Cartes et surfaces aléatoires

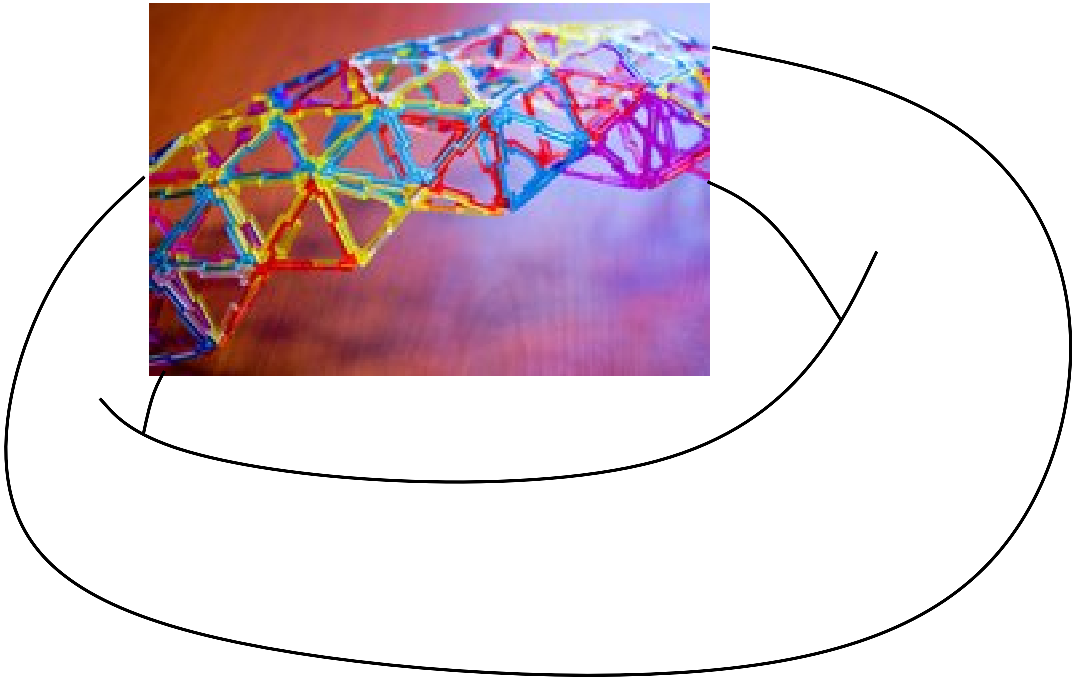
Gilles Schaeffer

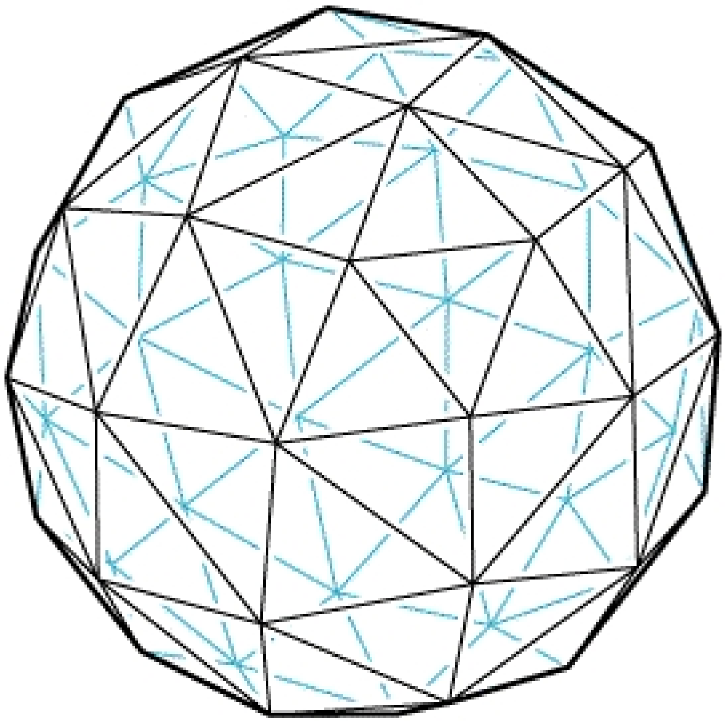
CNRS / Ecole Polytechnique

journées ALÉA 2012

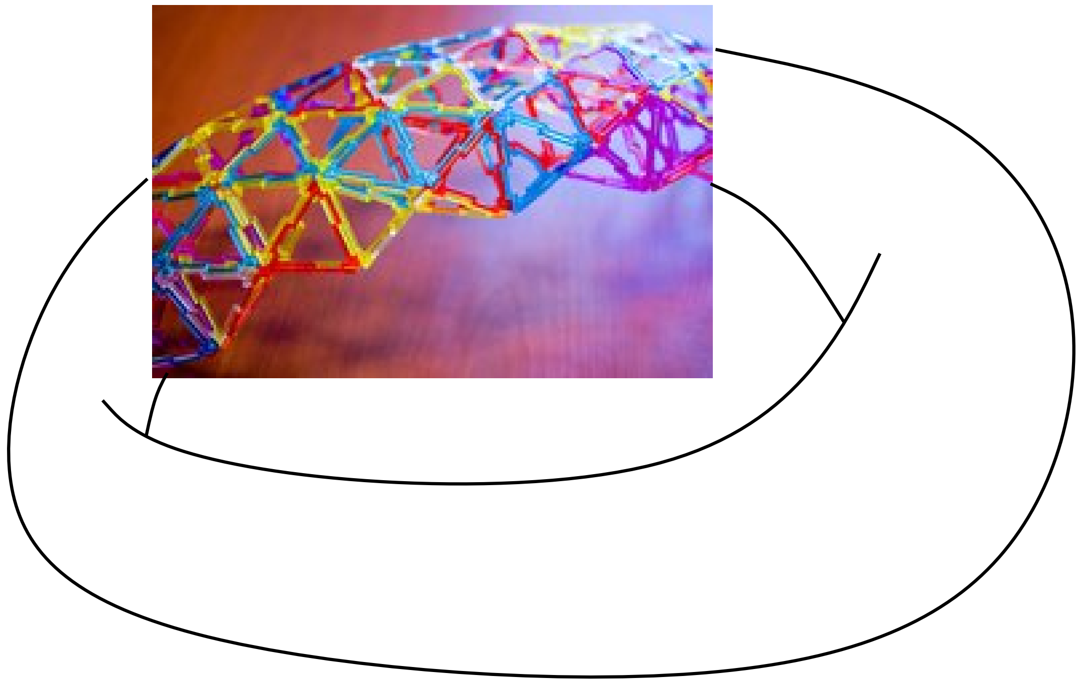
ERC Research Starting Grant 208471 "ExploreMaps"

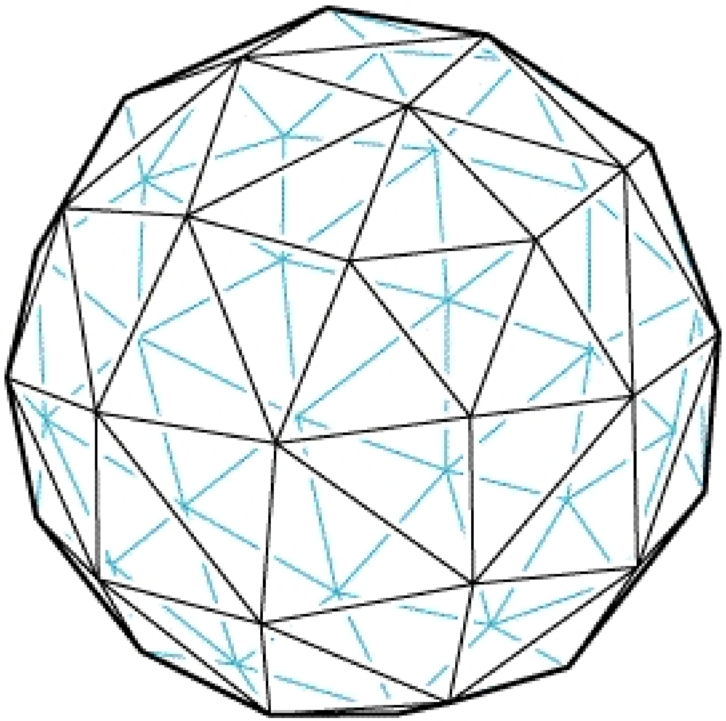
Surfaces, triangulations, cartes





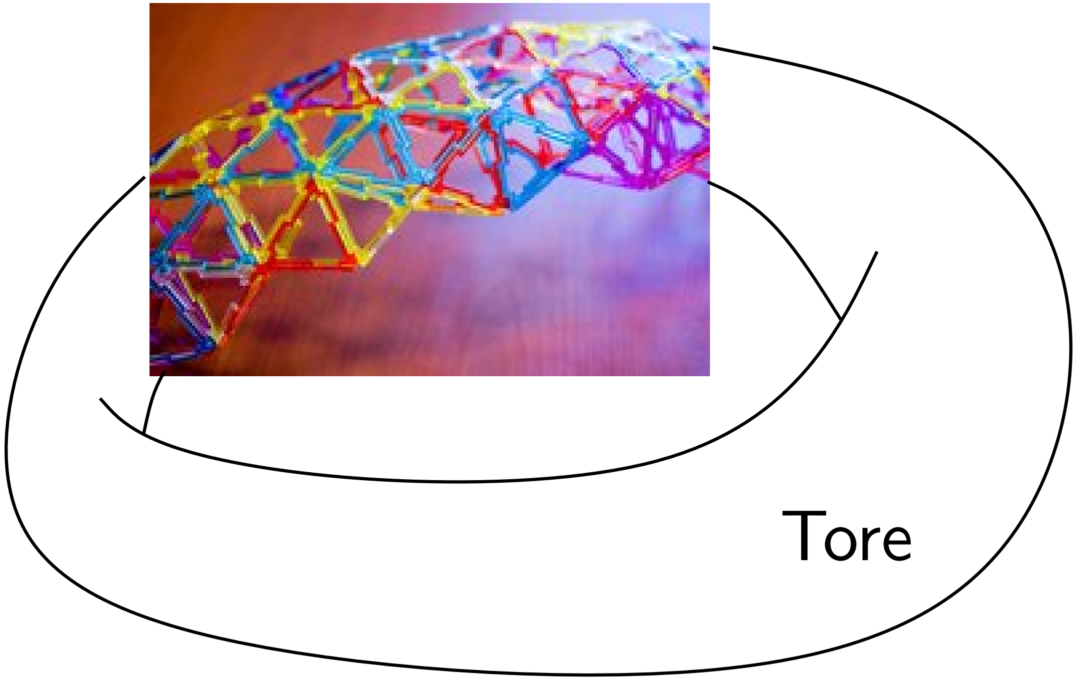
Surfaces, triangulations, cartes





Triangulation = surface obtenue par recollement de triangles

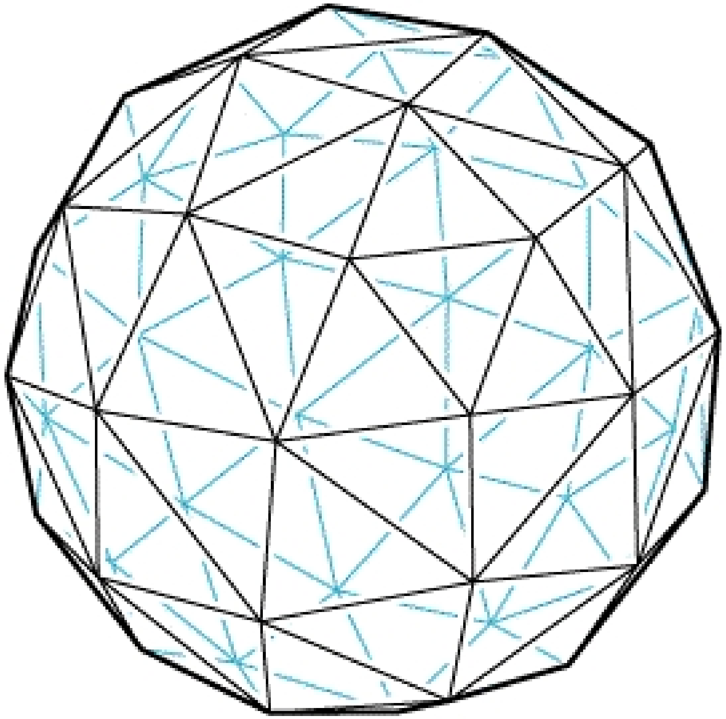
Surfaces, triangulations, cartes



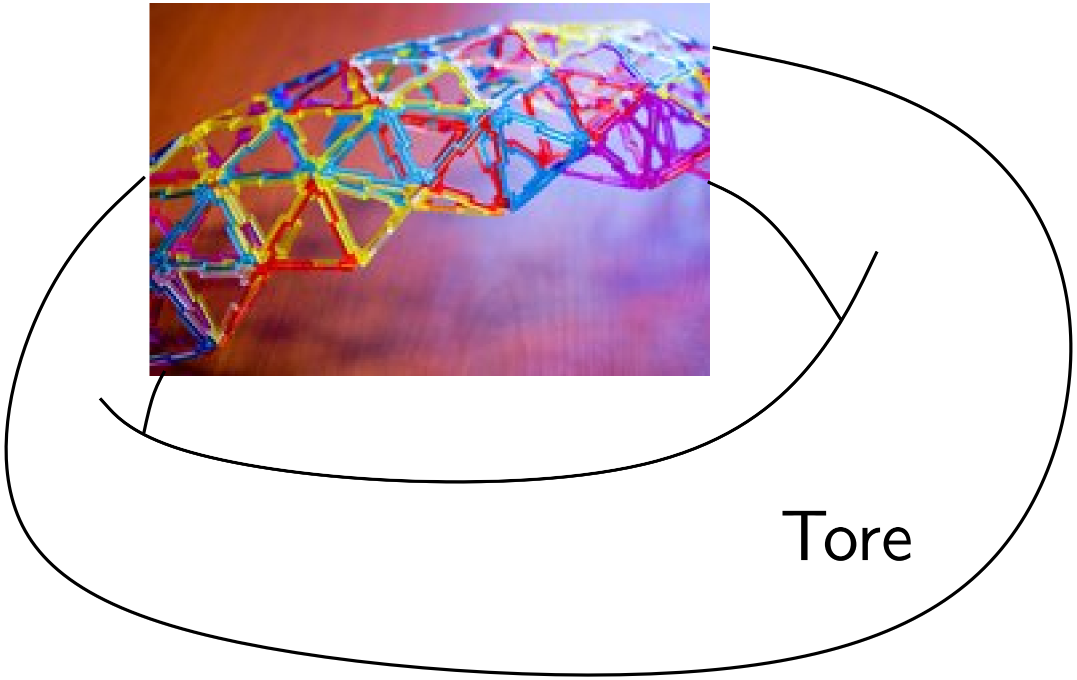
Tore

Triangulation $=$ surface obtenue par recollement de triangles

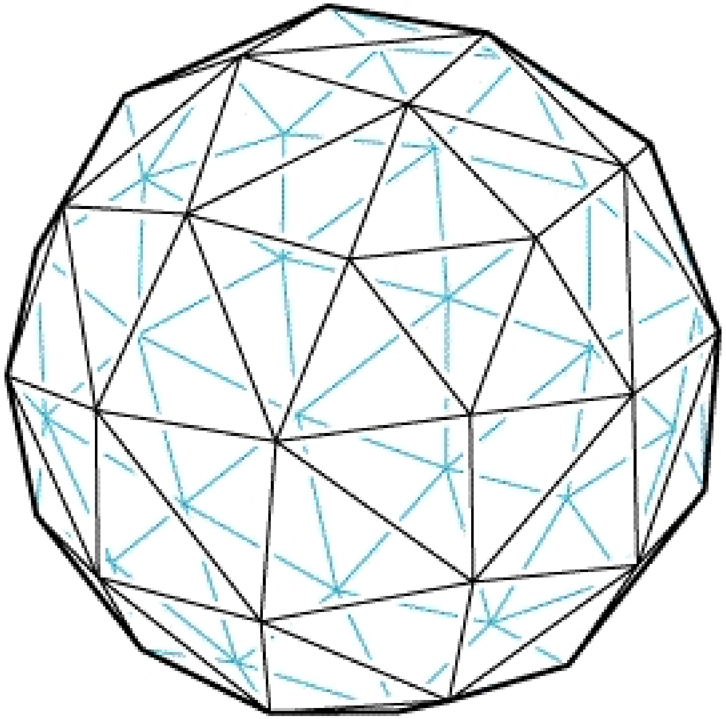
Sphère



Surfaces, triangulations, cartes



Sphère

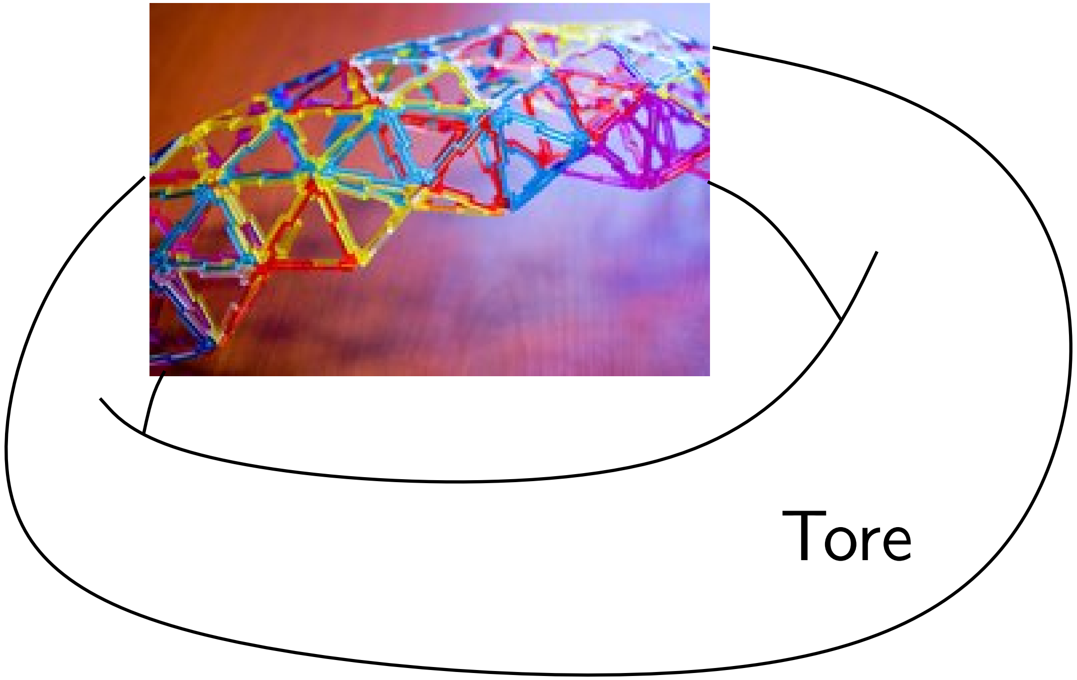


Triangulation = surface obtenue par recollement de triangles

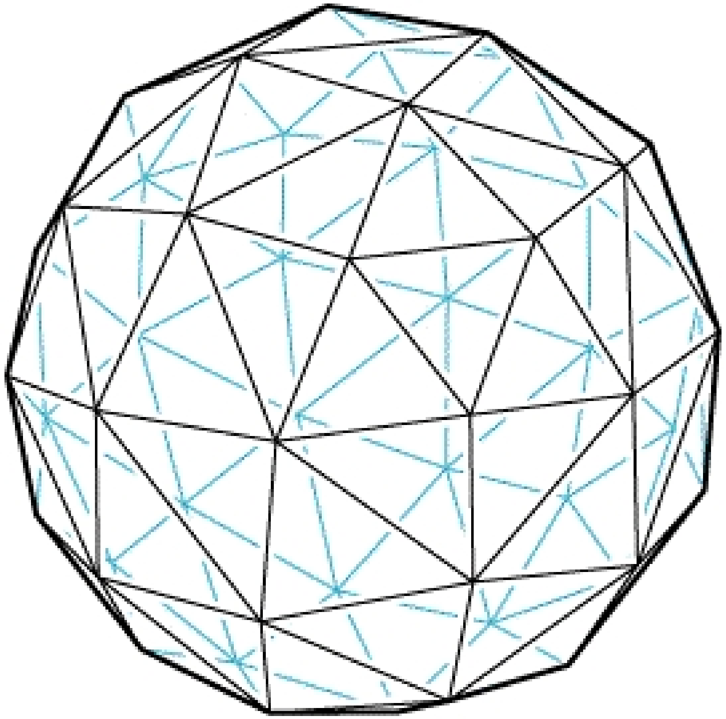
Carte = recollement de polygones

Surfaces, triangulations, cartes

Sphère avec bord ?



Sphère

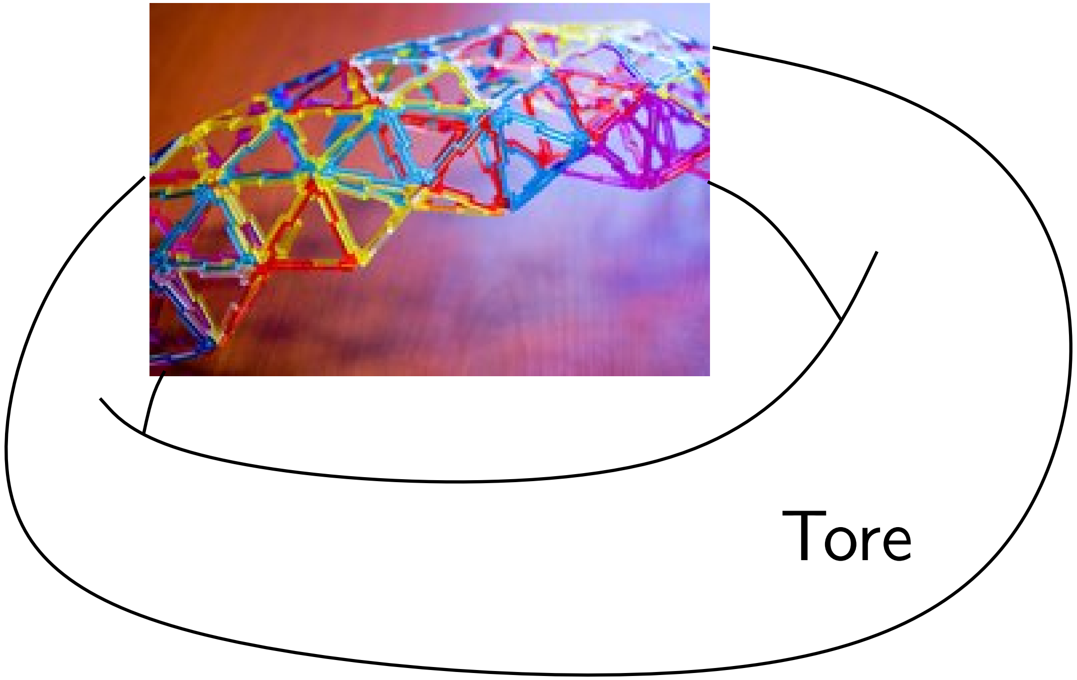


Triangulation = surface obtenue par recollement de triangles

Carte = recollement de polygones

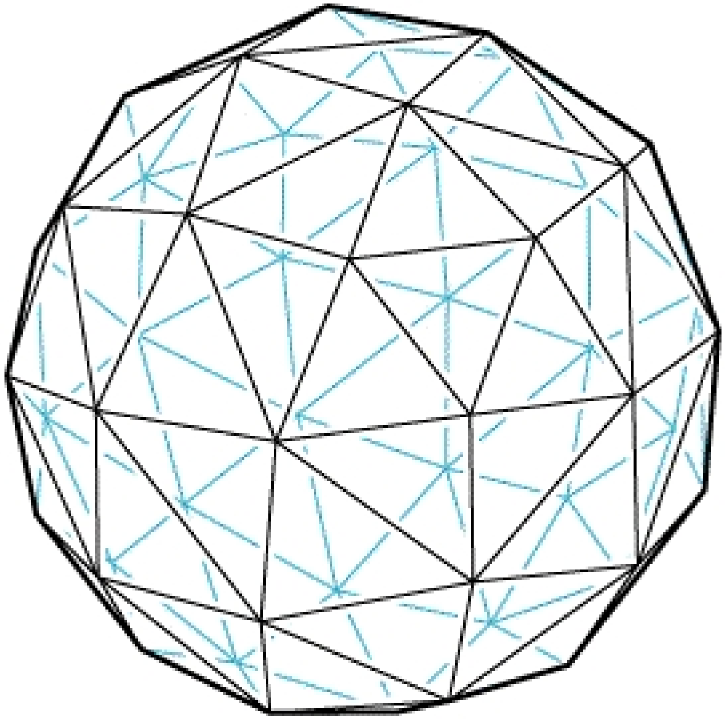
Surfaces, triangulations, cartes

Sphère avec bord ?



Tore

Sphère



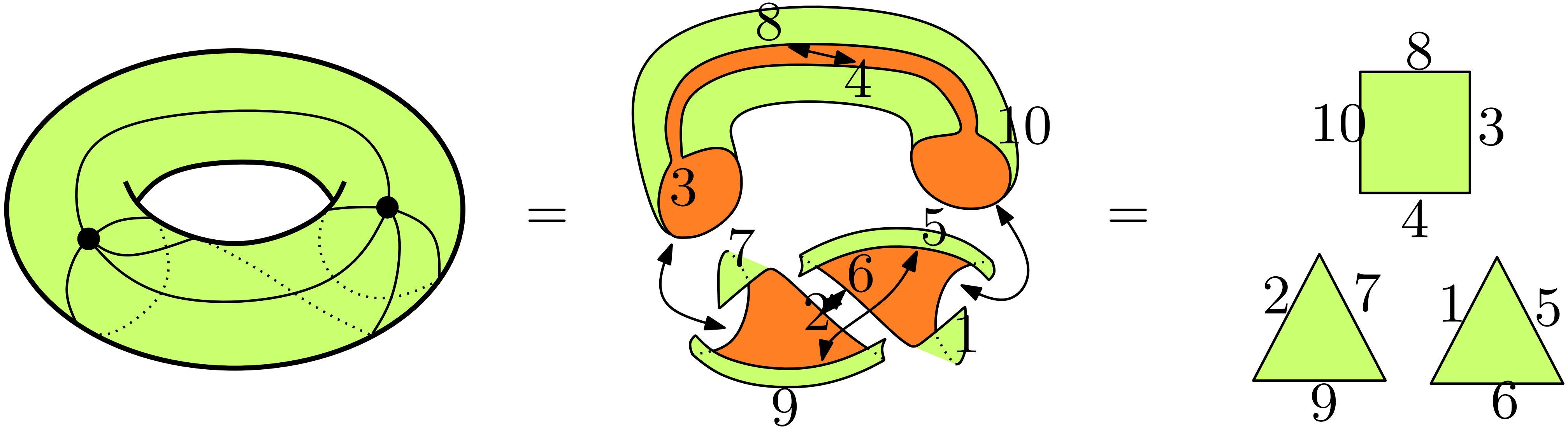
Triangulation = surface obtenue par recollement de triangles

Carte = recollement de polygones

Carte = plongement propre d'un graphe dans une surface

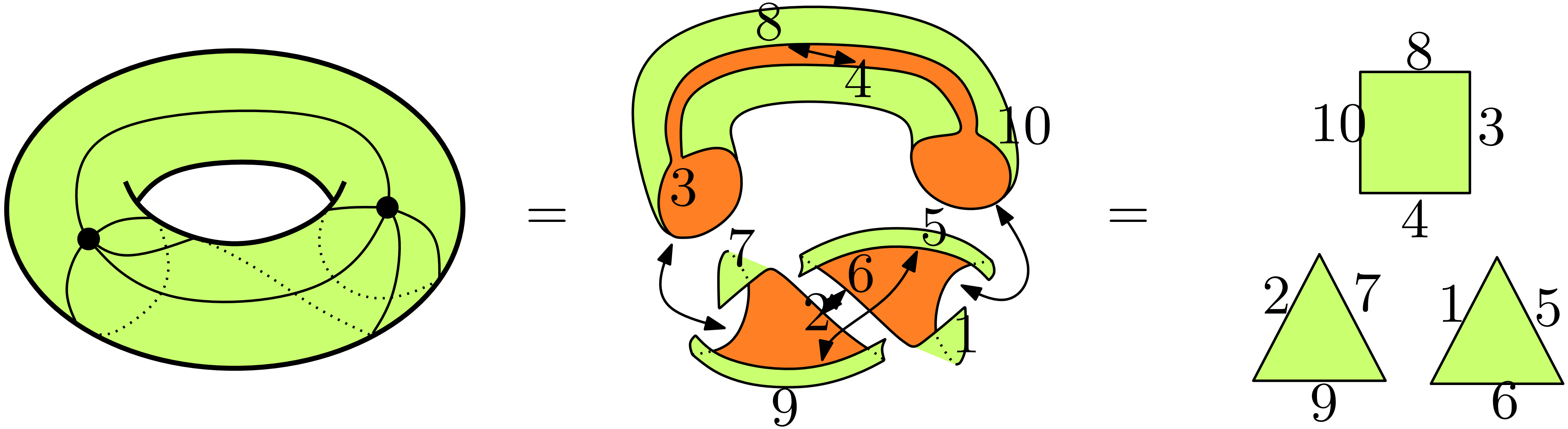
Cartes et surfaces de genre g

Carte $=$ surface combinatoire formée du recollement bord à bord d'un nombre fini de polygones.



Cartes et surfaces de genre g

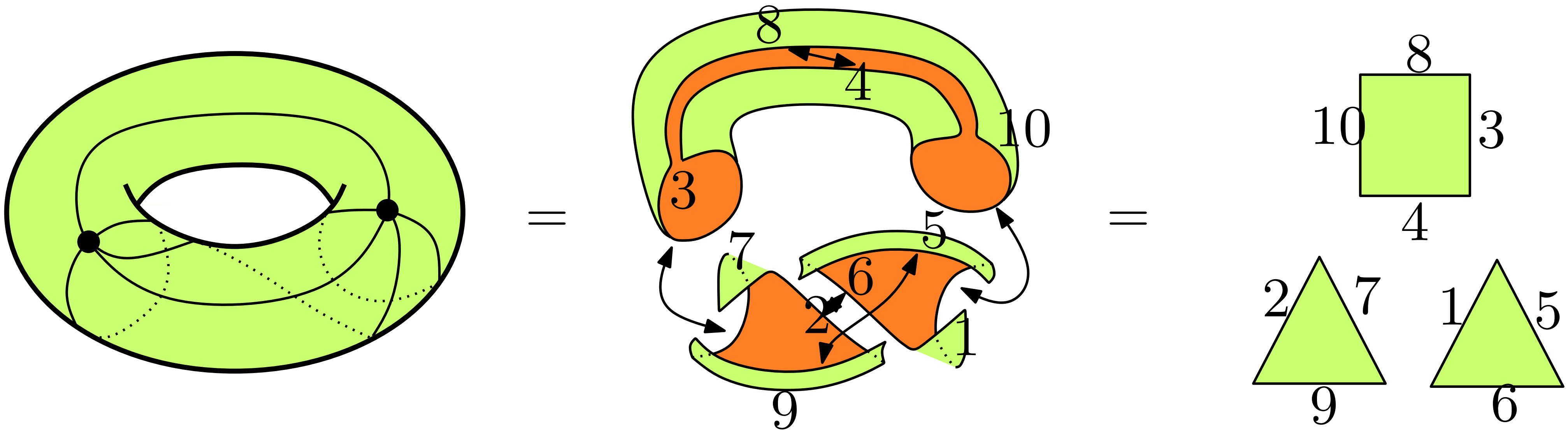
Carte $=$ surface combinatoire formée du recollement bord à bord d'un nombre fini de polygones.



On peut obtenir ainsi une sphère, un tore, ou plus généralement un tore à g anses.

Cartes et surfaces de genre g

Carte $=$ surface combinatoire formée du recollement bord à bord d'un nombre fini de polygones.

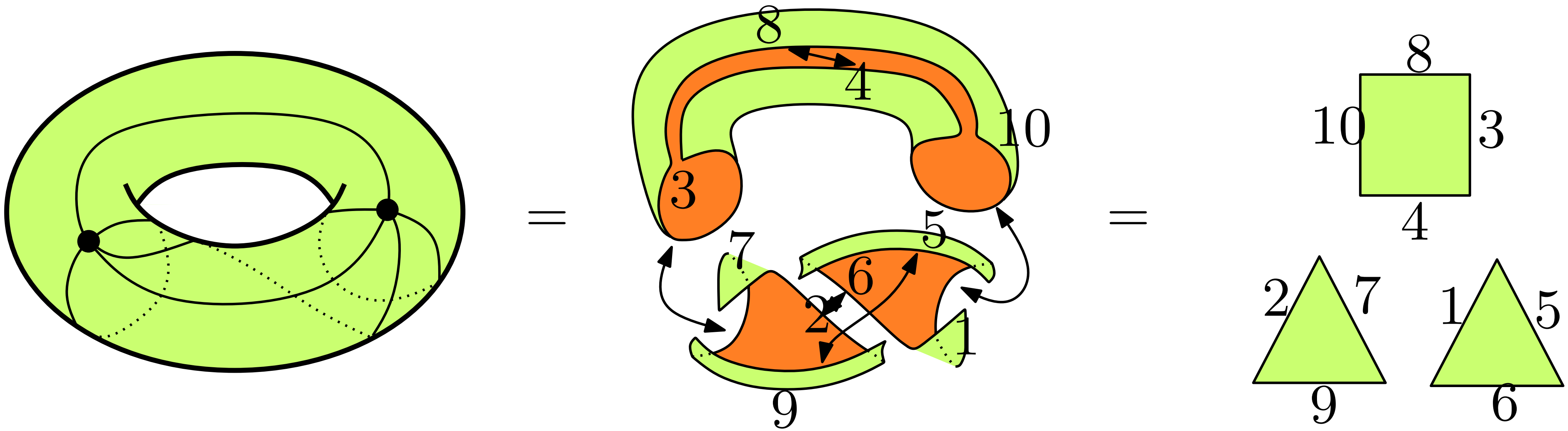


On peut obtenir ainsi une sphère, un tore, ou plus généralement un tore à g anses.

Seule nous intéresse la description combinatoire (ou topologique) du recollement (pas sa géométrie)

Cartes et surfaces de genre g

Carte $=$ surface combinatoire formée du recollement bord à bord d'un nombre fini de polygones.



On peut obtenir ainsi une sphère, un tore, ou plus généralement un tore à g anses.

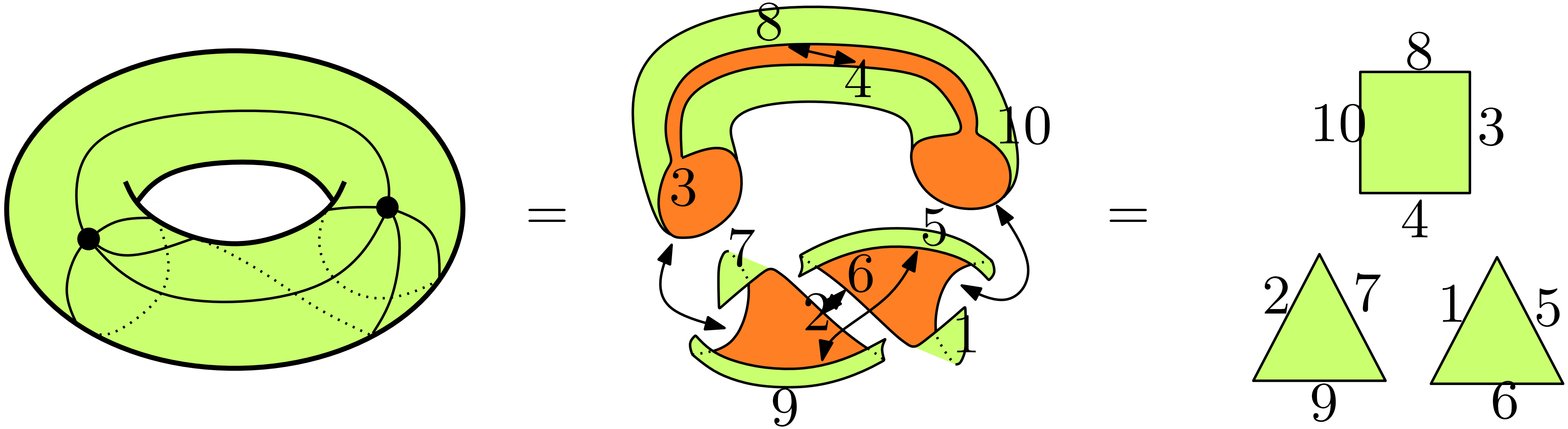
$$\boxed{\begin{array}{l} \phi = (3,4,8,10)(1,5,6)(2,7,9) \\ \alpha = (1,10)(2,6)(3,7)(4,8)(5,9) \end{array}}$$

Seule nous intéresse la description combinatoire (ou topologique) du recollement (pas sa géométrie)

Codage par deux permutations (dont une involution sans point fixe)

Cartes et surfaces de genre g

Carte $=$ surface combinatoire formée du recollement bord à bord d'un nombre fini de polygones.



On peut obtenir ainsi une sphère, un tore, ou plus généralement un tore à g anses.

$$\boxed{\begin{array}{l}\phi = (3,4,8,10)(1,5,6)(2,7,9)\\ \alpha = (1,10)(2,6)(3,7)(4,8)(5,9)\end{array}}$$

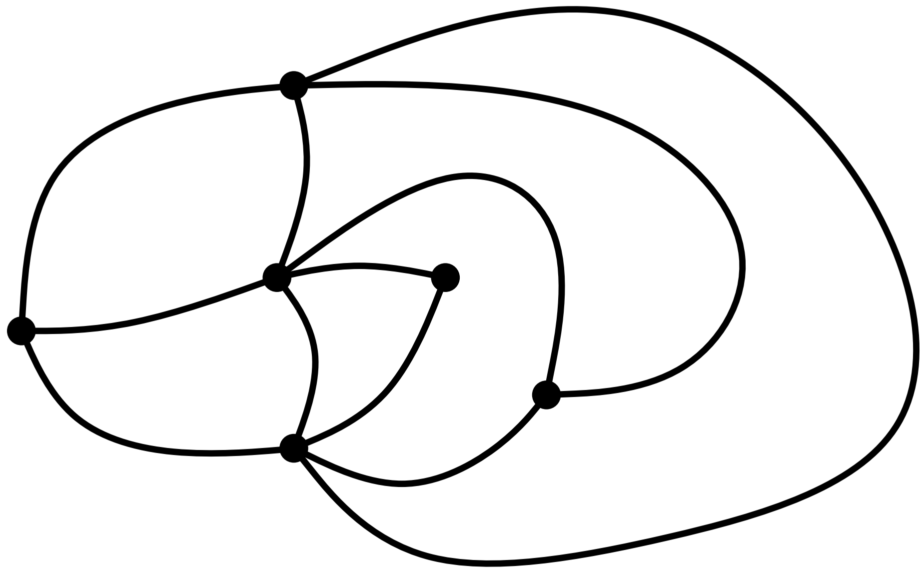
Seule nous intéresse la description combinatoire (ou topologique) du recollement (pas sa géométrie)

Codage par deux permutations (dont une involution sans point fixe)

Le nombre de cartes à n arêtes est borné par $(2n)!^2$, donc fini...

Cartes planaires, arbres couvrants et dualité

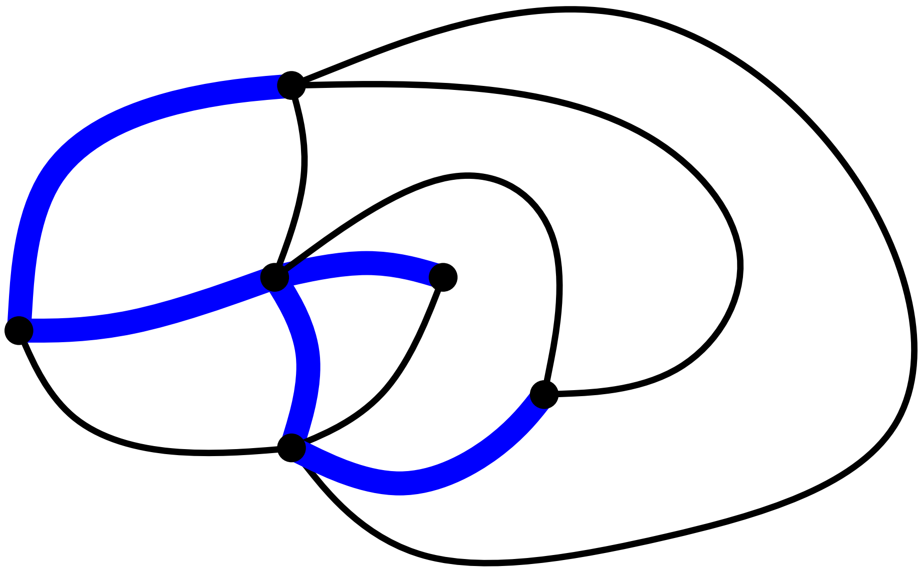
Lorsque la carte est de genre 0, *i.e.* la surface est la sphère, on parle de carte planaire et on la dessine dans le plan.



Cartes planaires, arbres couvrants et dualité

Lorsque la carte est de genre 0, *i.e.* la surface est la sphère, on parle de carte planaire et on la dessine dans le plan.

Un arbre couvrant est un sous-graphe qui est un arbre et qui visite tous les sommets. Une carte boisée est une carte munie d'un arbre couvrant.

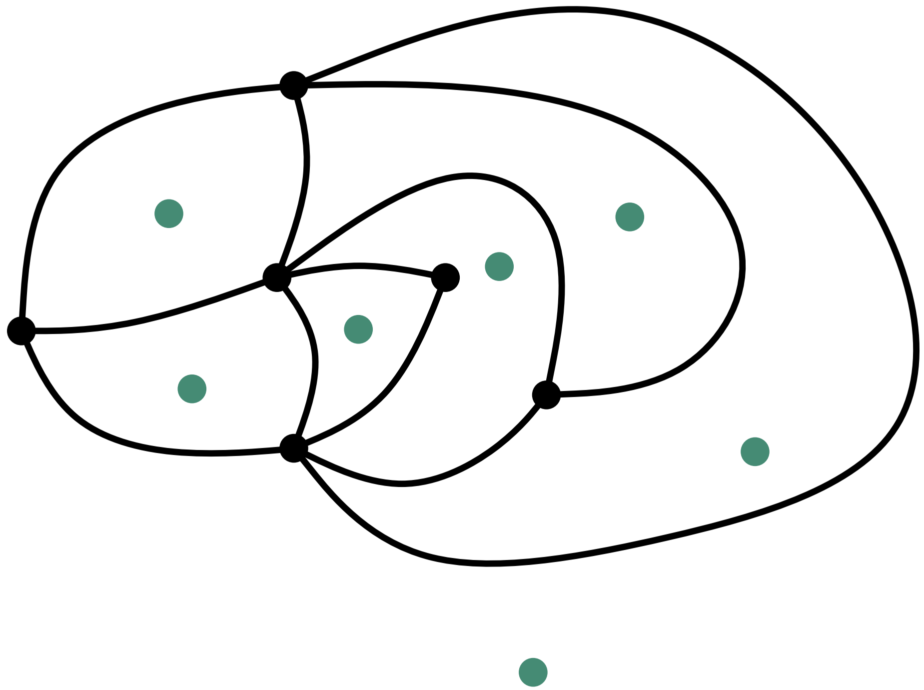


Cartes planaires, arbres couvrants et dualité

Lorsque la carte est de genre 0, *i.e.* la surface est la sphère, on parle de carte planaire et on la dessine dans le plan.

Un arbre couvrant est un sous-graphe qui est un arbre et qui visite tous les sommets. Une carte boisée est une carte munie d'un arbre couvrant.

La carte duale d'une carte est la carte des incidences entre faces.

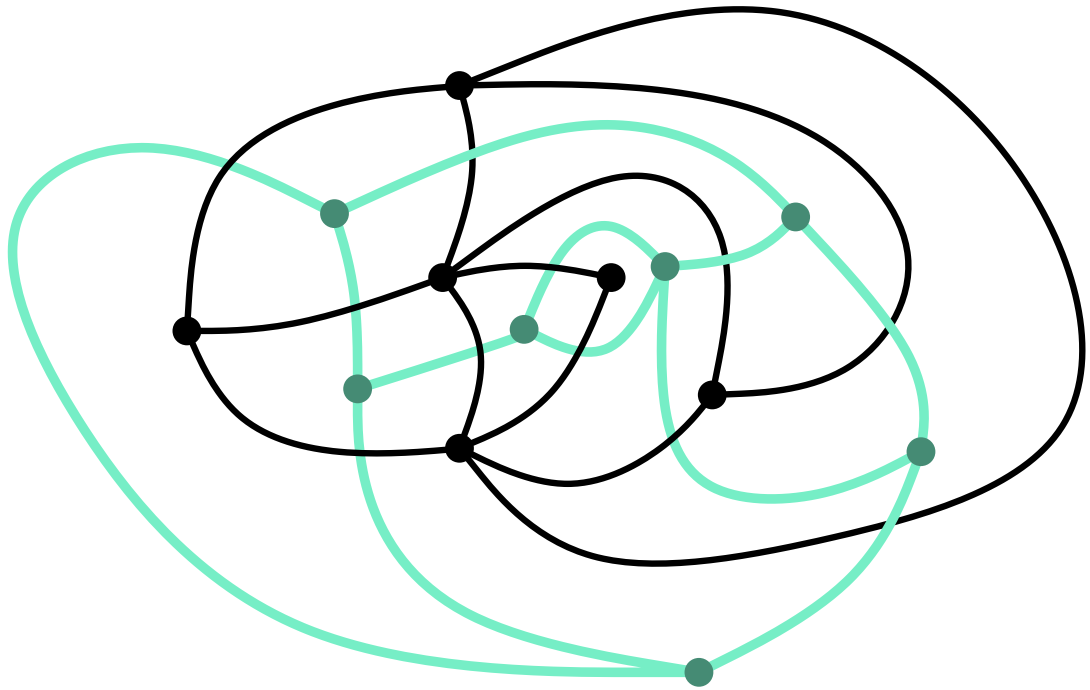


Cartes planaires, arbres couvrants et dualité

Lorsque la carte est de genre 0, *i.e.* la surface est la sphère, on parle de carte planaire et on la dessine dans le plan.

Un arbre couvrant est un sous-graphe qui est un arbre et qui visite tous les sommets. Une carte boisée est une carte munie d'un arbre couvrant.

La carte duale d'une carte est la carte des incidences entre faces.



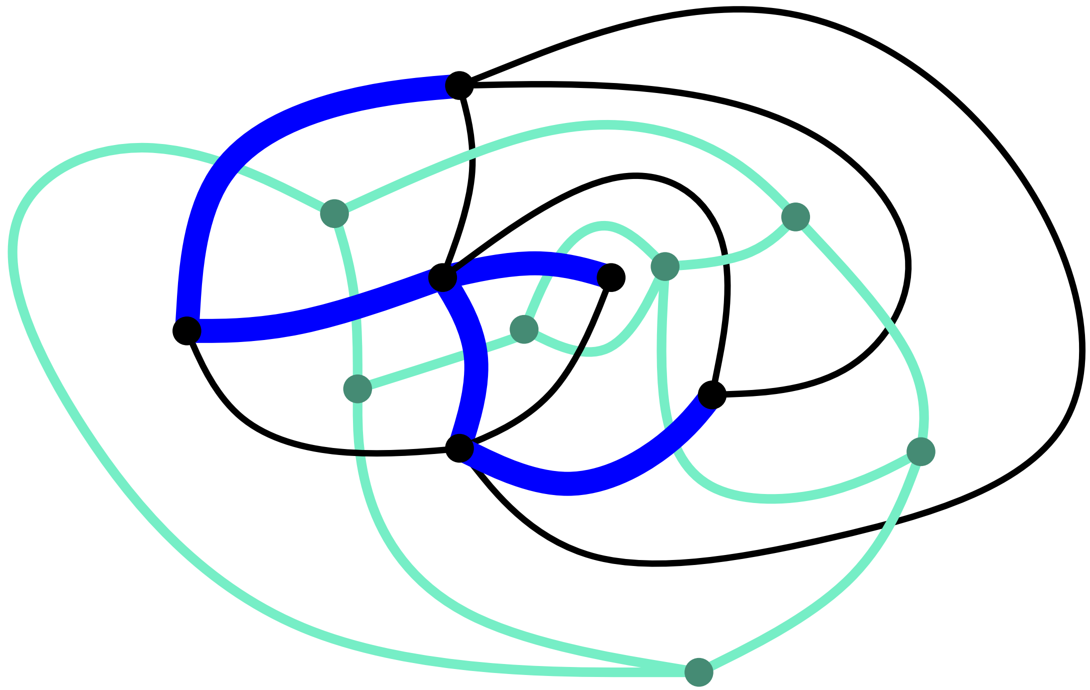
Cartes planaires, arbres couvrants et dualité

Lorsque la carte est de genre 0, *i.e.* la surface est la sphère, on parle de carte planaire et on la dessine dans le plan.

Un arbre couvrant est un sous-graphe qui est un arbre et qui visite tous les sommets. Une carte boisée est une carte munie d'un arbre couvrant.

La carte duale d'une carte est la carte des incidences entre faces.

La carte duale d'une carte boisée planaire est une carte boisée : elle est naturellement munie d'un arbre couvrant dual.



Cartes planaires, arbres couvrants et dualité

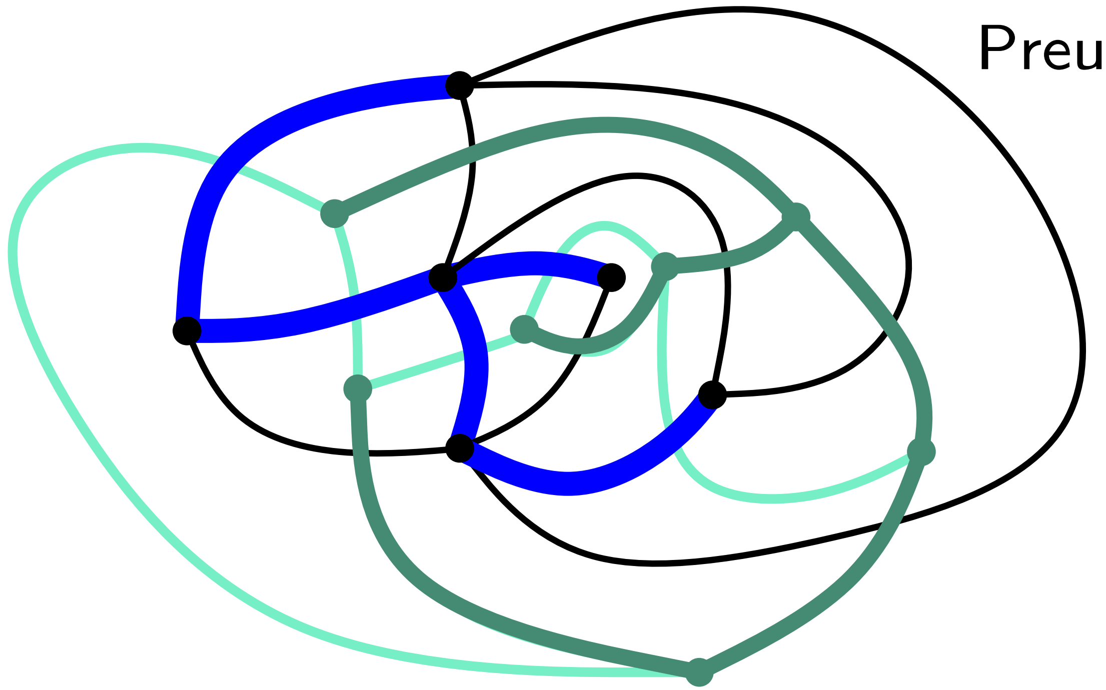
Lorsque la carte est de genre 0, *i.e.* la surface est la sphère, on parle de carte planaire et on la dessine dans le plan.

Un arbre couvrant est un sous-graphe qui est un arbre et qui visite tous les sommets. Une carte boisée est une carte munie d'un arbre couvrant.

La carte duale d'une carte est la carte des incidences entre faces.

La carte duale d'une carte boisée planaire est une carte boisée : elle est naturellement munie d'un arbre couvrant dual.

Preuve ?



Cartes planaires, arbres couvrants et dualité

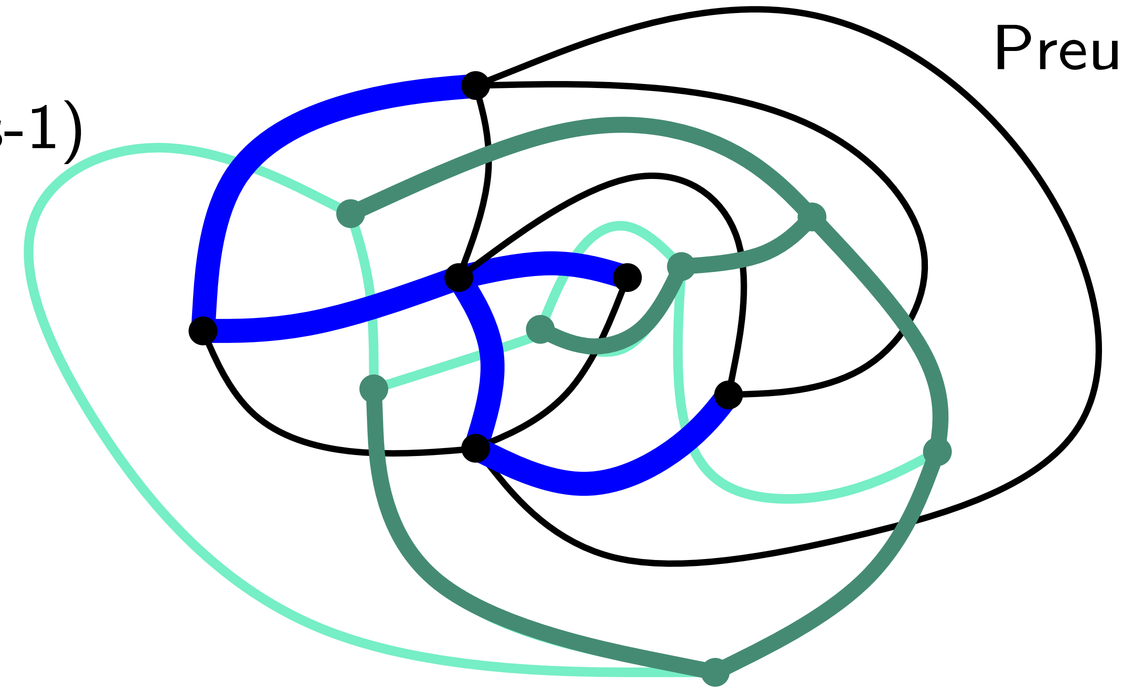
Lorsque la carte est de genre 0, *i.e.* la surface est la sphère, on parle de carte planaire et on la dessine dans le plan.

Un arbre couvrant est un sous-graphe qui est un arbre et qui visite tous les sommets. Une carte boisée est une carte munie d'un arbre couvrant.

La carte duale d'une carte est la carte des incidences entre faces.

La carte duale d'une carte boisée planaire est une carte boisée : elle est naturellement munie d'un arbre couvrant dual.

Relation d'Euler :
(#sommets-1)+(#faces-1)
$=$ #arêtes



Preuve ?

Cartes planaires, arbres couvrants et dualité

Lorsque la carte est de genre 0, *i.e.* la surface est la sphère, on parle de carte planaire et on la dessine dans le plan.

Un arbre couvrant est un sous-graphe qui est un arbre et qui visite tous les sommets. Une carte boisée est une carte munie d'un arbre couvrant.

La carte duale d'une carte est la carte des incidences entre faces.

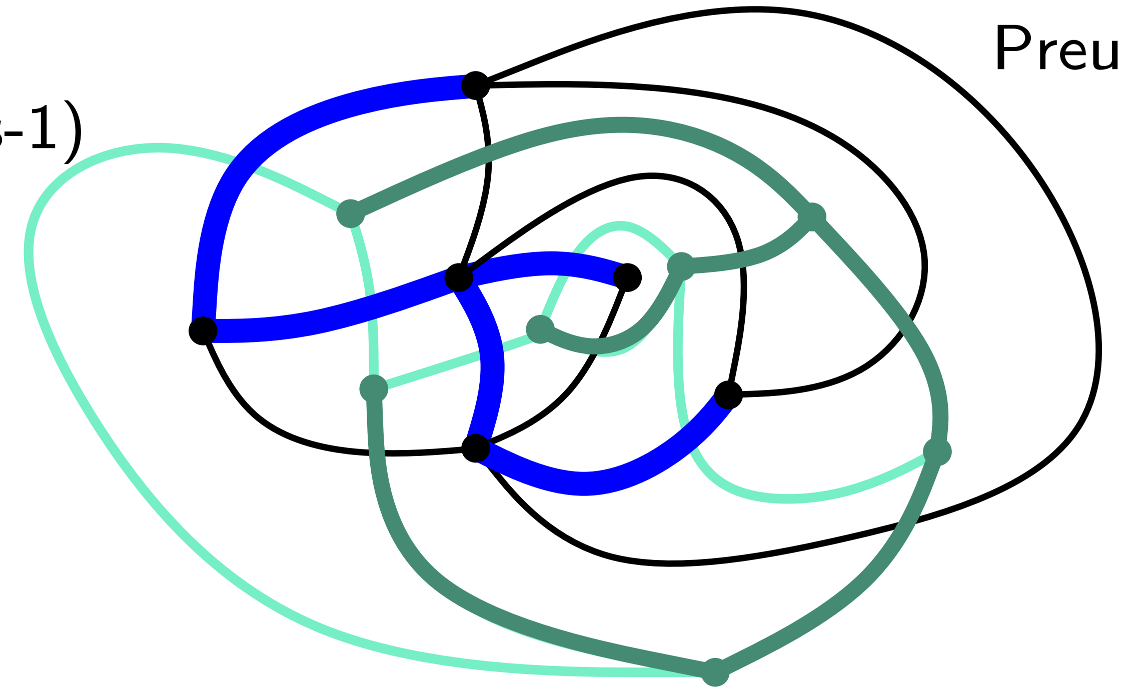
La carte duale d'une carte boisée planaire est une carte boisée : elle est naturellement munie d'un arbre couvrant dual.

Relation d'Euler :

(#sommets-1)+(#faces-1)

= #arêtes

Preuve ?

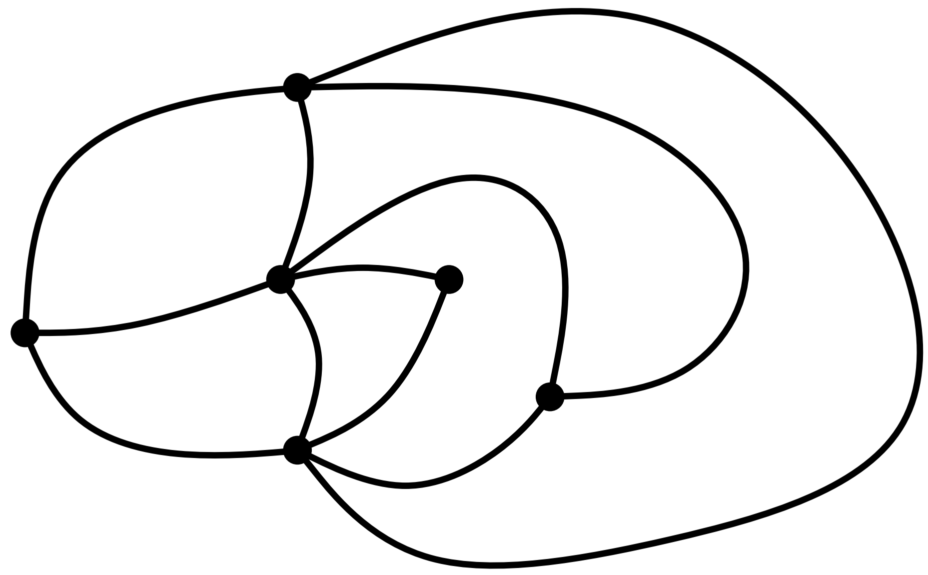


Preuve ?

Compter, comparer, lister les cartes planaires

Compter des cartes... ?

Il faudrait déjà savoir dire si 2 cartes sont égales.

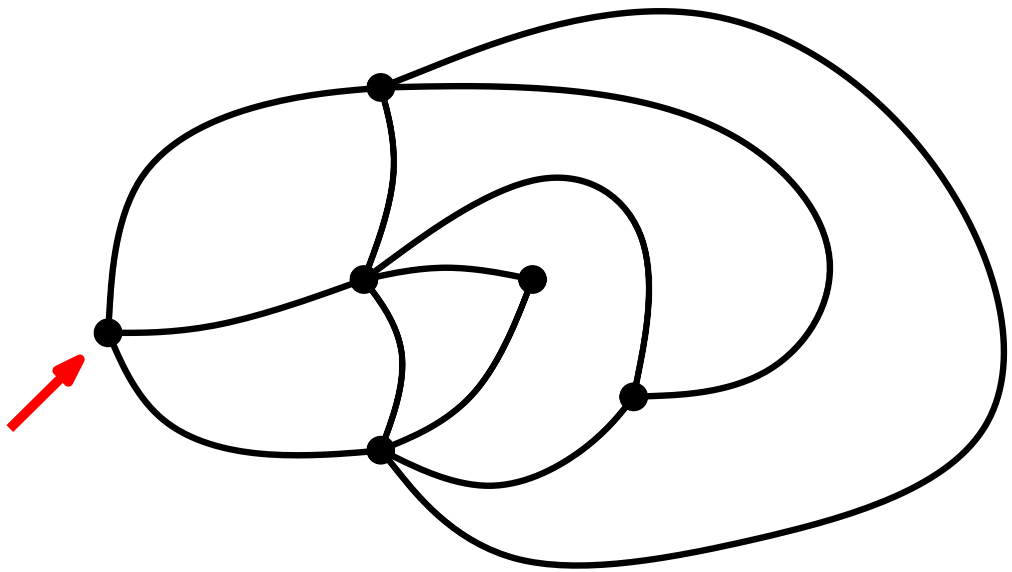


Compter, comparer, lister les cartes planaires

Compter des cartes... ?

Il faudrait déjà savoir dire
si 2 cartes sont égales.

Carte enracinée = carte avec un
coin marqué dans la face infinie

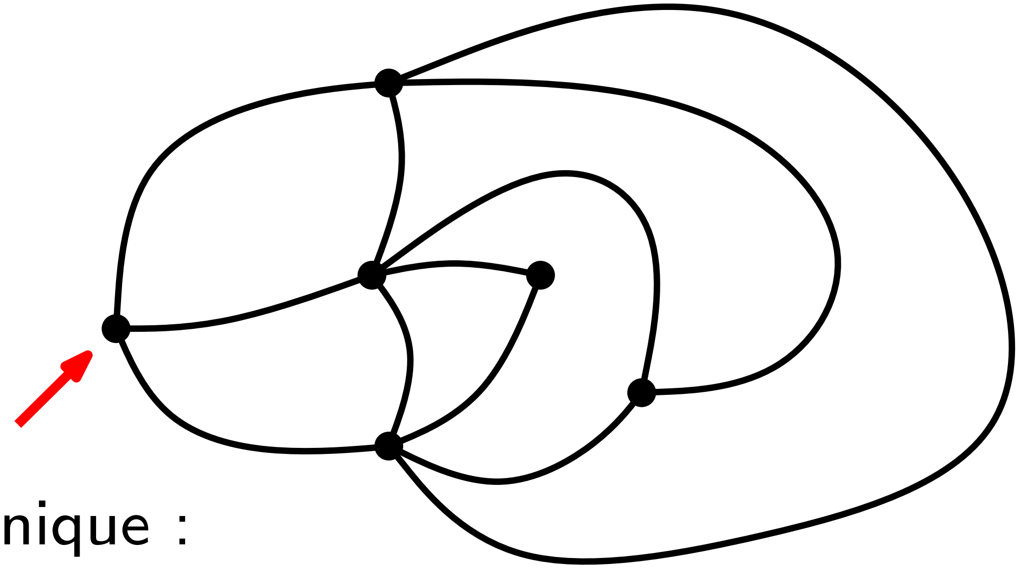


Compter, comparer, lister les cartes planaires

Compter des cartes... ?

Il faudrait déjà savoir dire
si 2 cartes sont égales.

Carte enracinée = carte avec un
coin marqué dans la face infinie



Construire un arbre couvrant canonique :

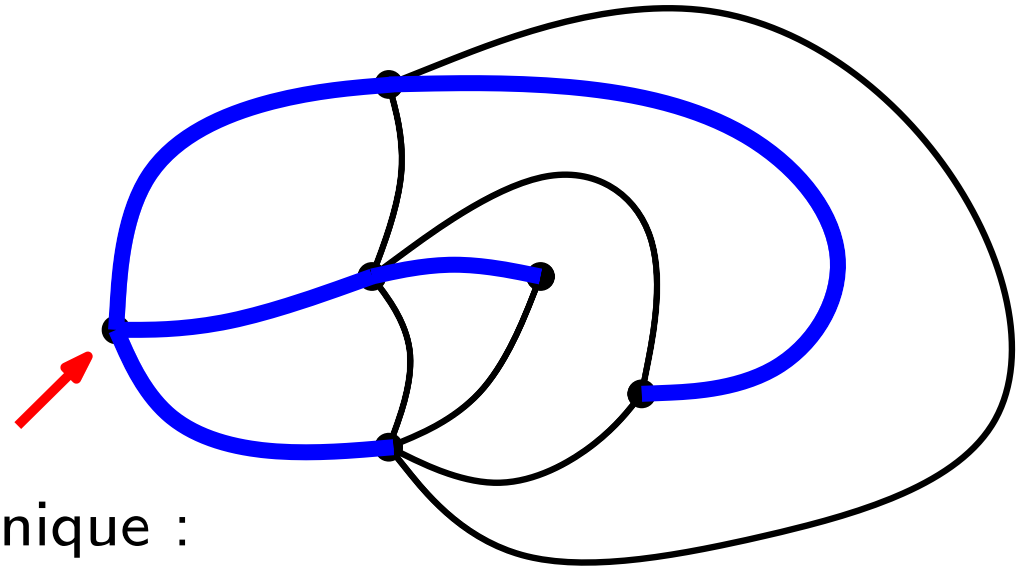
par exemple, par un parcours en largeur à gauche à partir de la racine

Compter, comparer, lister les cartes planaires

Compter des cartes… ?

Il faudrait déjà savoir dire
si 2 cartes sont égales.

Carte enracinée = carte avec un
coin marqué dans la face infinie



Construire un arbre couvrant canonique :

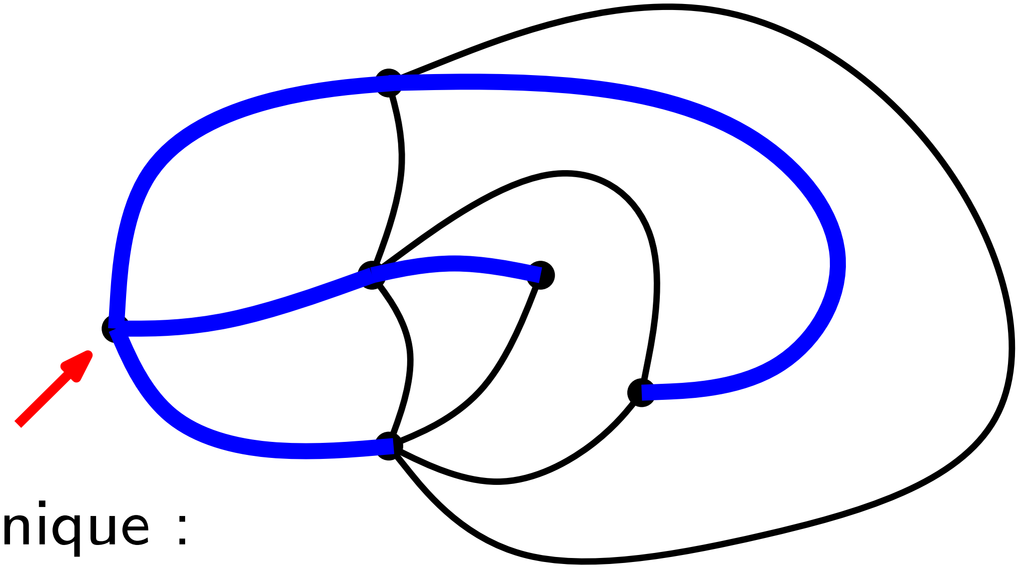
par exemple, par un parcours en largeur à gauche à partir de la racine

Compter, comparer, lister les cartes planaires

Compter des cartes... ?

Il faudrait déjà savoir dire
si 2 cartes sont égales.

Carte enracinée = carte avec un
coin marqué dans la face infinie



Construire un arbre couvrant canonique :

par exemple, par un parcours en largeur à gauche à partir de la racine

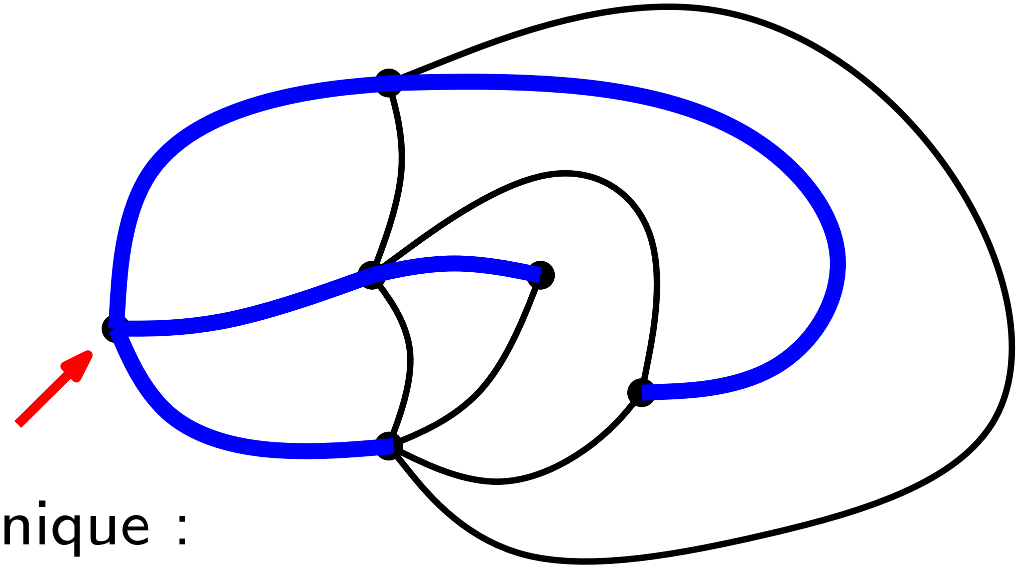
$\Rightarrow$ Pour comparer deux cartes enracinées, comparer les arbres et
les arêtes en dehors de l'arbre.

sur les petits exemples ça se fait bien à l'oeil nu, en redessinant

Compter, comparer, lister les cartes planaires

Compter des cartes... ?

Il faudrait déjà savoir dire
si 2 cartes sont égales.



Carte enracinée = carte avec un
coin marqué dans la face infinie

Construire un arbre couvrant canonique :

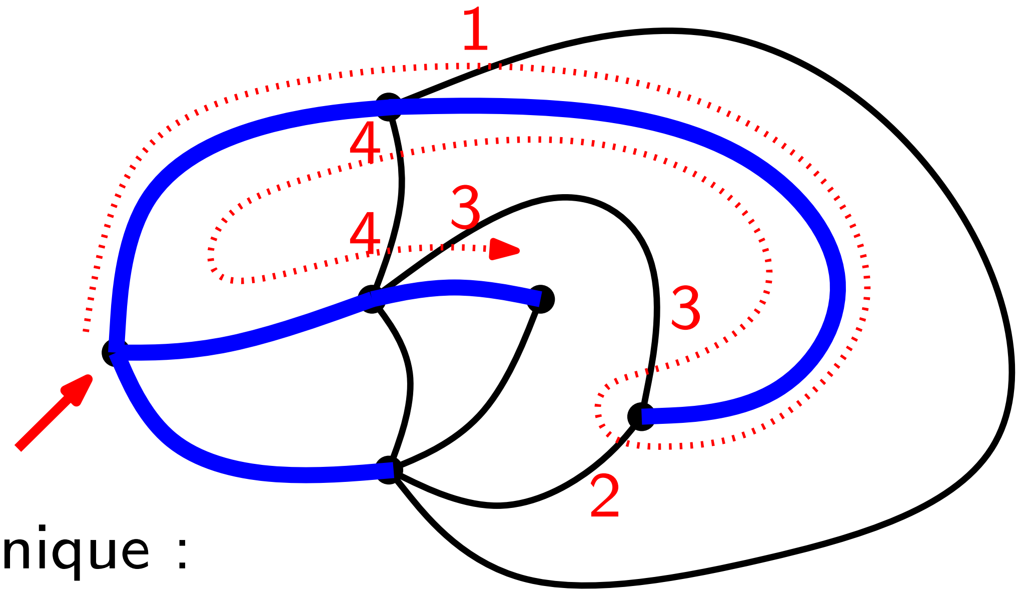
par exemple, par un parcours en largeur à gauche à partir de la racine

$\Rightarrow$ Pour comparer deux cartes enracinées, comparer les arbres et les arêtes en dehors de l'arbre.

sur les petits exemples ça se fait bien à l'oeil nu, en redessinant

$\Rightarrow$ Pour lister les cartes, lister les arbres et ajouter les arêtes de toutes les façons licites (pour que l'arbre soit canonique) !

Compter, comparer, lister les cartes planaires



Compter des cartes... ?

Il faudrait déjà savoir dire
si 2 cartes sont égales.

Carte enracinée = carte avec un
coin marqué dans la face infinie

Construire un arbre couvrant canonique :

par exemple, par un parcours en largeur à gauche à partir de la racine

⇒ Pour comparer deux cartes enracinées, comparer les arbres et
les arêtes en dehors de l'arbre.
sur les petits exemples ça se fait bien à l'oeil nu, en redessinant

⇒ Pour lister les cartes, lister les arbres et ajouter les arêtes de
toutes les façons licites (pour que l'arbre soit canonique) !

Méthode systématique : coder l'arbre et les autres arêtes le long d'un
tour de l'arbre.

Énumération de cartes

Question originale : combien de cartes enracinées à n arêtes ?

i.e. calculer $|\mathcal{C}_n|$ avec $\mathcal{C}_n = \{$cartes planaires enracinées à n arêtes$\}$

Tutte *et al.* (1962$\longrightarrow$ 2012) : décompositions et équations fonctionnelles

Brezin, Itzykson, Parisi, Zuber, *et al.* (1978$\longrightarrow$ 2012) : intégrales de matrices

Goulden, Jackson *et al.* (80's $\longrightarrow$ 2012) : caractères du groupe symétrique

Cori, Vauquelin *et al.* (70/80's $\longrightarrow$ 2012) : bijections avec des arbres

Énumération de cartes

Question originale : combien de cartes enracinées à n arêtes ?

i.e. calculer $|\mathcal{C}_n|$ avec $\mathcal{C}_n = \{$cartes planaires enracinées à n arêtes$\}$

Tutte *et al.* (1962$\rightarrow$ 2012) : décompositions et équations fonctionnelles

Brezin, Itzykson, Parisi, Zuber, *et al.* (1978$\rightarrow$ 2012) : intégrales de matrices

Goulden, Jackson *et al.* (80's $\rightarrow$ 2012) : caractères du groupe symétrique

Cori, Vauquelin *et al.* (70/80's $\rightarrow$ 2012) : bijections avec des arbres

Résultats :

Série génératrice : soit $C(t) = \sum_{c \in \mathcal{C}_n} t^{|c|}$, où $|c| = \#$arêtes de c,

$$C(t) = 1 + 2t + 9t^2 + \dots$$

Énumération de cartes

Question originale : combien de cartes enracinées à n arêtes ?

i.e. calculer $|\mathcal{C}_n|$ avec $\mathcal{C}_n = \{$cartes planaires enracinées à n arêtes$\}$

Tutte *et al.* (1962$\rightarrow$ 2012) : décompositions et équations fonctionnelles

Brezin, Itzykson, Parisi, Zuber, *et al.* (1978$\rightarrow$ 2012) : intégrales de matrices

Goulden, Jackson *et al.* (80's $\rightarrow$ 2012) : caractères du groupe symétrique

Cori, Vauquelin *et al.* (70/80's $\rightarrow$ 2012) : bijections avec des arbres

Résultats :

Série génératrice : soit $C(t) = \sum_{c \in \mathcal{C}_n} t^{|c|}$, où $|c| = \#$arêtes de c,

$$C(t) = 1 + 2t + 9t^2 + \dots$$

alors $C(t) = \frac{(1-12t)^{3/2} - 1 + 18t}{54t^2}$, ou donné par $\begin{cases} C(t) = A(t) - tA(t)^3 \\ A(t) = 1 + 3tA(t)^2 \end{cases}$.

Énumération de cartes

Question originale : combien de cartes enracinées à n arêtes ?

i.e. calculer $|\mathcal{C}_n|$ avec $\mathcal{C}_n = \{$cartes planaires enracinées à n arêtes$\}$

Tutte *et al.* (1962$\rightarrow$ 2012) : décompositions et équations fonctionnelles

Brezin, Itzykson, Parisi, Zuber, *et al.* (1978$\rightarrow$ 2012) : intégrales de matrices

Goulden, Jackson *et al.* (80's $\rightarrow$ 2012) : caractères du groupe symétrique

Cori, Vauquelin *et al.* (70/80's $\rightarrow$ 2012) : bijections avec des arbres

Résultats :

Série génératrice : soit $C(t) = \sum_{c \in \mathcal{C}_n} t^{|c|}$, où $|c| = \#$arêtes de c,

$$C(t) = 1 + 2t + 9t^2 + \dots$$

alors $C(t) = \frac{(1-12t)^{3/2} - 1 + 18t}{54t^2}$, ou donné par $\begin{cases} C(t) = A(t) - tA(t)^3 \\ A(t) = 1 + 3tA(t)^2 \end{cases}$.

Formules de comptage : $|\mathcal{C}_n| = \frac{2}{n+2} \frac{3^n}{n+1} \binom{2n}{n}$, ou $|\mathcal{C}_n| \underset{n \to \infty}{\sim} c_0 12^n n^{-5/2}$.

Énumération de cartes

Question originale : combien de cartes enracinées à n arêtes ?

i.e. calculer $|\mathcal{C}_n|$ avec $\mathcal{C}_n = \{$cartes planaires enracinées à n arêtes$\}$

Tutte *et al.* (1962$\rightarrow$ 2012) : décompositions et équations fonctionnelles

Brezin, Itzykson, Parisi, Zuber, *et al.* (1978$\rightarrow$ 2012) : intégrales de matrices

Goulden, Jackson *et al.* (80's $\rightarrow$ 2012) : caractères du groupe symétrique

Cori, Vauquelin *et al.* (70/80's $\rightarrow$ 2012) : bijections avec des arbres

Résultats :

Série génératrice : soit $C(t) = \sum_{c \in \mathcal{C}_n} t^{|c|}$, où $|c| = \#$arêtes de c,

$$C(t) = 1 + 2t + 9t^2 + \dots$$

alors $C(t) = \frac{(1-12t)^{3/2} - 1 + 18t}{54t^2}$, ou donné par $\begin{cases} C(t) = A(t) - tA(t)^3 \\ A(t) = 1 + 3tA(t)^2 \end{cases}$.

Formules de comptage : $|\mathcal{C}_n| = \frac{2}{n+2} \frac{3^n}{n+1} \binom{2n}{n}$, ou $|\mathcal{C}_n| \underset{n \to \infty}{\sim} c_0 12^n n^{-5/2}$.

Triangulations, quadrangulations, etc

$\mathcal{C}_n = \{$cartes planaires enracinées à n arêtes$\}$

On veut pouvoir restreindre à des sous-familles définies par des conditions de degré sur les sommets (ou sur les faces) :

$\mathcal{T}_{n,m} =$ triangulations d'un m-gone avec n sommets internes
$\mathcal{Q}_n =$ quadrangulations avec n faces
$\mathcal{C}_{d_1,\ldots,d_k} =$ cartes avec d_i sommets de degrés i.

Triangulations, quadrangulations, etc

$\mathcal{C}_n = \{$cartes planaires enracinées à n arêtes$\}$

On veut pouvoir restreindre à des sous-familles définies par des conditions de degré sur les sommets (ou sur les faces) :

$\mathcal{T}_{n,m} =$ triangulations d'un m-gone avec n sommets internes
$\mathcal{Q}_n =$ quadrangulations avec n faces
$\mathcal{C}_{d_1,\ldots,d_k} =$ cartes avec d_i sommets de degrés i.

Ou par des conditions de "girth" : pas de cycles de longueur $< k$
$\mathcal{T}_n^* =$ triangulations sans boucles, $\mathcal{T}_n^s =$ sans boucles ni arêtes multiples.
$\mathcal{Q}_n^s =$ quadrangulations sans arêtes multiples

Triangulations, quadrangulations, etc

$\mathcal{C}_n = \{$cartes planaires enracinées à n arêtes$\}$

On veut pouvoir restreindre à des sous-familles définies par des conditions de degré sur les sommets (ou sur les faces) :

$\mathcal{T}_{n,m} =$ triangulations d'un m-gone avec n sommets internes
$\mathcal{Q}_n =$ quadrangulations avec n faces
$\mathcal{C}_{d_1,\ldots,d_k} =$ cartes avec d_i sommets de degrés i.

Ou par des conditions de "girth" : pas de cycles de longueur $< k$
$\mathcal{T}_n^* =$ triangulations sans boucles, $\mathcal{T}_n^s =$ sans boucles ni arêtes multiples.
$\mathcal{Q}_n^s =$ quadrangulations sans arêtes multiples

L'énumération reste possible pour diverses familles $\mathcal{F}$ de ce type :

Triangulations, quadrangulations, etc

$\mathcal{C}_n = \{$cartes planaires enracinées à n arêtes$\}$

On veut pouvoir restreindre à des sous-familles définies par des conditions de degré sur les sommets (ou sur les faces) :

$\mathcal{T}_{n,m}$ = triangulations d'un m-gone avec n sommets internes
$\mathcal{Q}_n$ = quadrangulations avec n faces
$\mathcal{C}_{d_1,\ldots,d_k}$ = cartes avec d_i sommets de degrés i.

Ou par des conditions de "girth" : pas de cycles de longueur $< k$
$\mathcal{T}_n^*$ = triangulations sans boucles, $\mathcal{T}_n^s$ = sans boucles ni arêtes multiples.
$\mathcal{Q}_n^s$= quadrangulations sans arêtes multiples

L'énumération reste possible pour diverses familles $\mathcal{F}$ de ce type :

- on garde l'algébricité des séries génératrices $F(t) = \sum_{c\in\mathcal{F}} t^{|c|}$.
- on garde l'asymptotique en $|\mathcal{F}_n| \sim c \cdot \rho^{-n} n^{5/2}$.

Cartes planaires "avec matière"

Equiper les cartes d'une structure additionnelle...

In combinatorics, but mostly in statistical physics

How many maps equipped with...

– a spanning tree?
[Mullin 67]

– a spanning forest?
[Bouttier et al., Sportiello et al.]

– a self-avoiding walk?
[Duplantier-Kostov 88]

– a proper q-colouring?
[Tutte 74, Bouttier et al. 02]

What is the expected partition function of...

– the Ising model?
[Boulatov, Kazakov, MBM, Schaeffer, Bouttier et al.]

– the hard-particle model?
[MBM, Schaeffer, Jehanne, Bouttier et al. 02, 07]

– the Potts model?
[Eynard-Bonnet 99, Baxter 01, MBM-Bernardi 09, Guionnet et al. 10

Cartes planaires "avec matière"

Equiper les cartes d'une structure additionnelle...

In combinatorics, but mostly in statistical physics

How many maps equipped with...

- a spanning tree?
  [Mullin 67]
- a spanning forest?
  [Bouttier et al., Sportiello et al.]
  [Courtiel-MBM 12]
- a self-avoiding walk?
  [Duplantier-Kostov 88]
- a proper q-colouring?
  [Tutte 74, Bouttier et al. 02]

What is the expected partition function of...

- the Ising model?
  [Boulatov, Kazakov, MBM, Schaeffer, Bouttier et al.]
- the hard-particle model?
  [MBM, Schaeffer, Jehanne, Bouttier et al. 02, 07]
- the Potts model?
  [Eynard-Bonnet 99, Baxter 01, MBM-Bernardi 09, Guionnet et al. 10

@MBM'2012

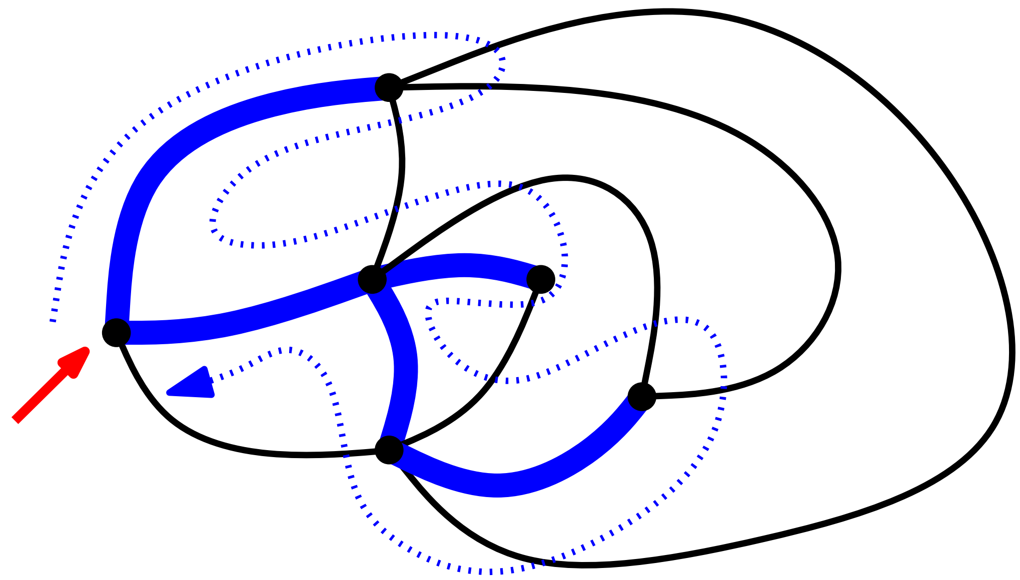
outils énumératifs :

les décompositions fonctionnelles à la Tutte outils énumératifs :

les bijections avec des arbres

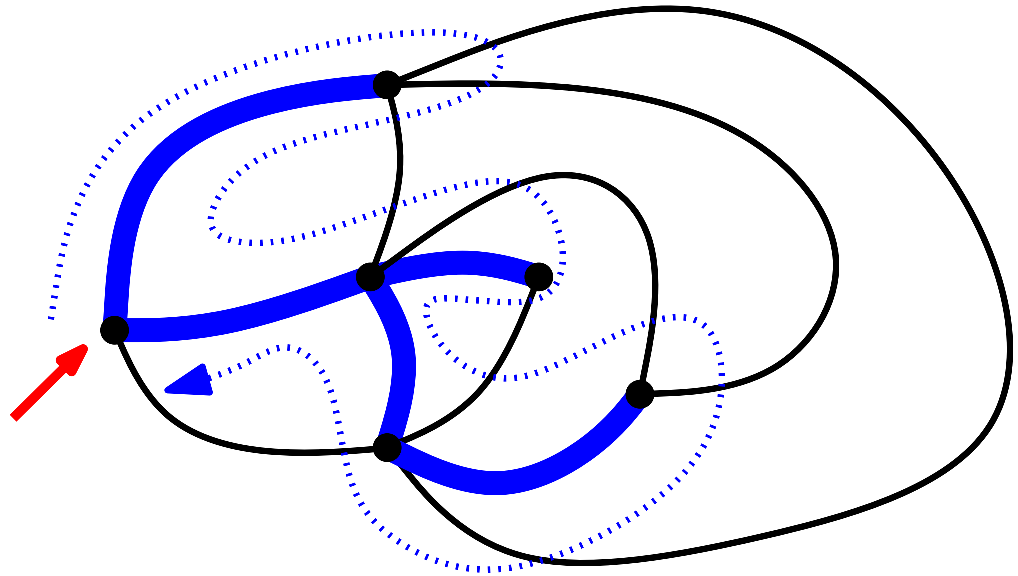
Codage des cartes planaires boisées par des paires d'arbres

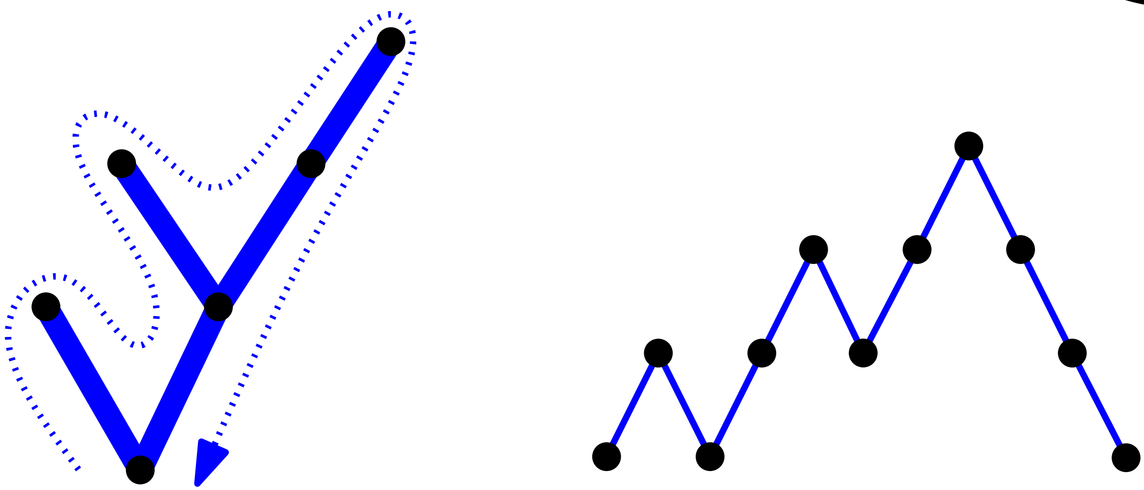
tourner autour de l'arbre



Codage des cartes planaires boisées par des paires d'arbres

tourner autour de l'arbre



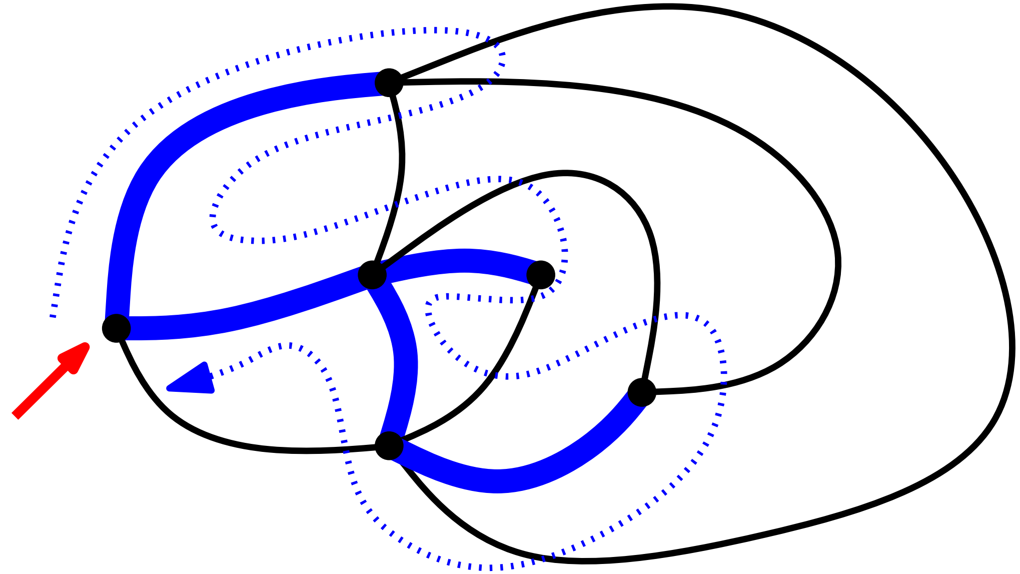


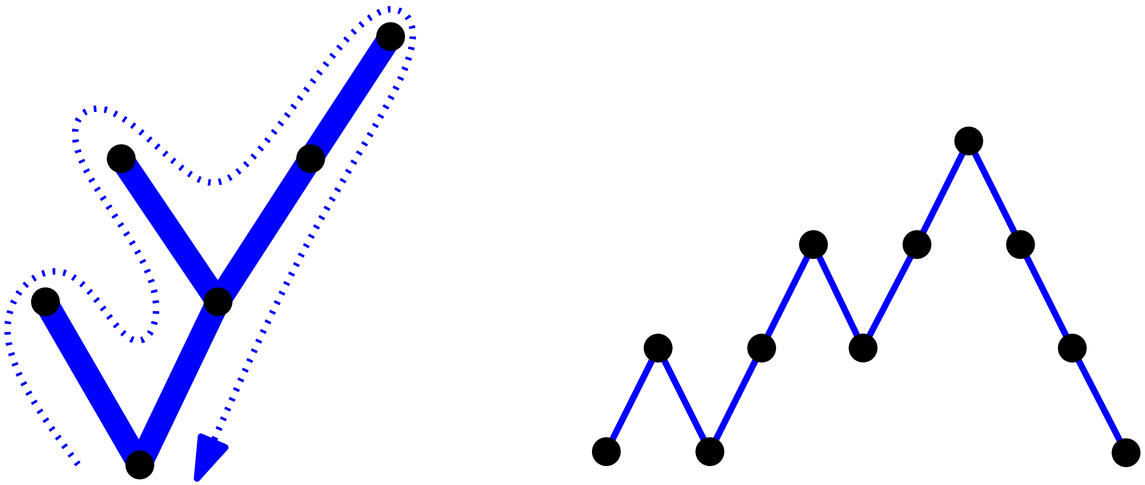
Rappel : codage d'un arbre par son tour

Codage des cartes planaires boisées par des paires d'arbres

tourner autour de l'arbre

autres arêtes = mot de parenthèses



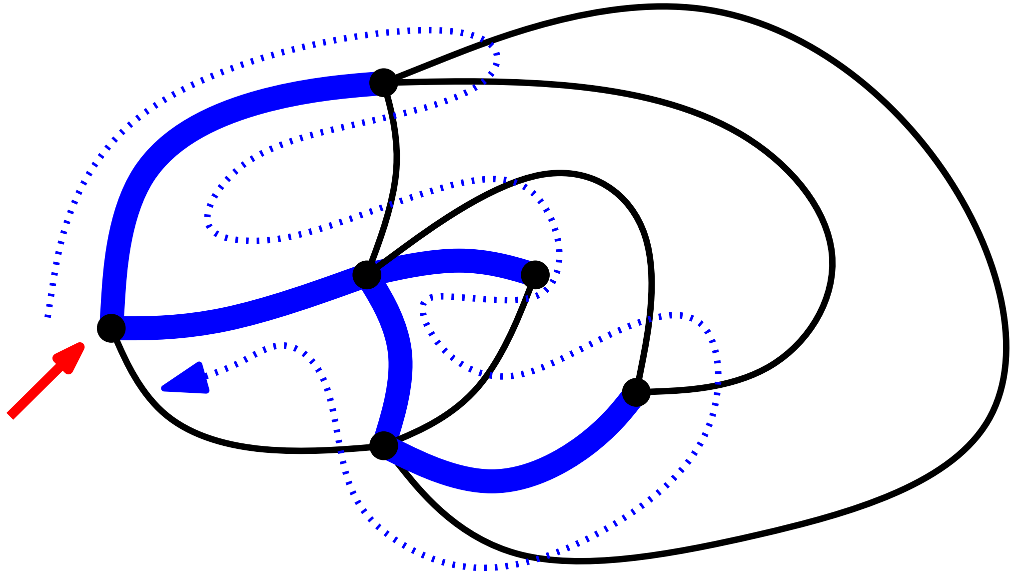


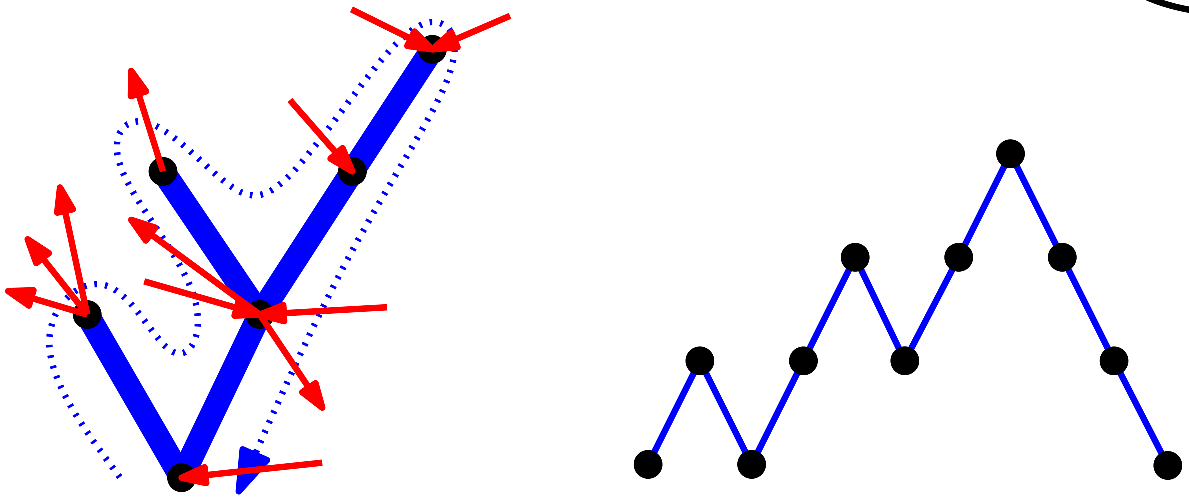
Rappel : codage d'un arbre par son tour

Codage des cartes planaires boisées par des paires d'arbres

tourner autour de l'arbre

autres arêtes = mot de parenthèses



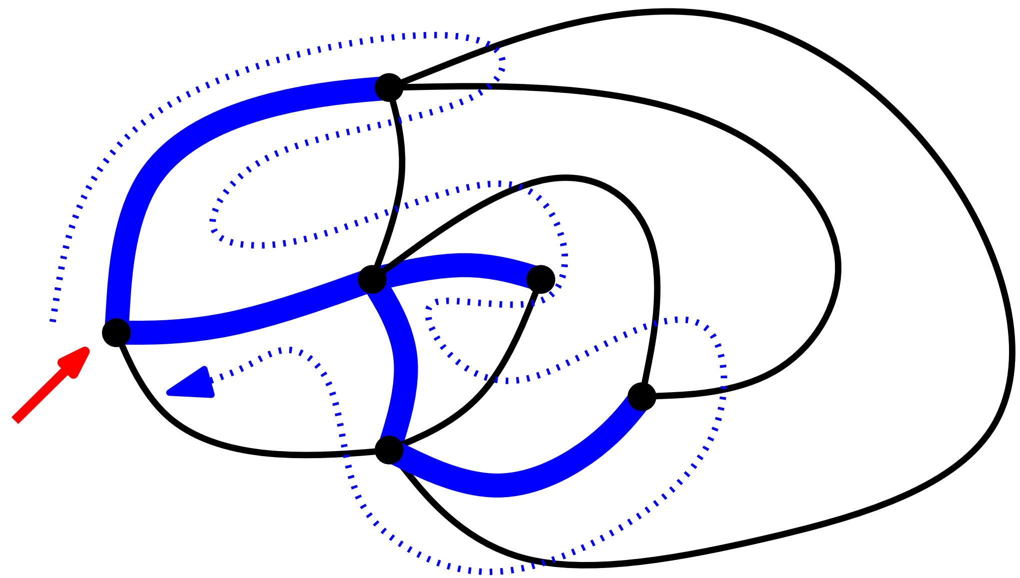


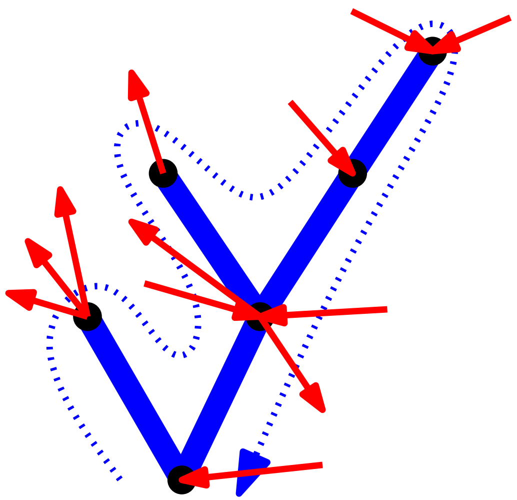
Rappel : codage d'un arbre par son tour

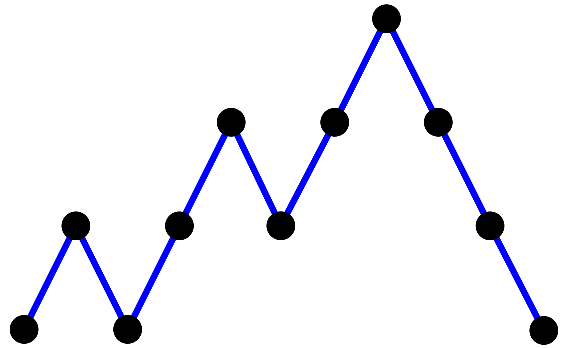
Codage des cartes planaires boisées par des paires d'arbres

tourner autour de l'arbre

autres arêtes = mot de parenthèses







Rappel : codage d'un arbre par son tour

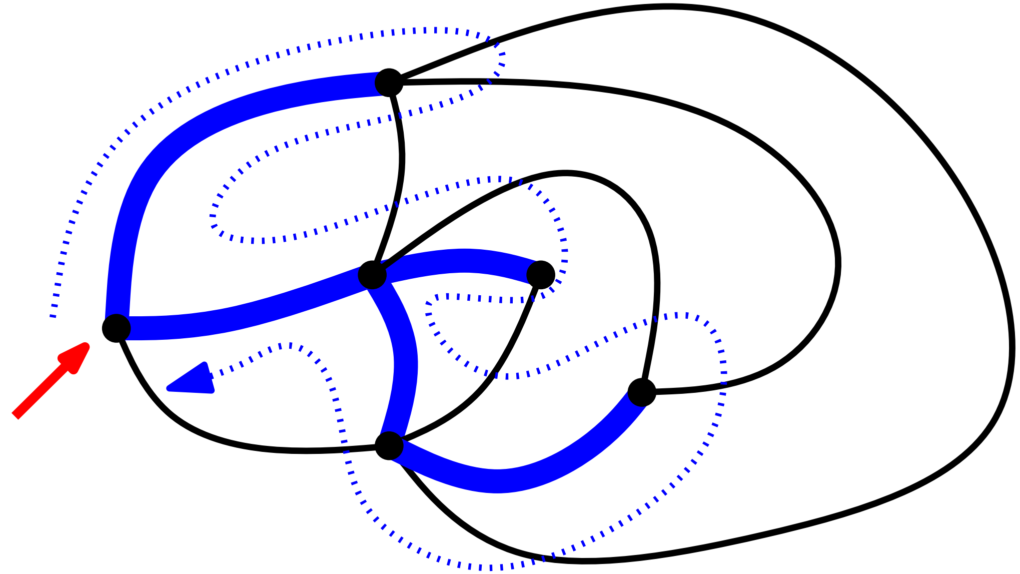
Code de la carte boisée = arbre décoré par un mot de parenthèse

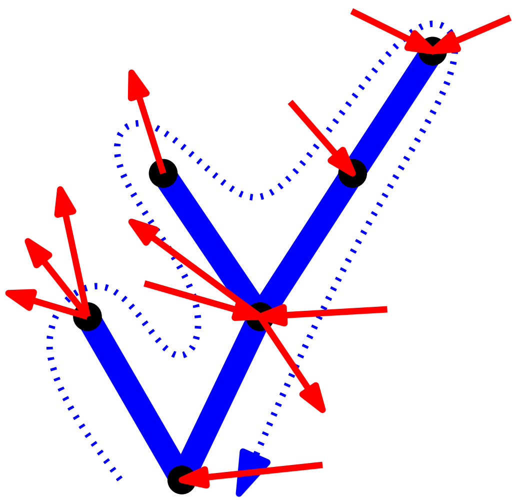
= mélange de deux mots de Dyck

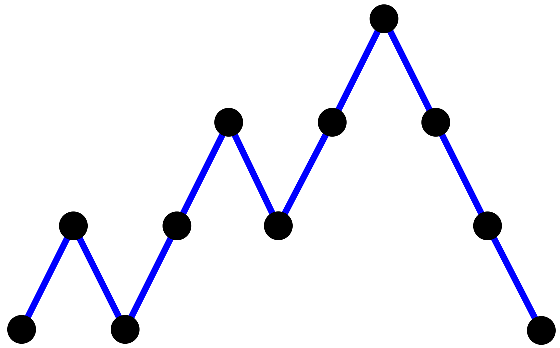
Codage des cartes planaires boisées par des paires d'arbres

tourner autour de l'arbre

autres arêtes = mot de parenthèses







Rappel : codage d'un arbre par son tour

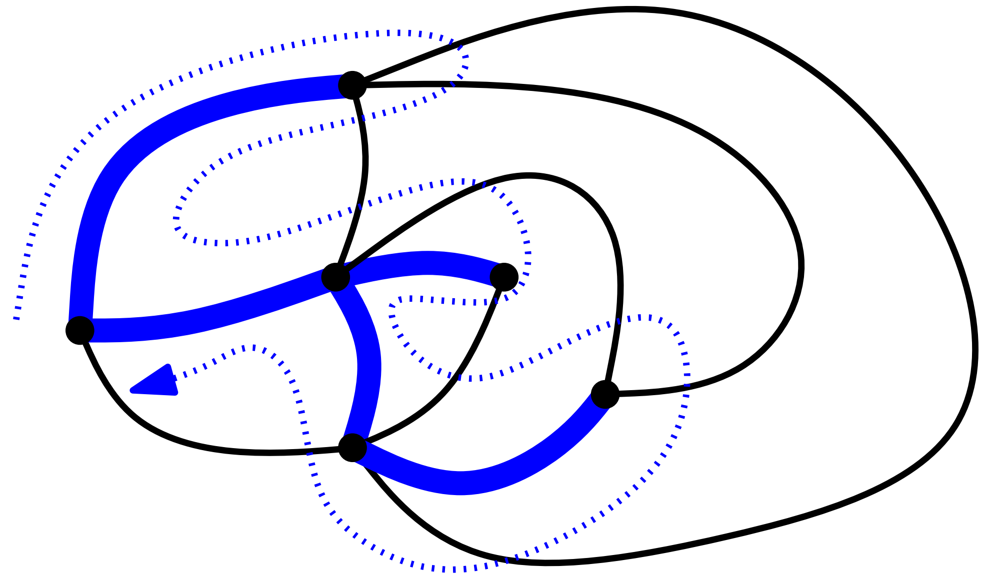
Code de la carte boisée = arbre décoré par un mot de parenthèse

= mélange de deux mots de Dyck

Le nombre de cartes planaires boisées à n arêtes est $\sum_{i=0}^{n} \binom{2n}{i} C_i C_{n-i}$ avec C_n les nb de Catalan.

Codage des cartes planaires boisées par des paires d'arbres

tourner autour de l'arbre

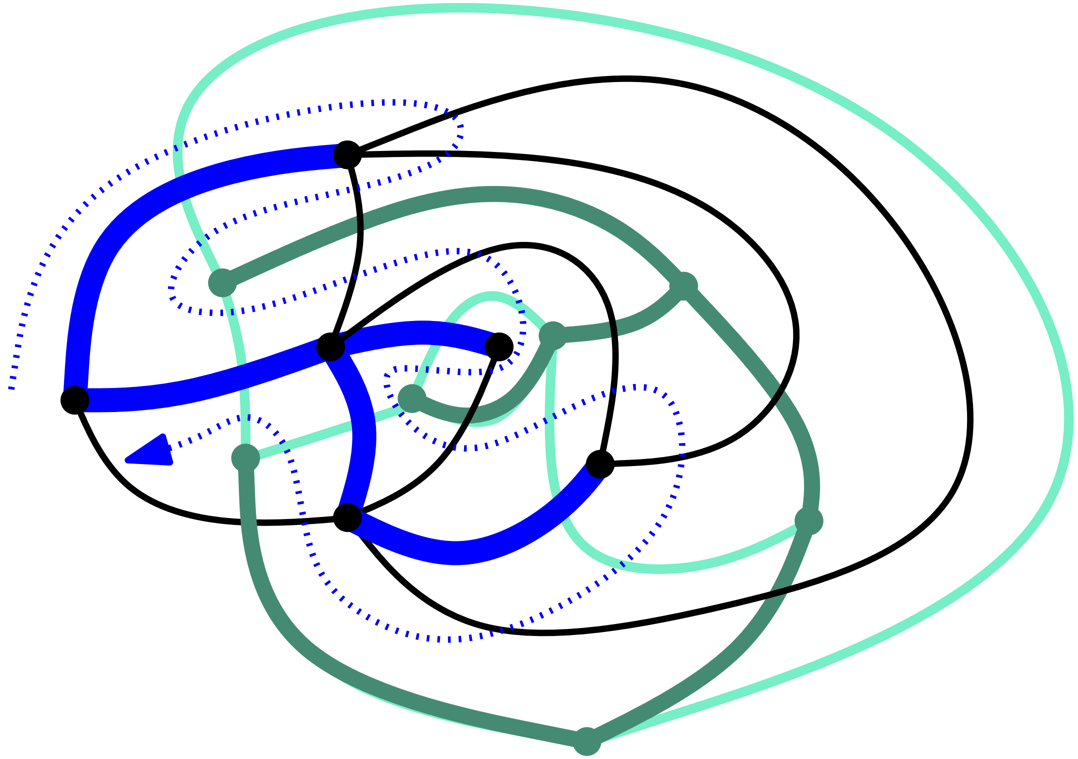


Codage des cartes planaires boisées par des paires d'arbres

tourner autour de l'arbre

$=$

passer entre les deux arbres

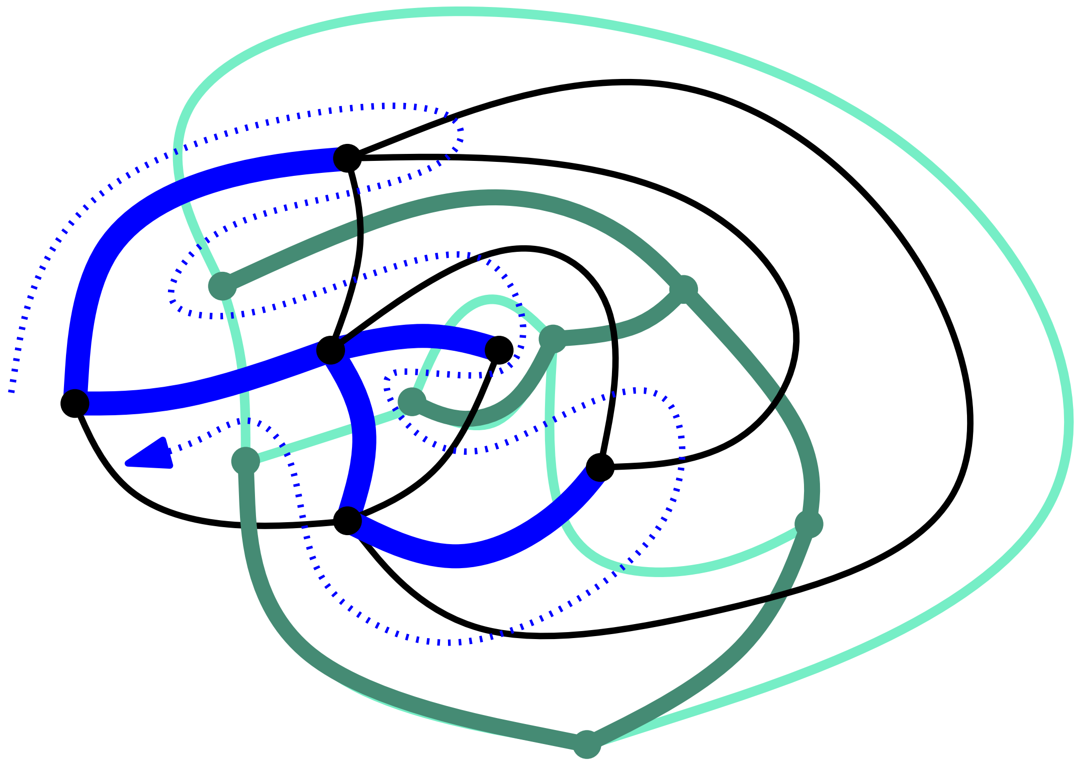


Codage des cartes planaires boisées par des paires d'arbres

tourner autour de l'arbre

$=$

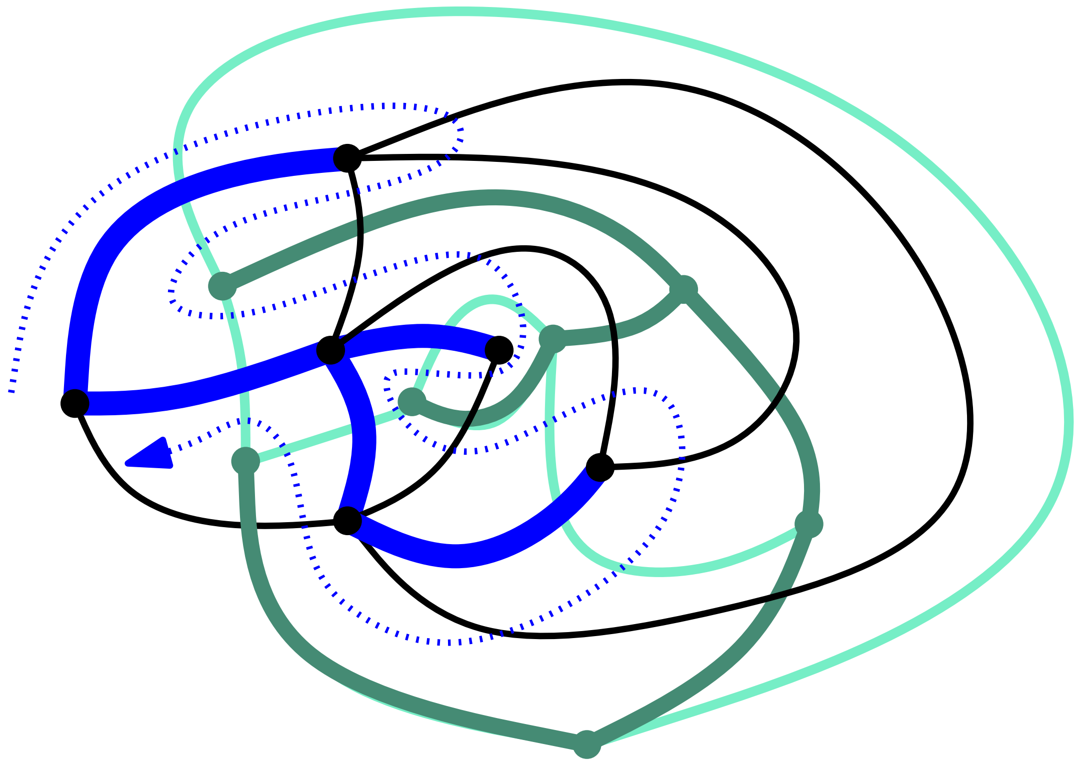
passer entre les deux arbres



le codage est symétrique entre l'arbre et son dual :

Codage des cartes planaires boisées par des paires d'arbres

tourner autour de l'arbre
=
passer entre les deux arbres



le codage est symétrique entre l'arbre et son dual :

carte boisée = arbre primal décoré par le code de l'arbre dual

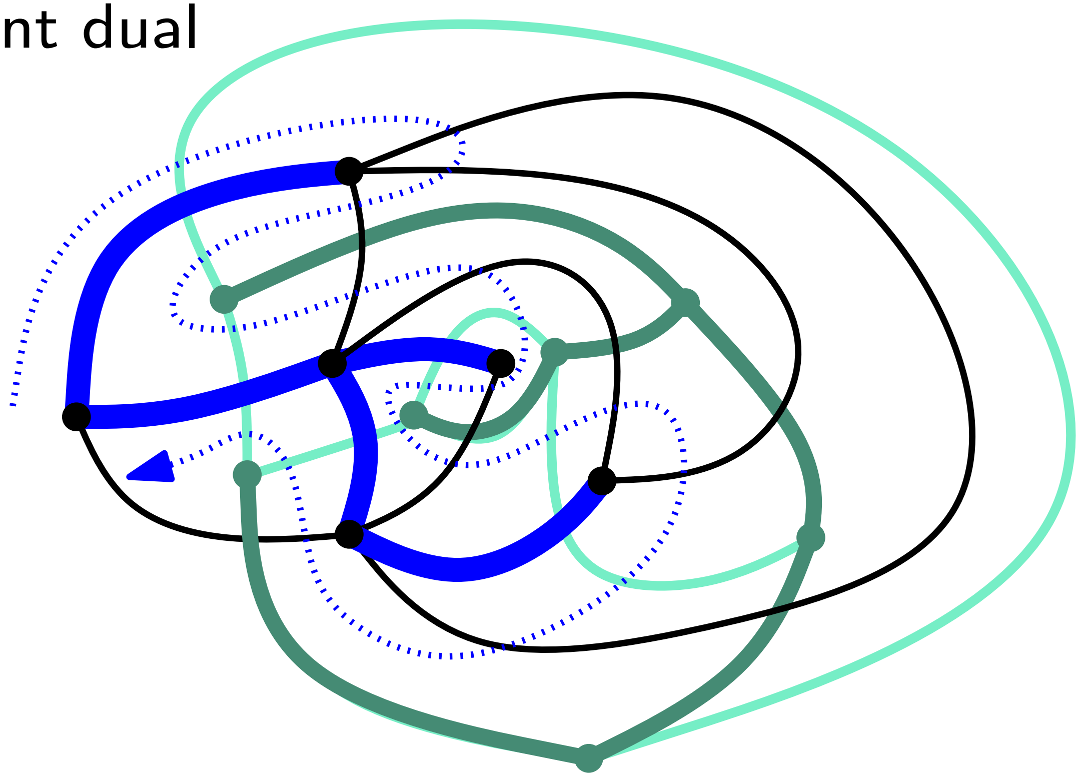
= arbre dual décoré par le code de l'arbre primal

= mélange des codes des deux arbres.

Codage de cartes enracinées (non boisées) par des arbres

on reprend l'idée utilisée pour les cartes boisée

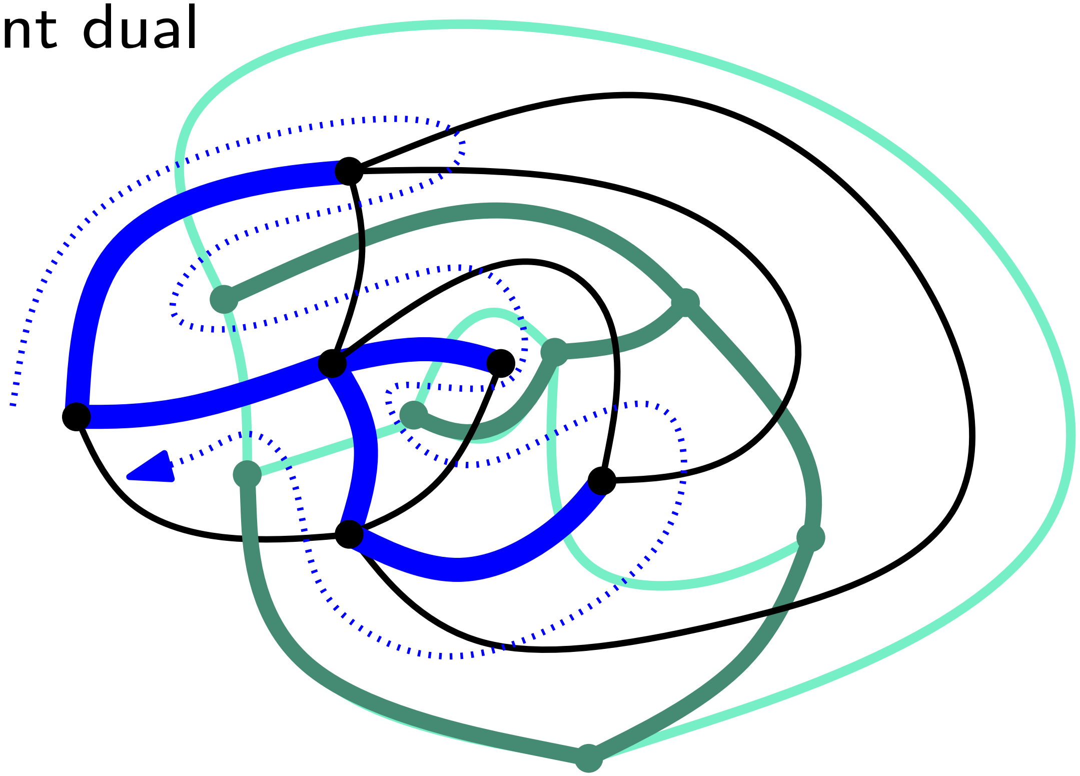
en utilisant un arbre couvrant dual canonique bien choisi



Codage de cartes enracinées (non boisées) par des arbres

on reprend l'idée utilisée pour les cartes boisée

en utilisant un arbre couvrant dual
canonique bien choisi

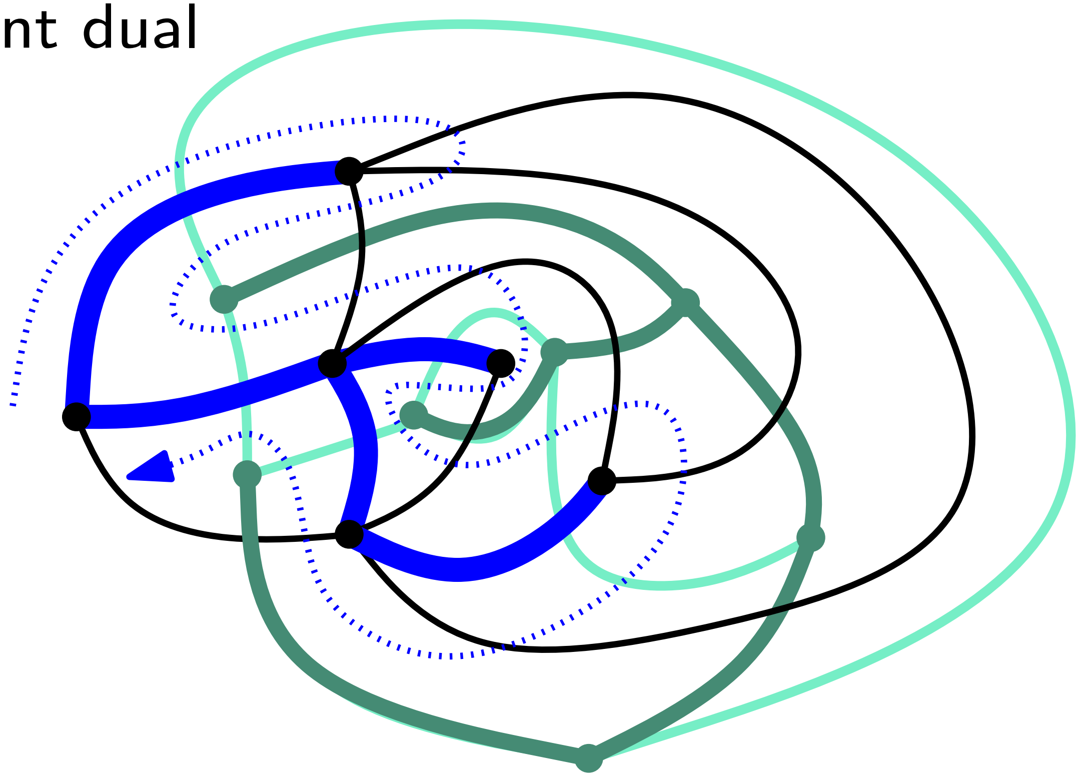


puis on écrit le code de l'arbre primal sur l'arbre canonique choisi

Codage de cartes enracinées (non boisées) par des arbres

on reprend l'idée utilisée pour les cartes boisée

en utilisant un arbre couvrant dual
canonique bien choisi



puis on écrit le code de l'arbre primal sur l'arbre canonique choisi

code d'une carte = arbre canonique décoré

Exemple : Bijection de Cori-Vauquelin et arbres bien étiquetés

Exemple : Bijection de Cori-Vauquelin et arbres bien étiquetés

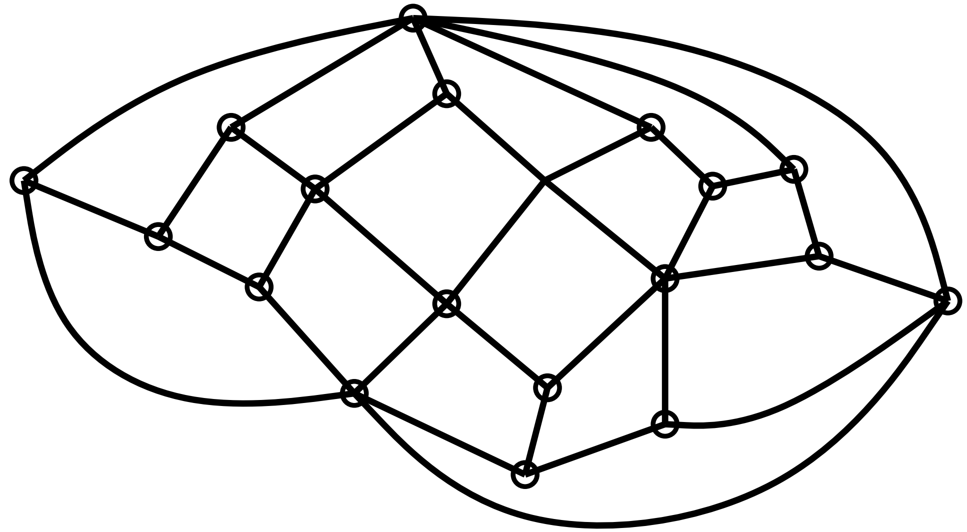
Le cas qui marche le mieux : les quadrangulations

Exemple : Bijection de Cori-Vauquelin et arbres bien étiquetés

Le cas qui marche le mieux : les quadrangulations

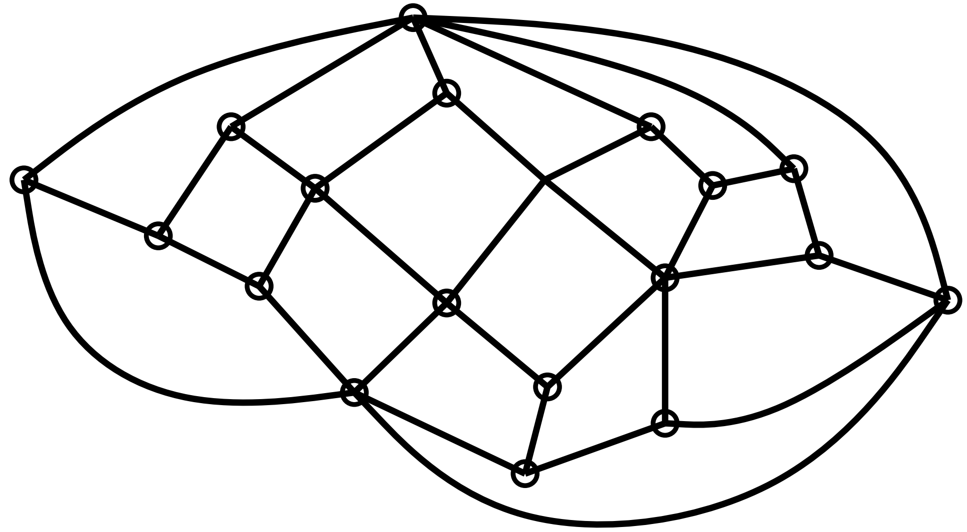
Exemple : Bijection de Cori-Vauquelin et arbres bien étiquetés

Le cas qui marche le mieux : les quadrangulations



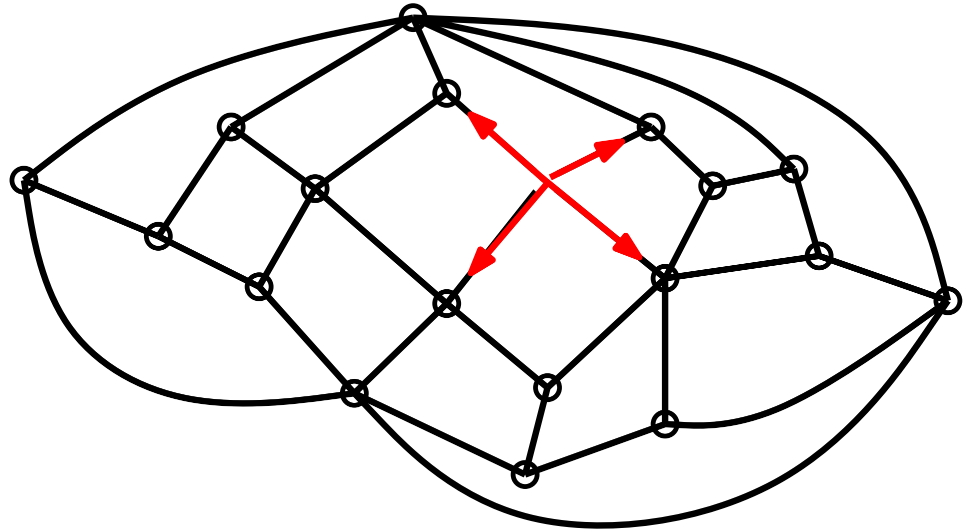
Exemple : Bijection de Cori-Vauquelin et arbres bien étiquetés

La bijection part d'un sommet racine et explore la quadrangulation en largeur



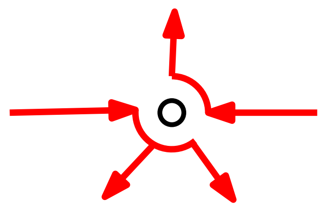
Exemple : Bijection de Cori-Vauquelin et arbres bien étiquetés

La bijection part d'un sommet racine et explore la quadrangulation en largeur



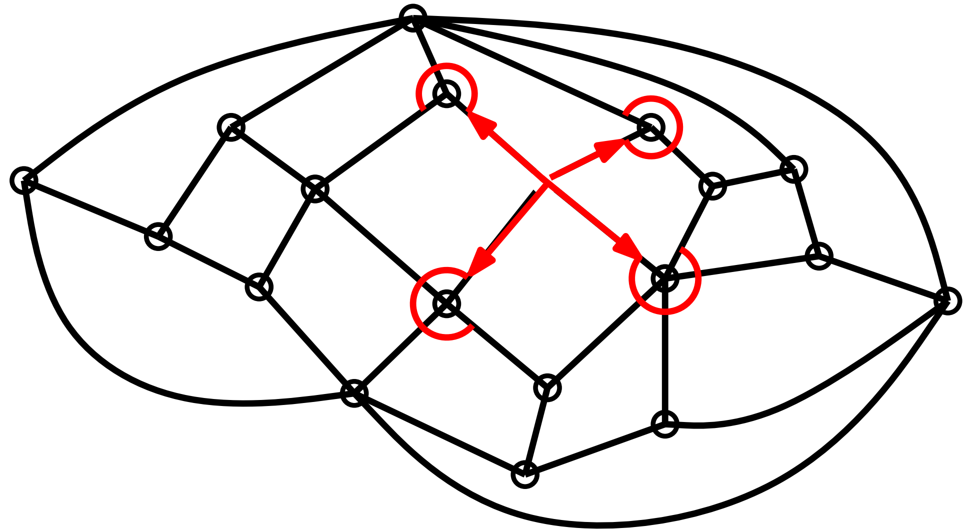
Autour de chaque sommet, l'exploration suit une règle de priorité à droite

dessin
à la Miermont



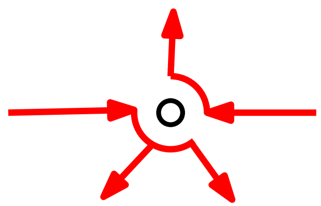
Exemple : Bijection de Cori-Vauquelin et arbres bien étiquetés

La bijection part d'un sommet racine et explore la quadrangulation en largeur



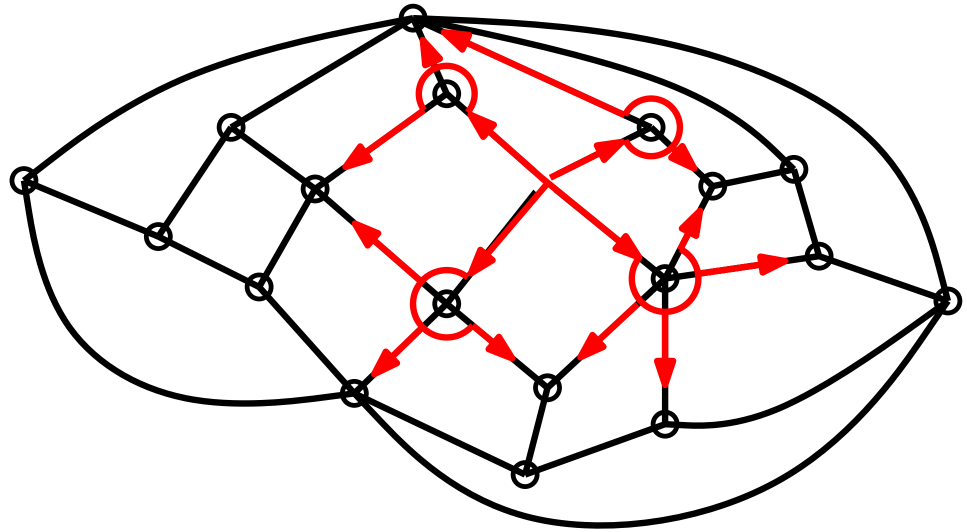
Autour de chaque sommet, l'exploration suit une règle de priorité à droite

dessin
à la Miermont



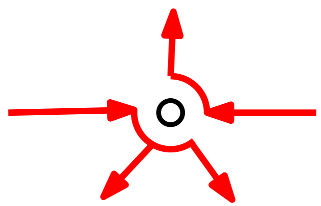
Exemple : Bijection de Cori-Vauquelin et arbres bien étiquetés

La bijection part d'un sommet racine et explore la quadrangulation en largeur

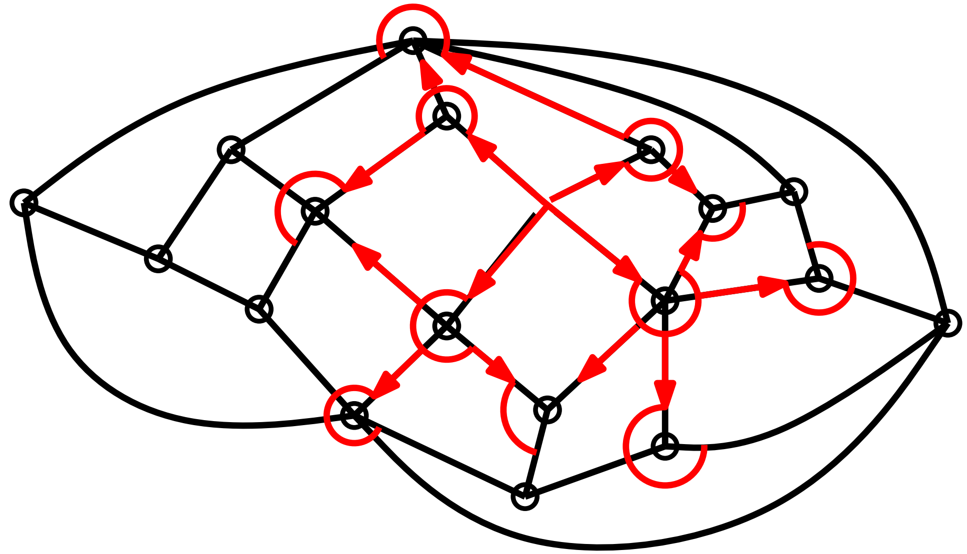


Autour de chaque sommet, l'exploration suit une règle de priorité à droite

dessin
à la Miermont



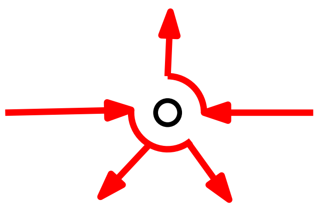
Exemple : Bijection de Cori-Vauquelin et arbres bien étiquetés



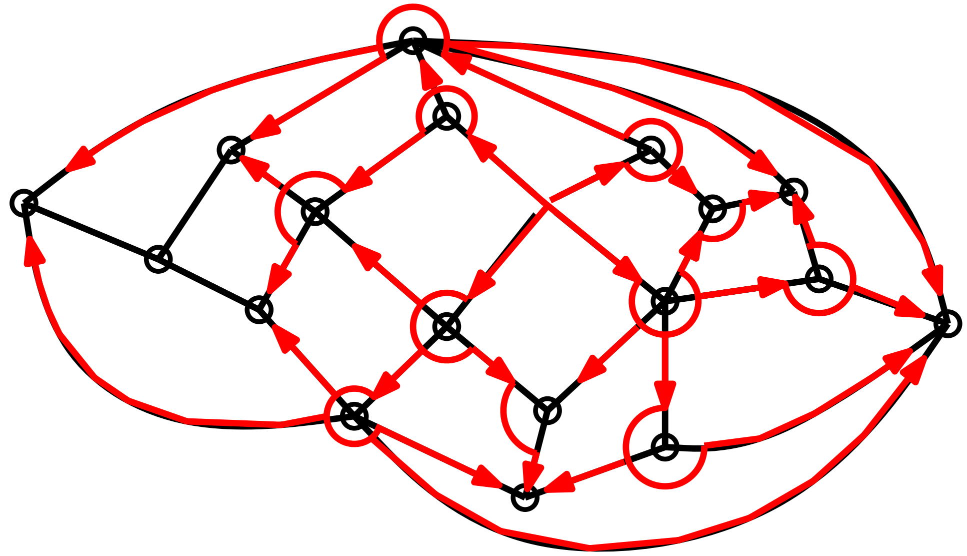
La bijection part d'un sommet racine et explore la quadrangulation en largeur

Autour de chaque sommet, l'exploration suit une règle de priorité à droite

dessin
à la Miermont



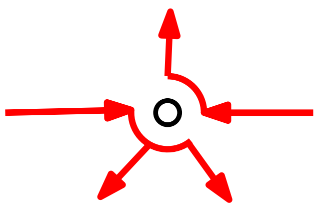
Exemple : Bijection de Cori-Vauquelin et arbres bien étiquetés



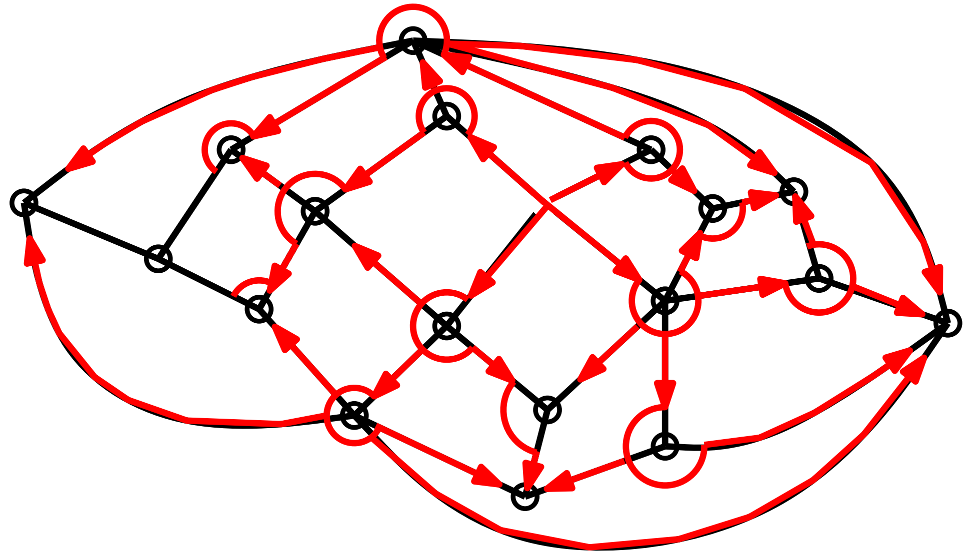
La bijection part d'un sommet racine et explore la quadrangulation en largeur

Autour de chaque sommet, l'exploration suit une règle de priorité à droite

dessin
à la Miermont



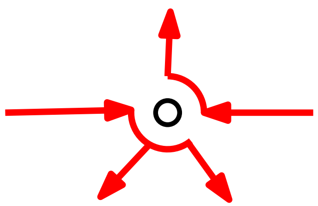
Exemple : Bijection de Cori-Vauquelin et arbres bien étiquetés



La bijection part d'un sommet racine et explore la quadrangulation en largeur

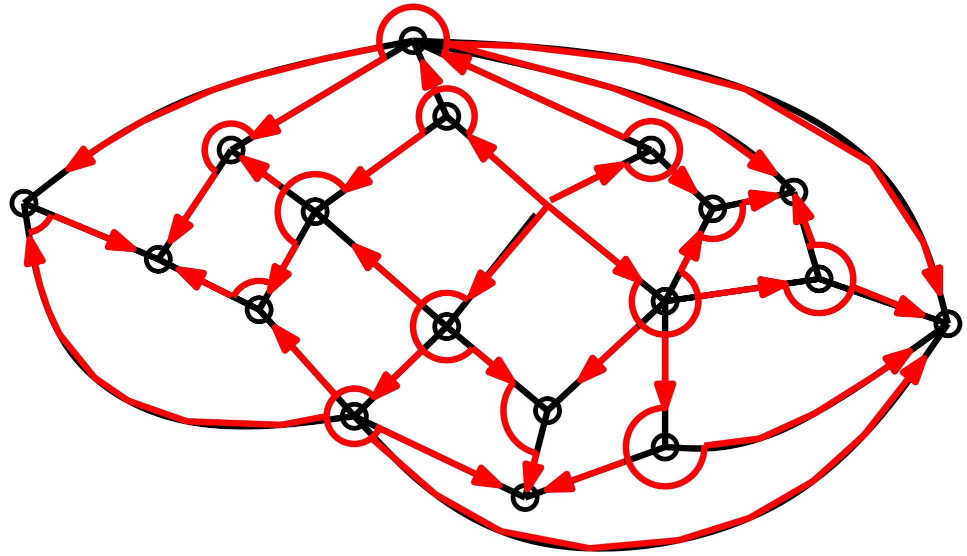
Autour de chaque sommet, l'exploration suit une règle de priorité à droite

dessin
à la Miermont



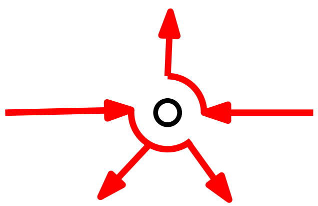
Exemple : Bijection de Cori-Vauquelin et arbres bien étiquetés

La bijection part d'un sommet racine et explore la quadrangulation en largeur



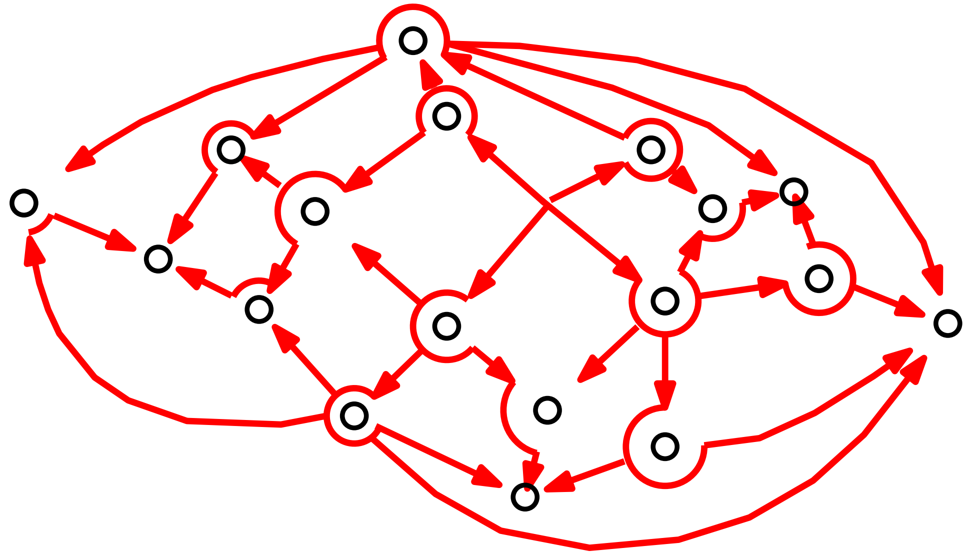
Autour de chaque sommet, l'exploration suit une règle de priorité à droite

dessin
à la Miermont



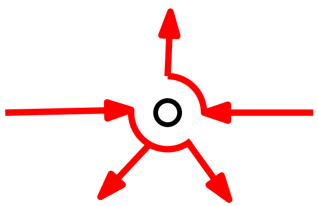
Exemple : Bijection de Cori-Vauquelin et arbres bien étiquetés

La bijection part d'un sommet racine et explore la quadrangulation en largeur

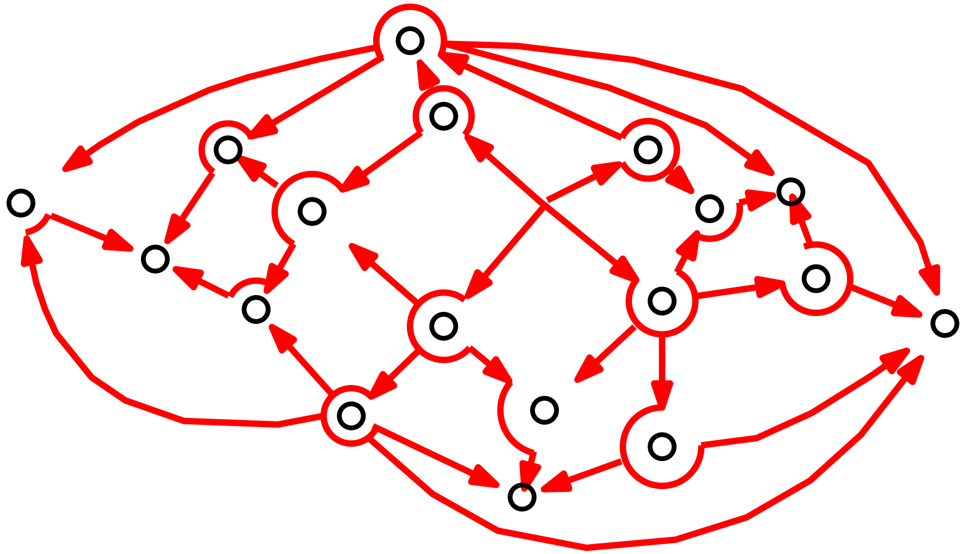


Autour de chaque sommet, l'exploration suit une règle de priorité à droite

dessin
à la Miermont



Exemple : Bijection de Cori-Vauquelin et arbres bien étiquetés

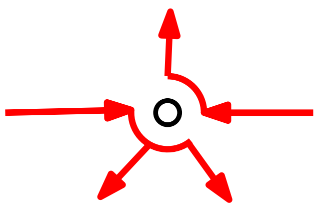


La bijection part d'un sommet racine et explore la quadrangulation en largeur

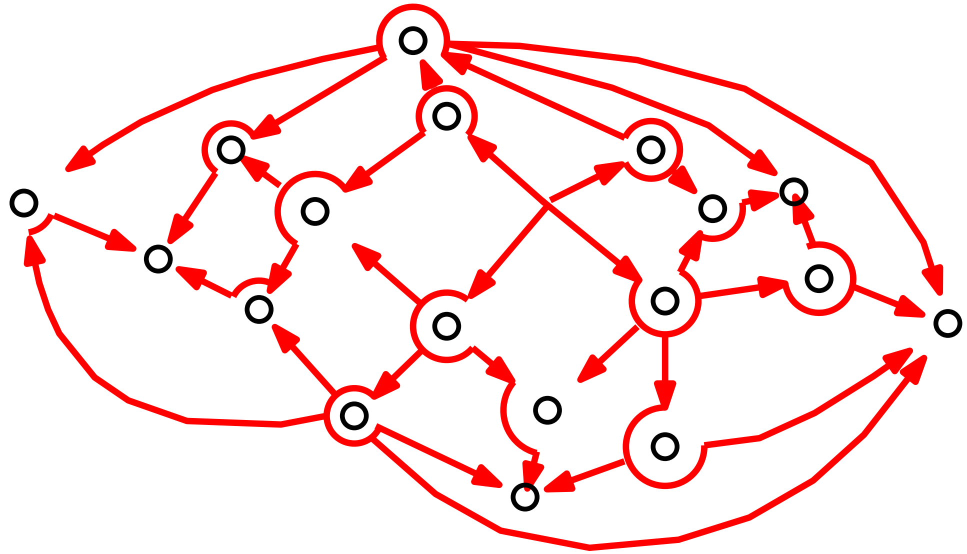
les chemins rouges forment un arbre de parcours en largeur à gauche

Autour de chaque sommet, l'exploration suit une règle de priorité à droite

dessin
à la Miermont



Exemple : Bijection de Cori-Vauquelin et arbres bien étiquetés

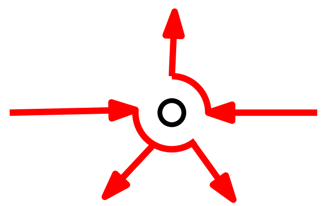


La bijection part d'un sommet racine et explore la quadrangulation en largeur

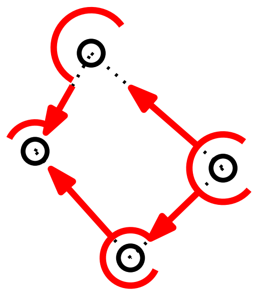
les chemins rouges forment un arbre de parcours en largeur à gauche

Autour de chaque sommet, l'exploration suit une règle de priorité à droite

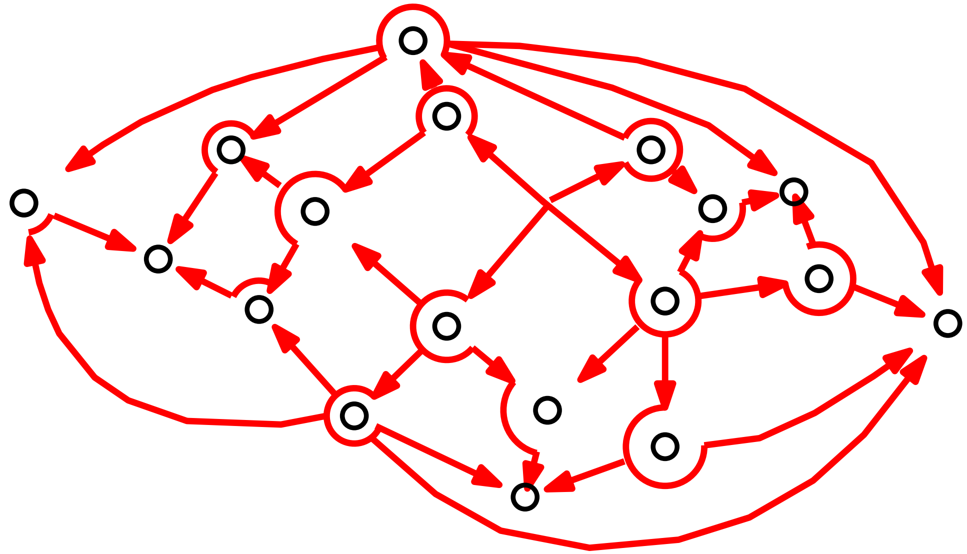
dessin
à la Miermont



L'arbre rouge est un arbre couvrant de la carte cubique dérivée



Exemple : Bijection de Cori-Vauquelin et arbres bien étiquetés

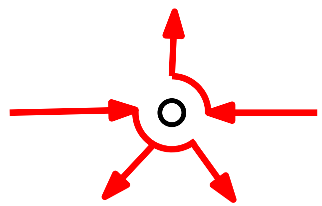


La bijection part d'un sommet racine et explore la quadrangulation en largeur

les chemins rouges forment un arbre de parcours en largeur à gauche

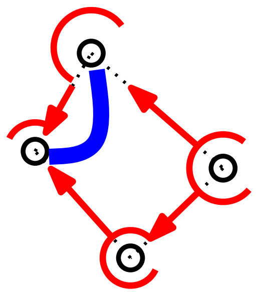
Autour de chaque sommet, l'exploration suit une règle de priorité à droite

dessin
à la Miermont



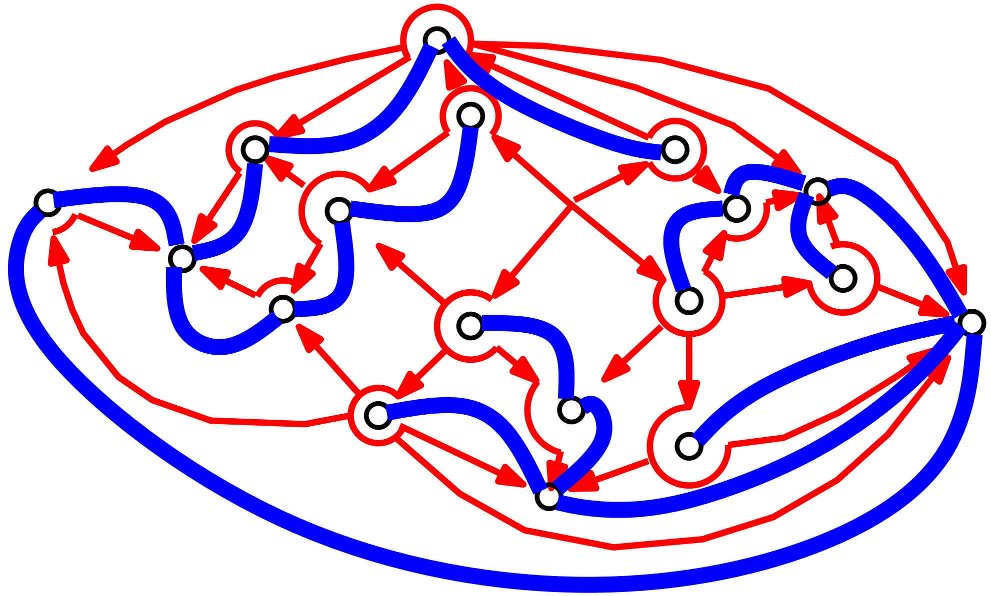
L'arbre rouge est un arbre couvrant de la carte cubique dérivée

Joindre les 2 coins libres de chaque face $\Leftrightarrow$ construire l'arbre dual



Exemple : Bijection de Cori-Vauquelin et arbres bien étiquetés

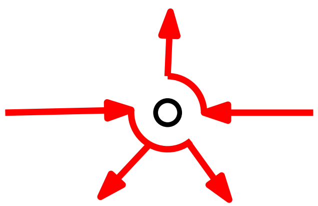
La bijection part d'un sommet racine et explore la quadrangulation en largeur



les chemins rouges forment un arbre de parcours en largeur à gauche

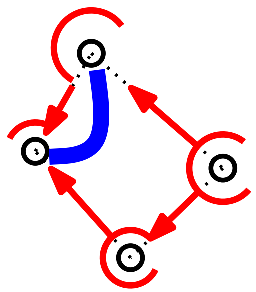
Autour de chaque sommet, l'exploration suit une règle de priorité à droite

dessin
à la Miermont



L'arbre rouge est un arbre couvrant de la carte cubique dérivée

Joindre les 2 coins libres de chaque face $\Leftrightarrow$ construire l'arbre dual



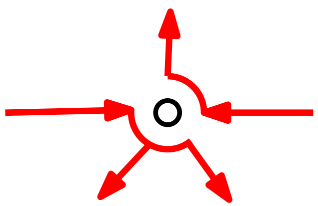
Exemple : Bijection de Cori-Vauquelin et arbres bien étiquetés

La bijection part d'un sommet racine et explore la quadrangulation en largeur

les chemins rouges forment un arbre de parcours en largeur à gauche

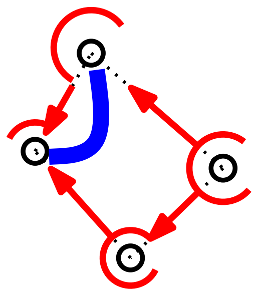
Autour de chaque sommet, l'exploration suit une règle de priorité à droite

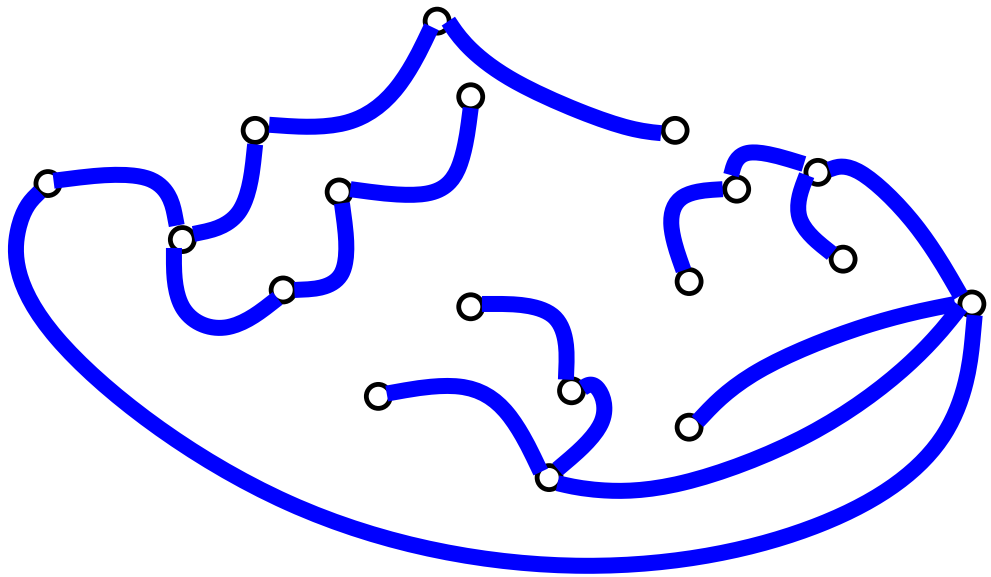
dessin
à la Miermont



L'arbre rouge est un arbre couvrant de la carte cubique dérivée

Joindre les 2 coins libres de chaque face ⇔ construire l'arbre dual





⇒ un arbre (dual du rouge)

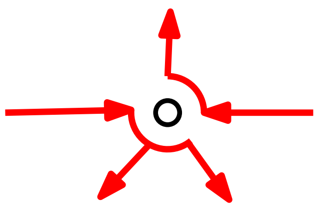
Exemple : Bijection de Cori-Vauquelin et arbres bien étiquetés

La bijection part d'un sommet racine et explore la quadrangulation en largeur

les chemins rouges forment un arbre de parcours en largeur à gauche

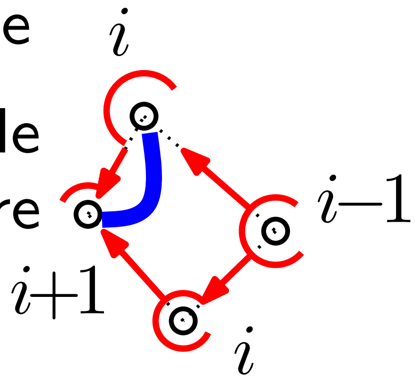
Autour de chaque sommet, l'exploration suit une règle de priorité à droite

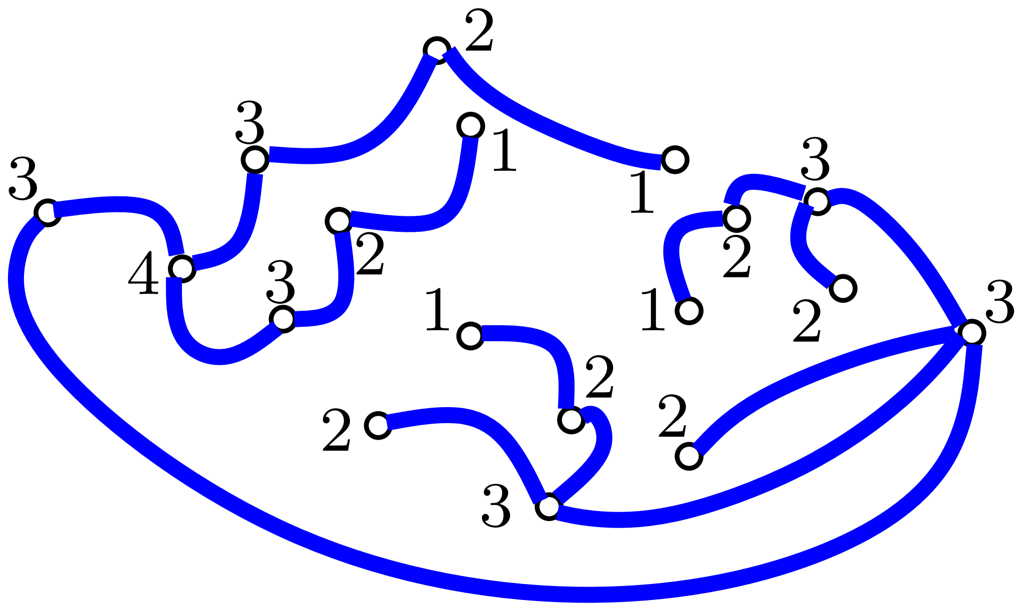
dessin
à la Miermont



L'arbre rouge est un arbre couvrant de la carte cubique dérivée

Joindre les 2 coins libres de chaque face $\Leftrightarrow$ construire l'arbre dual





$\Rightarrow$ un arbre (dual du rouge)

Etiqueter les sommets par le code de hauteur de l'arbre rouge (bfs $\Rightarrow$ distance à la racine)

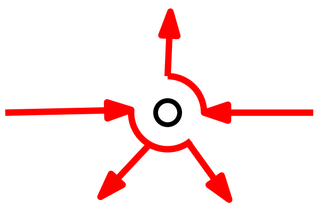
Exemple : Bijection de Cori-Vauquelin et arbres bien étiquetés

La bijection part d'un sommet racine et explore la quadrangulation en largeur

les chemins rouges forment un arbre de parcours en largeur à gauche

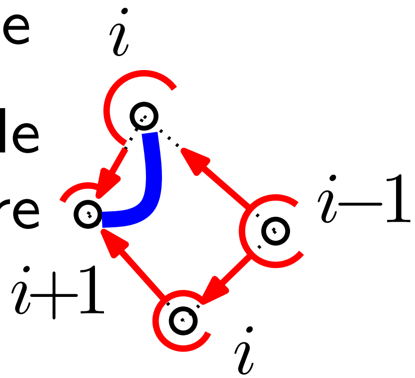
Autour de chaque sommet, l'exploration suit une règle de priorité à droite

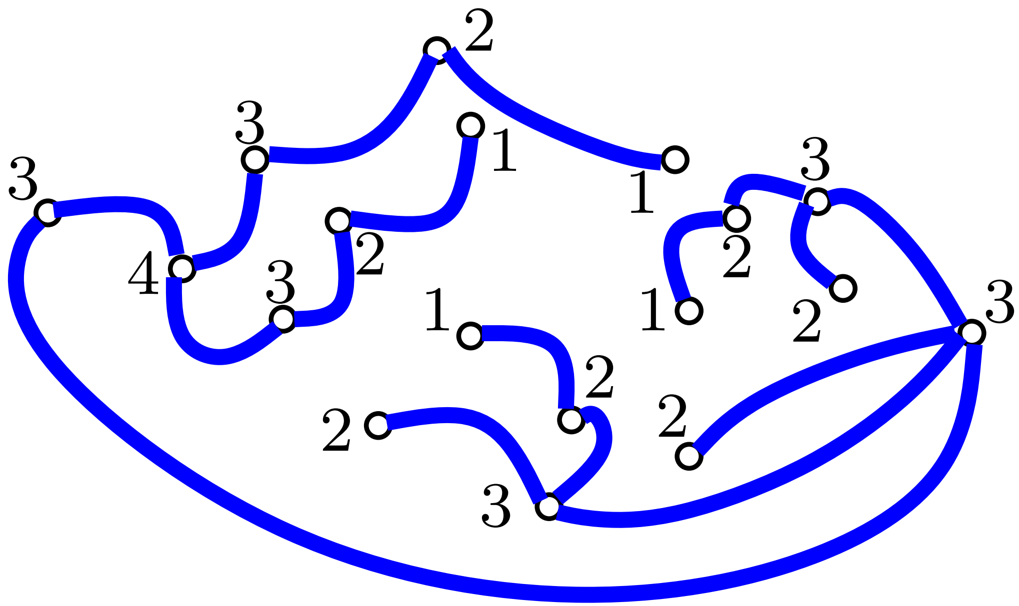
dessin
à la Miermont



L'arbre rouge est un arbre couvrant de la carte cubique dérivée

Joindre les 2 coins libres de chaque face $\Leftrightarrow$ construire l'arbre dual





$\Rightarrow$ un arbre bien étiqueté

Etiqueter les sommets par le code de hauteur de l'arbre rouge (bfs $\Rightarrow$ distance à la racine)

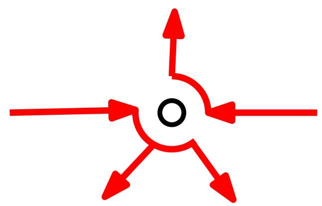
Exemple : Bijection de Cori-Vauquelin et arbres bien étiquetés

La bijection part d'un sommet racine et explore la quadrangulation en largeur

les chemins rouges forment un arbre de parcours en largeur à gauche

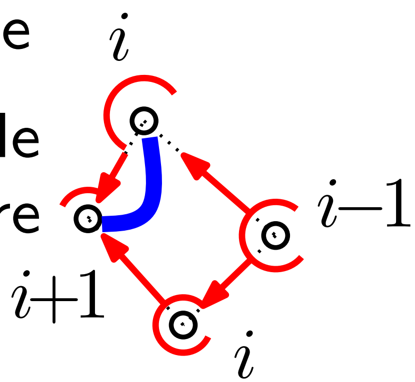
Autour de chaque sommet, l'exploration suit une règle de priorité à droite

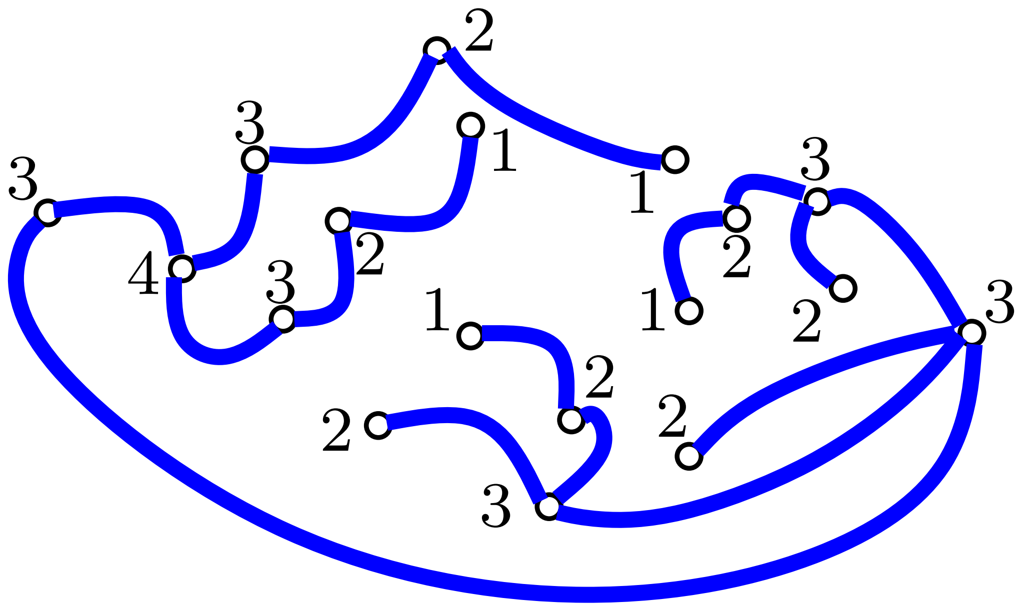
dessin
à la Miermont



L'arbre rouge est un arbre couvrant de la carte cubique dérivée

Joindre les 2 coins libres de chaque face $\Leftrightarrow$ construire l'arbre dual





$\Rightarrow$ un arbre bien étiqueté

Etiqueter les sommets par le code de hauteur de l'arbre rouge
(bfs $\Rightarrow$ distance à la racine)

Théorème. C'est une bijection

X_n : quad pointée, n faces
$\wr\wr$
T_n : ABE, n sommets

Exemple : Bijection de Cori-Vauquelin et arbres bien étiquetés

Théorème. Les quadrangulations à n faces enracinées sont en bijection avec les arbres bien étiquetés à n arêtes

Corollaire :

Le nombre de quadrangulations enracinées à n faces (et $n+2$ sommets) est

$$\frac{2}{n+2}\,\frac{3^n}{n+1}\binom{2n}{n}$$

Exemple : Bijection de Cori-Vauquelin et arbres bien étiquetés

Théorème. Les quadrangulations à n faces enracinées sont en bijection avec les arbres bien étiquetés à n arêtes

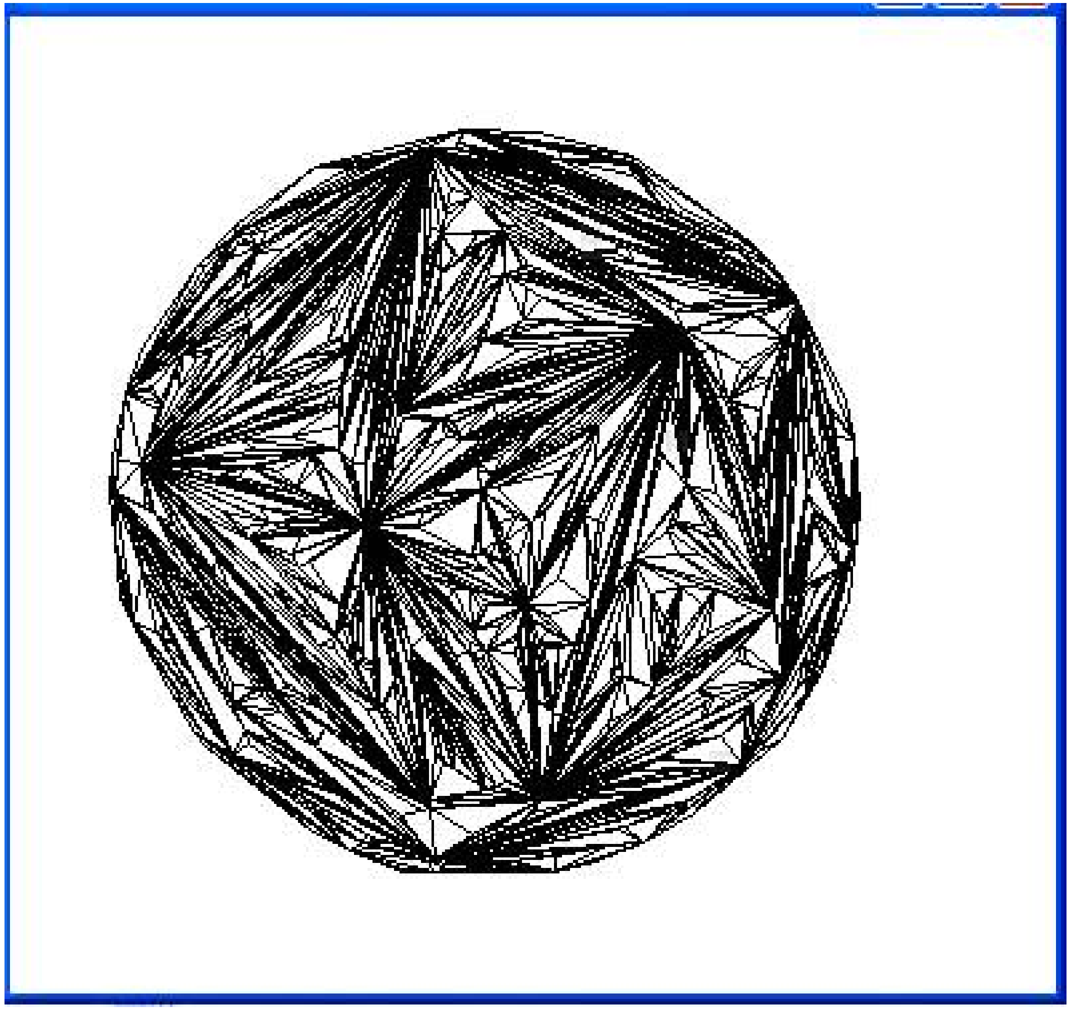
Corollaire :

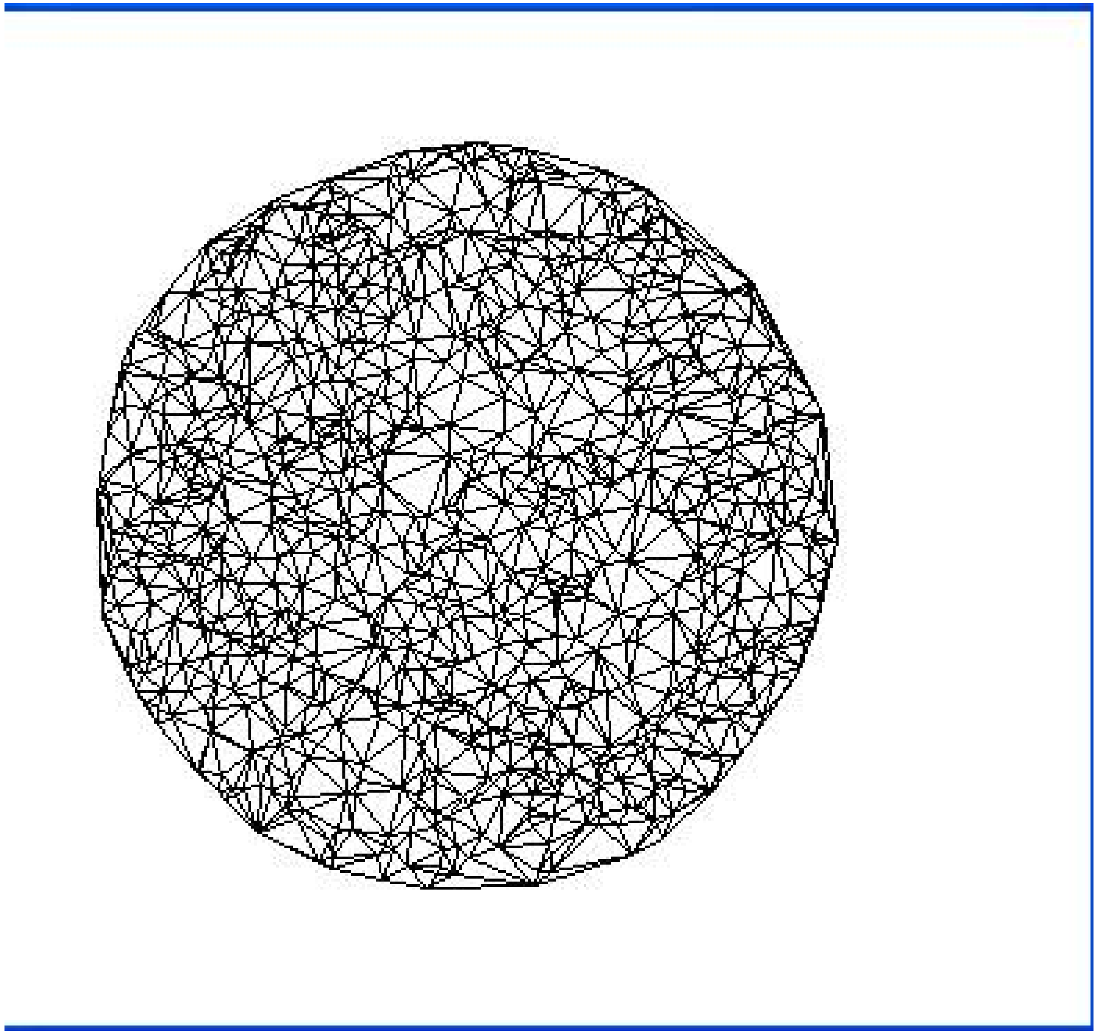
Le nombre de quadrangulations enracinées à n faces (et $n+2$ sommets) est

$$\frac{2}{n+2}\frac{3^n}{n+1}\binom{2n}{n}$$

Proposition : dans la bijection les étiquettes correspondent aux distances des sommets à la racine.

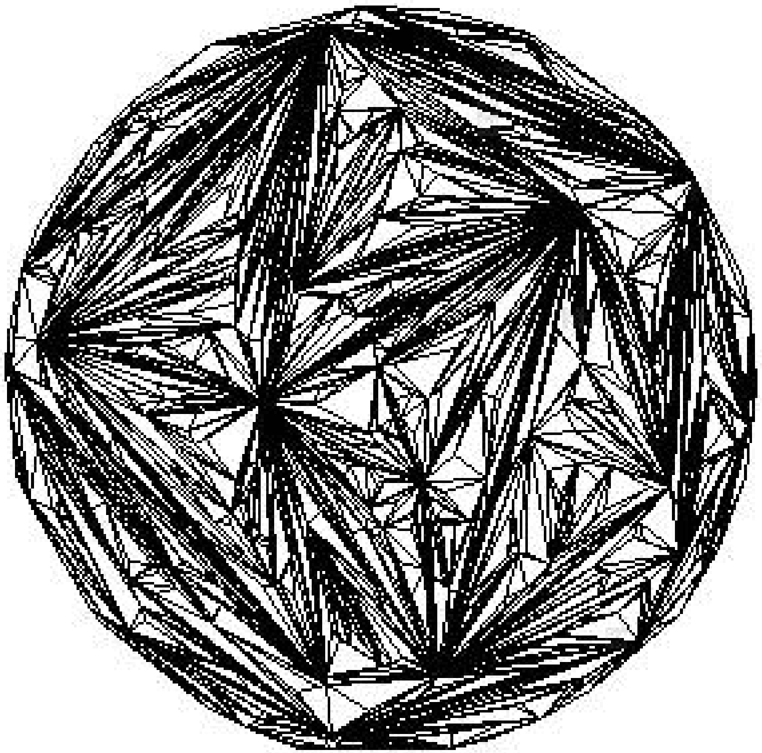
Cartes et surfaces aléatoires



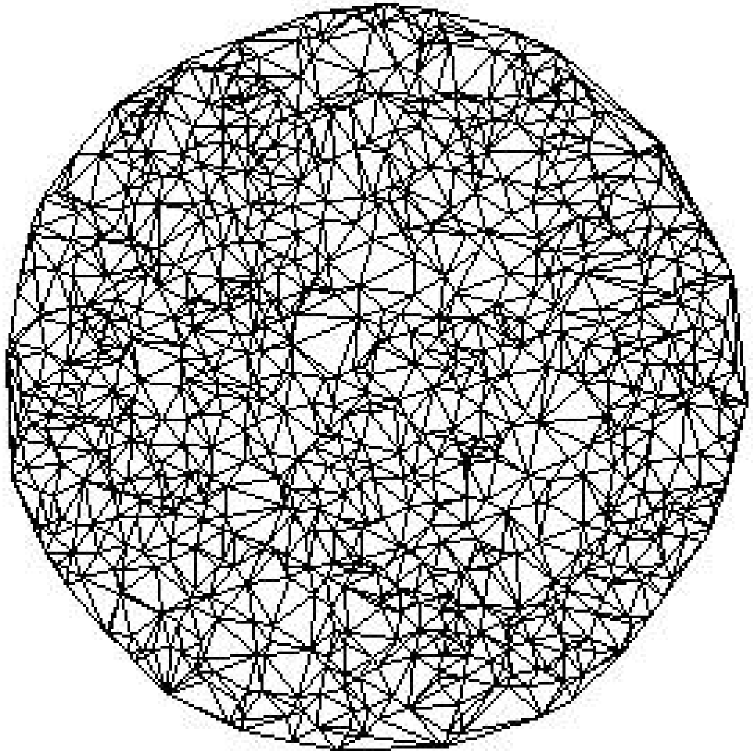


Quelle distribution veut on (peut on) étudier ?

Cartes et surfaces aléatoires



Triangulation uniforme aléatoire d'un disque



Delaunay de points aléatoires dans un disque

Quelle distribution veut on (peut on) étudier ?

Un modèle de surface aléatoire

Au vu des résultats d'énumération, on s'intéresse à la distribution uniforme

choisir une famille de carte : $\mathcal{Q}_n = \{\text{quadrangulations à } n \text{ faces}\}$.

Quadrangulation uniforme = variable aléatoire X_n à valeur dans $\mathcal{Q}_n$ avec

$$\Pr(X_n = q) = \frac{1}{|\mathcal{Q}_n|} = \frac{1}{\frac{2}{n+2}\frac{3^n}{n+1}\binom{2n}{n}}$$

Un modèle de surface aléatoire

Au vu des résultats d'énumération, on s'intéresse à la distribution uniforme

choisir une famille de carte : $\mathcal{Q}_n = \{$quadrangulations à n faces$\}$.

Quadrangulation uniforme = variable aléatoire X_n à valeur dans $\mathcal{Q}_n$ avec

$$\Pr(X_n = q) = \frac{1}{|\mathcal{Q}_n|} = \frac{1}{\frac{2}{n+2}\frac{3^n}{n+1}\binom{2n}{n}}$$

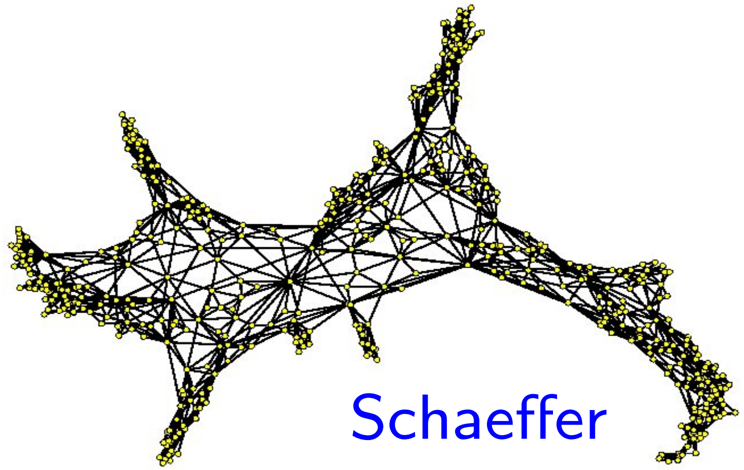
On peut faire pareil avec d'autres familles de cartes ou avec des familles de cartes munies de structure...

On commence avec les quadrangulations, c'est le cas sur lequel il y a le plus de résultats.

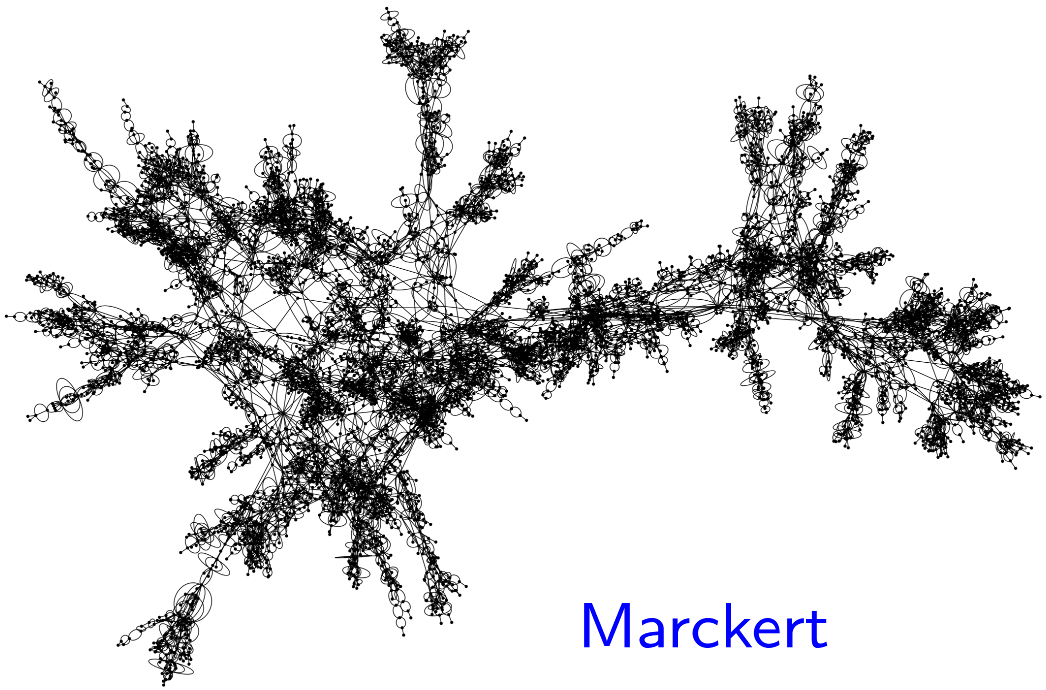
Quadrangulations aléatoires uniformes

L'allure d'une sphère aléatoire dépend un peu de qui dessine...

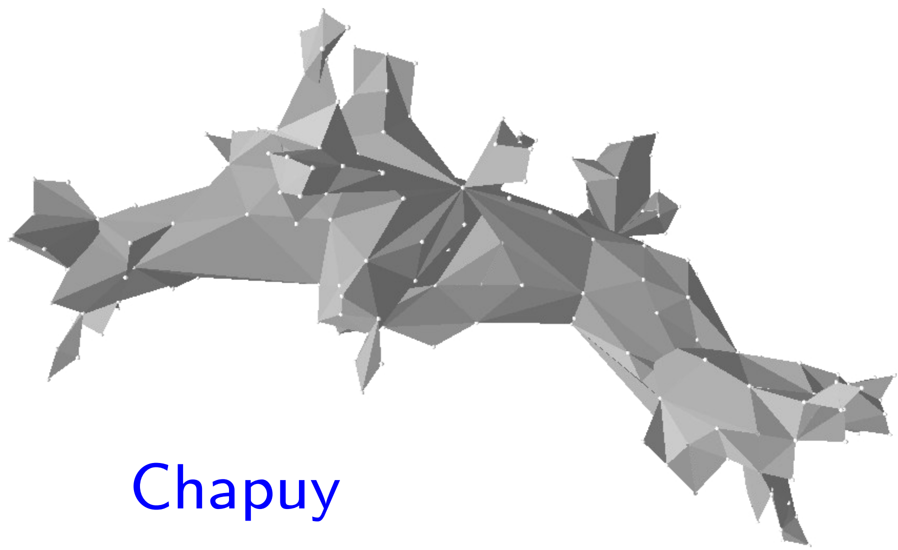
Objectif : Choisir une métrique intrinsèque et décrire les surfaces ainsi obtenues



Schaeffer



Marckert



Chapuy

Quelle métrique mettre sur nos surfaces ?

Première idée : voir la carte comme plongement d'un graphe

$\Rightarrow$ utiliser les distances dans le graphe, avec arêtes de longueur unité

Si on veut vraiment avoir une surface, il faut remplir les faces par des patchs qui ne modifient pas les géodésiques existantes : réaliser chaque face par un cube ouvert (à 5 faces).

(c'est ce qu'on fait dans la plupart des travaux)

Deuxième idée : voir la carte comme recollement de polygones

$\Rightarrow$ recoller des carrés unités de façon à avoir une structure complexe, puis envoyer le résultat de manière canonique sur une partie du plan complexe par transformation conforme.

(cf travaux et conjectures de Duplantier et Sheffield, Gill et Rhodes)

Quelle métrique mettre sur nos surfaces ?

Première idée : voir la carte comme plongement d'un graphe

$\Rightarrow$ utiliser les distances dans le graphe, avec arêtes de longueur unité

Si on veut vraiment avoir une surface, il faut remplir les faces par des patchs qui ne modifient pas les géodésiques existantes : réaliser chaque face par un cube ouvert (à 5 faces).

(c'est ce qu'on fait dans la plupart des travaux)

Deuxième idée : voir la carte comme recollement de polygones

$\Rightarrow$ recoller des carrés unités de façon à avoir une structure complexe, puis envoyer le résultat de manière canonique sur une partie du plan complexe par transformation conforme.

(cf travaux et conjectures de Duplantier et Sheffield, Gill et Rhodes)

Étudier des cartes aléatoires : les quadrangulations

Distribution uniforme sur les quadrangulations à n faces, pour n grand

- Étudier des paramètres :

  - degré d'un sommet aléatoire
  - degré maximum
  - loi 0-1 pour les propriétés locales
  - distance entre 2 sommets aléatoires
  - distance maximum
  - longueur d'un plus petit cycle diviseur

$\Rightarrow$ espérance, moments, lois limites discrètes ou continues

Étudier des cartes aléatoires : les quadrangulations

Distribution uniforme sur les quadrangulations à n faces, pour n grand

- Étudier des paramètres :

  - degré d'un sommet aléatoire
  - degré maximum
  - loi 0-1 pour les propriétés locales
  - distance entre 2 sommets aléatoires
  - distance maximum
  - longueur d'un plus petit cycle diviseur

$\Rightarrow$ espérance, moments, lois limites discrètes ou continues

1ère approche : marquer des paramètres dans les séries génératrices.

exemple : le degré du sommet racine dans les triangulations

Étudier des cartes aléatoires : les quadrangulations

Distribution uniforme sur les quadrangulations à n faces, pour n grand

- Étudier des paramètres :

  - degré d'un sommet aléatoire
  - degré maximum
  - loi 0-1 pour les propriétés locales
  - distance entre 2 sommets aléatoires
  - distance maximum
  - longueur d'un plus petit cycle diviseur

$\Rightarrow$ espérance, moments, lois limites discrètes ou continues

1ère approche : marquer des paramètres dans les séries génératrices.

exemple : le degré du sommet racine dans les triangulations

2ème approche : utiliser les bijections pour transporter des paramètres

Étudier des cartes aléatoires : les quadrangulations

Distribution uniforme sur les quadrangulations à n faces, pour n grand

- Étudier des paramètres :
  - degré d'un sommet aléatoire
  - degré maximum
  - loi 0-1 pour les propriétés locales
  - distance entre 2 sommets aléatoires
  - distance maximum
  - longueur d'un plus petit cycle diviseur

$\Rightarrow$ espérance, moments, lois limites discrètes ou continues

1ère approche : marquer des paramètres dans les séries génératrices.

exemple : le degré du sommet racine dans les triangulations

2ème approche : utiliser les bijections pour transporter des paramètres

exemple : distance entre deux sommets dans les quadrangulations

Théorème. Les quadrangulations à n faces enracinées sont en bijection avec les arbres bien étiquetés à n arêtes
Proposition : dans la bijection les étiquettes correspondent aux distances des sommets à la racine.

Corollaire : la distance entre 2 points aléatoires de X_n est de l'ordre de $n^{1/4}$

Étudier des cartes aléatoires : les quadrangulations

Distribution uniforme sur les quadrangulations à n faces, pour n grand

- Définir des surfaces aléatoires limites

1ère méthode : imiter les résultats
– de convergence des marches simples vers le mouvement Brownien
– de convergence des arbres simples vers l'arbre continu aléatoire (CRT)

Étudier des cartes aléatoires : les quadrangulations

Distribution uniforme sur les quadrangulations à n faces, pour n grand

- Définir des surfaces aléatoires limites

1ère méthode : imiter les résultats
– de convergence des marches simples vers le mouvement Brownien
– de convergence des arbres simples vers l'arbre continu aléatoire (CRT)

Étudier des cartes aléatoires : les quadrangulations

Distribution uniforme sur les quadrangulations à n faces, pour n grand

- Définir des surfaces aléatoires limites

1ère méthode : imiter les résultats
– de convergence des marches simples vers le mouvement Brownien
– de convergence des arbres simples vers l'arbre continu aléatoire (CRT)

$\Rightarrow$ renormaliser les distances par un facteur $n^{-1/4}$ pour espérer avoir un objet compact à la limite.

2ème méthode : laisser la taille de la carte tendre vers l'infini en regardant un voisinage de l'origine.

$\Rightarrow$ étudier la convergence des boules de rayon k fixé.

Étudier des cartes aléatoires : les quadrangulations

Distribution uniforme sur les quadrangulations à n faces, pour n grand

- Définir des surfaces aléatoires limites

1ère méthode : imiter les résultats
– de convergence des marches simples vers le mouvement Brownien
– de convergence des arbres simples vers l'arbre continu aléatoire (CRT)

$\Rightarrow$ renormaliser les distances par un facteur $n^{-1/4}$ pour espérer avoir un objet compact à la limite.

2ème méthode : laisser la taille de la carte tendre vers l'infini en regardant un voisinage de l'origine.

$\Rightarrow$ étudier la convergence des boules de rayon k fixé.

Étudier des cartes aléatoires : les quadrangulations

Distribution uniforme sur les quadrangulations à n faces, pour n grand

- Définir des surfaces aléatoires limites

1ère méthode : imiter les résultats
– de convergence des marches simples vers le mouvement Brownien
– de convergence des arbres simples vers l'arbre continu aléatoire (CRT)

$\Rightarrow$ renormaliser les distances par un facteur $n^{-1/4}$ pour espérer avoir un objet compact à la limite.

$\Rightarrow$ Carte planaire Brownienne

2ème méthode : laisser la taille de la carte tendre vers l'infini en regardant un voisinage de l'origine.

$\Rightarrow$ étudier la convergence des boules de rayon k fixé.

Étudier des cartes aléatoires : les quadrangulations

Distribution uniforme sur les quadrangulations à n faces, pour n grand

- Définir des surfaces aléatoires limites

1ère méthode : imiter les résultats
– de convergence des marches simples vers le mouvement Brownien
– de convergence des arbres simples vers l'arbre continu aléatoire (CRT)

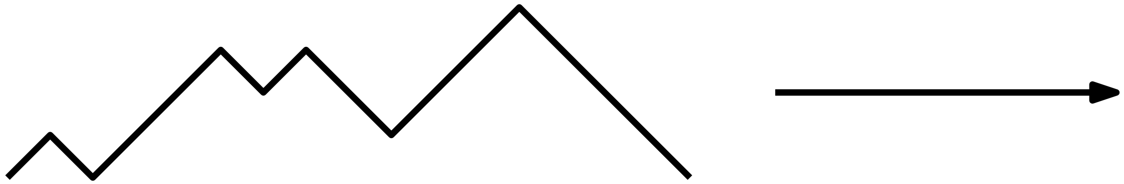
$\Rightarrow$ renormaliser les distances par un facteur $n^{-1/4}$ pour espérer avoir un objet compact à la limite.

$\Rightarrow$ Carte planaire Brownienne

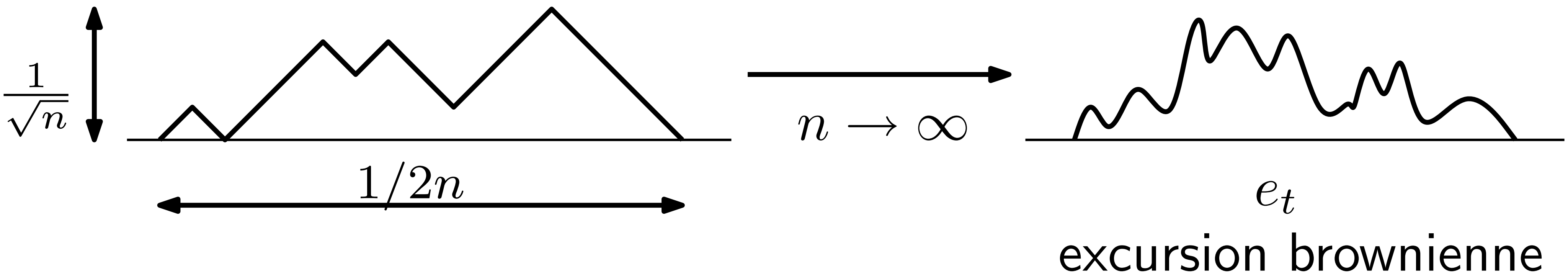
2ème méthode : laisser la taille de la carte tendre vers l'infini en regardant un voisinage de l'origine.

$\Rightarrow$ étudier la convergence des boules de rayon k fixé.

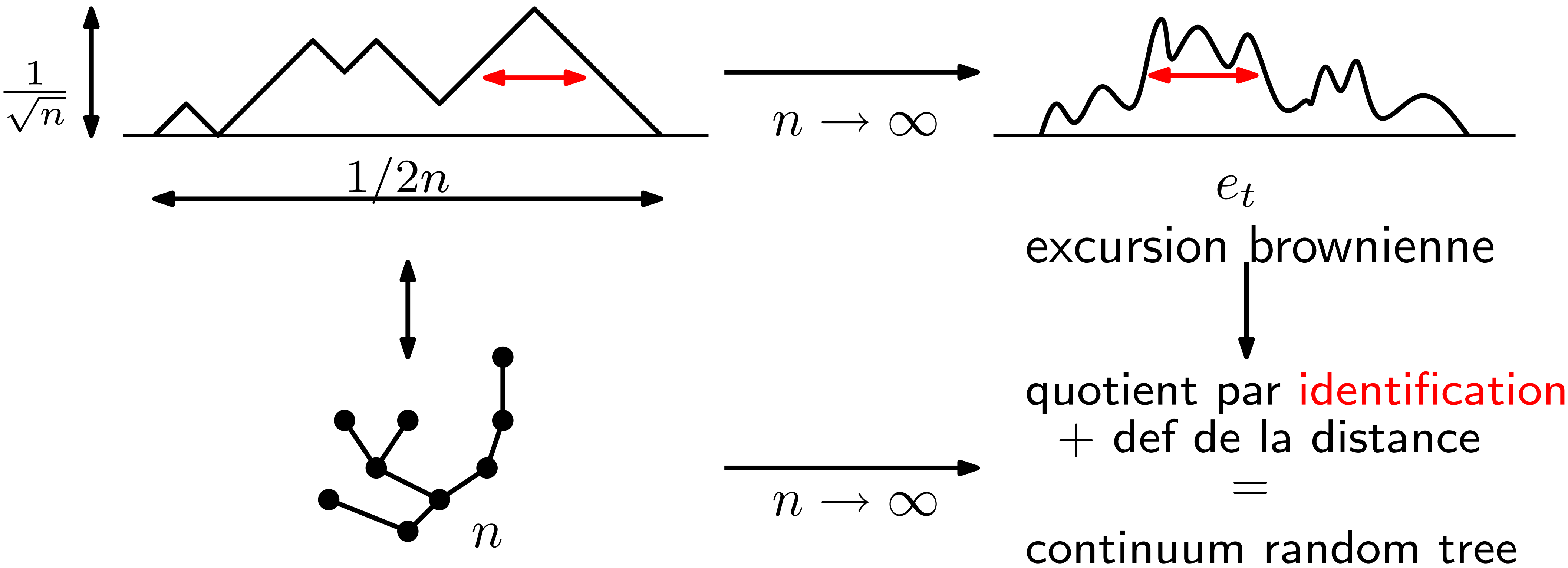
$\Rightarrow$ Uniform Infinite Planar Quadrangulation (UIPQ) limite continue



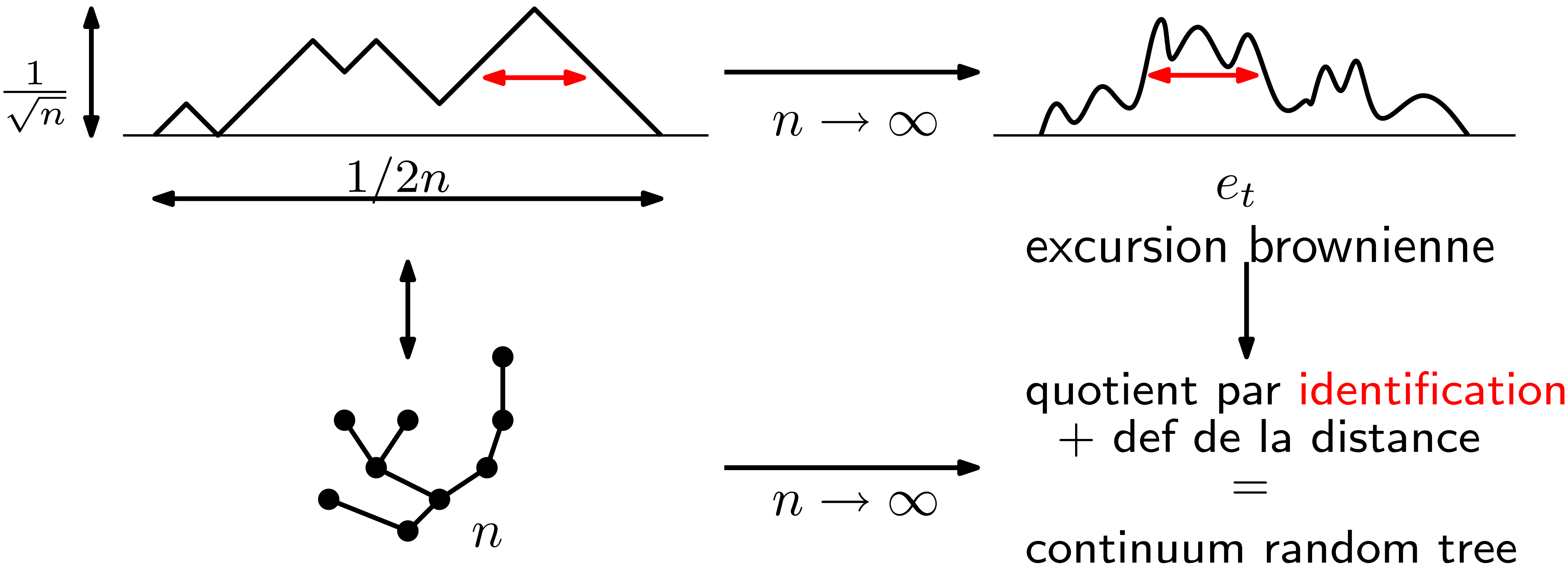
limite continue



limite continue



limite continue

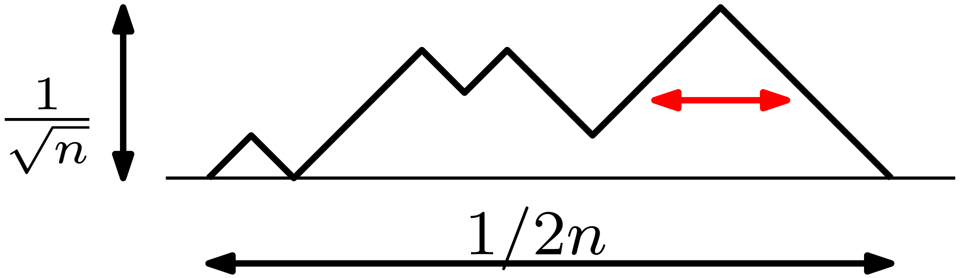


quadrangulation

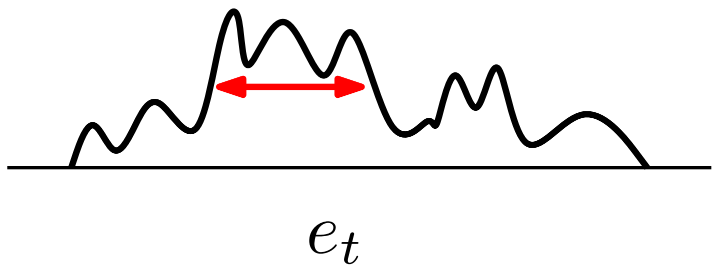
=

recollement de 2 arbres

limite continue

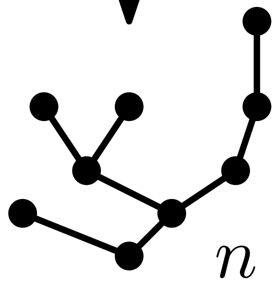


$\xrightarrow[n \to \infty]{}$



excursion brownienne

$\updownarrow$



$\xrightarrow[n \to \infty]{}$

quotient par identification
$+$ def de la distance
$=$
continuum random tree

quadrangulation
$=$
recollement de 2 arbres

$\xrightarrow[n \to \infty]{}$

quotient par identification
après recollement.
$+$ def de la distance
$=$
planar Brownian map

Limites continues pour d'autres recollements d'arbres ?

Extension aux q-angulations ou aux cartes de degrés boltzmanniens

bijection BDFG

Limites continues pour d'autres recollements d'arbres ?

Extension aux q-angulations ou aux cartes de degrés boltzmanniens

bijection BDFG

Extension à d'autres familles de cartes ?

Limites continues pour d'autres recollements d'arbres ?

Extension aux q-angulations ou aux cartes de degrés boltzmanniens

bijection BDFG

Extension à d'autres familles de cartes ?

- cartes contraintes par les degrés ou la girth, master bijections

Limites continues pour d'autres recollements d'arbres ?

Extension aux q-angulations ou aux cartes de degrés boltzmanniens

bijection BDFG

Extension à d'autres familles de cartes ?

- cartes contraintes par les degrés ou la girth, master bijections
- cartes croissantes comme recollement d'arbres de Cayley-Hurwitz ?

arbres de Cayley $\rightarrow$ CRT comme tous les arbres simples

Limites continues pour d'autres recollements d'arbres ?

Extension aux q-angulations ou aux cartes de degrés boltzmanniens
bijection BDFG

Extension à d'autres familles de cartes ?

- cartes contraintes par les degrés ou la girth, master bijections
- cartes croissantes comme recollement d'arbres de Cayley-Hurwitz ?

arbres de Cayley $\longrightarrow$ CRT comme tous les arbres simples

mais *a priori* pas de contrôle des distances dans le recollement limite

l'accès aux distances repose sur le miracle du codage par les étiquettes

Limites continues pour d'autres recollements d'arbres ?

Extension aux q-angulations ou aux cartes de degrés boltzmanniens
bijection BDFG

Extension à d'autres familles de cartes ?

- cartes contraintes par les degrés ou la girth, master bijections
- cartes croissantes comme recollement d'arbres de Cayley-Hurwitz ?

arbres de Cayley $\rightarrow$ CRT comme tous les arbres simples

mais *a priori* pas de contrôle des distances dans le recollement limite

l'accès aux distances repose sur le miracle du codage par les étiquettes

Conjecture : toutes les familles d'exposant $-5/2$ convergent vers la carte Brownienne, y compris les graphes planaires.

Limites continues pour d'autres recollements d'arbres ?

Extension aux q-angulations ou aux cartes de degrés boltzmanniens
bijection BDFG

Extension à d'autres familles de cartes ?

- cartes contraintes par les degrés ou la girth, master bijections
- cartes croissantes comme recollement d'arbres de Cayley-Hurwitz ?

arbres de Cayley $\rightarrow$ CRT comme tous les arbres simples

mais *a priori* pas de contrôle des distances dans le recollement limite

l'accès aux distances repose sur le miracle du codage par les étiquettes

Conjecture : toutes les familles d'exposant $-5/2$ convergent vers la carte Brownienne, y compris les graphes planaires.

utiliser les décompositions par composition de Tutte

Limites continues pour d'autres recollements d'arbres ?

Extension aux q-angulations ou aux cartes de degrés boltzmanniens
bijection BDFG

Extension à d'autres familles de cartes ?

- cartes contraintes par les degrés ou la girth, master bijections
- cartes croissantes comme recollement d'arbres de Cayley-Hurwitz ?

arbres de Cayley $\to$ CRT comme tous les arbres simples

mais *a priori* pas de contrôle des distances dans le recollement limite

l'accès aux distances repose sur le miracle du codage par les étiquettes

Conjecture : toutes les familles d'exposant $-5/2$ convergent vers la carte Brownienne, y compris les graphes planaires.

utiliser les décompositions par composition de Tutte

- cartes boisées, comme recollement de deux arbres

Limites continues pour d'autres recollements d'arbres ?

Extension aux q-angulations ou aux cartes de degrés boltzmanniens

bijection BDFG

Extension à d'autres familles de cartes ?

- cartes contraintes par les degrés ou la girth, master bijections
- cartes croissantes comme recollement d'arbres de Cayley-Hurwitz ?

arbres de Cayley $\rightarrow$ CRT comme tous les arbres simples

mais *a priori* pas de contrôle des distances dans le recollement limite

l'accès aux distances repose sur le miracle du codage par les étiquettes

Conjecture : toutes les familles d'exposant $-5/2$ convergent vers la carte Brownienne, y compris les graphes planaires.

utiliser les décompositions par composition de Tutte

- cartes boisées, comme recollement de deux arbres

là encore on peut définir un recollement limite (Sheffield)

Limites continues pour d'autres recollements d'arbres ?

Extension aux q-angulations ou aux cartes de degrés boltzmanniens
bijection BDFG

Extension à d'autres familles de cartes ?

- cartes contraintes par les degrés ou la girth, master bijections
- cartes croissantes comme recollement d'arbres de Cayley-Hurwitz ?

arbres de Cayley $\rightarrow$ CRT comme tous les arbres simples

mais *a priori* pas de contrôle des distances dans le recollement limite

l'accès aux distances repose sur le miracle du codage par les étiquettes

Conjecture : toutes les familles d'exposant $-5/2$ convergent vers la carte Brownienne, y compris les graphes planaires.

utiliser les décompositions par composition de Tutte

- cartes boisées, comme recollement de deux arbres

là encore on peut définir un recollement limite (Sheffield)

mais pas de contrôle des distances, ni de conjecture...

Limites continues pour d'autres recollements d'arbres ?

Extension aux q-angulations ou aux cartes de degrés boltzmanniens
bijection BDFG

Extension à d'autres familles de cartes ?

- cartes contraintes par les degrés ou la girth, master bijections
- cartes croissantes comme recollement d'arbres de Cayley-Hurwitz ?

arbres de Cayley $\rightarrow$ CRT comme tous les arbres simples

mais *a priori* pas de contrôle des distances dans le recollement limite

l'accès aux distances repose sur le miracle du codage par les étiquettes

Conjecture : toutes les familles d'exposant $-5/2$ convergent vers la carte Brownienne, y compris les graphes planaires.

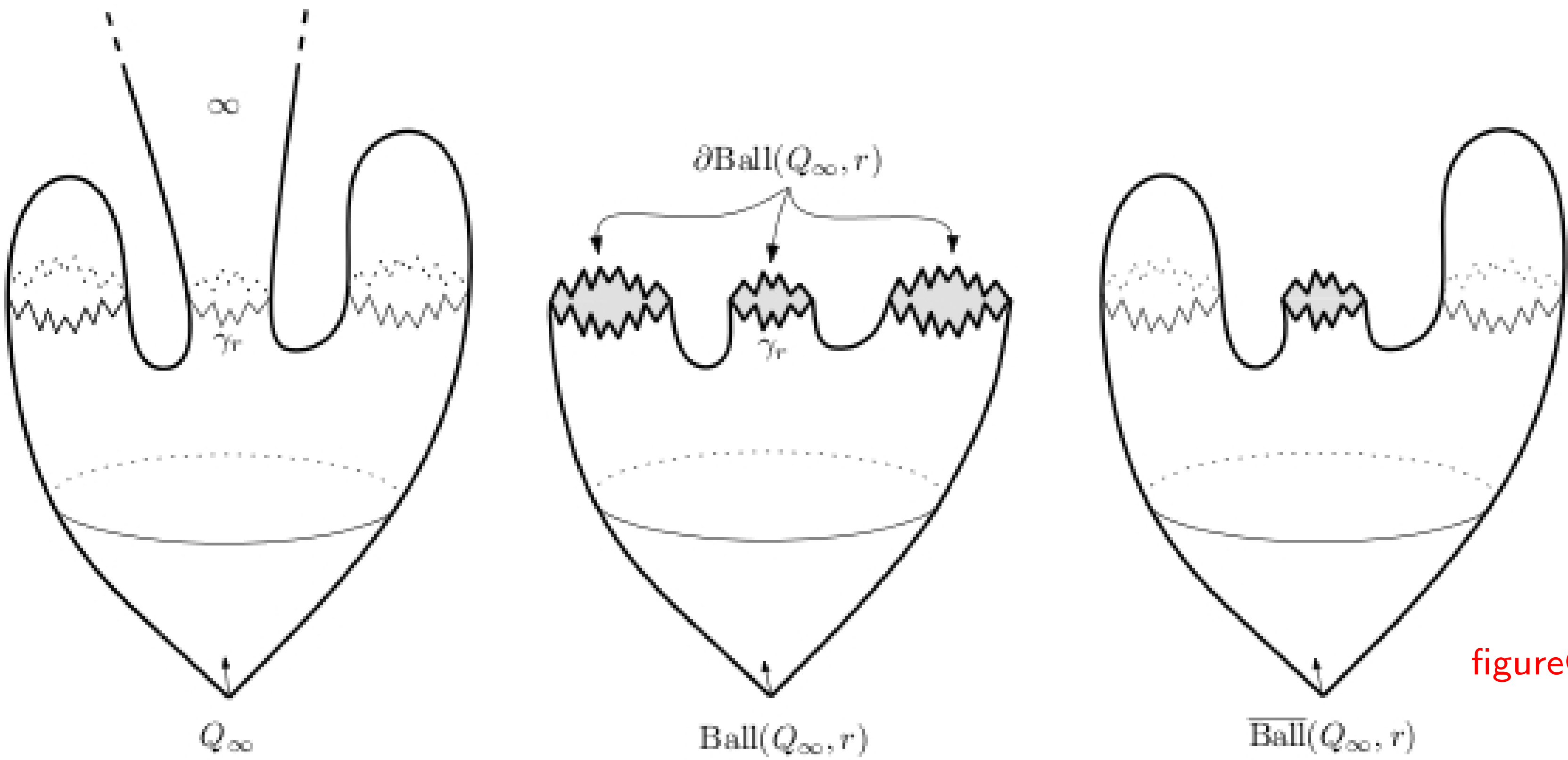
utiliser les décompositions par composition de Tutte

- cartes boisées, comme recollement de deux arbres

là encore on peut définir un recollement limite (Sheffield)

mais pas de contrôle des distances, ni de conjecture...

Limites infinies discrètes



figure@Benjamini-Curien