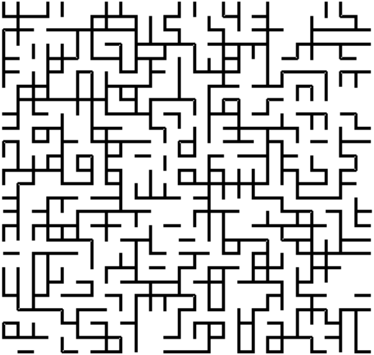
Distances en Percolation et TASEP

Anne-Laure Basdevant, Nathanaël Enriquez, Lucas Gerin
(Paris-Ouest)

Journées Aléa 2012

Percolation dans $\mathbb{Z}^2$

Chaque arête est ouverte/fermée avec proba $p/1-p$.

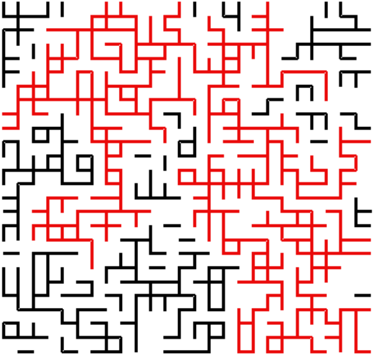


Théorème (Russo + Seymour-Welsh + Kesten (1978-80))

- *Si $p \leq 1/2$, il n'y a pas de composante connexe infinie.*
- *Si $p > 1/2$, il y a une* **unique** *composante connexe infinie.*

Percolation dans $\mathbb{Z}^2$

Chaque arête est ouverte/fermée avec proba $p/1-p$.



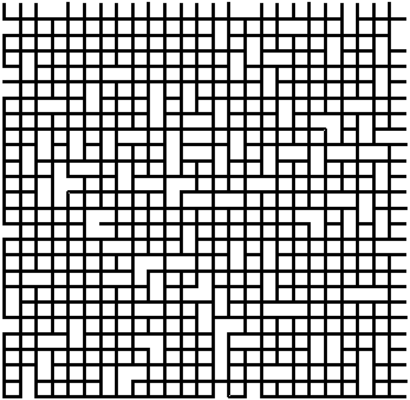
Théorème (Russo + Seymour-Welsh + Kesten (1978-80))

- *Si $p \leq 1/2$, il n'y a pas de composante connexe infinie.*
- *Si $p > 1/2$, il y a une* **unique** *composante connexe infinie.*

Percolation dans $\mathbb{Z}^2$ avec p proche de 1

Question

À quoi ressemble le graphe quand $p \approx 1$?



Percolation dans $\mathbb{Z}^2$ avec p proche de 1

$D_n = \mathrm{Distance}(\mathbf{0}, (n, 0))$ après percolation

Théorème (Basdevant-Enriquez-Gerin)

Lorsque p est proche de 1,

$$\mu_p := \lim_{\substack{n \to \infty \\ \mathbf{0} \leftrightarrow (n,0)}} \frac{D_n}{n} = 1 + \frac{1-p}{2} + \mathrm{o}(1-p).$$

Percolation dans $\mathbb{Z}^2$ avec p proche de 1

$D_n = \mathrm{Distance}(\mathbf{0}, (n, 0))$ après percolation

Théorème (Basdevant-Enriquez-Gerin)

Lorsque p est proche de 1,

$$\mu_p := \lim_{\substack{n\to\infty \\ \mathbf{0}\leftrightarrow(n,0)}} \frac{D_n}{n} = 1 + \frac{1-p}{2} + \mathrm{o}(1-p).$$

[Garet-Marchand 2004] Existence de la limite μ_p.
[Durrett 1982]

$$\mathbb{E}[D_n/n] \leq 1 + (1-p).$$

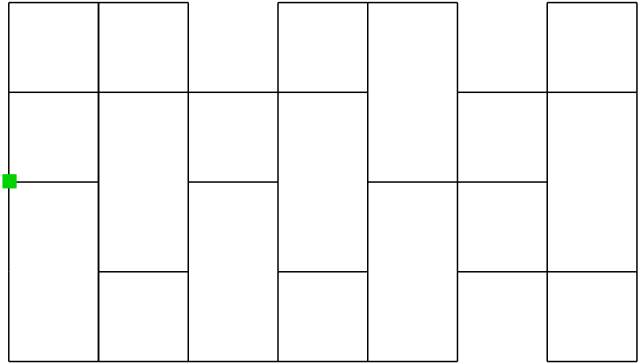
Plan

1. Percolation dans $\mathbb{Z}^2$
2. Le lien avec le TASEP

Distances et particules

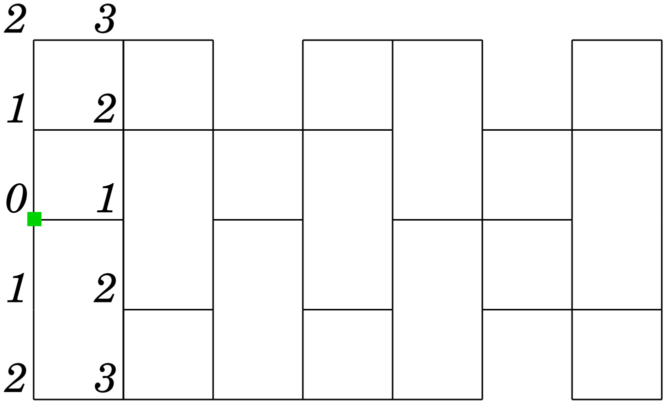
Pour simplifier :

Boîte finie $\{1, \ldots, n\} \times \{-K, \ldots, K\} \oplus$ Arêtes verticales ouvertes.



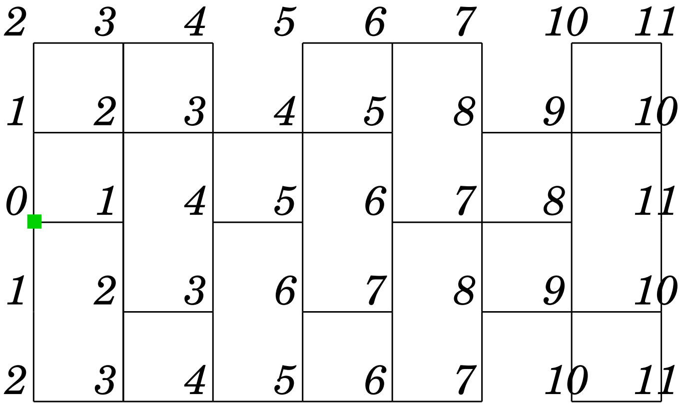
Distances et particules

Pour simplifier :
Boîte finie $\{1, \ldots, n\} \times \{-K, \ldots, K\}$ $\oplus$ Arêtes verticales ouvertes.



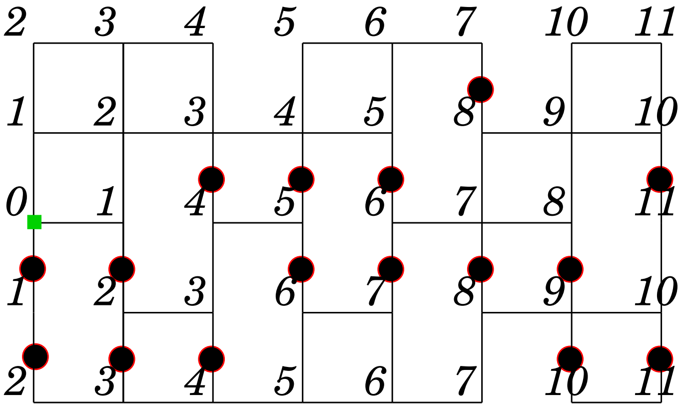
Pour simplifier :

Boîte finie $\{1, \ldots, n\} \times \{-K, \ldots, K\}$ $\oplus$ Arêtes verticales ouvertes.



Distances et particules

Pour simplifier :
Boîte finie $\{1,\ldots,n\}\times\{-K,\ldots,K\}$ $\oplus$ Arêtes verticales ouvertes.

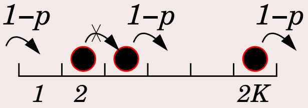


$\longrightarrow$ temps

Le TASEP : *Totally Asymmetric Simple Exclusion Process*

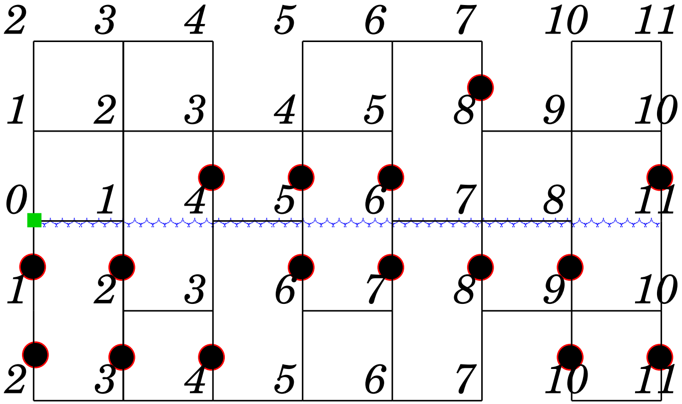
Proposition

Les particules suivent un TASEP (discret, parallèle) de paramètre $1-p$ *sur* $\{1,\ldots,2K\}$ *:*



- En physique, modèle de système *hors équilibre*.
- Liens avec Interfaces 2D & Polymères, Matrices aléatoires,... **[Rost, Johansson, Seppalainen,...]**
- Jolies représentations de la mesure stationnaire **[Evans-Rajewsky-Speer, Duchi-Schaeffer,...]**

La remarque clé



$$D_n = n + 2\ \mathrm{card}\{\text{particules qui ont traversé l'axe}\}.$$

Flot du TASEP

$$D_n = n + 2\ \mathrm{card}\{\text{particules qui ont traversé l'axe}\}.$$

Théorème (Evans,Rajewsky,Speer 1999)

(si n, K grands)
En n instants de temps, environ $n\frac{1-p}{4}$ particules ont traversé l'axe.

Conséquence :

$$\frac{D_n}{n} \approx 1 + 2\frac{1-p}{4}.$$

Pour faire une vraie preuve

- ☺ $K, n \to \infty$
- ☺ Arêtes verticales fermées.
- ☹ Colonne **intégralement** fermée dans une boîte.

A.-L.Basdevant, N.Enriquez, L.Gerin
Distances in the highly supercritical percolation cluster (2011).