Modèles probabilistes pour Ehrenfest et Engset

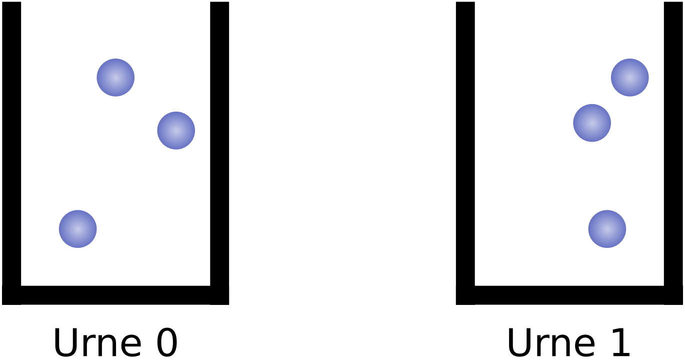
Mathieu Feuillet

En collaboration avec Ph. Robert

Mardi 6 mars 2012

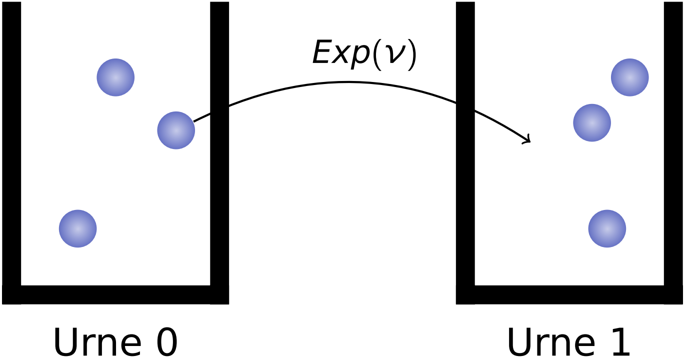
Contents

Le modèle d'Ehrenfest (1907)



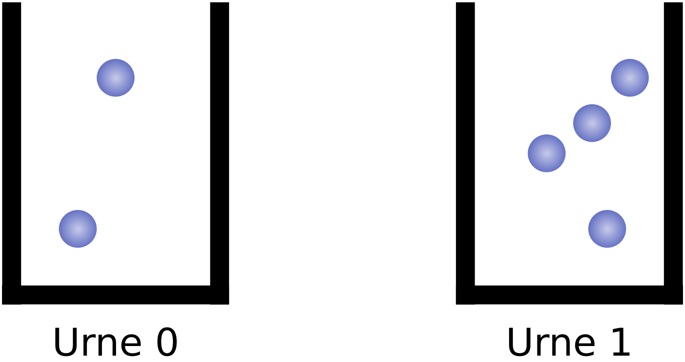
$E^N(t)$: # de boules dans l'urne 1 au temps t.

Le modèle d'Ehrenfest (1907)



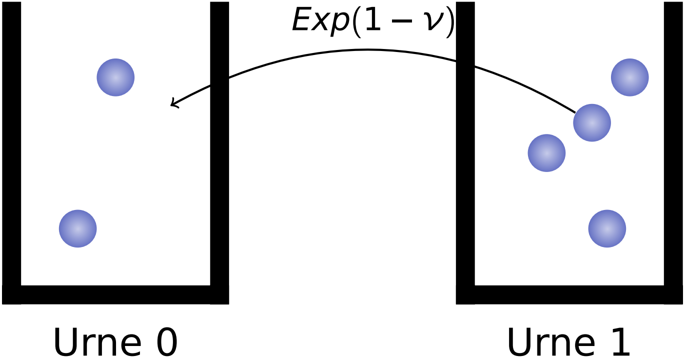
$E^N(t)$: $\#$ de boules dans l'urne 1 au temps t.

Le modèle d’Ehrenfest (1907)



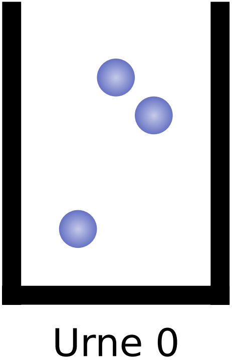
$E^N(t)$: # de boules dans l’urne 1 au temps t.

Le modèle d'Ehrenfest (1907)



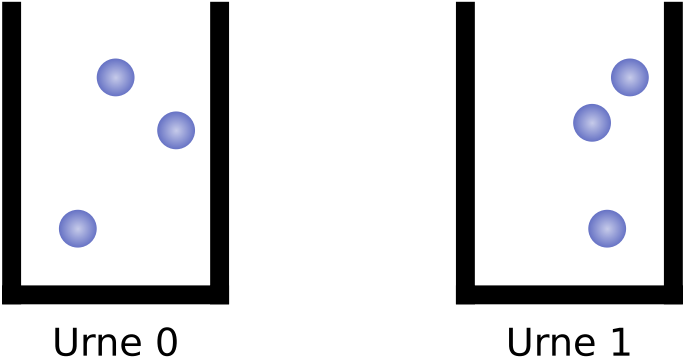
$E^N(t)$: # de boules dans l'urne 1 au temps t.

Le modèle d'Ehrenfest (1907)



$E^N(t)$: # de boules dans l'urne 1 au temps t.

Équivalent discret

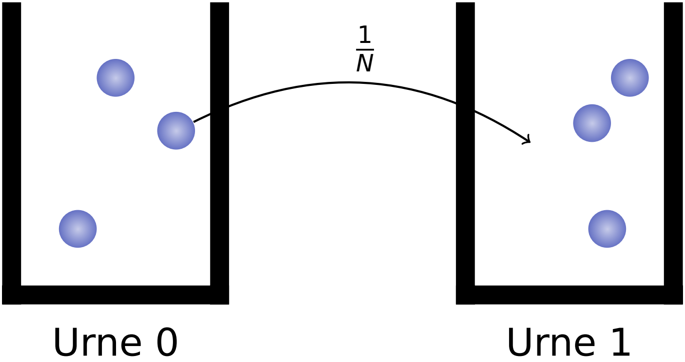


E_n^N: # de boules dans l'urne 1 au temps n.

Modèle centré

Facteur temporel N/2 entre les deux modèles.

Équivalent discret

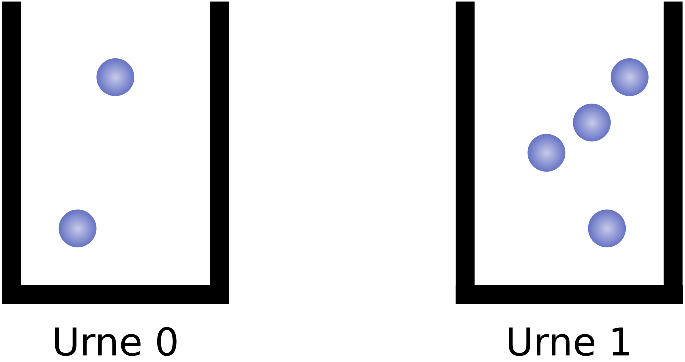


E_n^N: # de boules dans l'urne 1 au temps n.

Modèle centré

Facteur temporel N/2 entre les deux modèles.

Équivalent discret

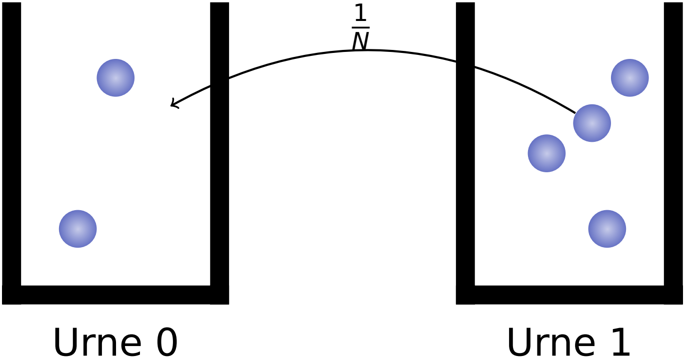


E_n^N: # de boules dans l'urne 1 au temps n.

Modèle centré

Facteur temporel N/2 entre les deux modèles.

Équivalent discret

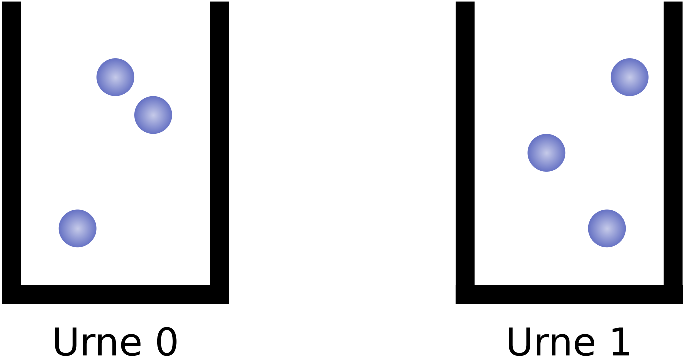


E_n^N: # de boules dans l'urne 1 au temps n.

Modèle centré

Facteur temporel N/2 entre les deux modèles.

Équivalent discret



E_n^N: # de boules dans l'urne 1 au temps n.

Modèle centré

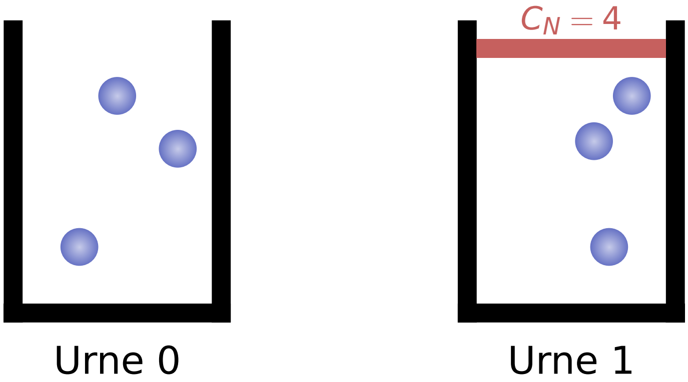
Facteur temporel N/2 entre les deux modèles.

Le processus d'Engset (1918)

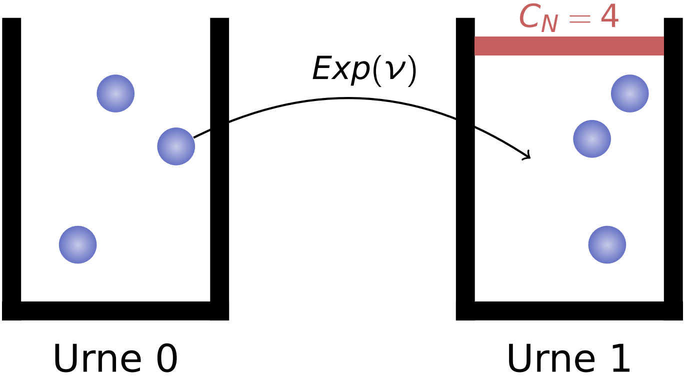
- N serveurs
- Chaque serveur récupère le fichier à taux ν
- Chaque serveur perd le fichier à taux $1-\nu$
- C_N copies maximum

$X^N(t)$: $\#$ de copies du fichier à l'instant t.

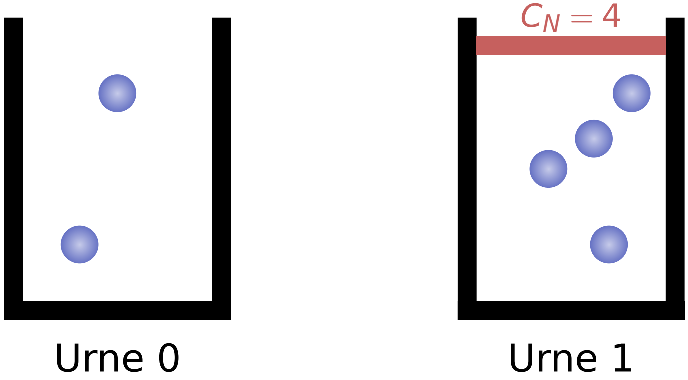
Processus d’Ehrenfest tronqué



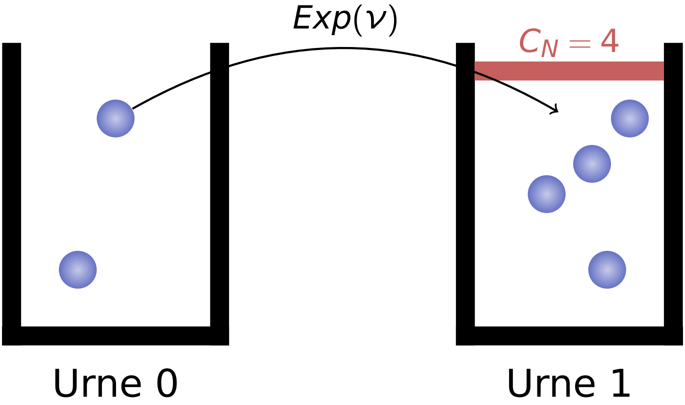
Processus d'Ehrenfest tronqué



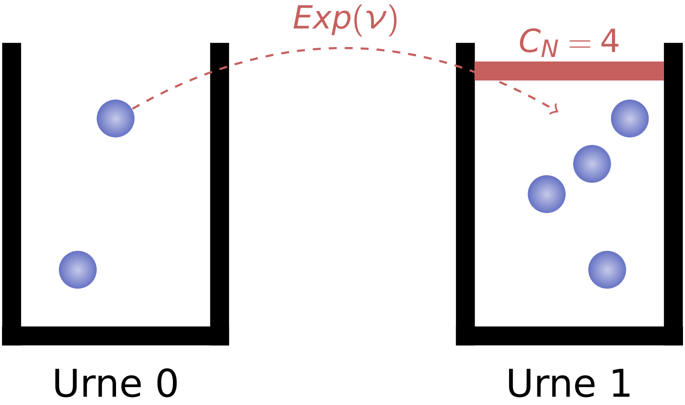
Processus d'Ehrenfest tronqué



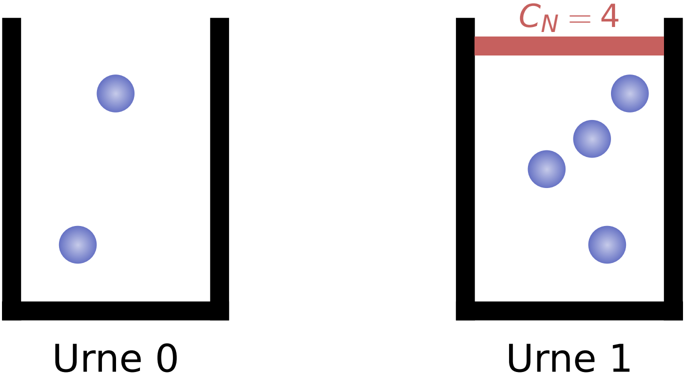
Processus d'Ehrenfest tronqué



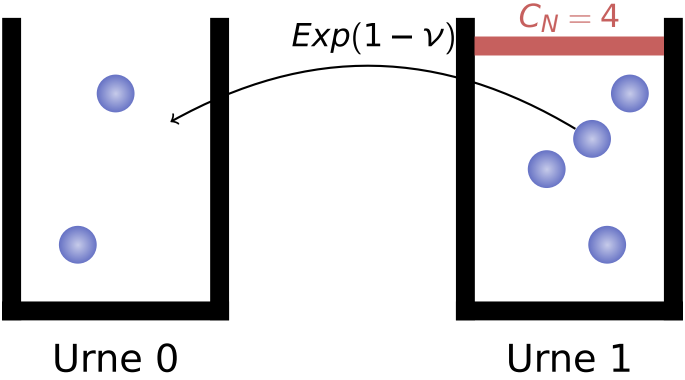
Processus d'Ehrenfest tronqué



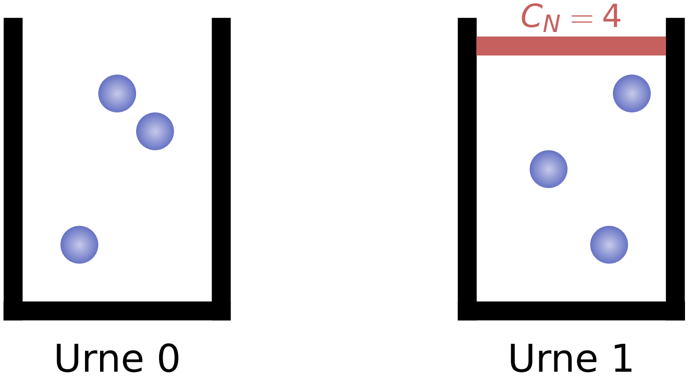
Processus d’Ehrenfest tronqué



Processus d'Ehrenfest tronqué



Processus d’Ehrenfest tronqué



Questions

- L’état 0 est-il probable ?

Questions

- L’état 0 est-il probable ?
- L’état C_N est-il probable ?

Questions

- L'état 0 est-il probable ?

- L'état C_N est-il probable ?

- Combien de temps faut-il pour aller de 0 à C_N ?

Questions

- L’état 0 est-il probable ?
- L’état C_N est-il probable ?
- Combien de temps faut-il pour aller de 0 à C_N ?
- Combien de temps faut-il pour aller de C_N à 0 ?

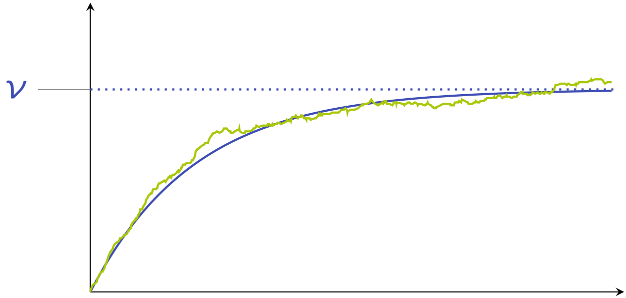
Contents

Comportement transitoire (Ehrenfest)

$$N \to \infty, \quad E^N(0) = 0$$

$$\dot{x}(t) = \nu(1 - x(t)) - (1 - \nu)x(t)$$

$$E^N(t) \approx Nx(t) + \sqrt{N}D(t) \, .$$

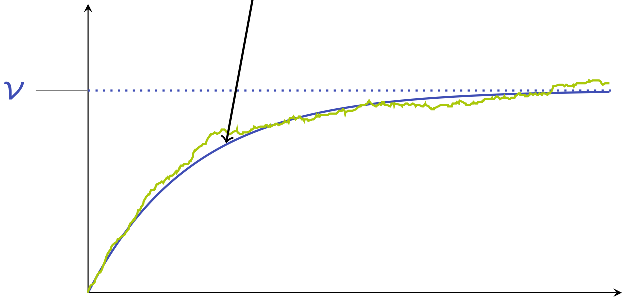


Comportement transitoire (Ehrenfest)

$$N \to \infty, \quad E^N(0) = 0$$

$$\dot{x}(t) = \nu(1 - x(t)) - (1 - \nu)x(t)$$

$$E^N(t) \approx Nx(t) + \sqrt{N}D(t) \; .$$

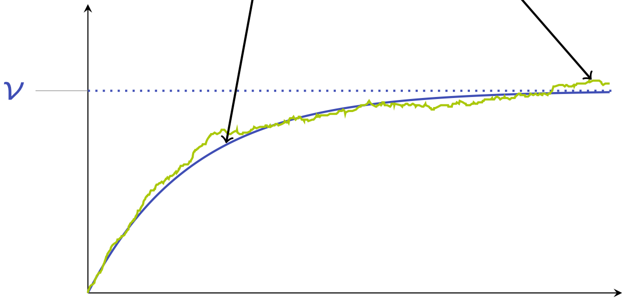


Comportement transitoire (Ehrenfest)

$$N \to \infty, \quad E^N(0) = 0$$

$$\dot{x}(t) = \nu(1 - x(t)) - (1 - \nu)x(t)$$

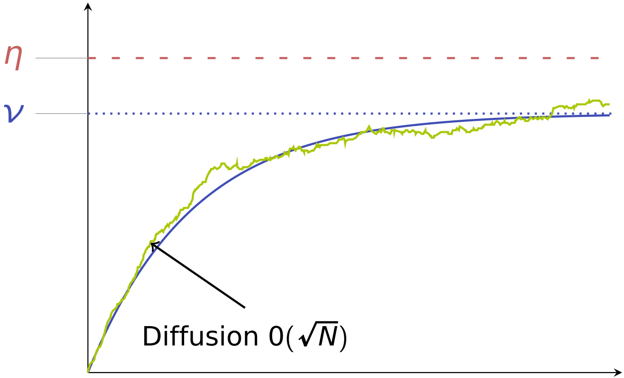
$$E^N(t) \approx Nx(t) + \sqrt{N}D(t) \, .$$



Comportement transitoire (Engset)

$$N \to \infty, \quad C_N \approx \eta N, \quad X^N(0) = 0$$

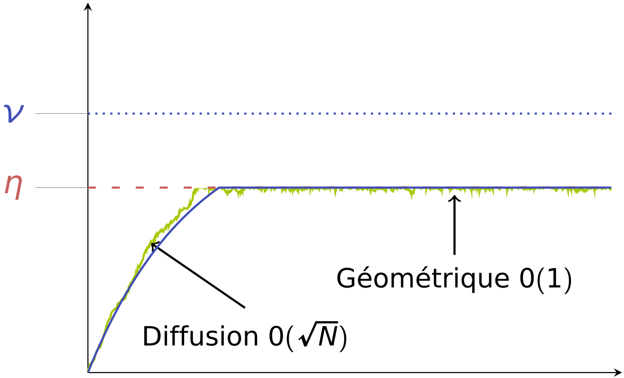
$\eta > \nu$



Comportement transitoire (Engset)

$$N \to \infty, \quad C_N \approx \eta N, \quad X^N(0) = 0$$

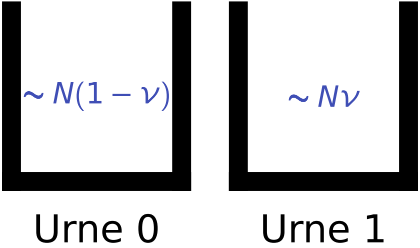
$$\eta < \nu$$

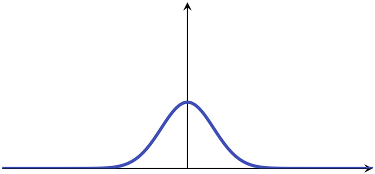


Contents

Équilibre (Engset)

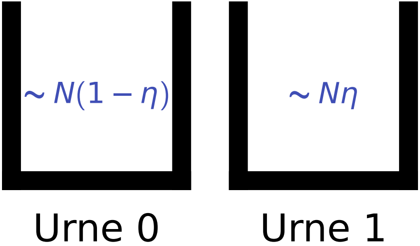
$\eta > \nu$

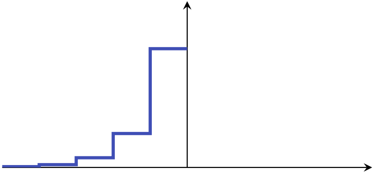




Fluctuations en $O\left(\sqrt{N}\right)$: $\mathcal{N}(0, \nu(1-\nu))$

Équilibre (Engset)
$\eta < \nu$





Fluctuations en $O(1)$: Geo$(1-\eta/\nu)$

Contents

Méthode combinatoire

$$T_{C_N}^N = \inf\left\{n \geq 1,\ E_n^N = C_N\right\}.$$

- Exprimer π_n la probabilité d'obtenir C_N en n sauts avec toutes les histoires de l'urne.

[Flajolet-Huillet 08]

Méthode combinatoire

$$T_{C_N}^N = \inf\left\{n \geq 1,\ E_n^N = C_N\right\}.$$

- Exprimer π_n la probabilité d'obtenir C_N en n sauts avec toutes les histoires de l'urne.
- Exprimer $\pi(z) = \sum_{n=0}^{N} \pi_n \frac{z^n}{n!}$ puis

$$\pi_n = \frac{n!}{N^n}\binom{N}{C_N}[z^n]\sinh^{C_N}(z)\cosh^{N-C_N}(z).$$

[Flajolet-Huillet 08]

Méthode combinatoire

$$T^N_{C_N} = \inf\left\{n \geq 1,\ E^N_n = C_N\right\}.$$

- Exprimer π_n la probabilité d'obtenir C_N en n sauts avec toutes les histoires de l'urne.
- Exprimer $\pi(z) = \sum_{n=0}^{N} \pi_n \frac{z^n}{n!}$ puis

$$\pi_n = \frac{n!}{N^n}\binom{N}{C_N}[z^n]\sinh^{C_N}(z)\cosh^{N-C_N}(z).$$

- Calculer la transformée de Laplace

[Flajolet-Huillet 08]

Méthode probabiliste

$$T^N_{C_N} = \inf\left\{t > 0,\ E^N(t) = C_N\right\}.$$

Méthode probabiliste

$$T^N_{C_N} = \inf\left\{t > 0,\ E^N(t) = C_N\right\}.$$

- Prouver que

$$M^N_\beta(t) = \left(1 - \beta(1-\nu)e^t\right)^{E^N(t)}\left(1 + \beta\nu e^t\right)^{N - E^N(t)}$$

est une martingale.

Méthode probabiliste

$$T_{C_N}^N = \inf\left\{t > 0,\ E^N(t) = C_N\right\}.$$

- Prouver que

$$M_\beta^N(t) = \left(1 - \beta(1-\nu)e^t\right)^{E^N(t)} \left(1 + \beta\nu e^t\right)^{N - E^N(t)}$$

  est une martingale.

- Propriété de martingale:

$$\mathbb{E}_0\left(M_\beta^N(t)\right) = \mathbb{E}_0\left(M_\beta^N(0)\right)$$

Méthode probabiliste

$$T^N_{C_N} = \inf\left\{t > 0,\ E^N(t) = C_N\right\}.$$

- Prouver que

$$M^N_\beta(t) = \left(1 - \beta(1-\nu)e^t\right)^{E^N(t)} \left(1 + \beta\nu e^t\right)^{N - E^N(t)}$$

  est une martingale.

- Propriété de martingale:

$$\mathbb{E}_0\left(M^N_\beta(t)\right) = \mathbb{E}_0\left(M^N_\beta(0)\right)$$

$$\mathbb{E}_0\left(M^N_\beta\left(t \wedge T^N_{C_N}\right)\right) = \mathbb{E}_0\left(M^N_\beta(0)\right)$$

Méthode probabiliste

$$T^N_{C_N} = \inf\left\{t > 0,\ E^N(t) = C_N\right\}.$$

- Prouver que

$$M^N_\beta(t) = \left(1 - \beta(1-\nu)e^t\right)^{E^N(t)} \left(1 + \beta\nu e^t\right)^{N - E^N(t)}$$

est une martingale.

- Propriété de martingale:

$$\mathbb{E}_0\left(M^N_\beta(t)\right) = \mathbb{E}_0\left(M^N_\beta(0)\right)$$

$$\mathbb{E}_0\left(M^N_\beta\left(t \wedge T^N_{C_N}\right)\right) = \mathbb{E}_0\left(M^N_\beta(0)\right)$$

Comme $\mathbb{E}_0\left(T^N_{C_N}\right) < +\infty$:

$$\mathbb{E}_0\left(M^N_\beta\left(T^N_{C_N}\right)\right) = \mathbb{E}_0\left(M^N_\beta(0)\right)$$

Méthode probabiliste

$$T^N_{C_N} = \inf\left\{t > 0,\ E^N(t) = C_N\right\}.$$

$$M^N_\beta(t) = \left(1 - \beta(1-\nu)e^t\right)^{E^N(t)} \left(1 + \beta\nu e^t\right)^{N - E^N(t)}$$

$$\mathbb{E}_0\left(M^N_\beta\left(T^N_{C_N}\right)\right) = \mathbb{E}_0\left(M^N_\beta(0)\right)$$

Méthode probabiliste

$$T^N_{C_N} = \inf\left\{t > 0,\ E^N(t) = C_N\right\}.$$

$$M^N_\beta(t) = \left(1 - \beta(1-\nu)e^t\right)^{E^N(t)} \left(1 + \beta\nu e^t\right)^{N - E^N(t)}$$

$$\mathbb{E}_0\left(M^N_\beta\left(T^N_{C_N}\right)\right) = \mathbb{E}_0\left(M^N_\beta(0)\right)$$

- Propriété de martingale:

$$\mathbb{E}\left(\left(1 - \beta(1-\nu)e^{T^N_{C_N}}\right)^{C_N} \left(1 + \beta\nu e^{T^N_{C_N}}\right)^{N - C_N}\right)$$

$$= (1 + \beta\nu)^N$$

Méthode probabiliste

$$T^N_{C_N} = \inf\left\{t > 0,\ E^N(t) = C_N\right\}.$$

$$M^N_\beta(t) = \left(1 - \beta(1-\nu)e^t\right)^{E^N(t)} \left(1 + \beta\nu e^t\right)^{N - E^N(t)}$$

$$\mathbb{E}_0\left(M^N_\beta\left(T^N_{C_N}\right)\right) = \mathbb{E}_0\left(M^N_\beta(0)\right)$$

- Propriété de martingale:

$$\mathbb{E}\left(\left(1 - \beta(1-\nu)e^{T^N_{C_N}}\right)^{C_N}\left(1 + \beta\nu e^{T^N_{C_N}}\right)^{N - C_N}\right)$$
$$= (1 + \beta\nu)^N$$

- Intégrer par rapport à $\beta^{\alpha-1}\,\mathrm{d}\beta$.

Méthode probabiliste

$$\mathbb{E}_0\left(e^{-\alpha T^N_{C_N}}\right) = \frac{\displaystyle\int_0^1 (1-u)^N u^{\alpha-1}\,\mathrm{d}u}{\displaystyle\int_0^1 (1-u)^{N-C_N}\left(1+\frac{1-\nu}{\nu}u\right)^{C_N} u^{\alpha-1}\,\mathrm{d}u}$$

Méthode probabiliste

$$\mathbb{E}_0\left(e^{-\alpha T^N_{C_N}}\right) = \frac{\displaystyle\int_0^1 (1-u)^N u^{\alpha-1}\,\mathrm{d}u}{\displaystyle\int_0^1 (1-u)^{N-C_N}\left(1+\frac{1-\nu}{\nu}u\right)^{C_N} u^{\alpha-1}\,\mathrm{d}u}$$

$$\mathbb{E}_0\left(e^{-\alpha T^N_{C_N}}\right) = \frac{\displaystyle\sum_{k=0}^{N}\binom{N}{k}\mathcal{K}^N_k(0)\frac{1}{k+\alpha}}{\displaystyle\sum_{k=0}^{N}\binom{N}{k}\mathcal{K}^N_k(C_N)\frac{1}{k+\alpha}}$$

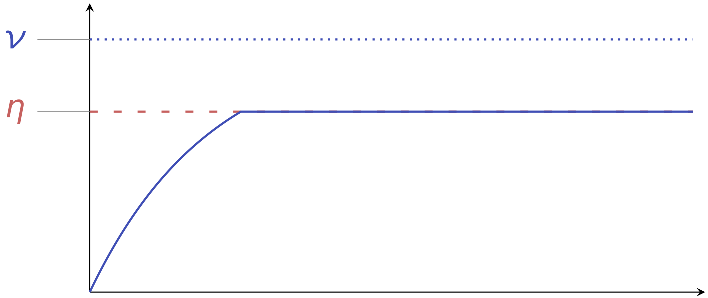
$(\mathcal{K}^N_k, 0 \leq k \leq N)$, polynômes de Krawtchouk.

[Karlin-McGregor 57 65]

Contents

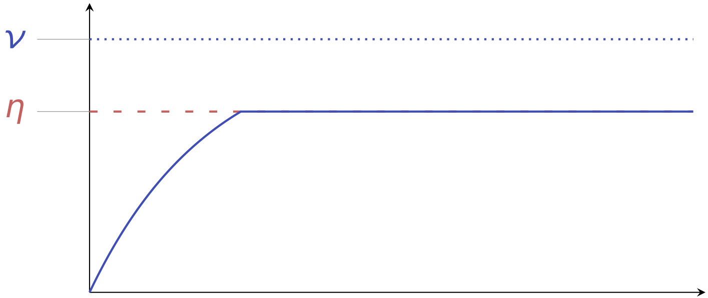
Cas $\eta < \nu$

$$\frac{X^N(t)}{N} \Rightarrow x(t) = \min\left(\nu(1 - e^{-t}), \eta\right)$$



Cas $\eta < \nu$

$$\frac{X^N(t)}{N} \Rightarrow x(t) = \min\left(\nu(1-e^{-t}), \eta\right)$$



$$T^N_{C_N} \Rightarrow \log\left(\frac{\nu}{\nu-\eta}\right)$$

Cas $\eta < \nu$

Cas continu:

$$\sqrt{N}\left[T_{C_N}^{N} - \log\left(\frac{\nu}{\nu-\eta}\right)\right] \Rightarrow \mathcal{N}\left(0, \frac{\eta(1-\eta)}{(\nu-\eta)^2}\right)$$

Cas $\eta < \nu$

Cas continu:

$$\sqrt{N}\left[T^N_{C_N} - \log\left(\frac{\nu}{\nu-\eta}\right)\right] \Rightarrow \mathcal{N}\left(0, \frac{\eta(1-\eta)}{(\nu-\eta)^2}\right)$$

Cas discret (avec $\nu = 1/2$):

$$\sqrt{N}\left[\frac{2}{N}\, T^N_{C_N} - \log\left(\frac{\nu}{\nu-\eta}\right)\right] \Rightarrow$$

$$\mathcal{N}\left(0, \frac{\eta(1-\eta)}{(\nu-\eta)^2} - 2\log\left(\frac{\eta}{\eta-\nu}\right)\right)$$

[Flajolet-Huillet 08]

Cas $\eta < \nu$

Cas continu:

$$\sqrt{N}\left[T^N_{C_N} - \log\left(\frac{\nu}{\nu-\eta}\right)\right] \Rightarrow \mathcal{N}\left(0, \frac{\eta(1-\eta)}{(\nu-\eta)^2}\right)$$

Cas discret (avec $\nu = 1/2$):

$$\sqrt{N}\left[\frac{2}{N}T^N_{C_N} - \log\left(\frac{\nu}{\nu-\eta}\right)\right] \Rightarrow$$

$$\mathcal{N}\left(0, \frac{\eta(1-\eta)}{(\nu-\eta)^2} - 2\log\left(\frac{\eta}{\eta-\nu}\right)\right)$$

[Flajolet-Huillet 08]

Cas $\eta < \nu$

Cas continu:

$$\sqrt{N}\left[T^N_{C_N} - \log\left(\frac{\nu}{\nu-\eta}\right)\right] \Rightarrow \mathcal{N}\left(0, \frac{\eta(1-\eta)}{(\nu-\eta)^2}\right)$$

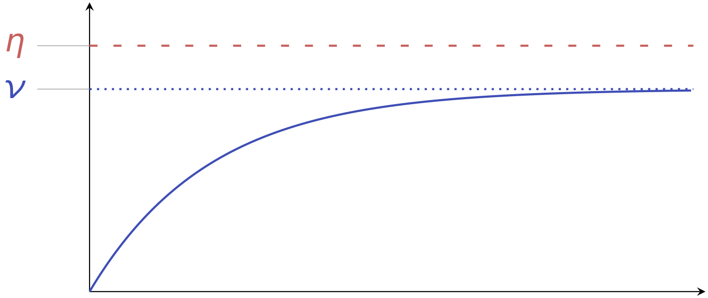
Cas discret (avec $\nu = 1/2$):

$$\sqrt{N}\left[\frac{2}{N}\, T^N_{C_N} - \log\left(\frac{\nu}{\nu-\eta}\right)\right] \Rightarrow$$

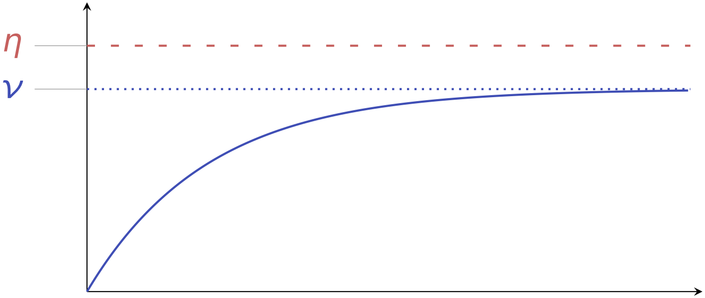
$$\mathcal{N}\left(0, \frac{\eta(1-\eta)}{(\nu-\eta)^2} - 2\log\left(\frac{\eta}{\eta-\nu}\right)\right)$$

[Flajolet-Huillet 08]

Cas $\nu < \eta < 1$



Cas $\nu < \eta < 1$



$$\frac{\sqrt{\eta(1-\eta)}}{(\nu-\eta)\sqrt{2\pi}}\sqrt{N}e^{-NH}T^N_{C_N} \Rightarrow Exp(1).$$

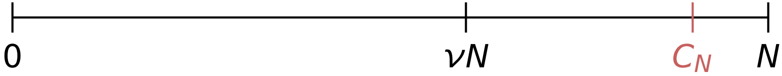
avec

$$H = (1-\eta)\log\left(\frac{1-\eta}{1-\nu}\right) + \eta\log\left(\frac{\eta}{\nu}\right).$$

Contents

Cas $\eta > \nu$

Ehrenfest:

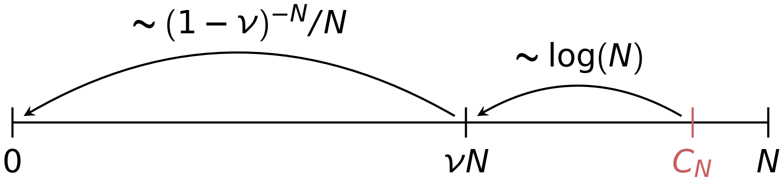


Cas $\eta > \nu$

Ehrenfest:

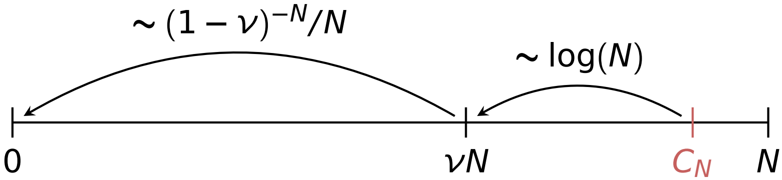
Cas $\eta > \nu$

Ehrenfest:



Cas $\eta > \nu$

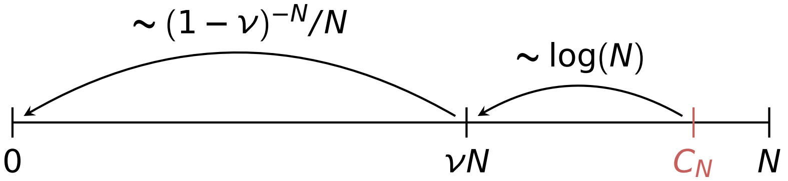
Ehrenfest:



$$N(1-\nu)^N T_0^N \Rightarrow Exp(\nu)$$

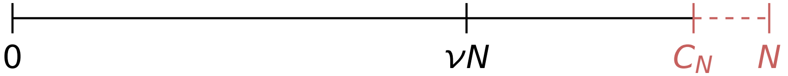
Cas $\eta > \nu$

Ehrenfest:



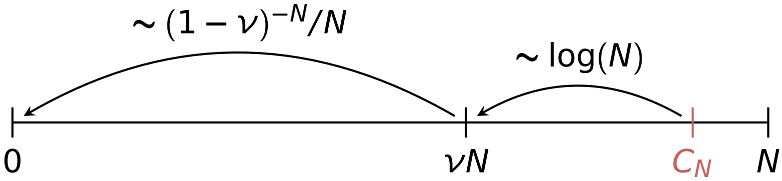
$$N(1-\nu)^N T_0^N \Rightarrow Exp(\nu)$$

Engset:



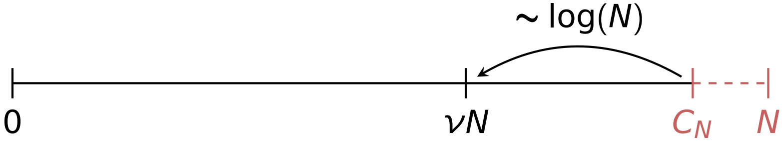
Cas $\eta > \nu$

Ehrenfest:



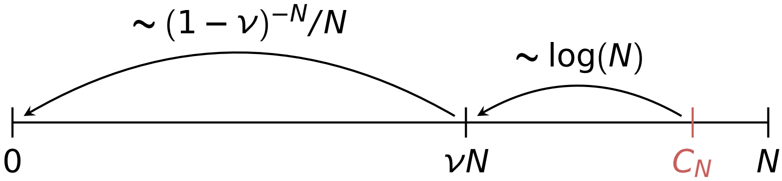
$$N(1-\nu)^N T_0^N \Rightarrow Exp(\nu)$$

Engset:



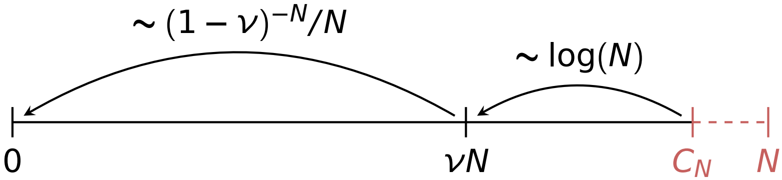
Cas $\eta > \nu$

Ehrenfest:



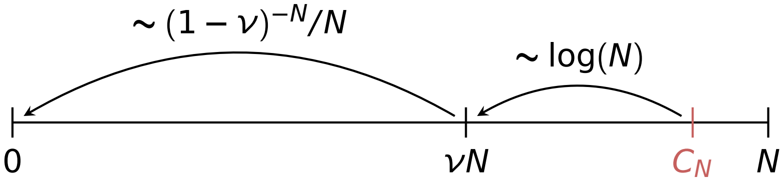
$$N(1-\nu)^N T_0^N \Rightarrow Exp(\nu)$$

Engset:



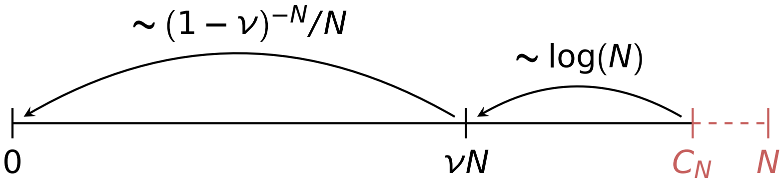
Cas $\eta > \nu$

Ehrenfest:



$$N(1-\nu)^N T_0^N \Rightarrow Exp(\nu)$$

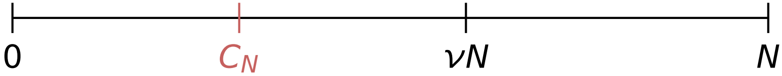
Engset:



$$N(1-\nu)^N T_0^N \Rightarrow Exp(\nu)$$

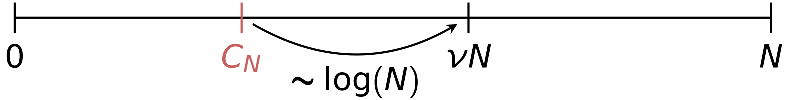
Cas $\eta < \nu$

Ehrenfest:



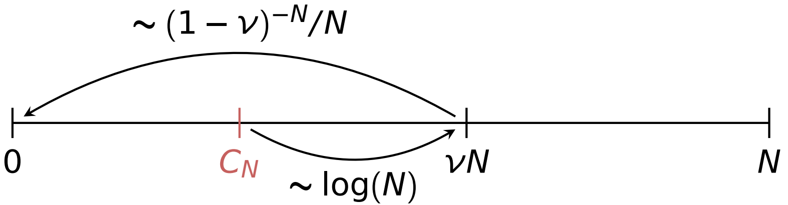
Cas $\eta < \nu$

Ehrenfest:



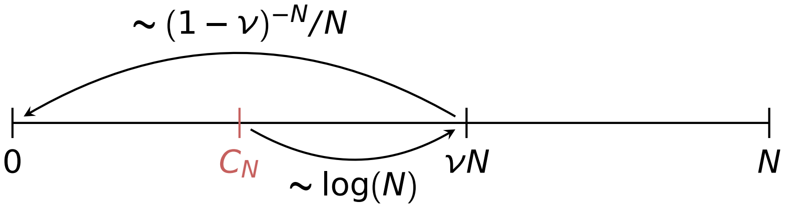
Cas $\eta < \nu$

Ehrenfest:



Cas $\eta < \nu$

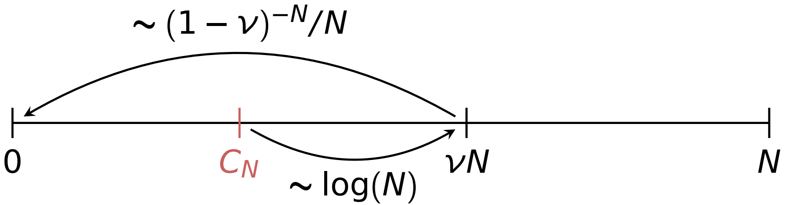
Ehrenfest:



$$N(1-\nu)^N T_0^N \Rightarrow Exp(\nu)$$

Cas $\eta < \nu$

Ehrenfest:

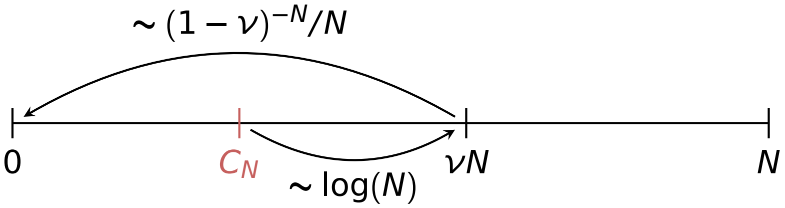


$$N(1-\nu)^N T_0^N \Rightarrow Exp(\nu)$$

Engset:

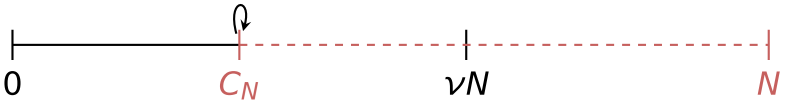
Cas $\eta < \nu$

Ehrenfest:



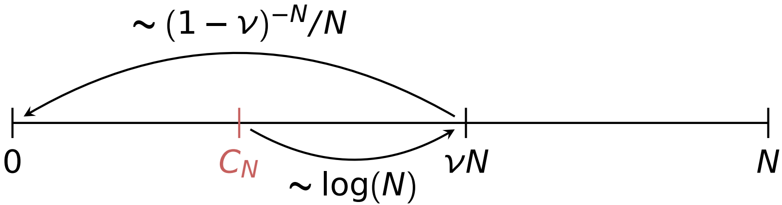
$$N(1-\nu)^N T_0^N \Rightarrow Exp(\nu)$$

Engset:



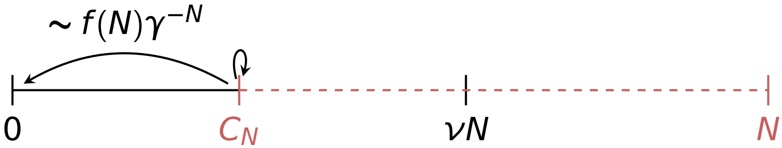
Cas $\eta < \nu$

Ehrenfest:



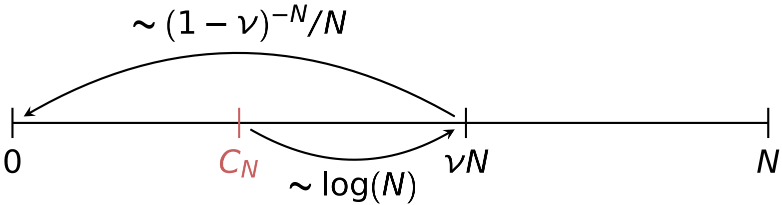
$$N(1-\nu)^N T_0^N \Rightarrow Exp(\nu)$$

Engset:



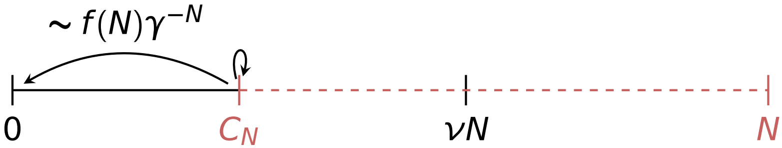
Cas $\eta < \nu$

Ehrenfest:



$$N(1-\nu)^N T_0^N \Rightarrow Exp(\nu)$$

Engset:



$$f(N)\gamma^N T_0^N \Rightarrow Exp(\nu) \quad \text{avec } \gamma < 1-\nu$$

Conclusion

Ph Flajolet (AofA 2008):

- Analytic combinatorics has something to say about balanced urn models, including some nonstandard ones $\neq$ probabilistic approaches [Mahmoud–Smythe–Janson].

Conclusion

Ph Flajolet (AofA 2008):

- Analytic combinatorics has something to say about balanced urn models, including some nonstandard ones $\neq$ probabilistic approaches [Mahmoud–Smythe–Janson].

- Les probabilités aussi !

Conclusion

Ph Flajolet (AofA 2008):

- Analytic combinatorics has something to say about balanced urn models, including some nonstandard ones $\neq$ probabilistic approaches [Mahmoud–Smythe–Janson].

- Les probabilités aussi !
- Modèle asymétrique accessible

Conclusion

Ph Flajolet (AofA 2008):

- Analytic combinatorics has something to say about balanced urn models, including some nonstandard ones $\neq$ probabilistic approaches [Mahmoud–Smythe–Janson].

- Les probabilités aussi !
- Modèle asymétrique accessible
- Continu $\neq$ Discret

Conclusion

Ph Flajolet (AofA 2008):

- Analytic combinatorics has something to say about balanced urn models, including some nonstandard ones $\neq$ probabilistic approaches [Mahmoud–Smythe–Janson].

- Les probabilités aussi !
- Modèle asymétrique accessible
- Continu $\neq$ Discret
- Dimension plus grande : [Simatos Tibi 10]

Conclusion

Ph Flajolet (AofA 2008):

- Analytic combinatorics has something to say about balanced urn models, including some nonstandard ones $\neq$ probabilistic approaches [Mahmoud–Smythe–Janson].

- Les probabilités aussi !
- Modèle asymétrique accessible
- Continu $\neq$ Discret
- Dimension plus grande : [Simatos Tibi 10]
- D'autres modèles d'urnes à explorer