\sigma} (-1)^{\epsilon(\sigma)} \text{non-inter}(\sigma),$$

- $C_{ij} := \text{poids}(\text{chemins de } a_i \text{ à } b_j)$
- $\text{non-inter}(\sigma) := \text{poids}(\text{non-intersect de } a_i \text{ à } b_{\sigma(i)})$

$$C_{2i,j} = F_{i+j}$$

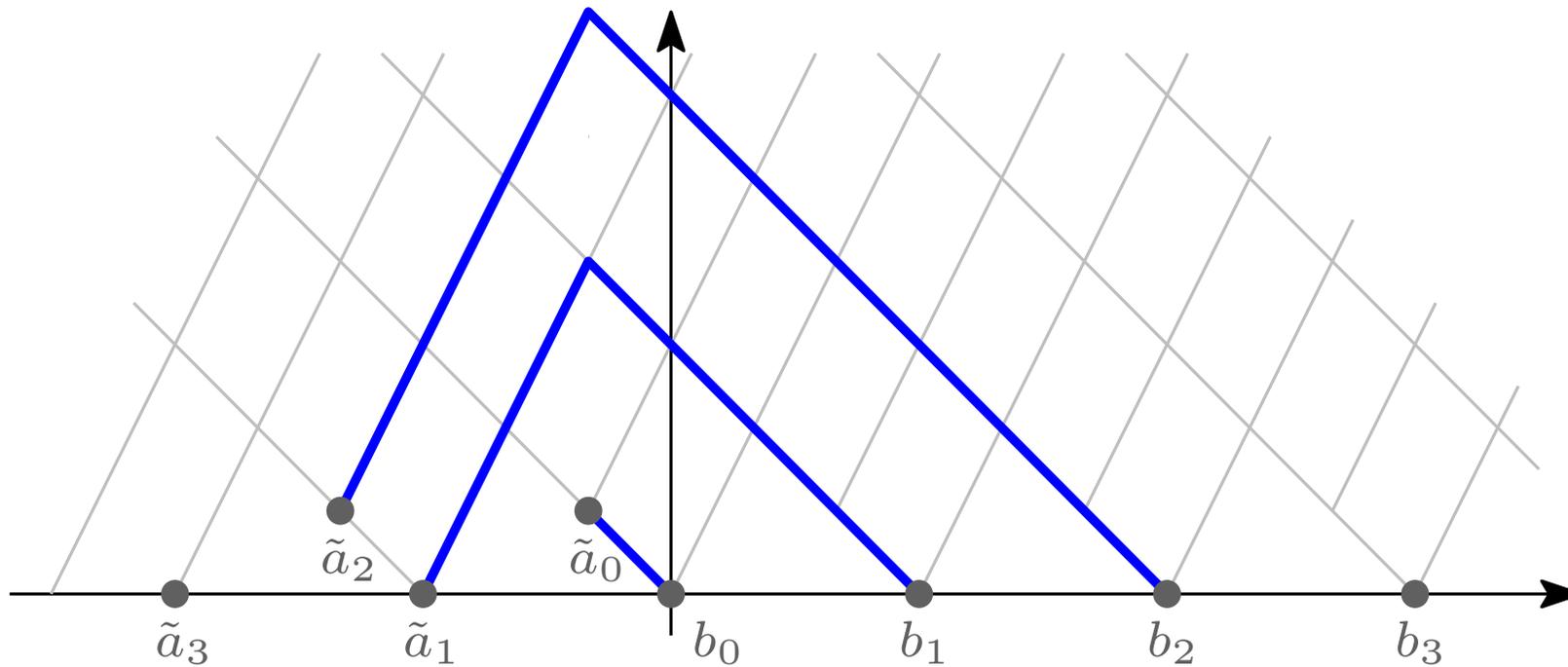
$$C_{2i+1,j} = F_{i+j}^{(1)}$$

seule config non-intersect :
poids = $1(V_3 V_2 V_1)(V_6 \cdots V_1)$

$$H_0[i] := \det \begin{pmatrix} F_0 & F_1 & \dots & F_i \\ F_0^{(1)} & F_1^{(1)} & \dots & F_i^{(1)} \\ F_1 & F_2 & \dots & F_{i+1} \\ F_1^{(1)} & F_2^{(1)} & \dots & F_{i+1}^{(1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\prod_{j=1}^{3i} V_j = \frac{H_0[i]}{H_0[i-1]}$$

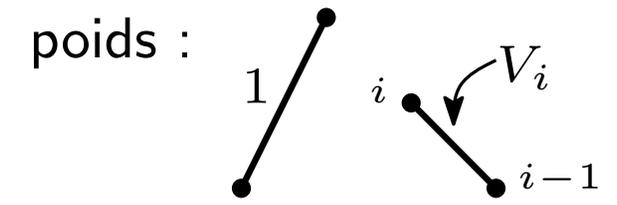
LGV Lemma et généralisation des déterminants de Hankel



$$b_i = (3i, 0)$$

$$\tilde{a}_{2i} = (-3i - 1, 1)$$

$$\tilde{a}_{2i+1} = (-3i - 3, 0)$$



Lindström-Gessel-Viennot Lemma :

$$\det((C_{ij})_{i,j}) = \sum_{\sigma} (-1)^{\epsilon(\sigma)} \text{non-inter}(\sigma),$$

- $C_{ij} := \text{poids}(\text{chemins de } a_i \text{ à } b_j)$
- $\text{non-inter}(\sigma) := \text{poids}(\text{non-intersect de } a_i \text{ à } b_{\sigma(i)})$

$$C_{2i,j} = F_{i+j}^{(1)}$$

$$C_{2i+1,j} = F_{i+j+1}$$

seule config non-intersect :
 poids = $V_1(V_4 \cdots V_1)(V_7 \cdots V_1)$

LGV Lemma et généralisation des déterminants de Hankel

$$H_0[i] := \det \begin{pmatrix} F_0 & F_1 & \dots & F_i \\ F_0^{(1)} & F_1^{(1)} & \dots & F_i^{(1)} \\ F_1 & F_2 & \dots & F_{i+1} \\ F_1^{(1)} & F_2^{(1)} & \dots & F_{i+1}^{(1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \Rightarrow \prod_{j=1}^{3i} V_j = \frac{H_0[i]}{H_0[i-1]}$$

$$H_1[i] := \det \begin{pmatrix} F_0^{(1)} & F_1^{(1)} & \dots & F_i^{(1)} \\ F_1 & F_2 & \dots & F_{i+1} \\ F_1^{(1)} & F_2^{(1)} & \dots & F_{i+1}^{(1)} \\ F_2 & F_3 & \dots & F_{i+2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \Rightarrow \prod_{j=1}^{3i+1} V_j = \frac{H_1[i]}{H_1[i-1]}$$

LGV Lemma et généralisation des déterminants de Hankel

$$\prod_{j=1}^{3i} V_j = \frac{H_0[i]}{H_0[i-1]}$$

$$\prod_{j=1}^{3i+1} V_j = \frac{H_1[i]}{H_1[i-1]}$$

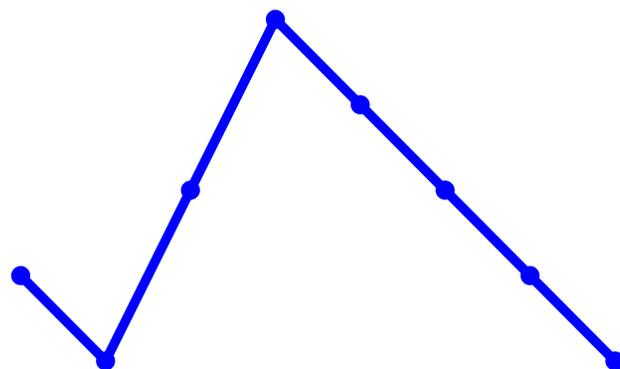
Théorème :

$$V_{3i+1} = \frac{H_1[i]H_0[i-1]}{H_1[i-1]H_0[i]}$$

Retour aux cartes

Interprétation des $F_i^{(1)}$ comme cartes ?

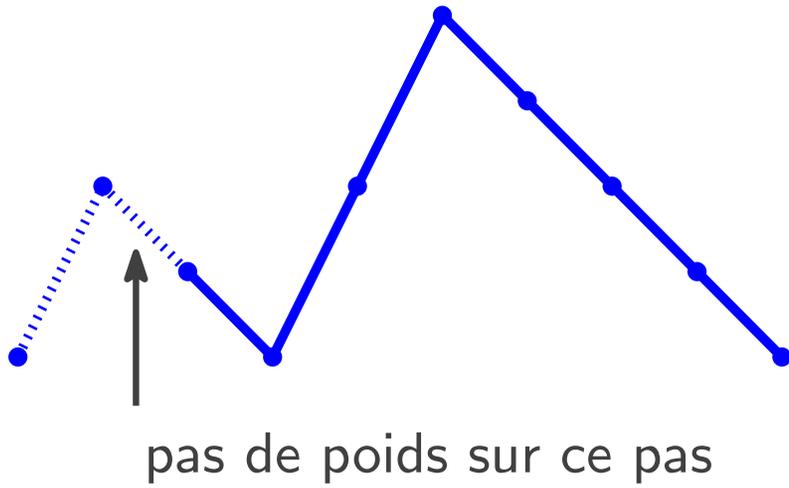
$$p = 3$$



Retour aux cartes

Interprétation des $F_i^{(1)}$ comme cartes ?

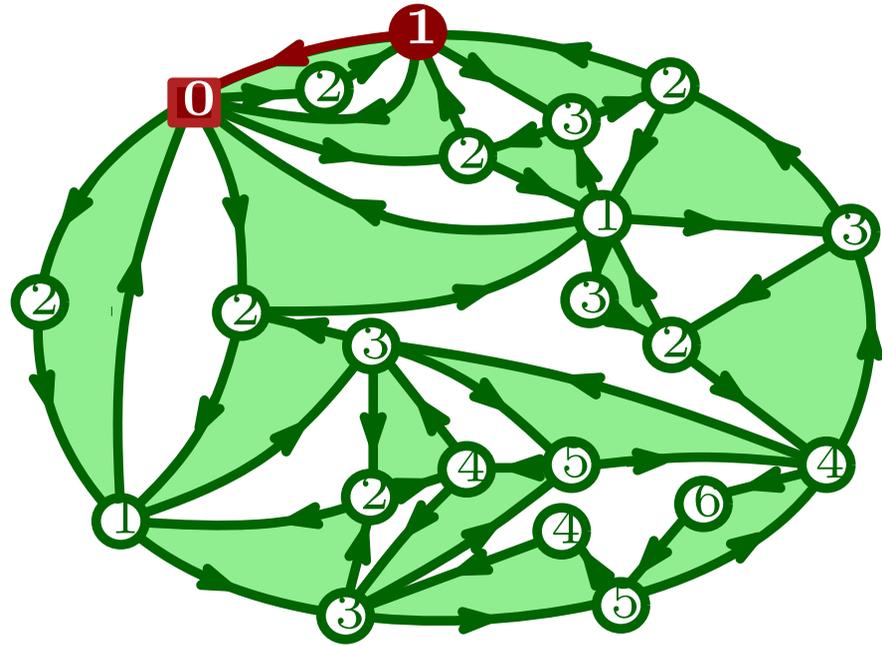
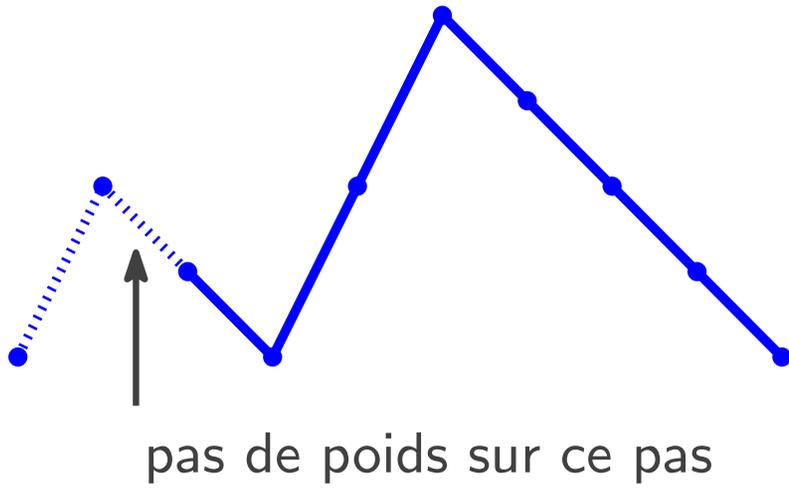
$$p = 3$$



Retour aux cartes

Interprétation des $F_i^{(1)}$ comme cartes ?

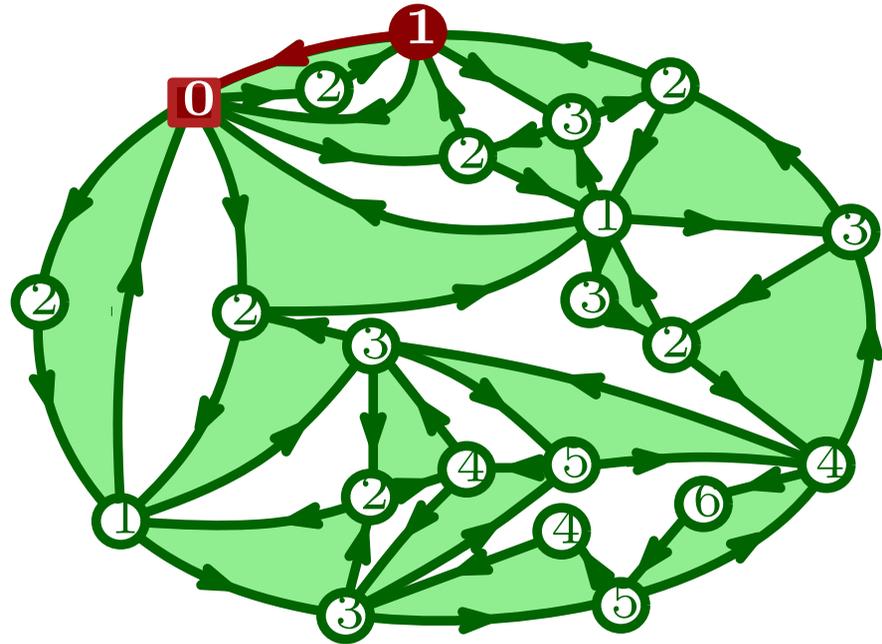
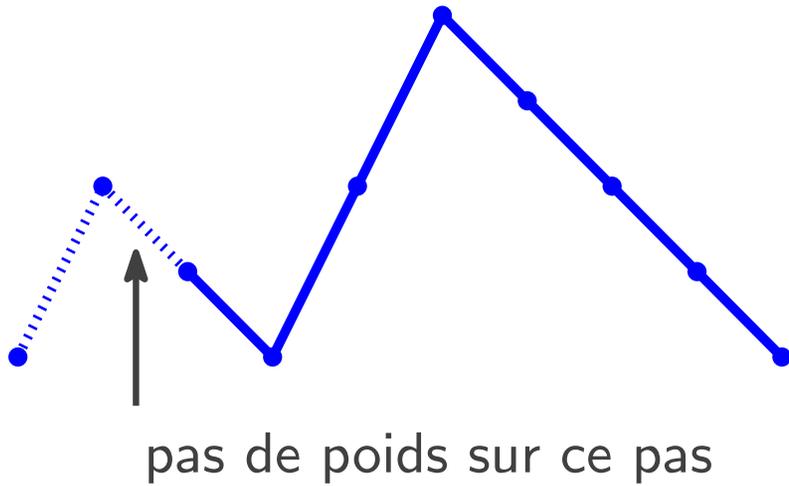
$$p = 3$$



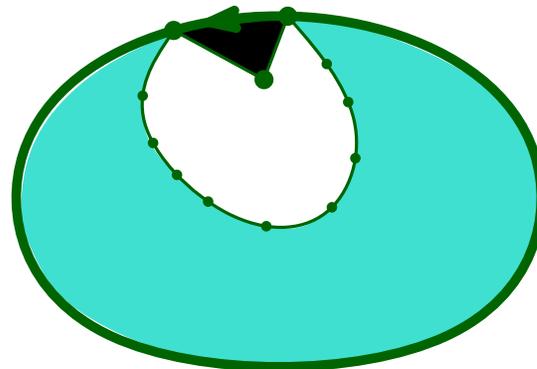
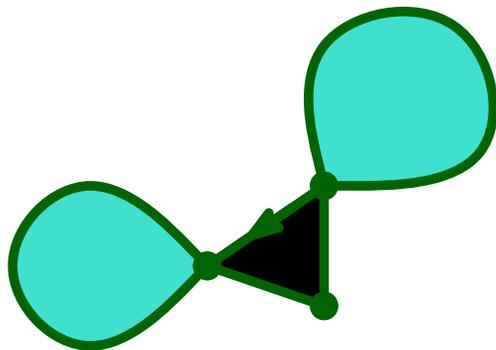
Retour aux cartes

Interprétation des $F_i^{(1)}$ comme cartes ?

$$p = 3$$



$\Rightarrow F_i^{(1)} =$ cartes avec voisin de la racine bivalent.



Bilan et perspectives

- Triangulations eulériennes = preuve entièrement combinatoire de la formule des V_i .

Bilan et perspectives

- Triangulations eulériennes = preuve entièrement combinatoire de la formule des V_i .

Objectifs :

- Mieux comprendre la combinatoire des $F^{(1)}, F^{(2)}, \dots$
- ... pour obtenir de nouvelles preuves et prouver les conjectures de Di Francesco

Bilan et perspectives

- Triangulations eulériennes = preuve entièrement combinatoire de la formule des V_i .

Objectifs :

- Mieux comprendre la combinatoire des $F^{(1)}, F^{(2)}, \dots$
- ... pour obtenir de nouvelles preuves et prouver les conjectures de Di Francesco

Merci !