Une construction combinatoires d'ensembles régénératifs

Philippe Marchal

CNRS et Université Paris 13

Ensembles régénératifs

$(X_n, n \geq 1)$ variables aléatoires indépendantes de même loi, à valeurs dans $(\mathbb{N} - \{0\}) \cup \{+\infty\}$.

$$\phi(t) = \sum_{n \in \mathbb{N}} P(X_1 = n) t^n$$

$(S_n, n \geq 0)$ marche aléatoire associée : $S_0 = 0$, $S_1 = X_1$, $S_2 = X_1 + X_2 \ldots$
Ensemble régénératif associé : $R = \{S_0, S_1, S_2 \ldots\}$.

Ensembles régénératifs

$(X_n, n \geq 1)$ variables aléatoires indépendantes de même loi, à valeurs dans $(\mathbb{N} - \{0\}) \cup \{+\infty\}$.

$$\phi(t) = \sum_{n \in \mathbb{N}} P(X_1 = n) t^n$$

$(S_n, n \geq 0)$ marche aléatoire associée : $S_0 = 0$, $S_1 = X_1$, $S_2 = X_1 + X_2 \dots$
Ensemble régénératif associé : $R = \{S_0, S_1, S_2 \dots\}$.
Propriété de régénération : pour tout n, conditionnellement à $n \in R$, l'ensemble $(R - n) \cap \mathbb{N}$ a même loi que R et est indépendant de $R \cap [0, n]$.

Ensembles régénératifs spéciaux

Un ensemble régénératif R de fonction génératrice ϕ est spécial s'il admet un ensemble régénératif dual $\widehat{R}$ de fonction génératrice $\widehat{\phi}$, avec

$$(1 - \phi(t))(1 - \widehat{\phi}(t)) = 1 - t$$

Ensembles régénératifs spéciaux

Un ensemble régénératif R de fonction génératrice ϕ est spécial s'il admet un ensemble régénératif dual $\widehat{R}$ de fonction génératrice $\widehat{\phi}$, avec

$$(1 - \phi(t))(1 - \widehat{\phi}(t)) = 1 - t$$

De manière équivalente : pour tout n,

$$G_n \overset{loi}{=} n - \widehat{G_n}$$

avec $G_n = \max\{i \leq n, i \in R\}$.

Ensembles régénératifs spéciaux

Un ensemble régénératif R de fonction génératrice ϕ est spécial s'il admet un ensemble régénératif dual $\widehat{R}$ de fonction génératrice $\widehat{\phi}$, avec

$$(1-\phi(t))(1-\widehat{\phi}(t)) = 1-t$$

De manière équivalente : pour tout n,

$$G_n \overset{loi}{=} n - \widehat{G_n}$$

avec $G_n = \max\{i \leq n, i \in R\}$.
Exemple classique : $(Y_n, n \geq 0)$ marche aléatoire à valeurs réelles.
R ensemble des temps de record vers le haut.
$\widehat{R}$ ensemble des temps de record vers le bas.

Une construction combinatoire

Soit $\alpha : [0,1] \to [0,1]$ une fonction mesurable.
Pour chaque n, on construit un mur de hauteur h_n aléatoire uniforme sur $[0,1]$. Ce mur est vert avec proba $\alpha(h_n)$ et rouge avec proba $1 - \alpha(h_n)$.

Une construction combinatoire

Soit $\alpha : [0,1] \to [0,1]$ une fonction mesurable.
Pour chaque n, on construit un mur de hauteur h_n aléatoire uniforme sur $[0,1]$. Ce mur est vert avec proba $\alpha(h_n)$ et rouge avec proba $1 - \alpha(h_n)$.
L'entier n percole si, en se mettant à droite de n et en regardant vers la gauche, on ne voit que du vert.

Une construction combinatoire

Soit $\alpha : [0,1] \to [0,1]$ une fonction mesurable.
Pour chaque n, on construit un mur de hauteur h_n aléatoire uniforme sur $[0,1]$. Ce mur est vert avec proba $\alpha(h_n)$ et rouge avec proba $1-\alpha(h_n)$.
L'entier n percole si, en se mettant à droite de n et en regardant vers la gauche, on ne voit que du vert.

Théorème

L'ensemble des points qui percolent est un ensemble régénératif spécial $R^{(\alpha)}$ de fonction génératrice

$$\phi^{(\alpha)}(t) = 1 - \exp\left(-\int_0^1 \frac{t\alpha(x)}{1-tx}dx\right)$$

Son dual est de fonction génératrice $\phi^{(1-\alpha)}$.

Remarques

α constante $\rightarrow$ version discrète des subordinateurs stables. Dans ce cas, la loi de G_n est donnée par une urne de Polya.

Remarques

α constante $\to$ version discrète des subordinateurs stables. Dans ce cas, la loi de G_n est donnée par une urne de Polya.

On peut choisir la couleur du mur en se donnant des variables iid U_n uniformes sur $[0, 1]$: le mur est vert si $U_n \leq \alpha(h_n)$.

On construit ainsi simultanément, sur un unique espace de probabilités, les ensemble régénératifs $R^{(\alpha)}$ pour toutes les fonctions mesurables $\alpha : [0, 1] \to [0, 1]$. Si $\alpha \leq \beta$, on a $R^{(\alpha)} \subset R^{(\beta)}$.

Remarques

α constante $\rightarrow$ version discrète des subordinateurs stables. Dans ce cas, la loi de G_n est donnée par une urne de Polya.

On peut choisir la couleur du mur en se donnant des variables iid U_n uniformes sur $[0, 1]$: le mur est vert si $U_n \leq \alpha(h_n)$.

On construit ainsi simultanément, sur un unique espace de probabilités, les ensemble régénératifs $R^{(\alpha)}$ pour toutes les fonctions mesurables $\alpha : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$. Si $\alpha \leq \beta$, on a $R^{(\alpha)} \subset R^{(\beta)}$.

On peut envisager des généralisations, en prenant une loi quelconque pour la hauteur du mur et en ne regardant pas horizontalement.