PROBABILITÉS LIBRES ET MATRICES ALÉATOIRES

Philippe Biane

ALEA

Luminy, 05-06/03/2012

Rappels de l'épisode précédent

Definition (Voiculescu, 1983)

$\{A_i; i \in I\}$=*famille de sous-algèbres (unifères) de A.*

Les A_i *sont libres dans* (A, τ) *ssi pour tous* $a_1, \ldots, a_n \in A$ *tels que*

i) $\tau(a_j) = 0$ *pour tout* j,

ii) $a_j \in A_{i_j}$, $i_1 \neq i_2$, $i_2 \neq i_3, \ldots, i_{n-1} \neq i_n$,

on a

$$\tau(a_1 \ldots a_n) = 0$$

Cumulants libres

$$\tau(a_1 \dots a_n) = \sum_{\pi \in NC(n)} R_\pi(a_1, \dots, a_n)$$

Théorème (Speicher). Les $(A_i; i \in I)$ sont libres dans (A, τ), si et seulement si, pour tous $a_1 \in A_{i_1}, \dots, a_n \in A_{i_n}$, on a

$$R_n(a_1, \dots, a_n) = 0$$

s'il existe j, k tels que $i_j \neq i_k$.

Matrices aléatoires et liberté

$$X_i = U_i D_i U_i^*$$

D_i sont réelles diagonales (fixées), et les U_i unitaires de Haar indépendantes.

Soient $a_1, \ldots, a_n \in (A, \tau)$ libres, telles que

$$\tau(a_i^r) = tr(X_i^r) = tr(D_i^r) \qquad r = 1, 2, \ldots$$

alors, pour N grand, on a

$$tr(X_{i_1} \ldots X_{i_k}) \sim \tau(a_{i_1} \ldots a_{i_k})$$

avec probabilité proche de 1.

Convolution libre

A =algèbre; τ=état sur A.

Si x_1, x_2 sont libres dans A.

$$\tau(x_1^n) = \int_{\mathbb{R}} x^n \mu_1(dx); \qquad \tau(x_2^n) = \int_{\mathbb{R}} x^n \mu_2(dx)$$

Il existe une mesure de probabilités $\mu_1 \boxplus \mu_2$ telle que

$$\tau((x_1 + x_2)^n) = \int_{\mathbb{R}} x^n \mu_1 \boxplus \mu_2(dx)$$

$\boxplus$ est la *convolution libre*

Modèle matriciel

$$X_1 = U_1 D_1 U_1^* \quad X_2 = U_2 D_2 U_2^*$$

de valeurs propres $\{\lambda_k^{(1)}\}, \{\lambda_k^{(2)}\}$.

$$\frac{1}{N}\sum_k \delta_{\lambda_k^{(i)}} \to \mu_i$$

$X_1 + X_2$ a un spectre γ_k

$$\frac{1}{N}\sum_k \delta_{\gamma_k} \to \mu_1 \boxplus \mu_2$$

On peut prédire le spectre de $X_1 + X_2$
connaissant seulement le spectre de X_1 et le spectre de X_2.

Exemple:

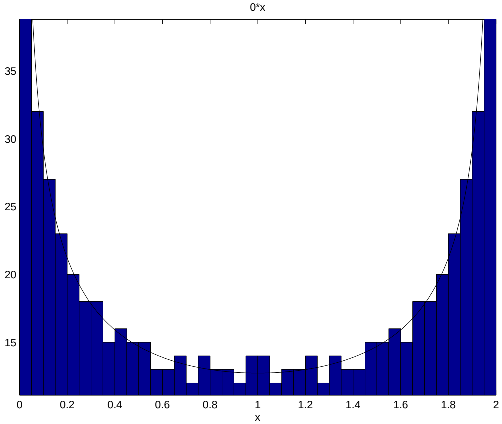
Π_1 et Π_2, matrices de taille $N \times N$
$=$Projections orthogonales sur des sous-espace de dimension $N/2$.

$$\Pi_i = U_i \begin{pmatrix} I_{N/2} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} U_i^*$$

$$\mu_1 = \mu_2 = \frac{1}{2}\delta_0 + \frac{1}{2}\delta_1$$

$$\mu_1 \boxplus \mu_2 = \frac{dx}{\pi\sqrt{x(2-x)}};\ x \in [-2, 2]$$

Histogramme du spectre de $\Pi_1 + \Pi_2 \qquad (N = 800)$



$$y = \frac{1}{\pi\sqrt{x(2-x)}}$$

Calcul de la convolution libre

$$G_\mu(z) = \int \frac{1}{z-x}\mu(dx) = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} z^{-n-1} \int x^n \mu(dx)$$

$$K_\mu(G_\mu(z)) = G_\mu(K_\mu(z)) = z; \qquad K_\mu(z) = \frac{1}{z} + \sum_{n=0}^{\infty} R_n(\mu) z^n$$

$$V_\mu(z) = K_\mu(z) - \frac{1}{z}$$

Théorème (Voiculescu, 1986)

$$R_n(\mu_1 \boxplus \mu_2) = R_n(\mu_1) + R_n(\mu_2)$$

$$V_{\mu_1 \boxplus \mu_2}(z) = V_{\mu_1}(z) + V_{\mu_2}(z)$$

preuve du Théorème

Lemme 1 Si $\tau(a^k) = \int x^k d\mu(x); k = 1, 2, \ldots$ on a (cf exercices)

$$R_n(\mu) = R_n(a, \ldots, a)$$

Lemme 2 Si a et b sont libres alors

$$R_n(a+b, \ldots, a+b) = R_n(a, \ldots, a) + R_n(b, \ldots, b)$$

Les $R_n(\mu)$ sont appelés les *cumulants libres* de μ. Comparez avec

$$\log \int e^{itx} \mu(dx) = \sum_n (it)^n C_n(\mu)/n!$$

où C_n sont les *cumulants* de μ.

$$C_n(\mu_1 * \mu_2) = C_n(\mu_1) + C_n(\mu_2).$$

Cas des mesures sans moments

$$G_\mu(z) = \int \frac{1}{z-x}\mu(dx)$$

est inversible dans un voisinage de ∞ dans le demi-plan complexe supérieur

$$K_\mu(G_\mu(z)) = G_\mu(K_\mu(z)) = z$$

$$V_\mu(z) = K_\mu(z) - \frac{1}{z}$$

$$V_{\mu_1 \boxplus \mu_2}(z) = V_{\mu_1}(z) + V_{\mu_2}(z)$$

Théorème de la limite centrale libre

$X_1, \ldots, X_n \in (A, \tau)$ variables libres identiquement distribuées.

$$\tau(X_i) = 0 \qquad \tau(X_i^2) = \sigma^2$$

Théorème (Voiculescu, 1983)

$$\frac{X_1 + \ldots + X_n}{\sqrt{n}} \to_{n\to\infty}^{\text{(en loi)}} \frac{1}{\pi\sigma}\sqrt{4\sigma^2 - x^2}dx \qquad x \in [-2\sigma, 2\sigma]$$

Preuve du TCL libre

μ=loi de X (centrée).

$$K_\mu(z) = \frac{1}{z} + z\int x^2 d\mu + R_3(\mu)z^2 + \dots$$

ν_n=loi de $\frac{X_1+\dots,X_n}{\sqrt{n}}$ on a

$$R_k(\nu_n) = n^{-k/2}(nR_k(\mu))$$

d'où

$$K_{\nu_n}(z) = \frac{1}{z} + z\int x^2 d\mu + O(1/\sqrt{n})$$

La loi du demi-cercle de variance σ^2

$$w_{\sigma^2}(dx) = \frac{1}{2\pi\sigma^2}\sqrt{4\sigma^2 - x^2}dx; \quad x \in [-2\sigma, 2\sigma]$$

est caractérisée par

$$K_{w_{\sigma^2}}(z) = \frac{1}{z} + z\sigma^2$$

$$V_{w_{\sigma^2}}(z) = z\sigma^2$$

Remarque On a

$$w_s \boxplus w_t = w_{s+t}$$

$$w_s \boxplus w_t = w_{s+t}$$

La loi du demi-cercle, est “librement” indéfiniment divisible
On peut complètement caractériser les lois indéfiniment divisibles au sens de la convolution libre.
Par exemple les lois de Cauchy forment un semi-groupe de convolution

$$C_t \boxplus C_s = C_{t+s} \qquad C_t(dx) = \frac{tdx}{\pi(x^2+t^2)}$$

Il y a une bijection (Bercovici-Pata) entre lois indéfiniment divisibles libres et classiques.

Convolution multiplicative

Au lieu d'additionner les variables on peut les multiplier.

Si a et b sont libres, il existe une formule pour calculer les moments de ab en fonction de ceux de a et de b.
Attention: on ne peut pas prendre le log pour se ramener au cas de l'addition:

$$\log(ab) \neq \log(a) + \log(b)$$

car a et b ne commutent pas.

Le théorème de Wigner

M =matrice aléatoire hermitienne gaussienne (GUE) de covariance:

$$E[|Tr(MA)|^2] = Tr(A^2)$$

la loi empirique des valeurs propres de M converge vers la loi semi-circulaire ($N \to \infty$).

$$\frac{1}{N}\sum_i \delta_{\lambda_i} \to w$$

On a

$$M = \frac{M_1 + M_2 + \ldots + M_n}{\sqrt{n}}$$

avec des matrices $M_1, \ldots, M_n$ aléatoires iid.

$$
\begin{array}{ccc}
\frac{M_1+M_2+\ldots+M_n}{\sqrt{n}} & \longrightarrow_{N\to\infty} & \frac{X_1+X_2+\ldots+X_n}{\sqrt{n}} \\
\downarrow_{n\to\infty} & & \downarrow_{n\to\infty} \\
M & \longrightarrow_{N\to\infty} & w
\end{array}
$$

Vecteur propres de la somme de deux matrices

x_1, x_2 deux variables libres,

$$\tau(x_i^n) = \int x^n \mu_i(dx); \quad G_{\mu_i}(z) = \int \frac{1}{z-x}\mu_i(dx)$$

Il existe un noyau de probabilités $p(x, dy)$ tel que

$$\tau(Q(x_1+x_2)P(x_1)) = \int \left(\int Q(y)p(x,dy) \right) P(x))\mu_1(dx)$$

formellement:

$$\tau(Q(x_1+x_2)|x_1) = \int Q(y)p(x_1,dy)$$

Le noyau p est caractérisé par une fonction analytique

$$F : \mathbf{C}^+ \to \mathbf{C}^+$$

$$\int \frac{1}{z-y} p(x, dy) = \frac{1}{F(z) - x}$$

$$G_{\mu_1}(F(z)) = G_{\mu_1 \boxplus \mu_2}(z)$$

$$\begin{aligned}
G_{\mu_1 \boxplus \mu_2}(z) &= \tau\left(\frac{1}{z-(x_1+x_2)}\right) \\
&= \tau\left(\tau\left(\frac{1}{z-(x_1+x_2)}\middle| x_1\right)\right) \\
&= \tau\left(\frac{1}{F(z)-x_1}\right) \\
&= G_{\mu_1}(F(z))
\end{aligned}$$

$$F = K_{\mu_1} \circ G_{\mu_1 \boxplus \mu_2}$$

Interprètation matricielle

X_1 et X_2, matrices hermitiennes,

λ_i=spectre de X_1, ω_i=vecteurs propres de X_1;
μ_i=spectre de $X_1 + X_2$, η_i=vecteurs propres de $X_1 + X_2$;

$$tr(Q(X_1 + X_2)P(X_1)) = \frac{1}{N}\sum_{i,j} Q(\lambda_i)P(\mu_j)|\langle\omega_i, \eta_j\rangle|^2$$

Lorsque $N \to \infty$ le noyau $p(\lambda_i, \mu_j) = |\langle\omega_i, \eta_j\rangle|^2$ converge vers $p(x, dy)$

Exemple

$$\mu_1 = \mu_2 = \frac{1}{2}\delta_0 + \frac{1}{2}\delta_1$$

Le noyau vaut:

$$p(0,dx) = \frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{2-x}{x}}dx; \quad p(1,dx) = \frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{x}{2-x}}dx$$

On a bien

$$\frac{1}{2}p(0,dx) + \frac{1}{2}p(1,dx) = \frac{1}{\pi\sqrt{x(2-x)}}dx$$

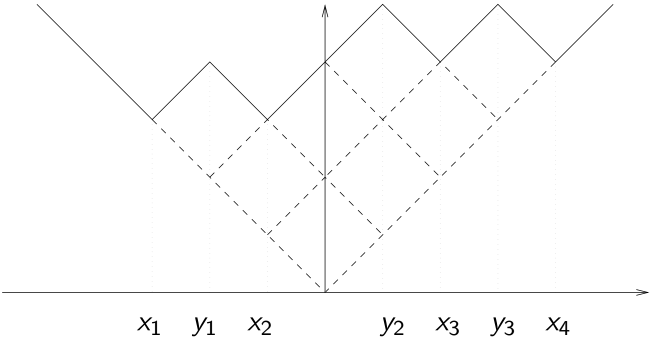
Probabilités libres et groupe symétrique

Partition:

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq 0$$

$$n = \sum \lambda_i$$

Les représentations irréductibles de S_n sont paramétrées par les partitions de n.



Mesure de transition

Il existe une unique probabilité m_λ telle que

$$G_{m_\lambda}(z) = \frac{\prod_{i=1}^{n-1}(z - y_k)}{\prod_{i=1}^{n}(z - x_k)}$$

$$m_\lambda = \sum_{k=1}^{n} \mu_k \delta_{x_k} \qquad \mu_k = \frac{\prod_{i=1}^{n-1}(x_k - y_i)}{\prod_{i\neq k}(x_k - x_i)}$$

$$K_\lambda = G_\lambda^{\langle -1 \rangle}$$

$$K_\lambda(z) = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} R_n(\lambda) z^{n-1}$$

Les R_n sont les cumulants libres de la partition.

Asymptotique des caractères

λ partition de q (grand)

On suppose que le nombre de lignes et de colonnes de λ est $= O(\sqrt{q})$.

$\chi_\lambda =$ caractère de la représentation associée à λ.
$\sigma_k =$ cycle d'ordre k, pour q grand:

$$\chi_\lambda(\sigma_k) \sim R_{k+1}(\lambda)$$

Plus généralement, il existe une formule exacte:

$$\chi_\lambda(\sigma_k) = R_{k+1}(\lambda) + Pol(R_j(\lambda))$$

Les polynômes ont des coefficients indépendants de q: formule universelle pour les caractères.

Les coefficients sont des entiers positifs, (conjecture de Kerov, prouvée par V. Féray 2009).

RÉFÉRENCES

P. Biane Free probability for probabilists

A. Nica, R. Speicher, Combinatorics of free probability.

G. Anderson, A. Guionnet, O. Zeitouni, Random Matrices, 2009