Calcul formel pour la combinatoire. Séance de TP pour Alea 2012.

I. Mots contraints

1. Grammaire

```
> BinWords:={L=Union(Epsilon,StartWith1,StartWith0),StartWith1=
Prod(one,L),StartWith0=Union(zero,Prod(zero,ZZ,StartWith0),
Prod(zero,ZO,StartWith1)),zero=Atom,one=Atom,ZZ=Epsilon,ZO=
Epsilon};
```

$$BinWords := \{L = Union(\mathrm{E}, StartWith1, StartWith0), ZO = \mathrm{E}, ZZ = \mathrm{E}, one = Atom, zero = Atom, StartWith0 = Union(zero, Prod(zero, ZZ, StartWith0), Prod(zero, ZO, StartWith1)), StartWith1 = Prod(one, L)\} \quad \textbf{(1.1.1)}$$

2. Série génératrice trivariée

```
> combstruct[gfsolve](BinWords,labelled,t,[[u,ZZ],[v,ZO]]);
```

$$\left\{L(t,u,v) = -\frac{-1-t+t\,u}{1-t-t\,u+t^2\,u-t^2\,v}, ZO(t,u,v) = v, ZZ(t,u,v) = u, one(t,u,v) = t, zero(t,u,v) = t, StartWith0(t,u,v) = \frac{t\,(-t+1+t\,v)}{1-t-t\,u+t^2\,u-t^2\,v}, StartWith1(t,u,v) = -\frac{t\,(-1-t+t\,u)}{1-t-t\,u+t^2\,u-t^2\,v}\right\} \quad \textbf{(1.2.1)}$$

```
> S:=subs(%,L(t,u,v));
```

$$S := -\frac{-1-t+t\,u}{1-t-t\,u+t^2\,u-t^2\,v} \quad \textbf{(1.2.2)}$$

3. Une diagonale

```
> S2:=normal(subs(v=1/u,S))/u;
```

$$S2 := -\frac{-1-t+t\,u}{u-t\,u-t\,u^2+t^2\,u^2-t^2} \quad \textbf{(1.3.1)}$$

```
> resultant(denom(S2),numer(S2)-F*diff(denom(S2),u),u);
```

$$-F\,t^3-F\,t+2\,F\,t^2+F^2\,t-3\,F^2\,t^2+3\,F^2\,t^3-5\,F^2\,t^4-t^2+4\,t^4\,F-4\,t^5\,F+8\,t^5\,F^2-4\,t^6\,F^2 \quad \textbf{(1.3.2)}$$

```
> solve(%,F);
```

$$\frac{1}{2}\,\frac{-4\,t^3-t+1+\sqrt{16\,t^6-8\,t^4-8\,t^3-3\,t^2+2\,t+1}}{(4\,t^3+t-1)\,(-1+t)}, \quad \textbf{(1.3.3)}$$

$$-\frac{1}{2}\frac{4t^3+t-1+\sqrt{16t^6-8t^4-8t^3-3t^2+2t+1}}{(4t^3+t-1)(-1+t)}$$

```
> map(series,[%],t);
```

$$\left[1+2t+2t^2+3t^3+6t^4+9t^5+O(t^6), -t-t^2-2t^3-5t^4-8t^5+O(t^6)\right] \quad \textbf{(1.3.4)}$$

La solution est donc la première :

```
> sol:=%%[1];
```

$$sol := \frac{1}{2}\frac{-4t^3-t+1+\sqrt{16t^6-8t^4-8t^3-3t^2+2t+1}}{(4t^3+t-1)(-1+t)} \quad \textbf{(1.3.5)}$$

Vérification de l'identité avec la formule de la question :

```
> radsimp(sol-1/2*(1/(1-t)+(1+2*t)/sqrt((1-t)*(1-2*t)*(1+t+2*
t^2))));
```

$$0 \quad \textbf{(1.3.6)}$$

II. Marches dans le quart de plan

1. Procédures générales

1. Une procédure d'énumération

```
> count_paths:=proc(S,n,i,j)
  option remember;
  local step;
      if i<0 or j<0 then 0
      elif n=0 then if i=0 and j=0 then 1 else 0 fi
      else add(count_paths(S,n-1,i-step[1],j-step[2]),step=S)
      fi
  end;
```

count_paths := **proc**(*S*, *n*, *i*, *j*) **(2.1.1.1)**

    option remember;
    local step;
    if i < 0 or j < 0 then
        0
    elif n = 0 then
        if i = 0 and j = 0 then 1 else 0 end if
    else
        add(count_paths(S, n − 1, i − step[1], j − step[2]), step = S)
    end if
end proc

2. Les excursions

```
> excursions:=proc(S,n) count_paths(S,n,0,0) end:
```

2. Kreweras

3. Premières valeurs

```
> StepsK:=[[0,-1],[-1,0],[1,1]]:
> L:=[seq(excursions(StepsK,n),n=0..50)];
```

$L := [1, 0, 0, 2, 0, 0, 16, 0, 0, 192, 0, 0, 2816, 0, 0, 46592, 0, 0, 835584, 0, 0, 15876096, 0, 0, 315031552, 0, 0, 6466437120, 0, 0, 136383037440, 0, 0, 2941129850880, 0, 0, 64614360416256, 0, 0, 1442028424527872, 0, 0, 32619677465182208, 0, 0, 746569714888605696, 0, 0, 17262927525017812992, 0, 0]$ **(2.2.1.1)**

```
> L[1],L[10],L[22];
```

$1, 192, 15876096$ **(2.2.1.2)**

4. Conjecture pour une récurrence

```
> gfun:-listtorec([seq(L[3*i+1],i=0..15)],c(n));
```

$[\{(-12 - 54\,n - 54\,n^2)\,c(n) + (6 + 2\,n^2 + 7\,n)\,c(n+1), c(0) = 1\}, ogf]$ **(2.2.2.1)**

```
> rec:=op(1,%):
```

5. Conjecture pour une formule, et asymptotique

```
> excK:=rsolve(rec,c(n));
```

$$excK := \frac{\sqrt{3}\,\Gamma\left(n+\frac{2}{3}\right)\Gamma\left(n+\frac{1}{3}\right)108^n}{\pi\,\Gamma(2\,n+3)}$$ **(2.2.3.1)**

```
> asympt(excK,n);
```

$$\left(\frac{2\sqrt{3}\,e^{-3-3\ln(2)}\,e^3\left(\frac{1}{n}\right)^{5/2}}{\sqrt{\pi}\,e^{-\frac{2}{3}}\,e^{\frac{2}{3}}\,e^{-\frac{1}{3}}\,e^{\frac{1}{3}}} - \frac{115}{36}\,\frac{\sqrt{3}\,e^{-3-3\ln(2)}\,e^3\left(\frac{1}{n}\right)^{7/2}}{\sqrt{\pi}\,e^{-\frac{2}{3}}\,e^{\frac{2}{3}}\,e^{-\frac{1}{3}}\,e^{\frac{1}{3}}} + \frac{19705}{5184}\,\frac{\sqrt{3}\,e^{-3-3\ln(2)}\,e^3\left(\frac{1}{n}\right)^{9/2}}{\sqrt{\pi}\,e^{-\frac{2}{3}}\,e^{\frac{2}{3}}\,e^{-\frac{1}{3}}\,e^{\frac{1}{3}}} + O\left(\left(\frac{1}{n}\right)^{11/2}\right)\right)(3^n)^3$$ **(2.2.3.2)**

```
> combine(%,exp);
```

$$\left(\frac{1}{4}\,\frac{\sqrt{3}\left(\frac{1}{n}\right)^{5/2}}{\sqrt{\pi}} - \frac{115}{288}\,\frac{\sqrt{3}\left(\frac{1}{n}\right)^{7/2}}{\sqrt{\pi}} + \frac{19705}{41472}\,\frac{\sqrt{3}\left(\frac{1}{n}\right)^{9/2}}{\sqrt{\pi}} + O\left(\left(\frac{1}{n}\right)^{11/2}\right)\right)(3^n)^3$$ **(2.2.3.3)**

6. Une équation différentielle

```
> deq:=gfun:-rectodiffeq(rec,c(n),A(t),homogeneous=true);
```

$$deq := \left\{12\,A(t) + (-6 + 228\,t)\left(\frac{d}{dt}A(t)\right) + (270\,t^2 - 9\,t)\left(\frac{d^2}{dt^2}A(t)\right)\right.$$ **(2.2.4.1)**

$$+ \left(54\,t^3 - 2\,t^2\right)\left(\frac{d^3}{dt^3}\,A(t)\right), A(0) = 1\Big\}$$

7. *Sa solution*

```
> dsolve(deq,A(t));
```

Warning, computation interrupted

dsolve n'y arrive pas avec les conditions initiales. Ça se passe mieux si on ne les lui donne pas :

```
> dsolve(op(1,deq),A(t));
```

$$A(t) = \frac{\_C1}{t} + \frac{\_C2\,(27\,t-1)^{3/4}\,\mathrm{LegendreP}\left(-\frac{1}{6}, \frac{3}{2}, 3\sqrt{3}\sqrt{t}\right)}{t} + \frac{\_C3\,(27\,t-1)^{3/4}\,\mathrm{LegendreQ}\left(-\frac{1}{6}, \frac{3}{2}, 3\sqrt{3}\sqrt{t}\right)}{t} \quad \textbf{(2.2.5.1)}$$

```
> convert(%,hypergeom);
```

$$A(t) = \frac{\_C1}{t} - \frac{1}{2}\,\frac{1}{t\left(3\sqrt{3}\sqrt{t}-1\right)^{3/4}\sqrt{\pi}}\Big(\_C2\,(27\,t-1)^{3/4}\left(3\sqrt{3}\sqrt{t}+1\right)^{3/4}\,\mathrm{hypergeom}\left(\left[\frac{1}{6}, \frac{5}{6}\right], \left[-\frac{1}{2}\right], \frac{1}{2} - \frac{3}{2}\sqrt{3}\sqrt{t}\right)\Big) - \frac{1}{t\left(\sqrt{3}\sqrt{t}\right)^{7/3}}\Big(\frac{2}{81}\,\mathrm{I}\,\_C3\,(27\,t-1)^{3/4}\,2^{1/6}\sqrt{\pi}\,3^{2/3}\left(3\sqrt{3}\sqrt{t}+1\right)^{3/4}\left(3\sqrt{3}\sqrt{t}-1\right)^{3/4}\,\mathrm{hypergeom}\left(\left[\frac{7}{6}, \frac{5}{3}\right], \left[\frac{4}{3}\right], \frac{1}{27\,t}\right)\Big) \quad \textbf{(2.2.5.2)}$$

Pas commode dans cette version de Maple d'arriver à une hypergéométrique à partir de l'équation différentielle. On a plutôt envie de partir de la forme close pour les coefficients :

```
> sum(excK*t^n,n=0..infinity);
```

$$\mathrm{hypergeom}\left(\left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1\right], \left[\frac{3}{2}, 2\right], 27\,t\right) \quad \textbf{(2.2.5.3)}$$

8. *Des p-courbures*

```
> dop:=DEtools[de2diffop](deq[1],A(t),[Dt,t]);
```

$$dop := \left(54\,t^3 - 2\,t^2\right) Dt^3 + \left(270\,t^2 - 9\,t\right) Dt^2 + (-6 + 228\,t)\,Dt + 12 \quad \textbf{(2.2.6.1)}$$

```
> p:=3:while p<40 do p:=nextprime(p); print(p,DEtools
  [rightdivision](Dt^p,dop,[Dt,t])[2] mod p) od:
```

5, 0

7, 0

11, 0

13, 0

17, 0

19, 0

23, 0

29, 0

$$31, 0$$
$$37, 0$$
$$41, 0 \qquad (2.2.6.2)$$

L'hypergéométrique a donc l'air algébrique.

9. Un polynôme

```
> gfun[listtoalgeq]([seq(excursions(StepsK,3*n),n=0..15)],y(t)
  );
```

$$\left[-1+54\,t+(-72\,t+1)\,y(t)+16\,t\,y(t)^2+64\,t^2\,y(t)^3,\ ogf\right] \qquad (2.2.7.1)$$

```
> pol:=%[1]:
```

10. Sa solution

```
> solve(pol,y(t));
```

$$\frac{1}{24}\,\frac{\left(-540\,t+1-5832\,t^2+24\sqrt{3}\,\sqrt{\frac{-2187\,t^2+81\,t-1+19683\,t^3}{t}}\,t\right)^{1/3}}{t} \qquad (2.2.8.1)$$

$$+\frac{1}{24}\,(216\,t+1)\Bigg/\left(t\left(-540\,t+1-5832\,t^2\right.\right.$$

$$\left.\left.+24\sqrt{3}\,\sqrt{\frac{-2187\,t^2+81\,t-1+19683\,t^3}{t}}\,t\right)^{1/3}\right)-\frac{1}{12\,t},$$

$$-\frac{1}{48}\,\frac{1}{t}\left(-540\,t+1-5832\,t^2\right.$$

$$\left.+24\sqrt{3}\,\sqrt{\frac{-2187\,t^2+81\,t-1+19683\,t^3}{t}}\,t\right)^{1/3}$$

$$-\frac{1}{48}\,(216\,t+1)\Bigg/\left(t\left(-540\,t+1-5832\,t^2\right.\right.$$

$$\left.\left.+24\sqrt{3}\,\sqrt{\frac{-2187\,t^2+81\,t-1+19683\,t^3}{t}}\,t\right)^{1/3}\right)-\frac{1}{12\,t}$$

$$+\frac{1}{2}\,I\sqrt{3}\left(\frac{1}{24}\,\frac{1}{t}\left(-540\,t+1-5832\,t^2\right.\right.$$

$$\left.+24\sqrt{3}\,\sqrt{\frac{-2187\,t^2+81\,t-1+19683\,t^3}{t}}\,t\right)^{1/3}$$

$$- \frac{1}{24} (216 t + 1) \Bigg/ \left(t \left(-540 t + 1 - 5832 t^2 + 24 \sqrt{3} \sqrt{\frac{-2187 t^2 + 81 t - 1 + 19683 t^3}{t}}\, t \right)^{1/3} \right) \Bigg),$$

$$- \frac{1}{48} \frac{1}{t} \left(-540 t + 1 - 5832 t^2 + 24 \sqrt{3} \sqrt{\frac{-2187 t^2 + 81 t - 1 + 19683 t^3}{t}}\, t \right)^{1/3}$$

$$- \frac{1}{48} (216 t + 1) \Bigg/ \left(t \left(-540 t + 1 - 5832 t^2 + 24 \sqrt{3} \sqrt{\frac{-2187 t^2 + 81 t - 1 + 19683 t^3}{t}}\, t \right)^{1/3} \right) - \frac{1}{12 t}$$

$$- \frac{1}{2} \mathrm{I} \sqrt{3} \Bigg(\frac{1}{24} \frac{1}{t} \left(-540 t + 1 - 5832 t^2 + 24 \sqrt{3} \sqrt{\frac{-2187 t^2 + 81 t - 1 + 19683 t^3}{t}}\, t \right)^{1/3}$$

$$- \frac{1}{24} (216 t + 1) \Bigg/ \left(t \left(-540 t + 1 - 5832 t^2 + 24 \sqrt{3} \sqrt{\frac{-2187 t^2 + 81 t - 1 + 19683 t^3}{t}}\, t \right)^{1/3} \right) \Bigg)$$

Pour trouver la bonne solution, on développe en série en 0. Dans ce genre de calcul, il est impératif de préciser à Maple qu'on travaille avec une série génératrice, et que donc on sait qu'il n'y a pas réellement de singularité en 0. Pour cela, on utilise "assuming" :

```
> map(series,[%],t,3) assuming t>0,t<1/100;
```

$$\left[1 + 2 t + \mathrm{O}(t^2),\ - \frac{1}{8 t} - \frac{1}{\sqrt{t}} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{t} - t + \frac{21}{8} t^{3/2} + \mathrm{O}(t^2),\ - \frac{1}{8 t} + \frac{1}{\sqrt{t}} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{t} - t - \frac{21}{8} t^{3/2} + \mathrm{O}(t^2) \right] \quad \textbf{(2.2.8.2)}$$

C'est donc la première solution qui est la bonne :

```
> sol:=%%[1];
```

$sol :=$ **(2.2.8.3)**

$$\frac{1}{24}\,\frac{1}{t}\left(-540\,t+1-5832\,t^2+24\,\sqrt{3}\,\sqrt{\frac{-2187\,t^2+81\,t-1+19683\,t^3}{t}}\,t\right)^{1/3}+\frac{1}{24}\,(216\,t+1)\Bigg/\left(t\left(-540\,t+1-5832\,t^2+24\,\sqrt{3}\,\sqrt{\frac{-2187\,t^2+81\,t-1+19683\,t^3}{t}}\,t\right)^{1/3}\right)-\frac{1}{12\,t}$$

11. Une petite itération de Newton

```
> pol:=subs(y(t)=y,pol);
```

$$pol := -1+54\,t+(-72\,t+1)\,y+16\,t\,y^2+64\,t^2\,y^3 \qquad \textbf{(2.2.9.1)}$$

```
> dpol:=diff(pol,y);
```

$$dpol := -72\,t+1+32\,t\,y+192\,t^2\,y^2 \qquad \textbf{(2.2.9.2)}$$

On écrit une procédure récursive, qui calcule d'abord à précision moitié :

```
> solpol:=proc(N) local k, prev; if N=1 then 1 else k:=ceil
  (N/2); prev:=convert(solpol(k),polynom); series(prev-eval
  (pol/dpol,y=prev),t,N) fi end;
```

solpol := **proc**(*N*) **(2.2.9.3)**

local *k*, *prev*;

if $N = 1$ **then**

1

else

$k := \mathrm{ceil}(1/2 * N)$;

$prev := convert(solpol(k), polynom)$;

$series(prev - (eval(pol/dpol, y = prev)), t, N)$

end if

end proc

```
> solpol(10);
```

$$1+2\,t+16\,t^2+192\,t^3+2816\,t^4+46592\,t^5+835584\,t^6+15876096\,t^7+315031552\,t^8+6466437120\,t^9+\mathrm{O}(t^{10}) \qquad \textbf{(2.2.9.4)}$$

Vérification :

```
> series(solpol(50)-add(excursions(StepsK,3*n)*t^n,n=0..50),t,
  50);
```

$$\mathrm{O}(t^{50}) \qquad \textbf{(2.2.9.5)}$$

12. Une implicitation

```
> resultant(numer(t-(u+2)/u^3),T+u*(u+6)/8,u);
```

$$-\frac{1}{64}+\frac{27}{32}\,t+\frac{1}{64}\,T+\frac{1}{4}\,t\,T^2-\frac{9}{8}\,t\,T+t^2\,T^3 \qquad \textbf{(2.2.10.1)}$$

```
> numer(%);
```

$$-1+54\,t+T+16\,t\,T^2-72\,t\,T+64\,t^2\,T^3 \qquad (2.2.10.2)$$

On reconnaît notre polynôme :

```
> expand(subs(T=y,%)-pol);
```

$$0 \qquad (2.2.10.3)$$

3. Excursions de Gessel

```
> StepsG:=[[1,1],[-1,-1],[-1,0],[1,0]]:
```

13. Une récurrence et une forme explicite

```
> L:=[seq(excursions(StepsG,n),n=0..20)];
```

$L := [1, 0, 2, 0, 11, 0, 85, 0, 782, 0, 8004, 0, 88044, 0, 1020162, 0, 12294260, 0, 152787976, 0, 1946310467]$ (2.3.1.1)

```
> gfun:-listtorec([seq(L[2*i+1],i=0..10)],g(n));
```

$$\left[\left\{\left(-20-64\,n-48\,n^2\right)g(n)+\left(10+3\,n^2+11\,n\right)g(n+1),\ g(0)=1\right\},\ ogf\right] \qquad (2.3.1.2)$$

```
> rsolve(op(1,%),g(n));
```

$$\frac{2}{9}\,\frac{\Gamma\left(n+\frac{5}{6}\right)\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)2^{2/3}\sqrt{3}\,16^n}{\Gamma\left(n+\frac{5}{3}\right)\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)\Gamma(n+2)} \qquad (2.3.1.3)$$

14. Équation différentielle et p-courbure

```
> deq:=gfun:-rectodiffeq(%%[1],g(n),y(t),homogeneous=true);
```

$$deq := \left\{20\,y(t)+(-10+244\,t)\left(\frac{d}{dt}y(t)\right)+\left(256\,t^2-14\,t\right)\left(\frac{d^2}{dt^2}y(t)\right)+\left(48\,t^3-3\,t^2\right)\left(\frac{d^3}{dt^3}y(t)\right),\ y(0)=1\right\} \qquad (2.3.2.1)$$

```
> dop:=DEtools[de2diffop](deq[1],y(t),[Dt,t]);
```

$$dop := \left(48\,t^3-3\,t^2\right)Dt^3+\left(256\,t^2-14\,t\right)Dt^2+(-10+244\,t)\,Dt+20 \qquad (2.3.2.2)$$

```
> p:=3:while p<40 do p:=nextprime(p); print(p,DEtools
  [rightdivision](Dt^p,dop,[Dt,t])[2] mod p) od:
```

5, 0

7, 0

11, 0

13, 0

17, 0

19, 0

23, 0

29, 0

31, 0

37, 0

41, 0 (2.3.2.3)

Ça a encore une tête d'algébrique.

15. Excursions royales

```
> StepsR:=[[-1,-1],[-1,0],[-1,1],[0,1],[1,1],[1,0],[1,-1],[0,
  -1]]:
```

```
> L:=[seq(excursions(StepsR,n),n=0..50)];
```

$$L := [1, 0, 3, 6, 38, 160, 905, 4830, 28308, 166992, 1024758, 6389460, 40724244, 263385408, 1728855843, 11484066594, 77130790880, 523010474272, 3577392455780, 24659960867256, 171191809159176, 1196062991373120, 8405598880928158, 59390108287965884, 421702103951853232, 3008007142668506400, 21547036172546912100, 154953422524637482200, 1118414417739387802200, 8100034358048546336640, 58851597875117397397065, 428874867792762278038950, 3134190243790498873530120, 22965235682760035470626240, 168694821262990397108218320, 1242103598119397590355361600, 9166085488104536870400866400, 67784302783836710168684860800, 502280759131537394713238262180, 3729002483308651313901573352680, 27734940474874301854382731503840, 206639251533769983537040150420800, 1542107333901951092805683475850920, 11526571169778909152080329937031280, 86285759910158480799325136064828720, 646849513956210350379008656382676480, 4855858240948438478514563167315330950, 36500809113516548569370456004923477340, 274719433708369626240235316188272572376, 2070163851071368524091017691701490789056, 15618087143955290882603324760140333947008] \tag{2.3.3.1}$$

```
> gfun:-listtorec(L,k(n));
```

$$\left[\left\{ \left(-2112 - 4448\, n - 928\, n^3 - 96\, n^4 - 3168\, n^2\right) k(n) + \left(-5320 - 108\, n^4 - 1176\, n^3 - 4712\, n^2 - 8244\, n\right) k(n+1) + \left(-9\, n^4 - 117\, n^3 - 562\, n^2 - 1176\, n - 896\right) k(n+2) + \left(3\, n^4 + 50\, n^3 + 307\, n^2 + 820\, n + 800\right) k(n+3), k(0) = 1, k(1) = 0, k(2) = 3 \right\}, \mathit{ogf}\right] \tag{2.3.3.2}$$

```
> rsolve(%[1],k(n));
```

$$\mathit{rsolve}\left(\left\{ \left(-2112 - 4448\, n - 928\, n^3 - 96\, n^4 - 3168\, n^2\right) k(n) + \left(-5320 - 108\, n^4 - 1176\, n^3 - 4712\, n^2 - 8244\, n\right) k(n+1) + \left(-9\, n^4 - 117\, n^3 - 562\, n^2 - 1176\, n - 896\right) k(n+2) + \left(3\, n^4 + 50\, n^3 + 307\, n^2 + 820\, n + 800\right) k(n+3), k(0) = 1, k(1) = 0, k(2) = 3 \right\}, k(n) \right) \tag{2.3.3.3}$$

On n'a plus de jolie formule

```
> deq:=gfun:-rectodiffeq(%%[1],k(n),y(t),homogeneous=true);
```

$$deq := \left\{ \left(-6336\,t^2 - 1440\,t\right) y(t) + \left(-14520\,t^2 - 348\,t + 36 - 36672\,t^3\right) \left(\frac{d}{dt}\,y(t)\right) + \left(-996\,t^2 + 204\,t - 41760\,t^4 - 23880\,t^3\right) \left(\frac{d^2}{dt^2}\,y(t)\right) + \left(178\,t^2 - 15648\,t^5 - 11780\,t^4 - 670\,t^3\right) \left(\frac{d^3}{dt^3}\,y(t)\right) + \left(-2176\,t^6 + 44\,t^3 - 2040\,t^5 - 144\,t^4\right) \left(\frac{d^4}{dt^4}\,y(t)\right) + \left(-96\,t^7 - 108\,t^6 - 9\,t^5 + 3\,t^4\right) \left(\frac{d^5}{dt^5}\,y(t)\right), y(0) = 1 \right\} \tag{2.3.3.4}$$

```
> dop:=DEtools[de2diffop](deq[1],y(t),[Dt,t]);
```

$$dop := \left(-96\,t^7 - 108\,t^6 - 9\,t^5 + 3\,t^4\right) Dt^5 + \left(-2176\,t^6 + 44\,t^3 - 2040\,t^5 - 144\,t^4\right) Dt^4 + \left(178\,t^2 - 15648\,t^5 - 11780\,t^4 - 670\,t^3\right) Dt^3 + \left(-996\,t^2 + 204\,t - 41760\,t^4 - 23880\,t^3\right) Dt^2 + \left(-14520\,t^2 - 348\,t + 36 - 36672\,t^3\right) Dt - 6336\,t^2 - 1440\,t \tag{2.3.3.5}$$

```
> p:=3:while p<10 do p:=nextprime(p); print(p,DEtools
  [rightdivision](Dt^p,dop,[Dt,t])[2] mod p) od:
```

$$5, \frac{2\left(4\,t^3 + 4 + t\right) Dt^4}{t\left(2\,t^3 + t^2 + 3\,t + 4\right)} + \frac{\left(1 + 4\,t^3\right) Dt^3}{t^2\left(2\,t^3 + t^2 + 3\,t + 4\right)} + \frac{\left(3\,t + 3\right) Dt^2}{t^3\left(2\,t^3 + t^2 + 3\,t + 4\right)} + \frac{\left(4\,t + 2 + t^3\right) Dt}{t^4\left(2\,t^3 + t^2 + 3\,t + 4\right)} + \frac{3}{t^2\left(2\,t^3 + t^2 + 3\,t + 4\right)}$$

$$7, \frac{4\left(5 + 5\,t^7 + 2\,t^9 + t^8 + 3\,t + t^2 + 5\,t^3 + 2\,t^6 + 3\,t^5\right) Dt^4}{t^3\left(4\,t^3 + t^2 + 3\,t + 6\right)^3} + \frac{4\left(2\,t^7 + t^9 + 5\,t^8 + 4\,t + 6\,t^3 + 3\,t^4 + 3\,t^6 + 3\,t^5\right) Dt^3}{t^4\left(4\,t^3 + t^2 + 3\,t + 6\right)^3} + \frac{3\left(5 + 3\,t^7 + 2\,t^9 + 3\,t^8 + t^2 + 5\,t^3 + 4\,t^4 + 2\,t^6\right) Dt^2}{t^5\left(4\,t^3 + t^2 + 3\,t + 6\right)^3} + \frac{3\left(2 + 2\,t^7 + 2\,t^9 + 6\,t^8 + t + 6\,t^2 + 5\,t^3 + 3\,t^6 + 4\,t^5\right) Dt}{t^6\left(4\,t^3 + t^2 + 3\,t + 6\right)^3} + \frac{2\left(4\,t^7 + 5\,t^6 + 2\,t^5 + 5\,t^4 + 3\,t^3 + 3\,t^2 + 3\,t\right)}{t^5\left(4\,t^3 + t^2 + 3\,t + 6\right)^3}$$

(2.3.3.6)

$$11, \frac{1}{t^7\left(10t^3+3t^2+3t+10\right)^7}\Big(5\left(8t^{12}+2t^{10}+t^7+9t^{19}+4t^{21}+3t^{20}+3t^{15}+8t^9+7t^{14}+9t^8+6t^2+7t^3+2t^{11}+10t^{16}+2t^4+7t^{18}+5t^6+4t^5+4t^{13}+2+7t^{17}\right)Dt^4\Big)$$
$$+\frac{1}{t^8\left(10t^3+3t^2+3t+10\right)^7}\Big(5\left(7t^{12}+10t^{10}+6t^7+4t^{19}+4t^{21}+5t^{20}+6t^{15}+2t^9+9t^{14}+3t^8+9t+5t^2+8t^3+6t^{16}+2t^4+2t^{18}+4t^6+3t^5+5t^{13}+10+10t^{17}\right)Dt^3\Big)$$
$$+\frac{1}{t^9\left(10t^3+3t^2+3t+10\right)^7}\Big(8\left(9t^{12}+4t^{10}+5t^7+2t^{19}+2t^{21}+4t^{20}+10t^{15}+7t^9+6t^{14}+6t^8+9t+4t^2+5t^3+2t^{11}+t^{16}+5t^4+6t^{18}+2t^6+3t^5+8t^{13}+9+5t^{17}\right)Dt^2\Big)$$
$$+\frac{1}{t^{10}\left(10t^3+3t^2+3t+10\right)^7}\Big(8\left(7t^{10}+7t^7+8t^{19}+5t^{21}+5t^{20}+4t^{15}+7t^9+10t^{14}+5t^8+9t+9t^2+9t^3+7t^{11}+3t^{16}+2t^4+9t^{18}+10t^6+t^5+4t^{13}+5+3t^{17}\right)Dt\Big)$$
$$+\frac{1}{t^9\left(10t^3+3t^2+3t+10\right)^7}\Big(8\left(t^{12}+t^{10}+7t^7+8t^{15}+6t^9+t^8+t+8t^2+4t^3+10t^{11}+4t^{16}+t^4+t^{18}+4t^6+10t^5+4+5t^{17}\right)\Big) \quad \textbf{(2.3.3.6)}$$

Ça n'a pas du tout une tête d'algébrique.

4. Kreweras, au-delà des excursions

16. Séries tronquées

```
> serxy:=proc(x,y,N) local i,j,n; add(add(add(count_paths
  (StepsK,n,i,j)*x^i*y^j*t^n,i=0..n),j=0..n),n=0..N) end:
> serx:=proc(x,N) local i,n; add(add(count_paths(StepsK,n,i,0)
  *x^i*t^n,i=0..n),n=0..N) end:
> sery:=proc(y,N) local j,n; add(add(count_paths(StepsK,n,0,j)
  *y^j*t^n,i=0..n),n=0..N) end:
> series(serx(x,9),t,10);
```

$$1+xt^2+2t^3+2x^2t^4+8xt^5+\left(16+5x^3\right)t^6+30x^2t^7+\left(96x+14x^4\right)t^8+\left(192+112x^3\right)t^9 \quad \textbf{(2.4.1.1)}$$

17. Un polynôme pour le retour sur l'axe des y

```
> gfun:-seriestoalgeq(series(serx(x,81),t,80),T(t));
```

$$\Big[x-2t+8t^2x^2-72t^3x+108t^4+16t^4x^3+\left(-x+2t-16t^2x^2+104t^3x+96t^5x^2-48t^4x^3-144t^4\right)T(t)+\left(32t^4+9t^2x^2-32t^3x+48t^6x^4\right. \quad \textbf{(2.4.2.1)}$$

$$+64\,t^4x^3+192\,t^6x-264\,t^5x^2\big)\,T(t)^2+\big(-32\,t^4x^3-192\,t^6x+192\,t^7x^3+128\,t^7-96\,t^6x^4+128\,t^5x^2\big)\,T(t)^3+\big(56\,t^6x^4+48\,t^8x^5-192\,t^7x^3+192\,t^8x^2\big)\,T(t)^4+\big(-48\,t^8x^5+96\,t^9x^4\big)\,T(t)^5+16\,t^{10}x^6\,T(t)^6,\,ogf\big]$$

```
> polx:=subs(T(t)=y,%[1]):
```

18. Vérification en 0

```
> factor(eval(polx,x=0));
```

$$2\,t\,\big(-1+54\,t^3+y-72\,t^3y+16\,t^3y^2+64\,t^6y^3\big) \quad \textbf{(2.4.3.1)}$$

```
> pol;
```

$$-1+54\,t+(-72\,t+1)\,y+16\,t\,y^2+64\,t^2y^3 \quad \textbf{(2.4.3.2)}$$

```
> expand(%%-2*t*subs(t=t^3,pol));
```

$$0 \quad \textbf{(2.4.3.3)}$$

19. Tout doit être algébrique

5. Des preuves

20. Unique solution série de (M)

Le noyau vaut :

```
> N:=x*y-t*(x+y+x^2*y^2);
```

$$N := x\,y-t\,\big(x+y+x^2y^2\big) \quad \textbf{(2.5.1.1)}$$

Sa solution y_0 est obtenue par itération simple (par exemple, mais on pourrait aussi faire du Newton) :

```
> y=y-expand(N/x);
```

$$y=t+\frac{t\,y}{x}+x\,t\,y^2 \quad \textbf{(2.5.1.2)}$$

```
> to_iter:=op(2,%);
```

$$to\_iter := t+\frac{t\,y}{x}+x\,t\,y^2 \quad \textbf{(2.5.1.3)}$$

```
> Order:=10:
> 0: for i to Order do map(normal,series(subs(y=%,to_iter),t,
  i)) od;
```

$$\mathrm{O}(t)$$

$$t+\mathrm{O}(t^2)$$

$$t+\frac{1}{x}\,t^2+\mathrm{O}(t^3)$$

$$t+\frac{1}{x}\,t^2+\frac{1+x^3}{x^2}\,t^3+\mathrm{O}(t^4)$$

$$t+\frac{1}{x}\,t^2+\frac{1+x^3}{x^2}\,t^3+\frac{1+3\,x^3}{x^3}\,t^4+\mathrm{O}(t^5)$$

$$t+\frac{1}{x}\,t^2+\frac{1+x^3}{x^2}\,t^3+\frac{1+3\,x^3}{x^3}\,t^4+\frac{1+6\,x^3+2\,x^6}{x^4}\,t^5+\mathrm{O}(t^6)$$

$$t+\frac{1}{x}t^2+\frac{1+x^3}{x^2}t^3+\frac{1+3x^3}{x^3}t^4+\frac{1+6x^3+2x^6}{x^4}t^5+\frac{10x^3+10x^6+1}{x^5}t^6+O(t^7)$$

$$t+\frac{1}{x}t^2+\frac{1+x^3}{x^2}t^3+\frac{1+3x^3}{x^3}t^4+\frac{1+6x^3+2x^6}{x^4}t^5+\frac{10x^3+10x^6+1}{x^5}t^6+\frac{15x^3+30x^6+1+5x^9}{x^6}t^7+O(t^8)$$

$$t+\frac{1}{x}t^2+\frac{1+x^3}{x^2}t^3+\frac{1+3x^3}{x^3}t^4+\frac{1+6x^3+2x^6}{x^4}t^5+\frac{10x^3+10x^6+1}{x^5}t^6+\frac{15x^3+30x^6+1+5x^9}{x^6}t^7+\frac{21x^3+70x^6+1+35x^9}{x^7}t^8+O(t^9)$$

$$t+\frac{1}{x}t^2+\frac{1+x^3}{x^2}t^3+\frac{1+3x^3}{x^3}t^4+\frac{1+6x^3+2x^6}{x^4}t^5+\frac{10x^3+10x^6+1}{x^5}t^6+\frac{15x^3+30x^6+1+5x^9}{x^6}t^7+\frac{21x^3+70x^6+1+35x^9}{x^7}t^8+\frac{28x^3+140x^6+1+140x^9+14x^{12}}{x^8}t^9+O(t^{10}) \quad \textbf{(2.5.1.4)}$$

```
> y0:=%:
```

De même, l'équation (M) s'écrit

```
> M:=U(t,x)-(y[0]/t-y[0]/x*U(t,y[0]));:
```

$$M:=U(t,x)-\frac{y_0}{t}+\frac{y_0\,U(t,y_0)}{x} \quad \textbf{(2.5.1.5)}$$

On essaye de voir à quoi ressemble cette équation si l'on y injecte une série à coefficients indéterminés :

```
> series(subs(y[0]=y0,eval(M,U=unapply(add(u[i](x)*t^i,i=0..5)
  +O(t^6),[t,x]))),t,6);
```

$$u_0(x)-1+\left(u_1(x)-\frac{1}{x}+\frac{u_0(0)}{x}\right)t+\left(u_2(x)+\frac{\mathrm{D}(u_0)(0)+u_1(0)}{x}+\frac{u_0(0)}{x^2}-\frac{1+x^3}{x^2}\right)t^2+\left(u_3(x)-\frac{1+3x^3}{x^3}+\frac{\mathrm{D}(u_0)(0)+u_1(0)}{x^2}\right. \quad \textbf{(2.5.1.6)}$$

$$+\frac{\frac{1}{2}\frac{2\,\mathrm{D}(u_0)(0)+\mathrm{D}^{(2)}(u_0)(0)\,x}{x}+\mathrm{D}(u_1)(0)+u_2(0)}{x}$$

$$+\frac{(1+x^3)\,u_0(0)}{x^3}\Bigg)t^3+\Bigg(u_4(x)$$

$$+\frac{\frac{1}{2}\frac{2\,\mathrm{D}(u_0)(0)+\mathrm{D}^{(2)}(u_0)(0)\,x}{x}+\mathrm{D}(u_1)(0)+u_2(0)}{x^2}$$

$$+\frac{(1+x^3)\,(\mathrm{D}(u_0)(0)+u_1(0))}{x^3}+\frac{1}{x}\Bigg(\mathrm{D}(u_2)(0)$$

$$+\frac{1}{6}\frac{6\,\mathrm{D}^{(2)}(u_0)(0)\,x+6\,\mathrm{D}(u_0)(0)+6\,\mathrm{D}(u_0)(0)\,x^3+\mathrm{D}^{(3)}(u_0)(0)\,x^2}{x^2}$$

$$+u_3(0)+\frac{1}{2}\frac{2\,\mathrm{D}(u_1)(0)+\mathrm{D}^{(2)}(u_1)(0)\,x}{x}\Bigg)+\frac{(1+3\,x^3)\,u_0(0)}{x^4}$$

$$-\frac{1+6\,x^3+2\,x^6}{x^4}\Bigg)t^4+\mathrm{O}(t^5)$$

Ceci montre que d'une part, le coefficient initial u_0 doit être 1, et suggère ensuite que chaque coefficient est bien déterminé par les précédents.

La preuve demandée consiste à extraire ainsi le coefficient de t^n dans l'équation pour n arbitraire.

On peut du coup encore résoudre par itération :

```
> 1:for i to Order do map(normal,series(y0/t-y0/x*(eval
  (convert(%,polynom),x=y0)+O(t^Order)),t,i)) od;
```

$$1+\mathrm{O}(t)$$

$$1+\mathrm{O}(t^2)$$

$$1+x\,t^2+\mathrm{O}(t^3)$$

$$1+x\,t^2+2\,t^3+\mathrm{O}(t^4)$$

$$1+x\,t^2+2\,t^3+2\,x^2\,t^4+\mathrm{O}(t^5)$$

$$1+x\,t^2+2\,t^3+2\,x^2\,t^4+\mathrm{O}(t^5)$$

$$1+x\,t^2+2\,t^3+2\,x^2\,t^4+8\,x\,t^5+\mathrm{O}(t^6)$$

$$1+x\,t^2+2\,t^3+2\,x^2\,t^4+8\,x\,t^5+(16+5\,x^3)\,t^6+\mathrm{O}(t^7)$$

$$1+x\,t^2+2\,t^3+2\,x^2\,t^4+8\,x\,t^5+(16+5\,x^3)\,t^6+30\,x^2\,t^7+\mathrm{O}(t^8)$$

$$1+x\,t^2+2\,t^3+2\,x^2\,t^4+8\,x\,t^5+(16+5\,x^3)\,t^6+30\,x^2\,t^7+2\,x\,(48+7\,x^3)\,t^8 \quad \textbf{(2.5.1.7)}$$

$$+\,O(t^9)$$

On retrouve bien les premiers termes de la série calculée ``à la main"

```
> series(serx(x,8),t);
```

$$1+x\,t^2+2\,t^3+2\,x^2\,t^4+8\,x\,t^5+\left(16+5\,x^3\right)t^6+30\,x^2\,t^7+\left(96\,x+14\,x^4\right)t^8 \quad \textbf{(2.5.1.8)}$$

21. Le polynôme admet au plus une solution série

Il s'agit de

```
> polx;
```

$$x-2\,t+8\,t^2\,x^2-72\,t^3\,x+108\,t^4+16\,t^4\,x^3+\left(-x+2\,t-16\,t^2\,x^2+104\,t^3\,x+96\,t^5\,x^2-48\,t^4\,x^3-144\,t^4\right)y+\left(32\,t^4+9\,t^2\,x^2-32\,t^3\,x+48\,t^6\,x^4+64\,t^4\,x^3+192\,t^6\,x-264\,t^5\,x^2\right)y^2+\left(-32\,t^4\,x^3-192\,t^6\,x+192\,t^7\,x^3+128\,t^7-96\,t^6\,x^4+128\,t^5\,x^2\right)y^3+\left(56\,t^6\,x^4+48\,t^8\,x^5-192\,t^7\,x^3+192\,t^8\,x^2\right)y^4+\left(-48\,t^8\,x^5+96\,t^9\,x^4\right)y^5+16\,t^{10}\,x^6\,y^6 \quad \textbf{(2.5.2.1)}$$

On commence par regarder la valeur en $t=0$:

```
> eval(pol,t=0);
```

$$-1+y \quad \textbf{(2.5.2.2)}$$

Ensuite, pour appliquer le théorème des fonctions implicites, il suffit de regarder la dérivée en ce point :

```
> eval(diff(pol,y),[t=0,y=1]);
```

$$1 \quad \textbf{(2.5.2.3)}$$

Il y a donc une unique solution dans $\mathbb{Q}(x)[[t]]$, et donc au plus une dans $\mathbb{Q}[[x,t]]$.

On peut aussi demander à gfun de montrer qu'il y en a au plus une dans $\mathbb{Q}(x)[[t]]$ directement :

```
> gfun[algeqtoseries](polx,t,y,3);
```

$$\left[\frac{\frac{1}{x}}{t^2}-\frac{\frac{2}{x^2}}{t}-1+O(t),\ \frac{1}{2\,x\,t^2}+\frac{RootOf\left(1+x^3\,\_Z^2\right)}{t^{3/2}}+\frac{RootOf\left(x^4\,\_Z^2+2\,x^2\,\_Z+1+x^3\right)}{t}+O\left(\frac{1}{t^{7/8}}\right),\ 1+x\,t^2+O(t^3)\right] \quad \textbf{(2.5.2.4)}$$

22. Cette solution vérifie (M)

On veut montrer que la solution série de polx, appelée $H(t,x)$, vérifie l'équation (M). Pour cela, on va construire un polynôme qui s'annule en les évaluations du membre droit de (M) en H. On a déjà une autre équation (polx) qui s'annule sur son membre gauche. Si ces deux équations n'ont qu'une solution série commune, il s'agit de H et la preuve est terminée.

Le membre droit de (M):

```
> rhsM:=eval(U(t,x)-M,U=H);
```

$$rhsM:=\frac{y_0}{t}-\frac{y_0\,H(t,y_0)}{x} \quad \textbf{(2.5.3.1)}$$

Le polynôme polx:

```
> polx;
```

$$x-2t+8t^2x^2-72t^3x+108t^4+16t^4x^3+\left(-x+2t-16t^2x^2+104t^3x+96t^5x^2-48t^4x^3-144t^4\right)y+\left(32t^4+9t^2x^2-32t^3x+48t^6x^4+64t^4x^3+192t^6x-264t^5x^2\right)y^2+\left(-32t^4x^3-192t^6x+192t^7x^3+128t^7-96t^6x^4+128t^5x^2\right)y^3+\left(56t^6x^4+48t^8x^5-192t^7x^3+192t^8x^2\right)y^4+\left(-48t^8x^5+96t^9x^4\right)y^5+16t^{10}x^6y^6 \quad (2.5.3.2)$$

Lorsque $H(t,x)$ est solution de ce polynôme, alors $\frac{z}{t}-\frac{z\cdot H(t,z)}{x}$ est solution de

```
> P1:=subs(Y=y,numer(subs(y=solve(Y=z/t-z*y/x,y),subs(x=z,
  polx))));
```

$$P1 := t^4z^2\left(-48t^4z^8x^5+96t^5z^7x^5+16t^5x^6z^9-128t^8x^3y^3+32t^3x^2z^3+9tx^2z^5-32t^2x^2z^4+48t^5x^2z^7+64t^3x^2z^6+192t^5x^2z^4-264t^4x^2z^5-32t^2x^3z^6-192t^4x^3z^4+192t^5x^3z^6+128t^5x^3z^3-96t^4x^3z^7+128t^3x^3z^5+56t^3z^7x^4+48t^5z^8x^4-192t^4z^6x^4+192t^5z^5x^4-128t^4x^2z^5y+64t^5x^2z^4y^2-384t^6x^2z^3y+192t^7x^2z^2y^2+528t^5x^2z^4y-264t^6x^2z^3y^2+96t^3x^3z^5y-96t^4x^3z^4y^2+32t^5x^3z^3y^3+576t^5x^3z^3y-576t^6x^3z^2y^2+192t^7x^3zy^3-576t^6x^3z^5y+576t^7x^3z^4y^2-192t^8x^3z^3y^3-384t^6x^3z^2y+384t^7x^3zy^2+288t^5x^3z^6y-288t^6x^3z^5y^2+96t^7x^3z^4y^3-384t^4x^3z^4y+384t^5x^3z^3y^2-128t^6x^3z^2y^3-224t^4z^6x^4y+336t^5z^5x^4y^2-224t^6z^4x^4y^3+56t^7z^3x^4y^4-192t^6z^7x^4y+288t^7z^6x^4y^2-192t^8z^5x^4y^3+48t^9z^4x^4y^4+768t^5z^5x^4y-1152t^6z^4x^4y^2+768t^7z^3x^4y^3-192t^8z^2x^4y^4-768t^6z^4x^4y+1152t^7z^3x^4y^2-768t^8z^2x^4y^3+192t^9zx^4y^4+240t^5z^7x^5y-480t^6z^6x^5y^2+480t^7z^5x^5y^3-240t^8z^4x^5y^4+48t^9z^3x^5y^5-480t^6z^6x^5y+960t^7z^5x^5y^2-960t^8z^4x^5y^3+480t^9z^3x^5y^4-96t^{10}z^2x^5y^5-96t^6x^6z^8y+240t^7x^6z^7y^2-320t^8x^6z^6y^3+240t^9x^6z^5y^4-96t^{10}x^6z^4y^5+16t^{11}x^6z^3y^6+96xz^5t^5+104xz^4t^3-144xz^3t^4-48xz^6t^4+2xz^3t-16xz^5t^2+xz^3yt-2xz^2yt^2+16xz^4t^3y-104xz^3t^4y-96xz^4t^6y+48xz^5t^5y+144xz^2t^5y-64t^4x^2z^2y+32t^5x^2zy^2-18t^2x^2z^4y+9t^3x^2z^3y^2+64t^3x^2z^3y-32t^4x^2z^2y^2-96t^6x^2z^6y+48t^7x^2z^5y^2-2t^2z^3-72t^4z^4-xz^4+108t^5z^3+8t^3z^5+tz^4+16t^5z^6\right) \quad (2.5.3.3)$$

Le polynôme annulant y_0 s'écrit dans les nouvelles variables

```
> P2:=subs(y=z,N);
```

$$P2 := x\,z - t\left(x + z + x^2 z^2\right) \tag{2.5.3.4}$$

Ensuite, on élimine z entre ces deux équations :

```
> resultant(P1,P2,z);
```

$$-t^{21} x^{17} \big(-2\,t + x + 108\,t^4 + 16\,t^4 x^3 + 9\,x^2 t^2 y^2 - 32\,t^4 x^3 y^3 + 64\,t^4 x^3 y^2 - 48\,t^4 x^3 y - 48\,t^8 x^5 y^5 + 48\,t^8 x^5 y^4 + 192\,t^8 x^2 y^4 - 192\,t^7 x^3 y^4 + 192\,t^7 x^3 y^3 - 192\,t^6 x\,y^3 + 192\,t^6 x\,y^2 + 56\,t^6 x^4 y^4 - 96\,t^6 x^4 y^3 + 48\,t^6 x^4 y^2 + 128\,t^5 x^2 y^3 - 264\,t^5 x^2 y^2 + 96\,t^5 x^2 y - 16\,t^2 x^2 y - 32\,t^3 x\,y^2 + 104\,t^3 x\,y - x\,y - 144\,y\,t^4 + 128\,t^7 y^3 + 32\,t^4 y^2 + 8\,t^2 x^2 - 72\,t^3 x + 16\,t^{10} x^6 y^6 + 2\,t\,y + 96\,t^9 x^4 y^5\big)^2 \tag{2.5.3.5}$$

On récupère le facteur qui contient du y:

```
> final:=op(1,select(has,%,y));
```

$$\mathit{final} := -2\,t + x + 108\,t^4 + 16\,t^4 x^3 + 9\,x^2 t^2 y^2 - 32\,t^4 x^3 y^3 + 64\,t^4 x^3 y^2 - 48\,t^4 x^3 y - 48\,t^8 x^5 y^5 + 48\,t^8 x^5 y^4 + 192\,t^8 x^2 y^4 - 192\,t^7 x^3 y^4 + 192\,t^7 x^3 y^3 - 192\,t^6 x\,y^3 + 192\,t^6 x\,y^2 + 56\,t^6 x^4 y^4 - 96\,t^6 x^4 y^3 + 48\,t^6 x^4 y^2 + 128\,t^5 x^2 y^3 - 264\,t^5 x^2 y^2 + 96\,t^5 x^2 y - 16\,t^2 x^2 y - 32\,t^3 x\,y^2 + 104\,t^3 x\,y - x\,y - 144\,y\,t^4 + 128\,t^7 y^3 + 32\,t^4 y^2 + 8\,t^2 x^2 - 72\,t^3 x + 16\,t^{10} x^6 y^6 + 2\,t\,y + 96\,t^9 x^4 y^5 \tag{2.5.3.6}$$

```
> normal(final/polx);
```

$$1 \tag{2.5.3.7}$$

C'est le même polynôme ! On a donc bien prouvé que la série solution de polx annule l'équation du noyau.

23. La solution de l'équation du noyau est algébrique

On a fini : l'équation (M) satisfaite par $K(t, x, 0)$ a une unique solution série (qu. 20), le polynôme polx aussi (qu. 21) et elles coïncident (qu. 22). Donc $K(t, x, 0)$ est algébrique. Par symétrie, il en va de même de $K(t, 0, y)$. Mais alors aussi de $K(t, x, y)$ grâce à l'équation du noyau.

24. Une forme explicite pour les nombres d'excursions

On part de l'équation satisfaite par $K(t, x, 0)$:

```
> polx;
```

$$x - 2\,t + 8\,t^2 x^2 - 72\,t^3 x + 108\,t^4 + 16\,t^4 x^3 + \left(-x + 2\,t - 16\,t^2 x^2 + 104\,t^3 x + 96\,t^5 x^2 - 48\,t^4 x^3 - 144\,t^4\right) y + \left(32\,t^4 + 9\,t^2 x^2 - 32\,t^3 x + 48\,t^6 x^4 + 64\,t^4 x^3 + 192\,t^6 x - 264\,t^5 x^2\right) y^2 + \left(-32\,t^4 x^3 - 192\,t^6 x + 192\,t^7 x^3 + 128\,t^7 - 96\,t^6 x^4 + 128\,t^5 x^2\right) y^3 + \left(56\,t^6 x^4 + 48\,t^8 x^5 - 192\,t^7 x^3 + 192\,t^8 x^2\right) y^4 + \left(-48\,t^8 x^5 + 96\,t^9 x^4\right) y^5 + 16\,t^{10} x^6 y^6 \tag{2.5.5.1}$$

La valeur de la solution en 0 est solution de

```
> factor(eval(polx,x=0));
```

(2.5.5.2)

$$2\,t\left(-1+54\,t^3+y-72\,t^3\,y+16\,t^3\,y^2+64\,t^6\,y^3\right) \qquad \textbf{(2.5.5.2)}$$

La série génératrice des excursions qui reviennent à l'origine en 3 n étapes s'obtient en changeant la variable:

```
> subs(t=t^(1/3),select(has,%,y));
```

$$-1+54\,t+y-72\,t\,y+16\,t\,y^2+64\,t^2\,y^3 \qquad \textbf{(2.5.5.3)}$$

De ce polynôme on tire une équation différentielle satisfaite par les solutions

```
> gfun[algeqtodiffeq](%,y(t));
```

$$1+(12\,t-1)\,y(t)+\left(108\,t^2-5\,t\right)\left(\frac{d}{dt}\,y(t)\right)+\left(54\,t^3-2\,t^2\right)\left(\frac{d^2}{dt^2}\,y(t)\right) \qquad \textbf{(2.5.5.4)}$$

Les coefficients vérifient alors la récurrence

```
> gfun[diffeqtorec](%,y(t),c(k));
```

$$\left\{\left(12+54\,k+54\,k^2\right)\,c(k)+\left(-6-7\,k-2\,k^2\right)\,c(k+1),\,c(0)=1\right\} \qquad \textbf{(2.5.5.5)}$$

```
> rsolve(%,c(k));
```

$$\frac{\sqrt{3}\,\Gamma\left(k+\frac{2}{3}\right)\,\Gamma\left(k+\frac{1}{3}\right)\,108^k}{\pi\,\Gamma(2\,k+3)} \qquad \textbf{(2.5.5.6)}$$

C'est exactement la formule devinée précédemment, qui se trouve ainsi prouvée.

6. Compléments

25. Une paramétrisation vient à notre aide

```
> h:=u^6*x^3+3*u^4*(u+1)^2*x^2+3*u^2*(u+1)^4*x+1+6*u+15*
  u^2+24*u^3+27*u^4+18*u^5+5*u^6:
> R[1]:=u*(1+u)*(1+2*u+u^2+u^2*x)^2/h:
> R[2]:=(u^4*x^2+2*u^2*(u+1)^2*x+1+4*u+6*u^2+2*u^3-u^4)*h/(1+
  u)^2/(1+2*u+u^2+u^2*x)^4:
```

Il s'agit bien d'une paramétrisation de la solution :

```
> normal(subs(y=R[2],t=R[1],polx));
```

$$0 \qquad \textbf{(2.6.1.1)}$$

$R_1(u,x)=t$ a une unique série formelle $u(t,x)$ solution qui soit nulle en $t=0$:

```
> P:=numer(R[1]-t);
```

$$\begin{aligned}P := {}&-t+u-6\,t\,u-15\,t\,u^2+5\,u^5-3\,t\,u^2\,x-3\,t\,u^4\,x^2-3\,t\,u^6\,x-3\,t\,u^6\,x^2\\&-12\,t\,u^3\,x-18\,t\,u^4\,x-t\,u^6\,x^3-6\,t\,u^5\,x^2-12\,t\,u^5\,x+10\,u^4+5\,u^2\\&+10\,u^3+u^6-24\,t\,u^3-27\,t\,u^4-18\,t\,u^5-5\,t\,u^6+2\,u^3\,x+6\,u^4\,x+6\,u^5\,x\\&+2\,u^6\,x+u^5\,x^2+u^6\,x^2\end{aligned} \qquad \textbf{(2.6.1.2)}$$

Par le théorème des fonctions implicites, il y a bien une solution dans $\mathbb{Q}(x)[[t]]$:

```
> eval(P,[u=0,t=0]),eval(diff(P,u),[u=0,t=0]);
```

$$0,\,1 \qquad \textbf{(2.6.1.3)}$$

Cette solution est par ailleurs bien dans $\mathbb{Q}[[x,t]]$, comme on le voit en récrivant l'équation comme une équation de point fixe :

```
> u=(u-P)/coeff(P,u,1);
```

(2.6.1.4)

$$u = \frac{1}{1-6t}\left(t + 6tu + 15tu^2 - 5u^5 + 3tu^2x + 3tu^4x^2 + 3tu^6x + 3tu^6x^2 + 12tu^3x + 18tu^4x + tu^6x^3 + 6tu^5x^2 + 12tu^5x - 10u^4 - 5u^2 - 10u^3 - u^6 + 24tu^3 + 27tu^4 + 18tu^5 + 5tu^6 - 2u^3x - 6u^4x - 6u^5x - 2u^6x - u^5x^2 - u^6x^2\right) \quad \textbf{(2.6.1.4)}$$

26. Conclusion

Autres formes closes

27. Le nombre total de marches de Kreweras

On part du polynôme dont $K(t, x, 0)$ est racine

```
> polx;
```

$$x - 2t + 8t^2x^2 - 72t^3x + 108t^4 + 16t^4x^3 + \left(-x + 2t - 16t^2x^2 + 104t^3x + 96t^5x^2 - 48t^4x^3 - 144t^4\right)y + \left(32t^4 + 9t^2x^2 - 32t^3x + 48t^6x^4 + 64t^4x^3 + 192t^6x - 264t^5x^2\right)y^2 + \left(-32t^4x^3 - 192t^6x + 192t^7x^3 + 128t^7 - 96t^6x^4 + 128t^5x^2\right)y^3 + \left(56t^6x^4 + 48t^8x^5 - 192t^7x^3 + 192t^8x^2\right)y^4 + \left(-48t^8x^5 + 96t^9x^4\right)y^5 + 16t^{10}x^6y^6 \quad \textbf{(2.6.3.1.1)}$$

on en déduit un polynôme qui annule $K(t, 1, 0)$ et par symétrie $K(t, 0, 1)$

```
> eval(polx,x=1);
```

$$1 - 2t + 8t^2 - 72t^3 + 124t^4 + \left(-1 + 2t - 16t^2 + 104t^3 + 96t^5 - 192t^4\right)y + \left(96t^4 + 9t^2 - 32t^3 + 240t^6 - 264t^5\right)y^2 + \left(-32t^4 - 288t^6 + 320t^7 + 128t^5\right)y^3 + \left(56t^6 + 240t^8 - 192t^7\right)y^4 + \left(-48t^8 + 96t^9\right)y^5 + 16t^{10}y^6 \quad \textbf{(2.6.3.1.2)}$$

L'équation du noyau entraîne alors que $K(t, 1, 1)$ est annulé par le polynôme

```
> resultant(%,numer(T-(1-2*t*y)/eval(N,[x=1,y=1])),y);
```

$$-98496t^{10}T + 272t^6 - 32t^5 + 6624t^8 + 18576t^{10} - 1408t^7 - 18144t^9 - 448t^6T - 51840t^{12}T^5 + 12960t^{11}T^5 + 116640t^{13}T^5 - 1728t^{10}T^5 - 3936t^9T^4 - 4224t^8T^3 - 139968t^{14}T^5 + 69984t^{15}T^5 - 2144t^7T^2 - 117504t^{11}T^4 + 269568t^{12}T^4 + 29232t^{10}T^4 + 30528t^9T^3 + 14928t^8T^2 - 334368t^{13}T^4 + 174960t^{14}T^4 + 3360t^7T + 173232t^{10}T^2 + 69984t^{11}T + 174960t^{12}T^2 - 266976t^{11}T^2 + 300672t^{11}T^3 + 56160t^9T - 124416t^{10}T^3 - 63936t^9T^2 - 17280t^8T + 233280t^{13}T^3 - 404352t^{12}T^3 + 32t^5T + 144t^6T^2 + 2160t^{12}T^6 - 8640t^{13}T^6 - 288t^{11}T^6 + 19440t^{14}T^6 + 16t^{10}T^6 + 96t^9T^5 + 224t^8T^4 - 23328t^{15}T^6 + 11664t^{16}T^6 + 256t^7T^3 \quad \textbf{(2.6.3.1.3)}$$

```
> factor(%);
```

$$16t^5(-1+3t)^3\left(2 + t - 2T + 43t^2 + 10tT - 16t^2T^3 - 9tT^2 \quad \textbf{(2.6.3.1.4)}\right.$$

$$+ 162 t^7 T^5 - 162 t^6 T^5 + 54 t^5 T^5 + 120 t^4 T^4 + 120 t^3 T^3 + 53 t^2 T^2 + 405 t^6 T^4 - 369 t^5 T^4 - 396 t^4 T^3 - 213 t^3 T^2 - 66 t^2 T + 540 t^5 T^3 + 405 t^4 T^2 + 162 t^3 T - 27 t^7 T^6 + 27 t^8 T^6 + 9 t^6 T^6 - t^5 T^6 - 6 t^4 T^5 - 14 t^3 T^4 \Big)$$

```
> eq_walks:=select(has,%,T);
```

$$eq\_walks := 2 + t - 2 T + 43 t^2 + 10 t T - 16 t^2 T^3 - 9 t T^2 + 162 t^7 T^5 - 162 t^6 T^5 + 54 t^5 T^5 + 120 t^4 T^4 + 120 t^3 T^3 + 53 t^2 T^2 + 405 t^6 T^4 - 369 t^5 T^4 - 396 t^4 T^3 - 213 t^3 T^2 - 66 t^2 T + 540 t^5 T^3 + 405 t^4 T^2 + 162 t^3 T - 27 t^7 T^6 + 27 t^8 T^6 + 9 t^6 T^6 - t^5 T^6 - 6 t^4 T^5 - 14 t^3 T^4 \quad \textbf{(2.6.3.1.5)}$$

On vérifie :

```
> series(subs(T=serxy(1,1,10),eq_walks),t,10);
```

$$\mathrm{O}\left(t^{10}\right) \quad \textbf{(2.6.3.1.6)}$$

Il n'y a plus qu'à résoudre. Miraculeusement (vraiment ?), solve arrive à résoudre cette équation de degré 6, et il n'y a plus qu'à choisir la solution qui a bien un développement en série entière en 0:

```
> solve(eq_walks, T):
> map(series,[%],t,3) assuming t>0,t<1/100;
```

$$\left[\mathrm{O}\left(t^0\right), -2 t^{-1} + \mathrm{O}\left(t^0\right), -\frac{1}{t} + \frac{2 \mathrm{I}}{\sqrt{t}} + \mathrm{O}(1), -\frac{1}{t} - \frac{2 \mathrm{I}}{\sqrt{t}} + \mathrm{O}(1), -\frac{1}{t} + \frac{2 \mathrm{I}}{\sqrt{t}} + \mathrm{O}(1), -\frac{1}{t} - \frac{2 \mathrm{I}}{\sqrt{t}} + \mathrm{O}(1)\right] \quad \textbf{(2.6.3.1.7)}$$

```
> walks:=%%[1];
```

$$walks := \frac{1}{3} \Bigg(-405 \Bigg(\Bigg(-5832 t^6 - 540 t^3 + 1 + 24 \sqrt{3} \sqrt{\frac{729 t^6 + 729 t^5 + 486 t^4 + 189 t^3 + 54 t^2 + 9 t + 1}{t (-1 + 3 t)}} t^2 - 144 \sqrt{3} \sqrt{\frac{729 t^6 + 729 t^5 + 486 t^4 + 189 t^3 + 54 t^2 + 9 t + 1}{t (-1 + 3 t)}} t^3 + 216 \sqrt{3} \sqrt{\frac{729 t^6 + 729 t^5 + 486 t^4 + 189 t^3 + 54 t^2 + 9 t + 1}{t (-1 + 3 t)}} t^4 \Bigg) \left(-1 + 9 t - 27 t^2 + 27 t^3\right)^2 (-1 + 3 t)^2 \left(1 - 6 t + 9 t^2\right)^2 \Bigg)^{1/3} t^3 \quad \textbf{(2.6.3.1.8)}$$

$$- 3 \Bigg(\Bigg(-5832 t^6 - 540 t^3 + 1$$

$$+ 24\sqrt{3}\sqrt{\frac{729 t^6 + 729 t^5 + 486 t^4 + 189 t^3 + 54 t^2 + 9 t + 1}{t(-1+3t)}}\, t^2$$

$$- 144\sqrt{3}\sqrt{\frac{729 t^6 + 729 t^5 + 486 t^4 + 189 t^3 + 54 t^2 + 9 t + 1}{t(-1+3t)}}\, t^3$$

$$+ 216\sqrt{3}\sqrt{\frac{729 t^6 + 729 t^5 + 486 t^4 + 189 t^3 + 54 t^2 + 9 t + 1}{t(-1+3t)}}\, t^4\Bigg)$$

$$\left.(-1 + 9 t - 27 t^2 + 27 t^3)^2 (-1 + 3 t)^2 (1 - 6 t + 9 t^2)^2\right)^{1/3} t$$

$$- 3645 \Bigg(\Bigg(-5832 t^6 - 540 t^3 + 1$$

$$+ 24\sqrt{3}\sqrt{\frac{729 t^6 + 729 t^5 + 486 t^4 + 189 t^3 + 54 t^2 + 9 t + 1}{t(-1+3t)}}\, t^2$$

$$- 144\sqrt{3}\sqrt{\frac{729 t^6 + 729 t^5 + 486 t^4 + 189 t^3 + 54 t^2 + 9 t + 1}{t(-1+3t)}}\, t^3$$

$$+ 216\sqrt{3}\sqrt{\frac{729 t^6 + 729 t^5 + 486 t^4 + 189 t^3 + 54 t^2 + 9 t + 1}{t(-1+3t)}}\, t^4\Bigg)$$

$$\left.(-1 + 9 t - 27 t^2 + 27 t^3)^2 (-1 + 3 t)^2 (1 - 6 t + 9 t^2)^2\right)^{1/3} t^5$$

$$+ 54 \Bigg(\Bigg(-5832 t^6 - 540 t^3 + 1$$

$$+ 24\sqrt{3}\sqrt{\frac{729 t^6 + 729 t^5 + 486 t^4 + 189 t^3 + 54 t^2 + 9 t + 1}{t(-1+3t)}}\, t^2$$

$$- 144\sqrt{3}\sqrt{\frac{729 t^6 + 729 t^5 + 486 t^4 + 189 t^3 + 54 t^2 + 9 t + 1}{t(-1+3t)}}\, t^3$$

$$+ 216\sqrt{3}\sqrt{\frac{729 t^6 + 729 t^5 + 486 t^4 + 189 t^3 + 54 t^2 + 9 t + 1}{t(-1+3t)}}\, t^4\Bigg)$$

$$\left.(-1 + 9 t - 27 t^2 + 27 t^3)^2 (-1 + 3 t)^2 (1 - 6 t + 9 t^2)^2\right)^{1/3} t^2$$

$$
\begin{aligned}
&- 2187\, t^7 \Bigg(\Bigg(-5832\, t^6 - 540\, t^3 + 1 \\
&+ 24\sqrt{3}\, \sqrt{\frac{729\, t^6 + 729\, t^5 + 486\, t^4 + 189\, t^3 + 54\, t^2 + 9\, t + 1}{t\,(-1 + 3\, t)}}\, t^2 \\
&- 144\sqrt{3}\, \sqrt{\frac{729\, t^6 + 729\, t^5 + 486\, t^4 + 189\, t^3 + 54\, t^2 + 9\, t + 1}{t\,(-1 + 3\, t)}}\, t^3 \\
&+ 216\sqrt{3}\, \sqrt{\frac{729\, t^6 + 729\, t^5 + 486\, t^4 + 189\, t^3 + 54\, t^2 + 9\, t + 1}{t\,(-1 + 3\, t)}}\, t^4\Bigg) \\
&\left(-1 + 9\, t - 27\, t^2 + 27\, t^3\right)^2 (-1 + 3\, t)^2 \left(1 - 6\, t + 9\, t^2\right)^2\Bigg)^{1/3} \\
&+ 1620 \Bigg(\Bigg(-5832\, t^6 - 540\, t^3 + 1 \\
&+ 24\sqrt{3}\, \sqrt{\frac{729\, t^6 + 729\, t^5 + 486\, t^4 + 189\, t^3 + 54\, t^2 + 9\, t + 1}{t\,(-1 + 3\, t)}}\, t^2 \\
&- 144\sqrt{3}\, \sqrt{\frac{729\, t^6 + 729\, t^5 + 486\, t^4 + 189\, t^3 + 54\, t^2 + 9\, t + 1}{t\,(-1 + 3\, t)}}\, t^3 \\
&+ 216\sqrt{3}\, \sqrt{\frac{729\, t^6 + 729\, t^5 + 486\, t^4 + 189\, t^3 + 54\, t^2 + 9\, t + 1}{t\,(-1 + 3\, t)}}\, t^4\Bigg) \\
&\left(-1 + 9\, t - 27\, t^2 + 27\, t^3\right)^2 (-1 + 3\, t)^2 \left(1 - 6\, t + 9\, t^2\right)^2\Bigg)^{1/3} t^4 \\
&+ 4374 \Bigg(\Bigg(-5832\, t^6 - 540\, t^3 + 1 \\
&+ 24\sqrt{3}\, \sqrt{\frac{729\, t^6 + 729\, t^5 + 486\, t^4 + 189\, t^3 + 54\, t^2 + 9\, t + 1}{t\,(-1 + 3\, t)}}\, t^2 \\
&- 144\sqrt{3}\, \sqrt{\frac{729\, t^6 + 729\, t^5 + 486\, t^4 + 189\, t^3 + 54\, t^2 + 9\, t + 1}{t\,(-1 + 3\, t)}}\, t^3 \\
&+ 216\sqrt{3}\, \sqrt{\frac{729\, t^6 + 729\, t^5 + 486\, t^4 + 189\, t^3 + 54\, t^2 + 9\, t + 1}{t\,(-1 + 3\, t)}}\, t^4\Bigg)
\end{aligned}
$$

$$\left(-1+9t-27t^2+27t^3\right)^2(-1+3t)^2\left(1-6t+9t^2\right)^2\Big)^{1/3}t^6$$

$$+\Bigg(3t^2-162t^3+831060t^6-67716t^5+4131t^4$$

$$+76273812t^8+4210075602t^{10}-24409203228t^{11}$$

$$-445581392040t^{13}+1343140599996t^{14}+4153664202732t^{16}$$

$$+725939902944t^{17}+74917049639886t^{19}-153640505584197t^{20}$$

$$-252303719256360t^{22}+204227935935372t^{23}+40669853253264t^{25}$$

$$-6778308875544t^{26}-8476812t^7-609385680t^9$$

$$+116165562426t^{12}-3009137984784t^{15}-23058105243813t^{18}$$

$$+228328589715084t^{21}-115231250884248t^{24}+3\Big(\Big(-5832t^6$$

$$-540t^3+1$$

$$+24\sqrt{3}\sqrt{\frac{729t^6+729t^5+486t^4+189t^3+54t^2+9t+1}{t(-1+3t)}}\,t^2$$

$$-144\sqrt{3}\sqrt{\frac{729t^6+729t^5+486t^4+189t^3+54t^2+9t+1}{t(-1+3t)}}\,t^3$$

$$+216\sqrt{3}\sqrt{\frac{729t^6+729t^5+486t^4+189t^3+54t^2+9t+1}{t(-1+3t)}}\,t^4\Big)$$

$$\left(-1+9t-27t^2+27t^3\right)^2(-1+3t)^2\left(1-6t+9t^2\right)^2\Big)^{1/3}t^2$$

$$-126\Bigg(\bigg(-5832t^6-540t^3+1$$

$$+24\sqrt{3}\sqrt{\frac{729t^6+729t^5+486t^4+189t^3+54t^2+9t+1}{t(-1+3t)}}t^2$$

$$-144\sqrt{3}\sqrt{\frac{729t^6+729t^5+486t^4+189t^3+54t^2+9t+1}{t(-1+3t)}}t^3$$

$$+216\sqrt{3}\sqrt{\frac{729t^6+729t^5+486t^4+189t^3+54t^2+9t+1}{t(-1+3t)}}t^4\bigg)$$

$$\left(-1+9t-27t^2+27t^3\right)^2(-1+3t)^2\left(1-6t+9t^2\right)^2\Big)^{1/3}t^3$$

$$+2457\Bigg(\bigg(-5832t^6-540t^3+1$$

$$+24\sqrt{3}\sqrt{\frac{729t^6+729t^5+486t^4+189t^3+54t^2+9t+1}{t(-1+3t)}}t^2$$

$$-144\sqrt{3}\sqrt{\frac{729t^6+729t^5+486t^4+189t^3+54t^2+9t+1}{t(-1+3t)}}t^3$$

$$+216\sqrt{3}\sqrt{\frac{729t^6+729t^5+486t^4+189t^3+54t^2+9t+1}{t(-1+3t)}}t^4\bigg)$$

$$\left(-1+9t-27t^2+27t^3\right)^2(-1+3t)^2\left(1-6t+9t^2\right)^2\Big)^{1/3}t^4$$

$$-28836\Bigg(\bigg(-5832t^6-540t^3+1$$

$$+24\sqrt{3}\sqrt{\frac{729t^6+729t^5+486t^4+189t^3+54t^2+9t+1}{t(-1+3t)}}t^2$$

$$-144\sqrt{3}\sqrt{\frac{729t^6+729t^5+486t^4+189t^3+54t^2+9t+1}{t(-1+3t)}}\,t^3$$

$$+216\sqrt{3}\sqrt{\frac{729t^6+729t^5+486t^4+189t^3+54t^2+9t+1}{t(-1+3t)}}\,t^4\Bigg)$$

$$\left(-1+9t-27t^2+27t^3\right)^2(-1+3t)^2\left(1-6t+9t^2\right)^2\Bigg)^{1/3}t^5$$

$$+216027\Bigg(\Bigg(-5832t^6-540t^3+1$$

$$+24\sqrt{3}\sqrt{\frac{729t^6+729t^5+486t^4+189t^3+54t^2+9t+1}{t(-1+3t)}}\,t^2$$

$$-144\sqrt{3}\sqrt{\frac{729t^6+729t^5+486t^4+189t^3+54t^2+9t+1}{t(-1+3t)}}\,t^3$$

$$+216\sqrt{3}\sqrt{\frac{729t^6+729t^5+486t^4+189t^3+54t^2+9t+1}{t(-1+3t)}}\,t^4\Bigg)$$

$$\left(-1+9t-27t^2+27t^3\right)^2(-1+3t)^2\left(1-6t+9t^2\right)^2\Bigg)^{1/3}t^6$$

$$+199017t^8\Bigg(\Bigg(-5832t^6-540t^3+1$$

$$+24\sqrt{3}\sqrt{\frac{729t^6+729t^5+486t^4+189t^3+54t^2+9t+1}{t(-1+3t)}}\,t^2$$

$$-144\sqrt{3}\sqrt{\frac{729t^6+729t^5+486t^4+189t^3+54t^2+9t+1}{t(-1+3t)}}\,t^3$$

$$+216\sqrt{3}\sqrt{\frac{729t^6+729t^5+486t^4+189t^3+54t^2+9t+1}{t(-1+3t)}}\,t^4\Bigg)$$

$$\left(-1+9t-27t^2+27t^3\right)^2(-1+3t)^2\left(1-6t+9t^2\right)^2\Bigg)^{1/3}$$

$$- 928746\, t^7 \Bigg(\bigg(-5832\, t^6 - 540\, t^3 + 1$$

$$+ 24 \sqrt{3} \sqrt{\frac{729\, t^6 + 729\, t^5 + 486\, t^4 + 189\, t^3 + 54\, t^2 + 9\, t + 1}{t\,(-1 + 3\, t)}}\, t^2$$

$$- 144 \sqrt{3} \sqrt{\frac{729\, t^6 + 729\, t^5 + 486\, t^4 + 189\, t^3 + 54\, t^2 + 9\, t + 1}{t\,(-1 + 3\, t)}}\, t^3$$

$$+ 216 \sqrt{3} \sqrt{\frac{729\, t^6 + 729\, t^5 + 486\, t^4 + 189\, t^3 + 54\, t^2 + 9\, t + 1}{t\,(-1 + 3\, t)}}\, t^4 \bigg)$$

$$\left(-1 + 9\, t - 27\, t^2 + 27\, t^3\right)^2 (-1 + 3\, t)^2 \left(1 - 6\, t + 9\, t^2\right)^2 \Bigg)^{1/3}$$

$$+ 72 \sqrt{3} \sqrt{\frac{729\, t^6 + 729\, t^5 + 486\, t^4 + 189\, t^3 + 54\, t^2 + 9\, t + 1}{t\,(-1 + 3\, t)}}\, t^4$$

$$+ 167670 \Bigg(\bigg(-5832\, t^6 - 540\, t^3 + 1$$

$$+ 24 \sqrt{3} \sqrt{\frac{729\, t^6 + 729\, t^5 + 486\, t^4 + 189\, t^3 + 54\, t^2 + 9\, t + 1}{t\,(-1 + 3\, t)}}\, t^2$$

$$- 144 \sqrt{3} \sqrt{\frac{729\, t^6 + 729\, t^5 + 486\, t^4 + 189\, t^3 + 54\, t^2 + 9\, t + 1}{t\,(-1 + 3\, t)}}\, t^3$$

$$+ 216 \sqrt{3} \sqrt{\frac{729\, t^6 + 729\, t^5 + 486\, t^4 + 189\, t^3 + 54\, t^2 + 9\, t + 1}{t\,(-1 + 3\, t)}}\, t^4 \bigg)$$

$$\left(-1 + 9\, t - 27\, t^2 + 27\, t^3\right)^2 (-1 + 3\, t)^2 \left(1 - 6\, t + 9\, t^2\right)^2 \Bigg)^{2/3} t^6$$

$$+ 2295 \Bigg(\bigg(-5832\, t^6 - 540\, t^3 + 1$$

$$+ 24 \sqrt{3} \sqrt{\frac{729\, t^6 + 729\, t^5 + 486\, t^4 + 189\, t^3 + 54\, t^2 + 9\, t + 1}{t\,(-1 + 3\, t)}}\, t^2$$

$$- 144 \sqrt{3} \sqrt{\frac{729 t^6 + 729 t^5 + 486 t^4 + 189 t^3 + 54 t^2 + 9 t + 1}{t (-1 + 3 t)}} t^3$$

$$+ 216 \sqrt{3} \sqrt{\frac{729 t^6 + 729 t^5 + 486 t^4 + 189 t^3 + 54 t^2 + 9 t + 1}{t (-1 + 3 t)}} t^4 \Bigg)$$

$$\left(-1 + 9 t - 27 t^2 + 27 t^3\right)^2 (-1 + 3 t)^2 \left(1 - 6 t + 9 t^2\right)^2 \Bigg)^{2/3} t^4$$

$$+ 2663766 \Bigg(\Bigg(-5832 t^6 - 540 t^3 + 1$$

$$+ 24 \sqrt{3} \sqrt{\frac{729 t^6 + 729 t^5 + 486 t^4 + 189 t^3 + 54 t^2 + 9 t + 1}{t (-1 + 3 t)}} t^2$$

$$- 144 \sqrt{3} \sqrt{\frac{729 t^6 + 729 t^5 + 486 t^4 + 189 t^3 + 54 t^2 + 9 t + 1}{t (-1 + 3 t)}} t^3$$

$$+ 216 \sqrt{3} \sqrt{\frac{729 t^6 + 729 t^5 + 486 t^4 + 189 t^3 + 54 t^2 + 9 t + 1}{t (-1 + 3 t)}} t^4 \Bigg)$$

$$\left(-1 + 9 t - 27 t^2 + 27 t^3\right)^2 (-1 + 3 t)^2 \left(1 - 6 t + 9 t^2\right)^2 \Bigg)^{2/3} t^8$$

$$- 24300 \Bigg(\Bigg(-5832 t^6 - 540 t^3 + 1$$

$$+ 24 \sqrt{3} \sqrt{\frac{729 t^6 + 729 t^5 + 486 t^4 + 189 t^3 + 54 t^2 + 9 t + 1}{t (-1 + 3 t)}} t^2$$

$$- 144 \sqrt{3} \sqrt{\frac{729 t^6 + 729 t^5 + 486 t^4 + 189 t^3 + 54 t^2 + 9 t + 1}{t (-1 + 3 t)}} t^3$$

$$+ 216 \sqrt{3} \sqrt{\frac{729 t^6 + 729 t^5 + 486 t^4 + 189 t^3 + 54 t^2 + 9 t + 1}{t (-1 + 3 t)}} t^4 \Bigg)$$

$$\left(-1 + 9 t - 27 t^2 + 27 t^3\right)^2 (-1 + 3 t)^2 \left(1 - 6 t + 9 t^2\right)^2 \Bigg)^{2/3} t^5$$

$$+ 10333575 \Bigg(\Bigg(-5832\, t^6 - 540\, t^3 + 1$$

$$+ 24 \sqrt{3} \sqrt{\frac{729\, t^6 + 729\, t^5 + 486\, t^4 + 189\, t^3 + 54\, t^2 + 9\, t + 1}{t\, (-1 + 3\, t)}}\; t^2$$

$$- 144 \sqrt{3} \sqrt{\frac{729\, t^6 + 729\, t^5 + 486\, t^4 + 189\, t^3 + 54\, t^2 + 9\, t + 1}{t\, (-1 + 3\, t)}}\; t^3$$

$$+ 216 \sqrt{3} \sqrt{\frac{729\, t^6 + 729\, t^5 + 486\, t^4 + 189\, t^3 + 54\, t^2 + 9\, t + 1}{t\, (-1 + 3\, t)}}\; t^4 \Bigg)$$

$$\left(-1 + 9\, t - 27\, t^2 + 27\, t^3\right)^2 (-1 + 3\, t)^2 \left(1 - 6\, t + 9\, t^2\right)^2 \Bigg)^{2/3} t^{10}$$

$$- 796068 \Bigg(\Bigg(-5832\, t^6 - 540\, t^3 + 1$$

$$+ 24 \sqrt{3} \sqrt{\frac{729\, t^6 + 729\, t^5 + 486\, t^4 + 189\, t^3 + 54\, t^2 + 9\, t + 1}{t\, (-1 + 3\, t)}}\; t^2$$

$$- 144 \sqrt{3} \sqrt{\frac{729\, t^6 + 729\, t^5 + 486\, t^4 + 189\, t^3 + 54\, t^2 + 9\, t + 1}{t\, (-1 + 3\, t)}}\; t^3$$

$$+ 216 \sqrt{3} \sqrt{\frac{729\, t^6 + 729\, t^5 + 486\, t^4 + 189\, t^3 + 54\, t^2 + 9\, t + 1}{t\, (-1 + 3\, t)}}\; t^4 \Bigg)$$

$$\left(-1 + 9\, t - 27\, t^2 + 27\, t^3\right)^2 (-1 + 3\, t)^2 \left(1 - 6\, t + 9\, t^2\right)^2 \Bigg)^{2/3} t^{7}$$

$$- 6298560 \Bigg(\Bigg(-5832\, t^6 - 540\, t^3 + 1$$

$$+ 24 \sqrt{3} \sqrt{\frac{729\, t^6 + 729\, t^5 + 486\, t^4 + 189\, t^3 + 54\, t^2 + 9\, t + 1}{t\, (-1 + 3\, t)}}\; t^2$$

$$- 144 \sqrt{3} \sqrt{\frac{729\, t^6 + 729\, t^5 + 486\, t^4 + 189\, t^3 + 54\, t^2 + 9\, t + 1}{t\, (-1 + 3\, t)}}\; t^3$$

$$+ 216\sqrt{3}\sqrt{\frac{729 t^6 + 729 t^5 + 486 t^4 + 189 t^3 + 54 t^2 + 9 t + 1}{t(-1 + 3 t)}}\, t^4\Big)$$

$$\left(-1 + 9 t - 27 t^2 + 27 t^3\right)^2 (-1 + 3 t)^2 \left(1 - 6 t + 9 t^2\right)^2\Big)^{2/3} t^9$$

$$+ 3\Big(\Big(-5832 t^6 - 540 t^3 + 1$$

$$+ 24\sqrt{3}\sqrt{\frac{729 t^6 + 729 t^5 + 486 t^4 + 189 t^3 + 54 t^2 + 9 t + 1}{t(-1 + 3 t)}}\, t^2$$

$$- 144\sqrt{3}\sqrt{\frac{729 t^6 + 729 t^5 + 486 t^4 + 189 t^3 + 54 t^2 + 9 t + 1}{t(-1 + 3 t)}}\, t^3$$

$$+ 216\sqrt{3}\sqrt{\frac{729 t^6 + 729 t^5 + 486 t^4 + 189 t^3 + 54 t^2 + 9 t + 1}{t(-1 + 3 t)}}\, t^4\Big)$$

$$\left(-1 + 9 t - 27 t^2 + 27 t^3\right)^2 (-1 + 3 t)^2 \left(1 - 6 t + 9 t^2\right)^2\Big)^{2/3} t^2$$

$$- 126\Big(\Big(-5832 t^6 - 540 t^3 + 1$$

$$+ 24\sqrt{3}\sqrt{\frac{729 t^6 + 729 t^5 + 486 t^4 + 189 t^3 + 54 t^2 + 9 t + 1}{t(-1 + 3 t)}}\, t^2$$

$$- 144\sqrt{3}\sqrt{\frac{729 t^6 + 729 t^5 + 486 t^4 + 189 t^3 + 54 t^2 + 9 t + 1}{t(-1 + 3 t)}}\, t^3$$

$$+ 216\sqrt{3}\sqrt{\frac{729 t^6 + 729 t^5 + 486 t^4 + 189 t^3 + 54 t^2 + 9 t + 1}{t(-1 + 3 t)}}\, t^4\Big)$$

$$\left(-1 + 9 t - 27 t^2 + 27 t^3\right)^2 (-1 + 3 t)^2 \left(1 - 6 t + 9 t^2\right)^2\Big)^{2/3} t^3$$

$$+ 7263027\Big(\Big(-5832 t^6 - 540 t^3 + 1$$

$$+ 24\sqrt{3}\sqrt{\frac{729 t^6 + 729 t^5 + 486 t^4 + 189 t^3 + 54 t^2 + 9 t + 1}{t(-1+3t)}}\, t^2$$

$$- 144\sqrt{3}\sqrt{\frac{729 t^6 + 729 t^5 + 486 t^4 + 189 t^3 + 54 t^2 + 9 t + 1}{t(-1+3t)}}\, t^3$$

$$+ 216\sqrt{3}\sqrt{\frac{729 t^6 + 729 t^5 + 486 t^4 + 189 t^3 + 54 t^2 + 9 t + 1}{t(-1+3t)}}\, t^4\Bigg)$$

$$\left(-1 + 9t - 27t^2 + 27t^3\right)^2 (-1+3t)^2 \left(1 - 6t + 9t^2\right)^2\Bigg)^{2/3} t^{12}$$

$$- 11219310\Bigg(\Bigg(-5832 t^6 - 540 t^3 + 1$$

$$+ 24\sqrt{3}\sqrt{\frac{729 t^6 + 729 t^5 + 486 t^4 + 189 t^3 + 54 t^2 + 9 t + 1}{t(-1+3t)}}\, t^2$$

$$- 144\sqrt{3}\sqrt{\frac{729 t^6 + 729 t^5 + 486 t^4 + 189 t^3 + 54 t^2 + 9 t + 1}{t(-1+3t)}}\, t^3$$

$$+ 216\sqrt{3}\sqrt{\frac{729 t^6 + 729 t^5 + 486 t^4 + 189 t^3 + 54 t^2 + 9 t + 1}{t(-1+3t)}}\, t^4\Bigg)$$

$$\left(-1 + 9t - 27t^2 + 27t^3\right)^2 (-1+3t)^2 \left(1 - 6t + 9t^2\right)^2\Bigg)^{2/3} t^{11}$$

$$- 2125764\, t^{13}\Bigg(\Bigg(-5832 t^6 - 540 t^3 + 1$$

$$+ 24\sqrt{3}\sqrt{\frac{729 t^6 + 729 t^5 + 486 t^4 + 189 t^3 + 54 t^2 + 9 t + 1}{t(-1+3t)}}\, t^2$$

$$- 144\sqrt{3}\sqrt{\frac{729 t^6 + 729 t^5 + 486 t^4 + 189 t^3 + 54 t^2 + 9 t + 1}{t(-1+3t)}}\, t^3$$

$$+ 216\sqrt{3}\sqrt{\frac{729 t^6 + 729 t^5 + 486 t^4 + 189 t^3 + 54 t^2 + 9 t + 1}{t(-1+3t)}}\, t^4\Bigg)$$

$$\left(\left(-1+9t-27t^2+27t^3\right)^2(-1+3t)^2\left(1-6t+9t^2\right)^2\right)^{2/3}$$

$$-256134879\left(\left(-5832t^6-540t^3+1\right.\right.$$

$$+24\sqrt{3}\sqrt{\frac{729t^6+729t^5+486t^4+189t^3+54t^2+9t+1}{t(-1+3t)}}\,t^2$$

$$-144\sqrt{3}\sqrt{\frac{729t^6+729t^5+486t^4+189t^3+54t^2+9t+1}{t(-1+3t)}}\,t^3$$

$$\left.+216\sqrt{3}\sqrt{\frac{729t^6+729t^5+486t^4+189t^3+54t^2+9t+1}{t(-1+3t)}}\,t^4\right)$$

$$\left.\left(-1+9t-27t^2+27t^3\right)^2(-1+3t)^2\left(1-6t+9t^2\right)^2\right)^{1/3}t^{10}$$

$$+30023136\left(\left(-5832t^6-540t^3+1\right.\right.$$

$$+24\sqrt{3}\sqrt{\frac{729t^6+729t^5+486t^4+189t^3+54t^2+9t+1}{t(-1+3t)}}\,t^2$$

$$-144\sqrt{3}\sqrt{\frac{729t^6+729t^5+486t^4+189t^3+54t^2+9t+1}{t(-1+3t)}}\,t^3$$

$$\left.+216\sqrt{3}\sqrt{\frac{729t^6+729t^5+486t^4+189t^3+54t^2+9t+1}{t(-1+3t)}}\,t^4\right)$$

$$\left.\left(-1+9t-27t^2+27t^3\right)^2(-1+3t)^2\left(1-6t+9t^2\right)^2\right)^{1/3}t^{9}$$

$$-4686423885\left(\left(-5832t^6-540t^3+1\right.\right.$$

$$+24\sqrt{3}\sqrt{\frac{729t^6+729t^5+486t^4+189t^3+54t^2+9t+1}{t(-1+3t)}}\,t^2$$

$$- 144\sqrt{3}\sqrt{\frac{729 t^6 + 729 t^5 + 486 t^4 + 189 t^3 + 54 t^2 + 9 t + 1}{t(-1+3t)}}\, t^3$$

$$+ 216\sqrt{3}\sqrt{\frac{729 t^6 + 729 t^5 + 486 t^4 + 189 t^3 + 54 t^2 + 9 t + 1}{t(-1+3t)}}\, t^4\Bigg)$$

$$\left(-1 + 9t - 27t^2 + 27t^3\right)^2 (-1+3t)^2 \left(1 - 6t + 9t^2\right)^2\Bigg)^{1/3} t^{12}$$

$$- 25389593775\Bigg(\Bigg(-5832 t^6 - 540 t^3 + 1$$

$$+ 24\sqrt{3}\sqrt{\frac{729 t^6 + 729 t^5 + 486 t^4 + 189 t^3 + 54 t^2 + 9 t + 1}{t(-1+3t)}}\, t^2$$

$$- 144\sqrt{3}\sqrt{\frac{729 t^6 + 729 t^5 + 486 t^4 + 189 t^3 + 54 t^2 + 9 t + 1}{t(-1+3t)}}\, t^3$$

$$+ 216\sqrt{3}\sqrt{\frac{729 t^6 + 729 t^5 + 486 t^4 + 189 t^3 + 54 t^2 + 9 t + 1}{t(-1+3t)}}\, t^4\Bigg)$$

$$\left(-1 + 9t - 27t^2 + 27t^3\right)^2 (-1+3t)^2 \left(1 - 6t + 9t^2\right)^2\Bigg)^{1/3} t^{14}$$

$$+ 38235054186\Bigg(\Bigg(-5832 t^6 - 540 t^3 + 1$$

$$+ 24\sqrt{3}\sqrt{\frac{729 t^6 + 729 t^5 + 486 t^4 + 189 t^3 + 54 t^2 + 9 t + 1}{t(-1+3t)}}\, t^2$$

$$- 144\sqrt{3}\sqrt{\frac{729 t^6 + 729 t^5 + 486 t^4 + 189 t^3 + 54 t^2 + 9 t + 1}{t(-1+3t)}}\, t^3$$

$$+ 216\sqrt{3}\sqrt{\frac{729 t^6 + 729 t^5 + 486 t^4 + 189 t^3 + 54 t^2 + 9 t + 1}{t(-1+3t)}}\, t^4\Bigg)$$

$$\left(-1 + 9t - 27t^2 + 27t^3\right)^2 (-1+3t)^2 \left(1 - 6t + 9t^2\right)^2\Bigg)^{1/3} t^{15}$$

$$
\begin{aligned}
&+ 1300377077\,8\Bigg(\bigg(\Big(-5832\,t^{6} - 540\,t^{3} + 1 \\
&+ 24\sqrt{3}\,\sqrt{\frac{729\,t^{6} + 729\,t^{5} + 486\,t^{4} + 189\,t^{3} + 54\,t^{2} + 9\,t + 1}{t\,(-1 + 3\,t)}}\,t^{2} \\
&- 144\sqrt{3}\,\sqrt{\frac{729\,t^{6} + 729\,t^{5} + 486\,t^{4} + 189\,t^{3} + 54\,t^{2} + 9\,t + 1}{t\,(-1 + 3\,t)}}\,t^{3} \\
&+ 216\sqrt{3}\,\sqrt{\frac{729\,t^{6} + 729\,t^{5} + 486\,t^{4} + 189\,t^{3} + 54\,t^{2} + 9\,t + 1}{t\,(-1 + 3\,t)}}\,t^{4}\Big) \\
&\left(-1 + 9\,t - 27\,t^{2} + 27\,t^{3}\right)^{2}(-1 + 3\,t)^{2}\left(1 - 6\,t + 9\,t^{2}\right)^{2}\bigg)^{1/3}\,t^{11} \\
&+ 12573894060\Bigg(\bigg(\Big(-5832\,t^{6} - 540\,t^{3} + 1 \\
&+ 24\sqrt{3}\,\sqrt{\frac{729\,t^{6} + 729\,t^{5} + 486\,t^{4} + 189\,t^{3} + 54\,t^{2} + 9\,t + 1}{t\,(-1 + 3\,t)}}\,t^{2} \\
&- 144\sqrt{3}\,\sqrt{\frac{729\,t^{6} + 729\,t^{5} + 486\,t^{4} + 189\,t^{3} + 54\,t^{2} + 9\,t + 1}{t\,(-1 + 3\,t)}}\,t^{3} \\
&+ 216\sqrt{3}\,\sqrt{\frac{729\,t^{6} + 729\,t^{5} + 486\,t^{4} + 189\,t^{3} + 54\,t^{2} + 9\,t + 1}{t\,(-1 + 3\,t)}}\,t^{4}\Big) \\
&\left(-1 + 9\,t - 27\,t^{2} + 27\,t^{3}\right)^{2}(-1 + 3\,t)^{2}\left(1 - 6\,t + 9\,t^{2}\right)^{2}\bigg)^{1/3}\,t^{13} \\
&- 41769668277\,t^{16}\Bigg(\bigg(\Big(-5832\,t^{6} - 540\,t^{3} + 1 \\
&+ 24\sqrt{3}\,\sqrt{\frac{729\,t^{6} + 729\,t^{5} + 486\,t^{4} + 189\,t^{3} + 54\,t^{2} + 9\,t + 1}{t\,(-1 + 3\,t)}}\,t^{2} \\
&- 144\sqrt{3}\,\sqrt{\frac{729\,t^{6} + 729\,t^{5} + 486\,t^{4} + 189\,t^{3} + 54\,t^{2} + 9\,t + 1}{t\,(-1 + 3\,t)}}\,t^{3}
\end{aligned}
$$

$$+ 216 \sqrt{3} \sqrt{\frac{729 t^6 + 729 t^5 + 486 t^4 + 189 t^3 + 54 t^2 + 9 t + 1}{t (-1 + 3 t)}} t^4 \Bigg)$$

$$(-1 + 9 t - 27 t^2 + 27 t^3)^2 (-1 + 3 t)^2 (1 - 6 t + 9 t^2)^2 \Bigg)^{1/3}$$

$$- 14463698256 t^{18} \Bigg(\Bigg(-5832 t^6 - 540 t^3 + 1$$

$$+ 24 \sqrt{3} \sqrt{\frac{729 t^6 + 729 t^5 + 486 t^4 + 189 t^3 + 54 t^2 + 9 t + 1}{t (-1 + 3 t)}} t^2$$

$$- 144 \sqrt{3} \sqrt{\frac{729 t^6 + 729 t^5 + 486 t^4 + 189 t^3 + 54 t^2 + 9 t + 1}{t (-1 + 3 t)}} t^3$$

$$+ 216 \sqrt{3} \sqrt{\frac{729 t^6 + 729 t^5 + 486 t^4 + 189 t^3 + 54 t^2 + 9 t + 1}{t (-1 + 3 t)}} t^4 \Bigg)$$

$$(-1 + 9 t - 27 t^2 + 27 t^3)^2 (-1 + 3 t)^2 (1 - 6 t + 9 t^2)^2 \Bigg)^{1/3}$$

$$+ 3099363912 t^{19} \Bigg(\Bigg(-5832 t^6 - 540 t^3 + 1$$

$$+ 24 \sqrt{3} \sqrt{\frac{729 t^6 + 729 t^5 + 486 t^4 + 189 t^3 + 54 t^2 + 9 t + 1}{t (-1 + 3 t)}} t^2$$

$$- 144 \sqrt{3} \sqrt{\frac{729 t^6 + 729 t^5 + 486 t^4 + 189 t^3 + 54 t^2 + 9 t + 1}{t (-1 + 3 t)}} t^3$$

$$+ 216 \sqrt{3} \sqrt{\frac{729 t^6 + 729 t^5 + 486 t^4 + 189 t^3 + 54 t^2 + 9 t + 1}{t (-1 + 3 t)}} t^4 \Bigg)$$

$$(-1 + 9 t - 27 t^2 + 27 t^3)^2 (-1 + 3 t)^2 (1 - 6 t + 9 t^2)^2 \Bigg)^{1/3}$$

$$+ 31338012888 t^{17} \Bigg(\Bigg(-5832 t^6 - 540 t^3 + 1$$

$$+ 24 \sqrt{3} \sqrt{\frac{729 t^6 + 729 t^5 + 486 t^4 + 189 t^3 + 54 t^2 + 9 t + 1}{t (-1 + 3 t)}} t^2$$

$$- 144 \sqrt{3} \sqrt{\frac{729 t^6 + 729 t^5 + 486 t^4 + 189 t^3 + 54 t^2 + 9 t + 1}{t (-1 + 3 t)}} t^3$$

$$+ 216 \sqrt{3} \sqrt{\frac{729 t^6 + 729 t^5 + 486 t^4 + 189 t^3 + 54 t^2 + 9 t + 1}{t (-1 + 3 t)}} t^4 \Bigg)$$

$$\left(-1 + 9 t - 27 t^2 + 27 t^3\right)^2 (-1 + 3 t)^2 \left(1 - 6 t + 9 t^2\right)^2 \Bigg)^{1/3}$$

$$- 4320 \sqrt{3} \sqrt{\frac{729 t^6 + 729 t^5 + 486 t^4 + 189 t^3 + 54 t^2 + 9 t + 1}{t (-1 + 3 t)}} t^5$$

$$+ 123120 \sqrt{3} \sqrt{\frac{729 t^6 + 729 t^5 + 486 t^4 + 189 t^3 + 54 t^2 + 9 t + 1}{t (-1 + 3 t)}}$$

$$t^6$$

$$- 2216160 \sqrt{3} \sqrt{\frac{729 t^6 + 729 t^5 + 486 t^4 + 189 t^3 + 54 t^2 + 9 t + 1}{t (-1 + 3 t)}}$$

$$t^7$$

$$+ 28256040 \sqrt{3}$$

$$\sqrt{\frac{729 t^6 + 729 t^5 + 486 t^4 + 189 t^3 + 54 t^2 + 9 t + 1}{t (-1 + 3 t)}} t^8$$

$$- 271257984 \sqrt{3}$$

$$\sqrt{\frac{729 t^6 + 729 t^5 + 486 t^4 + 189 t^3 + 54 t^2 + 9 t + 1}{t (-1 + 3 t)}} t^9$$

$$+ 2034434880 \sqrt{3}$$

$$\sqrt{\frac{729 t^6 + 729 t^5 + 486 t^4 + 189 t^3 + 54 t^2 + 9 t + 1}{t(-1 + 3 t)}} t^{10}$$

$$- 12206609280 \sqrt{3}$$

$$\sqrt{\frac{729 t^6 + 729 t^5 + 486 t^4 + 189 t^3 + 54 t^2 + 9 t + 1}{t(-1 + 3 t)}} t^{11}$$

$$+ 59507220240 \sqrt{3}$$

$$\sqrt{\frac{729 t^6 + 729 t^5 + 486 t^4 + 189 t^3 + 54 t^2 + 9 t + 1}{t(-1 + 3 t)}} t^{12}$$

$$- 238028880960 \sqrt{3}$$

$$\sqrt{\frac{729 t^6 + 729 t^5 + 486 t^4 + 189 t^3 + 54 t^2 + 9 t + 1}{t(-1 + 3 t)}} t^{13}$$

$$+ 785495307168 \sqrt{3}$$

$$\sqrt{\frac{729 t^6 + 729 t^5 + 486 t^4 + 189 t^3 + 54 t^2 + 9 t + 1}{t(-1 + 3 t)}} t^{14}$$

$$- 2142259928640 \sqrt{3}$$

$$\sqrt{\frac{729 t^6 + 729 t^5 + 486 t^4 + 189 t^3 + 54 t^2 + 9 t + 1}{t(-1 + 3 t)}} t^{15}$$

$$+ 4820084839440 \sqrt{3}$$

$$\sqrt{\frac{729 t^6 + 729 t^5 + 486 t^4 + 189 t^3 + 54 t^2 + 9 t + 1}{t (-1 + 3 t)}} \; t^{16}$$

$$- 8898618165120 t^{17} \sqrt{3}$$

$$\sqrt{\frac{729 t^6 + 729 t^5 + 486 t^4 + 189 t^3 + 54 t^2 + 9 t + 1}{t (-1 + 3 t)}}$$

$$+ 13347927247680 t^{18} \sqrt{3}$$

$$\sqrt{\frac{729 t^6 + 729 t^5 + 486 t^4 + 189 t^3 + 54 t^2 + 9 t + 1}{t (-1 + 3 t)}}$$

$$- 16017512697216 t^{19} \sqrt{3}$$

$$\sqrt{\frac{729 t^6 + 729 t^5 + 486 t^4 + 189 t^3 + 54 t^2 + 9 t + 1}{t (-1 + 3 t)}}$$

$$+ 15016418153640 t^{20} \sqrt{3}$$

$$\sqrt{\frac{729 t^6 + 729 t^5 + 486 t^4 + 189 t^3 + 54 t^2 + 9 t + 1}{t (-1 + 3 t)}}$$

$$- 10599824579040 t^{21} \sqrt{3}$$

$$\sqrt{\frac{729 t^6 + 729 t^5 + 486 t^4 + 189 t^3 + 54 t^2 + 9 t + 1}{t (-1 + 3 t)}}$$

$$+ 5299912289520 t^{22} \sqrt{3}$$

$$\sqrt{\frac{729 t^6 + 729 t^5 + 486 t^4 + 189 t^3 + 54 t^2 + 9 t + 1}{t (-1 + 3 t)}}$$

$$- 1673656512480\, t^{23} \sqrt{3}$$

$$\sqrt{\frac{729\, t^6 + 729\, t^5 + 486\, t^4 + 189\, t^3 + 54\, t^2 + 9\, t + 1}{t\, (-1 + 3\, t)}}$$

$$+ 251048476872\, t^{24} \sqrt{3}$$

$$\left.\left.\sqrt{\frac{729\, t^6 + 729\, t^5 + 486\, t^4 + 189\, t^3 + 54\, t^2 + 9\, t + 1}{t\, (-1 + 3\, t)}}\right)^{1/2}\right) \Big/$$

$$\left(\left(\left(-5832\, t^6 - 540\, t^3 + 1\right.\right.\right.$$

$$+ 24 \sqrt{3} \sqrt{\frac{729\, t^6 + 729\, t^5 + 486\, t^4 + 189\, t^3 + 54\, t^2 + 9\, t + 1}{t\, (-1 + 3\, t)}}\, t^2$$

$$- 144 \sqrt{3} \sqrt{\frac{729\, t^6 + 729\, t^5 + 486\, t^4 + 189\, t^3 + 54\, t^2 + 9\, t + 1}{t\, (-1 + 3\, t)}}\, t^3$$

$$\left. + 216 \sqrt{3} \sqrt{\frac{729\, t^6 + 729\, t^5 + 486\, t^4 + 189\, t^3 + 54\, t^2 + 9\, t + 1}{t\, (-1 + 3\, t)}}\, t^4 \right)$$

$$\left.\left(-1 + 9\, t - 27\, t^2 + 27\, t^3\right)^2 (-1 + 3\, t)^2 \left(1 - 6\, t + 9\, t^2\right)^2\right)^{1/3} t^2\, \left(1\right.$$

$$\left. - 18\, t + 135\, t^2 - 540\, t^3 + 1215\, t^4 - 1458\, t^5 + 729\, t^6\right)\Big)$$

28. Le nombre de marches de Kreweras qui terminent en (0,1)

On part encore de la série des marches qui finissent sur l'axe vertical :

```
> polx;
```

$$x - 2\, t + 8\, t^2 x^2 - 72\, t^3 x + 108\, t^4 + 16\, t^4 x^3 + \left(-x + 2\, t - 16\, t^2 x^2 + 104\, t^3 x + 96\, t^5 x^2 - 48\, t^4 x^3 - 144\, t^4\right) y + \left(32\, t^4 + 9\, t^2 x^2 - 32\, t^3 x + 48\, t^6 x^4 + 64\, t^4 x^3 + 192\, t^6 x - 264\, t^5 x^2\right) y^2 + \left(-32\, t^4 x^3 - 192\, t^6 x + 192\, t^7 x^3 + 128\, t^7 - 96\, t^6 x^4 + 128\, t^5 x^2\right) y^3 + \left(56\, t^6 x^4 + 48\, t^8 x^5 - 192\, t^7 x^3 + 192\, t^8 x^2\right) y^4 + \left(-48\, t^8 x^5 + 96\, t^9 x^4\right) y^5 + 16\, t^{10} x^6 y^6 \quad \textbf{(2.6.3.2.1)}$$

on souhaite extraire le coefficient de x dans la série bivariée solution, c'est-à-dire le terme constant de la dérivée par rapport à x. Celui-ci est obtenu en dérivant l'équation :

```
> solve(eval(diff(eval(polx,y=y(x)),x),x=0),eval(diff(y(x),
  x), x = 0));
```

$$\frac{1}{2}\,\frac{-1+y(0)}{t} \tag{2.6.3.2.2}$$

Le coefficient de t^n est donc la moitié de celui de t^{n+1} dans la série des excursions.

Vérification :

```
> seq(count_paths(StepsK,n,1,0),n=0..40);
```

0, 0, 1, 0, 0, 8, 0, 0, 96, 0, 0, 1408, 0, 0, 23296, 0, 0, 417792, 0, 0, 7938048, 0, 0, 157515776, 0, 0, 3233218560, 0, 0, 68191518720, 0, 0, 1470564925440, 0, 0, 32307180208128, 0, 0, 721014212263936, 0, 0 **(2.6.3.2.3)**

```
> seq(excursions(StepsK,n),n=1..41);
```

0, 0, 2, 0, 0, 16, 0, 0, 192, 0, 0, 2816, 0, 0, 46592, 0, 0, 835584, 0, 0, 15876096, 0, 0, 315031552, 0, 0, 6466437120, 0, 0, 136383037440, 0, 0, 2941129850880, 0, 0, 64614360416256, 0, 0, 1442028424527872, 0, 0 **(2.6.3.2.4)**

```
> 2*[%%]-[%];
```

[0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0] **(2.6.3.2.5)**