

# Cartes planaires équipées d'une forêt couvrante

COURTIEL Julien

travail joint avec Mireille BOUSQUET-MÉLOU, LaBRI.

ALEA, 6 mars 2012



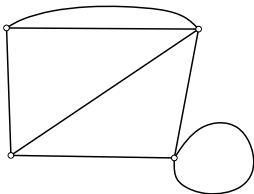
# Cartes planaires

## Définition

### Définition

Carte planaire = graphe connexe  
+ plongement de ce graphe sur une sphère,  
le tout considéré à isotopie/déformation près.

### Exemple :



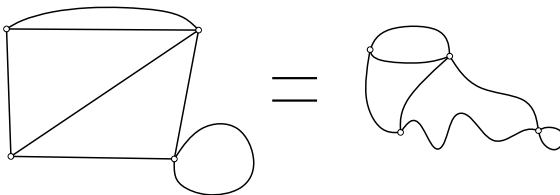
# Cartes planaires

## Définition

### Définition

Carte planaire = graphe connexe  
+ plongement de ce graphe sur une sphère,  
le tout considéré à isotopie/déformation près.

**Exemple :**



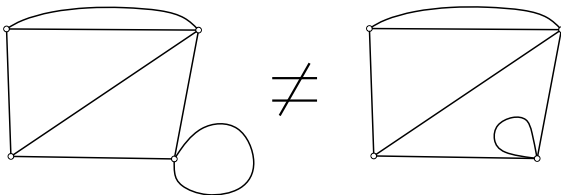
# Cartes planaires

## Définition

### Définition

Carte planaire = graphe connexe  
+ plongement de ce graphe sur une sphère,  
le tout considéré à isotopie/déformation près.

**Exemple :**



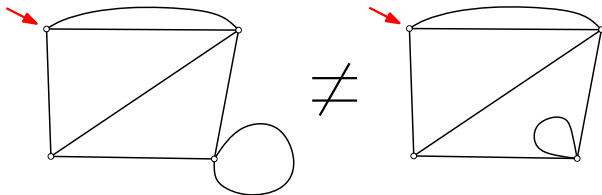
# Cartes planaires

## Définition

### Définition

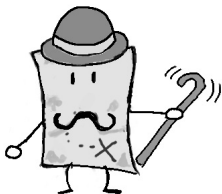
Carte planaire = graphe connexe  
+ plongement de ce graphe sur une sphère,  
le tout considéré à isotopie/déformation près.

### Exemple :



Les cartes considérées dans cet exposé sont **enracinées** en un coin.

# Contexte et motivation



# Potts, son polynôme et sa série génératrice

Pour un graphe  $G$ , le polynôme de Potts se définit comme :

$$P_G(q, \nu) := \sum_{\substack{\text{coloriage de } G \\ \text{à } q \text{ couleurs}}} \nu^{\#\text{arêtes monochromatiques}}.$$

- Le cas  $\nu = 0$  revient à étudier le **polynôme chromatique** ;
- Le cas  $q = 2$  est le **modèle d'Ising**.

## Proposition

Le polynôme de Potts est un polynôme en  $q$  et  $\nu$  !

On appelle **série génératrice de Potts**

$$M(q, \nu, t, v) := \frac{1}{qw} \sum_{\mathcal{C} \text{ carte plane}} t^{|E(\mathcal{C})|} \nu^{|V(\mathcal{C})|} P_{\mathcal{C}}(q, \nu).$$

# Nature de la série ?

**Question** : Nature de la série  $M(q, \nu, t, w)$  ?



**Question** : Nature de la série  $M(q, \nu, t, w)$  ?

- **Est-elle algébrique ?** Existe-t-il un polynôme  $P$  non nul appartenant à  $\mathbb{Q}(q, \nu, t, w)[X]$  vérifiant

$$P(M) = 0?$$

- **Est-elle différentiellement finie (ou holonome) ?** Existe-t-il une équation différentielle **linéaire** non triviale (par rapport à  $t$ ) à coefficients dans  $\mathbb{Q}(q, \nu, t, w)$  satisfaite par  $M$  ?
- **Est-elle différentiellement algébrique ?** Existe-t-il un entier  $k$  et un polynôme  $P$  de  $\mathbb{Q}(q, \nu, t, w)[X_0, X_1, \dots, X_k]$  tel que

$$P\left(M, \frac{\partial M}{\partial t}, \dots, \frac{\partial^k M}{\partial t^k}\right) = 0?$$

**Question** : Nature de la série  $M(q, \nu, t, w)$  ?

- **Est-elle algébrique ?** Existe-t-il un polynôme  $P$  non nul appartenant à  $\mathbb{Q}(q, \nu, t, w)[X]$  vérifiant

$$P(M) = 0?$$

NON, l'asymptotique des coefficients pour certaines valeurs de  $q$  et  $\nu$  est en  $\rho^{-n} n^{-3}$ . [Mullin, 1967][Flajolet, 1985]

- **Est-elle différentiellement finie (ou holonome) ?** Existe-t-il une équation différentielle **linéaire** non triviale (par rapport à  $t$ ) à coefficients dans  $\mathbb{Q}(q, \nu, t, w)$  satisfaite par  $M$  ?
- **Est-elle différentiellement algébrique ?** Existe-t-il un entier  $k$  et un polynôme  $P$  de  $\mathbb{Q}(q, \nu, t, w)[X_0, X_1, \dots, X_k]$  tel que

$$P\left(M, \frac{\partial M}{\partial t}, \dots, \frac{\partial^k M}{\partial t^k}\right) = 0?$$

# La série génératrice de Potts est différentiellement algébrique.

**Théorème [Bernardi, Bousquet-Mélou, 2011]**

La série génératrice de Potts des cartes planaires est différentiellement algébrique.

Le résultat semble solide car il subsiste quand on remplace les cartes planaires générales par des triangulations.

Toutefois :

- L'équation différentielle algébrique obtenue est énorme.
- Preuve lourde et technique.
- Pas de compréhension combinatoire du résultat.
- Pas d'asymptotique.

# La série génératrice de Potts est différentiellement algébrique.

**Théorème [Bernardi, Bousquet-Mélou, 2011]**

La série génératrice de Potts des cartes planaires est différentiellement algébrique.

Le résultat semble solide car il subsiste quand on remplace les cartes planaires générales par des triangulations.

Toutefois :

- L'équation différentielle algébrique obtenue est énorme.
- Preuve lourde et technique.
- Pas de compréhension combinatoire du résultat.
- Pas d'asymptotique.

# La série génératrice de Potts est différentiellement algébrique.

Théorème [Bernardi, Bousquet-Mélou, 2011]

La série génératrice de Potts des cartes planaires est différentiellement algébrique.

Le résultat semble solide car il subsiste quand on remplace les cartes planaires générales par des triangulations.

Toutefois :

- L'équation différentielle algébrique obtenue est énorme.
- Preuve lourde et technique.
- Pas de compréhension combinatoire du résultat.
- Pas d'asymptotique.

# La série génératrice de Potts est différentiellement algébrique.

Théorème [Bernardi, Bousquet-Mélou, 2011]

La série génératrice de Potts des cartes planaires est différentiellement algébrique.

Le résultat semble solide car il subsiste quand on remplace les cartes planaires générales par des triangulations.

Toutefois :

- L'équation différentielle algébrique obtenue est énorme.
- Preuve lourde et technique.
- Pas de compréhension combinatoire du résultat.
- Pas d'asymptotique.

# La série génératrice de Potts est différentiellement algébrique.

Théorème [Bernardi, Bousquet-Mélou, 2011]

La série génératrice de Potts des cartes planaires est différentiellement algébrique.

Le résultat semble solide car il subsiste quand on remplace les cartes planaires générales par des triangulations.

Toutefois :

- L'équation différentielle algébrique obtenue est énorme.
- Preuve lourde et technique.
- Pas de compréhension combinatoire du résultat.
- Pas d'asymptotique.

# La série génératrice de Potts est différentiellement algébrique.

Théorème [Bernardi, Bousquet-Mélou, 2011]

La série génératrice de Potts des cartes planaires est différentiellement algébrique.

Le résultat semble solide car il subsiste quand on remplace les cartes planaires générales par des triangulations.

Toutefois :

- L'équation différentielle algébrique obtenue est énorme.
- Preuve lourde et technique.
- Pas de compréhension combinatoire du résultat.
- Pas d'asymptotique.

**Motivation** : Remédier à cela.



Le **polynôme de Tutte** d'un graphe connexe  $G$  se définit comme :

$$T_G(\mu, \nu) := \sum_{A \subseteq E(G)} (\mu - 1)^{cc(A)-1} (\nu - 1)^{|A|+cc(A)-|V(G)|},$$

où  $cc(A)$  est le nombre de composantes connexes de  $(V(G), A)$ .

Proposition [Fortuin, Kasteleyn, 1972]

Pour  $G$  connexe et  $q = (\mu - 1)(\nu - 1)$ , on a

$$P_G(q, \nu) = (\mu - 1)(\nu - 1)^{|V(G)|} T_G(\mu, \nu).$$

Le **polynôme de Tutte** d'un graphe connexe  $G$  se définit comme :

$$T_G(\mu, \nu) := \sum_{A \subseteq E(G)} (\mu - 1)^{cc(A)-1} (\nu - 1)^{|A|+cc(A)-|V(G)|},$$

où  $cc(A)$  est le nombre de composantes connexes de  $(V(G), A)$ .

Proposition [Fortuin, Kasteleyn, 1972]

Pour  $G$  connexe et  $q = (\mu - 1)(\nu - 1)$ , on a

$$P_G(q, \nu) = (\mu - 1)(\nu - 1)^{|V(G)|} T_G(\mu, \nu).$$

Théorème [Tutte, 1954]

$$T_G(\mu, \nu) = \sum_{\text{arbre couvrant}} \mu^{\#\text{activité interne}} \nu^{\#\text{activité externe}}.$$

**Corollaire immédiat** :  $T_G(\mu, \nu)$  est un polynôme à coefficients positifs !

# Spécialisations du polynôme de Tutte

Le polynôme de Tutte admet de nombreuses interprétations combinatoires quand il est évalué en certains points.

La spécialisation qui va nous intéresser dans cet exposé est  $\nu = 1$  :

$$T_G(\mu, 1)$$

# Spécialisations du polynôme de Tutte

Le polynôme de Tutte admet de nombreuses interprétations combinatoires quand il est évalué en certains points.

La spécialisation qui va nous intéresser dans cet exposé est  $\nu = 1$  :

$$T_G(\mu, 1) = \sum_{\substack{A \subseteq E(G) \\ |A| + cc(A) = |V(G)|}} (\mu - 1)^{cc(A) - 1}$$

# Spécialisations du polynôme de Tutte

Le polynôme de Tutte admet de nombreuses interprétations combinatoires quand il est évalué en certains points.

La spécialisation qui va nous intéresser dans cet exposé est  $\nu = 1$  :

$$T_G(\mu, 1) = \sum_{\substack{A \subseteq E(G) \\ A \text{ sans cycle}}} (\mu - 1)^{cc(A)-1}$$

Le polynôme de Tutte admet de nombreuses interprétations combinatoires quand il est évalué en certains points.

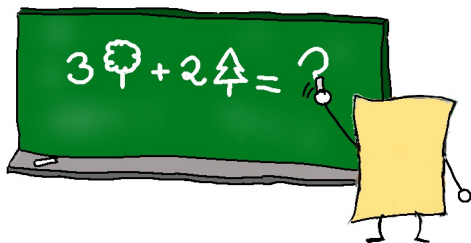
La spécialisation qui va nous intéresser dans cet exposé est  $\nu = 1$  :

$$T_G(\mu, 1) = \sum_{\substack{A \subseteq E(G) \\ A \text{ sans cycle}}} u^{cc(A)-1}$$

où on a posé  $u = \mu - 1$ .

**Remarque** : Considérer alors  $0 > u \geq -1$  a du sens.

# Combinatoire des forêts couvrantes



*Blocked edges on Eulerian maps and mobiles (...),*  
de Bouttier, Di Francesco et Guitter (2008).

**À partir de maintenant, toutes les cartes considérées seront 4-valentes : tous les sommets auront pour degré 4.**



# Forêt couvrante

## Définition

Une **forêt couvrante** dans un graphe  $G$  est un ensemble d'arêtes sans cycle.

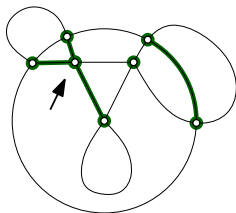
On appelle  $\mathfrak{F}$  l'ensemble des cartes 4-valentes munies d'une forêt couvrante, et  $\mathcal{F}(u, v)$  la série génératrice associée :

$$\mathcal{F}(u, v) := \sum_{\mathfrak{C} \in \mathfrak{F}} u^{cc(\text{forêt de } \mathfrak{C})-1} v^{|\mathcal{V}(\mathfrak{C})|}.$$

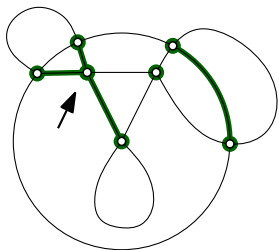
(Chaque sommet non incident à l'ensemble des arêtes de la forêt compte pour une composante connexe.)

**Exemple** : La contribution à la série  $\mathcal{F}(u, v)$  de la carte munie de la forêt couvrante ci-contre est de :

$$u^2 v^7.$$

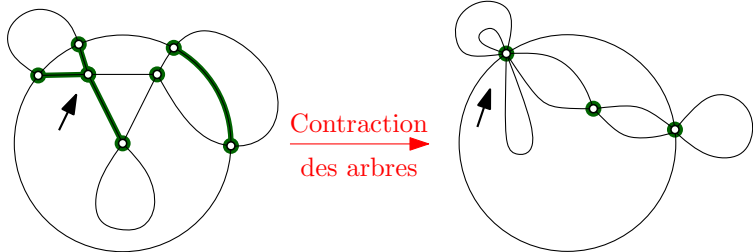


# Contraction des arbres



# Contraction des arbres

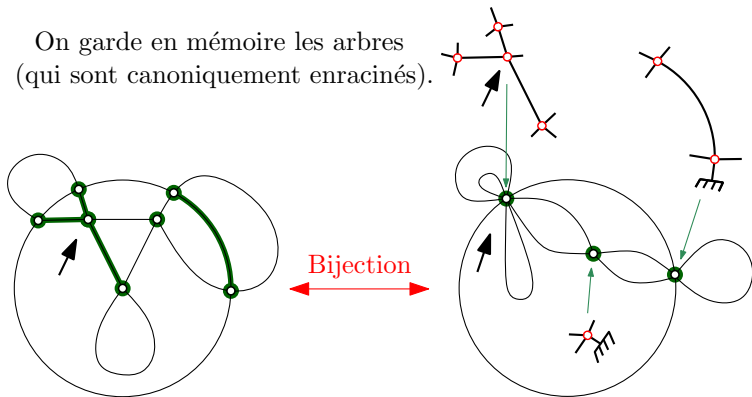
En contractant les arbres, on forme une carte eulérienne (les degrés des sommets sont pairs) sans sommet de degré 2.



# Contraction des arbres

En contractant les arbres, on forme une carte eulérienne (les degrés des sommets sont pairs) sans sommet de degré 2.

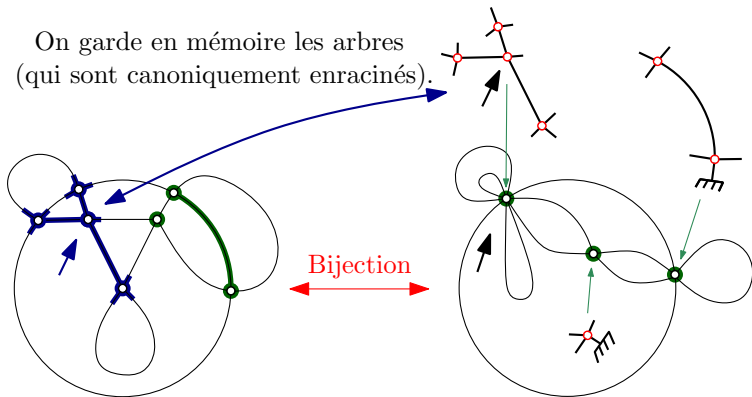
On garde en mémoire les arbres  
(qui sont canoniquement enracinés).



# Contraction des arbres

En contractant les arbres, on forme une carte eulérienne (les degrés des sommets sont pairs) sans sommet de degré 2.

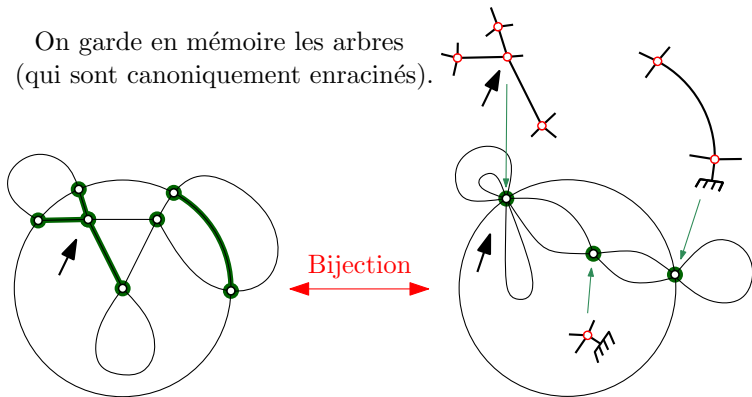
On garde en mémoire les arbres  
(qui sont canoniquement enracinés).



# Contraction des arbres

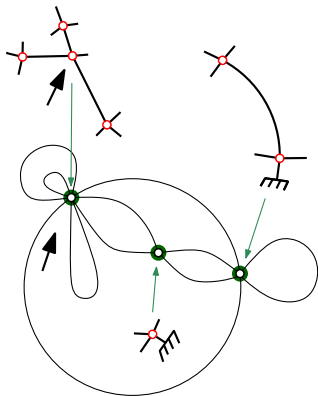
En contractant les arbres, on forme une carte eulérienne (les degrés des sommets sont pairs) sans sommet de degré 2.

On garde en mémoire les arbres  
(qui sont canoniquement enracinés).



# Contraction des arbres

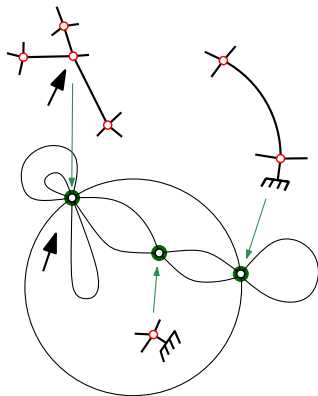
En contractant les arbres, on forme une carte eulérienne (les degrés des sommets sont pairs) sans sommet de degré 2.



un élément de  $\mathfrak{E}$

# Contraction des arbres

En contractant les arbres, on forme une carte eulérienne (les degrés des sommets sont pairs) sans sommet de degré 2.

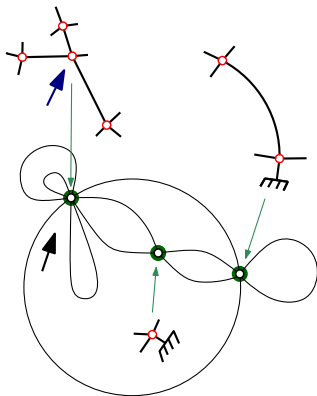


un élément de  $\mathfrak{F}$

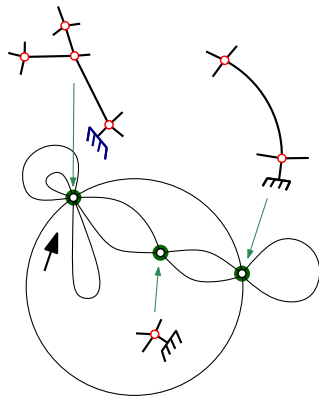


# Contraction des arbres

En contractant les arbres, on forme une carte eulérienne (les degrés des sommets sont pairs) sans sommet de degré 2.



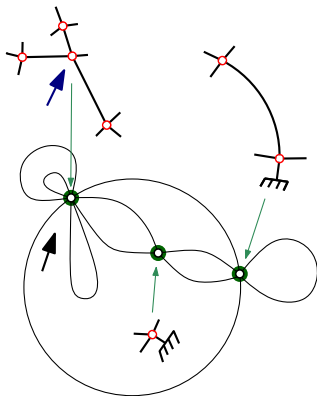
un élément de  $\mathfrak{B}$



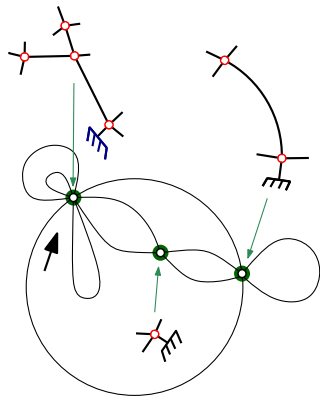
un élément de " $\mathfrak{B}$ "

# Contraction des arbres

En contractant les arbres, on forme une carte eulérienne (les degrés des sommets sont pairs) sans sommet de degré 2.



un élément de  $\mathfrak{F}$



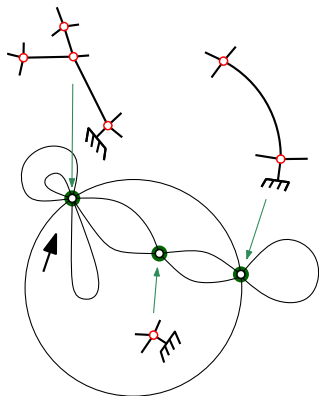
un élément de " $\mathfrak{B}$ "

Par un argument de double enracinement,

$$(n + k) [u^k v^n] \mathcal{F}(u, v) = 2n [u^k v^n] \mathcal{B}(u, v)$$

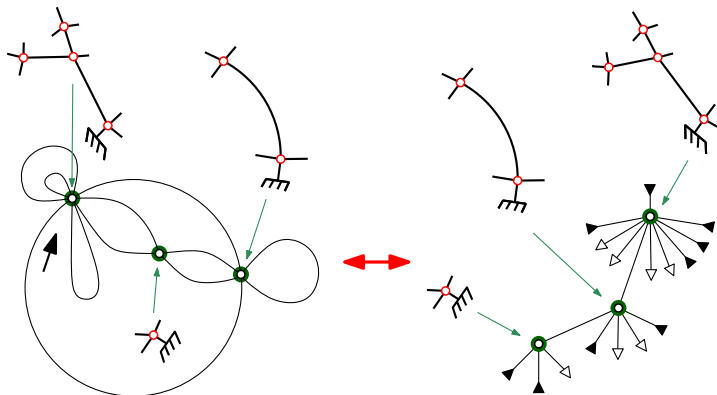
# Des cartes enrichies aux arbres enrichis

On utilise alors la bijection de Gilles Schaeffer qui transforme une carte eulérienne en un arbre eulérien bourgeonnant :



# Des cartes enrichies aux arbres enrichis

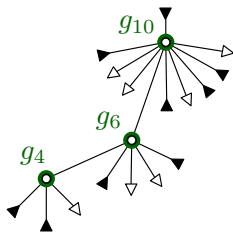
On utilise alors la bijection de Gilles Schaeffer qui transforme une carte eulérienne en un arbre eulérien bourgeonnant :



# Description des arbres eulériens

La série  $\mathcal{R}^\circ(g_2, g_4, \dots)$  des arbres eulériens bourgeonnants avec un poids  $g_{2i}$  pour chaque sommet de degré  $2i$  peut être définie par la relation

$$\mathcal{R}^\circ = 1 + \sum_{i \geq 1} g_{2i} \binom{2i-1}{i-1} (\mathcal{R}^\circ)^i.$$



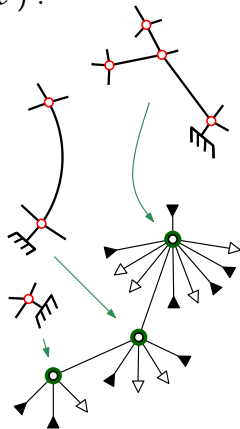
# Description des arbres eulériens

La série  $\mathcal{R}^\circ(g_2, g_4, \dots)$  des arbres eulériens bourgeonnants avec un poids  $g_{2i}$  pour chaque sommet de degré  $2i$  peut être définie par la relation

$$\mathcal{R}^\circ = 1 + \sum_{i \geq 1} g_{2i} \binom{2i-1}{i-1} (\mathcal{R}^\circ)^i.$$

Ici on doit faire la substitution :

$g_{2i} := uv^{i-1} \# \text{arbres 4-valents à } 2i \text{ feuilles}$



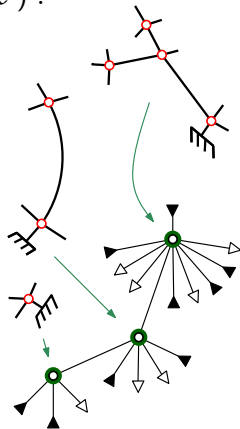
# Description des arbres eulériens

La série  $\mathcal{R}^\circ(g_2, g_4, \dots)$  des arbres eulériens bourgeonnants avec un poids  $g_{2i}$  pour chaque sommet de degré  $2i$  peut être définie par la relation

$$\mathcal{R}^\circ = 1 + \sum_{i \geq 1} g_{2i} \binom{2i-1}{i-1} (\mathcal{R}^\circ)^i.$$

Ici on doit faire la substitution :

$$g_{2i} := uv^{i-1} \frac{1}{2i-1} \binom{3(i-1)}{i-1}$$



# Description des arbres eulériens

La série  $\mathcal{R}^\circ(g_2, g_4, \dots)$  des arbres eulériens bourgeonnants avec un poids  $g_{2i}$  pour chaque sommet de degré  $2i$  peut être définie par la relation

$$\mathcal{R}^\circ = 1 + \sum_{i \geq 1} g_{2i} \binom{2i-1}{i-1} (\mathcal{R}^\circ)^i.$$

Ici on doit faire la substitution :

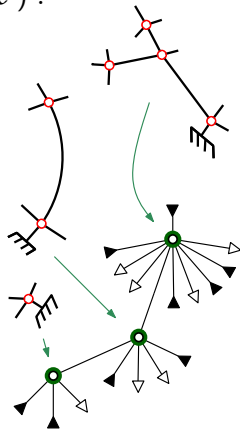
$$g_{2i} := uv^{i-1} \frac{1}{2i-1} \binom{3(i-1)}{i-1}$$

Il est alors naturel de poser  $R = v\mathcal{R}^\circ$  car elle vérifie la relation :

$$R = v + u\phi(R)$$

où

$$\phi(X) := \sum_{i \geq 2} \frac{1}{i} \binom{3(i-1)}{i-1, i-1, i-1} X^i.$$





# Description des arbres eulériens

Lien entre  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{R}$

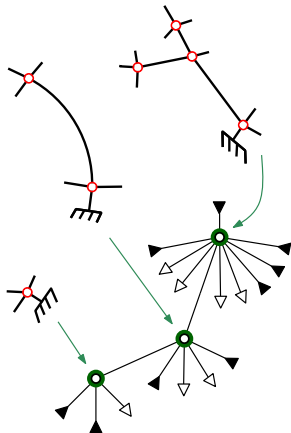
Toujours d'après la théorie de Gilles Schaeffer, les éléments de  $\mathfrak{B}$  peuvent se voir comme des arbres eulériens bourgeonnants particuliers :  
Ils sont **équilibrés**.

On a en réalité :

$$(n+2) [u^k v^n] \mathcal{B}(u, v) = 2 [u^k v^n] \mathcal{R}(u, v),$$

où

$$\mathcal{R}(u, v) := \frac{R(u, v) - v}{uv}.$$



# Approche simple mais insuffisante

Pour résumer, on a une série "arborescente"  $\mathcal{R}(u, v) = \frac{R(u, v) - v}{uv}$  qui peut se décrire facilement grâce aux relations :

$$R = v + u\phi(R)$$

$$\phi(X) := \sum_{i \geq 2} \frac{1}{i} \binom{3(i-1)}{i-1, i-1, i-1} X^i$$

Cette série  $\mathcal{R}(u, v)$  est liée à  $\mathcal{F}(u, v)$  de la manière suivante :

$$(n+2) [u^k v^n] \mathcal{B} = 2 [u^k v^n] \mathcal{R}$$

$$(n+k) [u^k v^n] \mathcal{F} = 2n [u^k v^n] \mathcal{B}$$

# Approche simple mais insuffisante

Pour résumer, on a une série "arborescente"  $\mathcal{R}(u, v) = \frac{\mathcal{R}(u, v) - v}{uv}$  qui peut se décrire facilement grâce aux relations :

$$R = v + u\phi(R)$$

$$\phi(X) := \sum_{i \geq 2} \frac{1}{i} \binom{3(i-1)}{i-1, i-1, i-1} X^i$$

Cette série  $\mathcal{R}(u, v)$  est liée à  $\mathcal{F}(u, v)$  de la manière suivante :

$$\begin{aligned} (n+2) [u^k v^n] \mathcal{B} &= 2 [u^k v^n] \mathcal{R} & \longleftrightarrow & \frac{\partial(v^2 \mathcal{B})}{\partial v} = 2v \mathcal{R} \\ (n+k) [u^k v^n] \mathcal{F} &= 2n [u^k v^n] \mathcal{B} & \longleftrightarrow & u \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial u} + v \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial v} = 2v \frac{\partial \mathcal{B}}{\partial v} \end{aligned}$$

# Approche simple mais insuffisante

Pour résumer, on a une série "arborescente"  $\mathcal{R}(u, v) = \frac{R(u, v) - v}{uv}$  qui peut se décrire facilement grâce aux relations :

$$R = v + u\phi(R)$$

$$\phi(X) := \sum_{i \geq 2} \frac{1}{i} \binom{3(i-1)}{i-1, i-1, i-1} X^i$$

Cette série  $\mathcal{R}(u, v)$  est liée à  $\mathcal{F}(u, v)$  de la manière suivante :

$$\begin{aligned} (n+2) [u^k v^n] \mathcal{B} &= 2 [u^k v^n] \mathcal{R} & \longleftrightarrow & \quad \frac{\partial(v^2 \mathcal{B})}{\partial v} = 2v \mathcal{R} \\ (n+k) [u^k v^n] \mathcal{F} &= 2n [u^k v^n] \mathcal{B} & \longleftrightarrow & \quad u \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial u} + v \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial v} = 2v \frac{\partial \mathcal{B}}{\partial v} \end{aligned}$$

La dérivée par rapport à  $u$  va nous poser des problèmes !

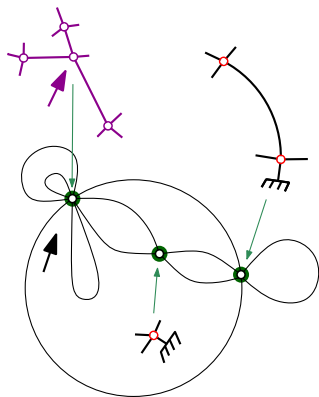
# Une autre approche

**Principe** : Différencier l'arbre racine (qui est enraciné dans un coin) des autres arbres (qui sont enracinés sur une feuille). Pour cela, il nous faut une description des cartes eulériennes selon le degré du sommet racine.

arbre racine  
enraciné dans un coin

Rappel :  $\mathfrak{F} \leftrightarrow$

Les autres arbres  
sont enracinés  
sur une feuille.



**Principe** : Différencier l'arbre racine (qui est enraciné dans un coin) des autres arbres (qui sont enracinés sur une feuille). Pour cela, il nous faut une description des cartes eulériennes selon le degré du sommet racine.

**Référence** : *Planar maps and continued fractions*, de Bouttier et Guitter (2011).

En posant  $F := v^2 \mathcal{F}$ , on trouve après calcul :

$$F = \theta(R) - u\sigma(R),$$

où

$$\theta : X \mapsto \sum_{n=2}^{\infty} 4 \frac{(3n-3)! X^{n+1}}{(n-2)! n! (n+1)!},$$

$$\sigma : X \mapsto \sum_{k \geq 2} \sum_{n \geq 2} \frac{4}{n(n+k)} \binom{3(k-1)}{k-1, k-1, k-1} \binom{3(n-1)}{n, n-1, n-2} X^{n+k}.$$

On rappelle :

$$R = v + u\phi(R)$$

$$F = \theta(R) - u\sigma(R)$$

On rappelle :

$$R = v + u\phi(R)$$

$$F = \theta(R) - u\sigma(R)$$

Corollaire 1

Comme  $\phi$  est holonome,  $R$  est différentiellement algébrique.



# Une autre approche

## Corollaires

On rappelle :

$$R = v + u\phi(R)$$

$$F = \theta(R) - u\sigma(R)$$

Corollaire 1

Comme  $\phi$  est holonome,  $R$  est différentiellement algébrique.

Corollaire 2

Comme  $\theta$  et  $\sigma$  sont holonomes,  $F$  est différentiellement algébrique.

On rappelle :

$$R = v + u\phi(R)$$

$$F = \theta(R) - u\sigma(R)$$

Corollaire 1

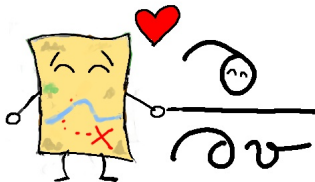
Comme  $\phi$  est holonome,  $R$  est différentiellement algébrique.

Corollaire 2

Comme  $\theta$  et  $\sigma$  sont holonomes,  $F$  est différentiellement algébrique.

Comment calculer de manière explicite les équations différentielles ?  
Peut-on obtenir l'asymptotique ?

# Équations différentielles et asymptotique



**Première étape** : Trouver une équation différentielle portant sur  $\phi$ .

$$6\phi(X) + X(27X - 1)\phi''(X) + 6 = 0$$

**Seconde étape** : En substituant  $X \leftarrow R$  et en s'aidant de la relation  $R = v + u\phi(R)$ , déduire l'équation différentielle pour  $R$

$$(1 - 27R) R R'' + 6R^3(v - (1 + u)R) = 0.$$

L'ordre de cette équation différentielle est de 2, et son degré est de 4.

# Une relation fonctionnelle entre $F$ et $R$

On rappelle que

$$F = \theta(R) - u\sigma(R),$$

où

$$\theta : X \mapsto \sum_{n=2}^{\infty} 4 \frac{(3n-3)! X^{n+1}}{(n-2)! n! (n+1)!},$$

$$\sigma : X \mapsto \sum_{k \geq 2} \sum_{n \geq 2} \frac{4}{n(n+k)} \binom{3(k-1)}{k-1, k-1, k-1} \binom{3(n-1)}{n, n-1, n-2} X^{n+k}.$$

# Une relation fonctionnelle entre $F$ et $R$

On rappelle que

$$F = \theta(R) - u\sigma(R),$$

où

$$\theta : X \mapsto \sum_{n=2}^{\infty} 4 \frac{(3n-3)! X^{n+1}}{(n-2)! n! (n+1)!},$$

$$\sigma : X \mapsto \sum_{k \geq 2} \sum_{n \geq 2} \frac{4}{n(n+k)} \binom{3(k-1)}{k-1, k-1, k-1} \binom{3(n-1)}{n, n-1, n-2} X^{n+k}.$$

**Astuce** :  $\theta$  s'exprime en fonction de  $\phi$ ,  $\phi'$  et  $\phi''$  ; et  $\sigma'$  en fonction de  $\phi$ ,  $\phi'$ ,  $\phi'^2$  et  $\phi\phi'$ .

# Une relation fonctionnelle entre $F$ et $R$

On rappelle que

$$F = \theta(R) - u\sigma(R),$$

où

$$\theta : X \mapsto \sum_{n=2}^{\infty} 4 \frac{(3n-3)! X^{n+1}}{(n-2)! n! (n+1)!},$$

$$\sigma : X \mapsto \sum_{k \geq 2} \sum_{n \geq 2} \frac{4}{n(n+k)} \binom{3(k-1)}{k-1, k-1, k-1} \binom{3(n-1)}{n, n-1, n-2} X^{n+k}.$$

**Astuce** :  $\theta$  s'exprime en fonction de  $\phi$ ,  $\phi'$  et  $\phi''$  ; et  $\sigma'$  en fonction de  $\phi$ ,  $\phi'$ ,  $\phi'^2$  et  $\phi\phi'$ .

On obtient alors :

$$(3F' - 12(1+u)R - 42v + 2)R' = 2 - 54R$$

# Une relation fonctionnelle entre $F$ et $R$

On rappelle que

$$F = \theta(R) - u\sigma(R),$$

où

$$\theta : X \mapsto \sum_{n=2}^{\infty} 4 \frac{(3n-3)! X^{n+1}}{(n-2)! n! (n+1)!},$$

$$\sigma : X \mapsto \sum_{k \geq 2} \sum_{n \geq 2} \frac{4}{n(n+k)} \binom{3(k-1)}{k-1, k-1, k-1} \binom{3(n-1)}{n, n-1, n-2} X^{n+k}.$$

**Astuce** :  $\theta$  s'exprime en fonction de  $\phi$ ,  $\phi'$  et  $\phi''$  ; et  $\sigma'$  en fonction de  $\phi$ ,  $\phi'$ ,  $\phi'^2$  et  $\phi\phi'$ .

On obtient alors :

$$(3F' - 12(1+u)R - 42v + 2)R' = 2 - 54R$$

**Question** : Cette relation fonctionnelle a-t-elle une interprétation combinatoire ?



# Une relation fonctionnelle entre $F$ et $R$

On rappelle que

$$F = \theta(R) - u\sigma(R),$$

où

$$\theta : X \mapsto \sum_{n=2}^{\infty} 4 \frac{(3n-3)! X^{n+1}}{(n-2)! n! (n+1)!},$$

$$\sigma : X \mapsto \sum_{k \geq 2} \sum_{n \geq 2} \frac{4}{n(n+k)} \binom{3(k-1)}{k-1, k-1, k-1} \binom{3(n-1)}{n, n-1, n-2} X^{n+k}.$$

**Astuce** :  $\theta$  s'exprime en fonction de  $\phi$ ,  $\phi'$  et  $\phi''$  ; et  $\sigma'$  en fonction de  $\phi$ ,  $\phi'$ ,  $\phi'^2$  et  $\phi\phi'$ .

On obtient alors :

$$(3F' - 12(1+u)R - 42v + 2)R' = 2 - 54R$$

**Question** : Cette relation fonctionnelle a-t-elle une interprétation combinatoire ?

**Cette relation permet de trouver explicitement une (relativement grosse) équation différentielle sur  $F'$  d'ordre 2 et de degré 7.**

# Rayon de convergence

On fixe  $u$ .

On cherche à connaître l'asymptotique de  $r_n(u)$  et  $f_n(u)$  où

$$\mathcal{R}(u, v) = \sum_{n \geq 0} r_n(u) v^n \quad \text{et} \quad \mathcal{F}(u, v) = \sum_{n \geq 0} f_n(u) v^n$$

# Rayon de convergence

On fixe  $u$ .

On cherche à connaître l'asymptotique de  $r_n(u)$  et  $f_n(u)$  où

$$\mathcal{R}(u, v) = \sum_{n \geq 0} r_n(u) v^n \quad \text{et} \quad \mathcal{F}(u, v) = \sum_{n \geq 0} f_n(u) v^n$$

$\mathcal{R}(u, \cdot)$  et  $\mathcal{F}(u, \cdot)$  ont un même rayon de convergence ; notons-le  $\rho_u$ .

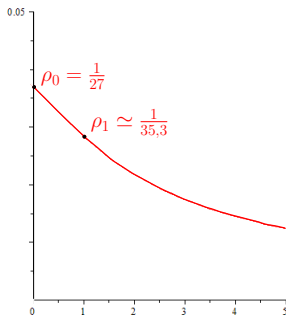
# Rayon de convergence

On fixe  $u$ .

On cherche à connaître l'asymptotique de  $r_n(u)$  et  $f_n(u)$  où

$$\mathcal{R}(u, v) = \sum_{n \geq 0} r_n(u) v^n \quad \text{et} \quad \mathcal{F}(u, v) = \sum_{n \geq 0} f_n(u) v^n$$

$\mathcal{R}(u, \cdot)$  et  $\mathcal{F}(u, \cdot)$  ont un même rayon de convergence ; notons-le  $\rho_u$ .



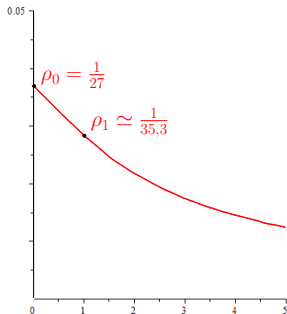
# Rayon de convergence

On fixe  $u \in [-1, +\infty[$ .

On cherche à connaître l'asymptotique de  $r_n(u)$  et  $f_n(u)$  où

$$\mathcal{R}(u, v) = \sum_{n \geq 0} r_n(u) v^n \quad \text{et} \quad \mathcal{F}(u, v) = \sum_{n \geq 0} f_n(u) v^n$$

$\mathcal{R}(u, \cdot)$  et  $\mathcal{F}(u, \cdot)$  ont un même rayon de convergence ; notons-le  $\rho_u$ .



# Rayon de convergence

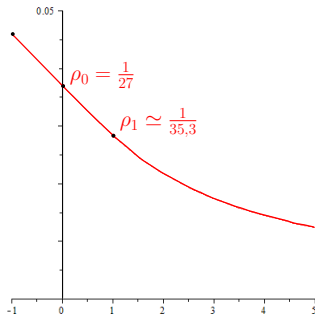
On fixe  $u \in [-1, +\infty[$ .

On cherche à connaître l'asymptotique de  $r_n(u)$  et  $f_n(u)$  où

$$\mathcal{R}(u, v) = \sum_{n \geq 0} r_n(u) v^n \quad \text{et} \quad \mathcal{F}(u, v) = \sum_{n \geq 0} f_n(u) v^n$$

$\mathcal{R}(u, \cdot)$  et  $\mathcal{F}(u, \cdot)$  ont un même rayon de convergence ; notons-le  $\rho_u$ .

Pour  $-1 \leq u \leq 0$ ,  
 $\rho_u$  est affine !



# Rayon de convergence

On fixe  $u \in [-1, +\infty[$ .

On cherche à connaître l'asymptotique de  $r_n(u)$  et  $f_n(u)$  où

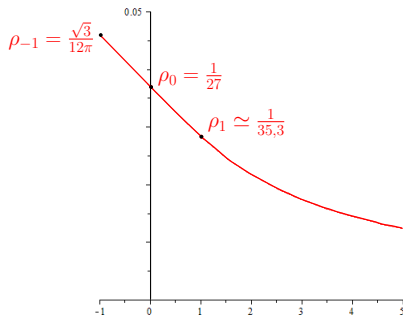
$$\mathcal{R}(u, v) = \sum_{n \geq 0} r_n(u) v^n \quad \text{et} \quad \mathcal{F}(u, v) = \sum_{n \geq 0} f_n(u) v^n$$

$\mathcal{R}(u, \cdot)$  et  $\mathcal{F}(u, \cdot)$  ont un même rayon de convergence ; notons-le  $\rho_u$ .

Pour  $-1 \leq u \leq 0$ ,

$\rho_u$  est affine !

$$\rho_u = \frac{1}{27} - u \left( \frac{\sqrt{3}}{12\pi} - \frac{1}{27} \right)$$



# Rayon de convergence

On fixe  $u \in [-1, +\infty[$ .

On cherche à connaître l'asymptotique de  $r_n(u)$  et  $f_n(u)$  où

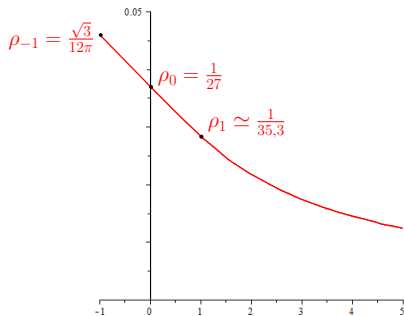
$$\mathcal{R}(u, v) = \sum_{n \geq 0} r_n(u) v^n \quad \text{et} \quad \mathcal{F}(u, v) = \sum_{n \geq 0} f_n(u) v^n$$

$\mathcal{R}(u, \cdot)$  et  $\mathcal{F}(u, \cdot)$  ont un même rayon de convergence ; notons-le  $\rho_u$ .

Pour  $-1 \leq u \leq 0$ ,

$\rho_u$  est affine !

$$\rho_u = \frac{1}{27} - u \left( \frac{\sqrt{3}}{12\pi} - \frac{1}{27} \right)$$



## Corollaire

$\rho_{-1}$  est transcendant :  $\mathcal{F}$  n'est donc pas holonome !



Concluons par des équivalents de  $r_n(u)$  et  $f_n(u)$  :

	$-1 \leq u < 0$	$u = 0$	$u > 0$
$r_n(u)$	$\sim C_u \frac{\rho_u^{-n}}{n^2 \ln(n)^2}$	$\sim C_u \frac{\rho_u^{-n}}{n^2}$	$\sim C_u \frac{\rho_u^{-n}}{n^{\frac{3}{2}}}$
$f_n(u)$	$\sim D_u \frac{\rho_u^{-n}}{n^3 \ln(n)^2}$	$\sim D_u \frac{\rho_u^{-n}}{n^3}$	$\sim D_u \frac{\rho_u^{-n}}{n^{\frac{5}{2}}}$

Du logarithme apparaît au dénominateur !

Concluons par des équivalents de  $r_n(u)$  et  $f_n(u)$  :

	$-1 \leq u < 0$	$u = 0$	$u > 0$
$r_n(u)$	$\sim C_u \frac{\rho_u^{-n}}{n^2 \ln(n)^2}$	$\sim C_u \frac{\rho_u^{-n}}{n^2}$	$\sim C_u \frac{\rho_u^{-n}}{n^{\frac{3}{2}}}$
$f_n(u)$	$\sim D_u \frac{\rho_u^{-n}}{n^3 \ln(n)^2}$	$\sim D_u \frac{\rho_u^{-n}}{n^3}$	$\sim D_u \frac{\rho_u^{-n}}{n^{\frac{5}{2}}}$

Du logarithme apparaît au dénominateur !

## Corollaire

Pour  $-1 \leq u < 0$ ,  $\mathcal{F}(u, \cdot)$  n'est pas holonome.

Que reste-t-il à faire ?

- Généraliser ce qui précède à d'autres classes de cartes (eulériennes ou non).
- Trouver une interprétation combinatoire à la relation

$$(3F' - 12(1 + u)R - 42v + 2)R' = 2 - 54R$$

(entre autres).

- Considérer le cas plus général  $\nu \neq 1$  dans le polynôme de Tutte ?

Que reste-t-il à faire ?

- Généraliser ce qui précède à d'autres classes de cartes (eulériennes ou non).
- Trouver une interprétation combinatoire à la relation

$$(3F' - 12(1 + u)R - 42v + 2)R' = 2 - 54R$$

(entre autres).

- Considérer le cas plus général  $\nu \neq 1$  dans le polynôme de Tutte ?

Que reste-t-il à faire ?

- Généraliser ce qui précède à d'autres classes de cartes (eulériennes ou non).
- Trouver une interprétation combinatoire à la relation

$$(3F' - 12(1 + u)R - 42v + 2)R' = 2 - 54R$$

(entre autres).

- Considérer le cas plus général  $\nu \neq 1$  dans le polynôme de Tutte ?

