Chemins de Dyck généralisés

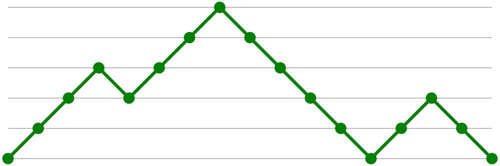
Axel Bacher

LIX

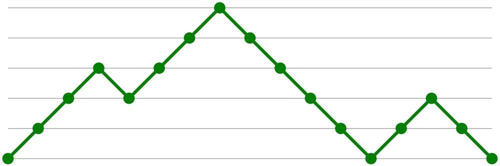
9 mars 2012

Sommaire

Chemins de Dyck



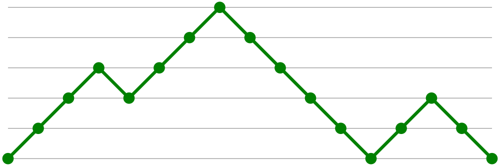
Chemins de Dyck



- Soit $E(t)$ la série génératrice des excursions :

$$E(t) = \sum_{\omega} t^{|\omega|}.$$

Chemins de Dyck



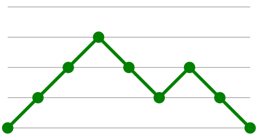
- Soit $E(t)$ la série génératrice des excursions :

$$E(t) = \sum_{\omega} t^{|\omega|}.$$

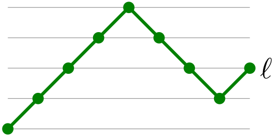
- Cette série vérifie l'équation fonctionnelle :

$$1 - E(t) + t^2 E(t)^2 = 0.$$

Chemins de Dyck de hauteur bornée

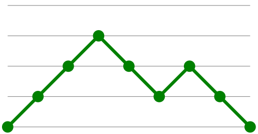


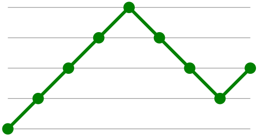
$$E_k(t) = \frac{F_k(t)}{F_{k+1}(t)}$$



$$E_{k,\ell}(t) = \frac{t^\ell F_{k-\ell}(t)}{F_{k+1}(t)}$$

Chemins de Dyck de hauteur bornée





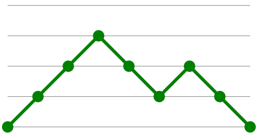
$$E_k(t) = \frac{F_k(t)}{F_{k+1}(t)}$$

$$E_{k,\ell}(t) = \frac{t^\ell F_{k-\ell}(t)}{F_{k+1}(t)}$$

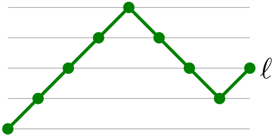
- Les $F_k(t)$ sont les polynômes de Fibonacci :

$$F_0(t) = F_1(t) = 1; \qquad F_k(t) = F_{k-1}(t) - t^2 F_{k-2}(t).$$

Chemins de Dyck de hauteur bornée



$$E_k(t) = \frac{F_k(t)}{F_{k+1}(t)}$$



$$E_{k,\ell}(t) = \frac{t^\ell F_{k-\ell}(t)}{F_{k+1}(t)}$$

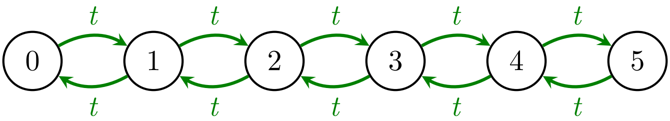
- Les $F_k(t)$ sont les polynômes de Fibonacci :

$$F_0(t) = F_1(t) = 1; \qquad F_k(t) = F_{k-1}(t) - t^2 F_{k-2}(t).$$

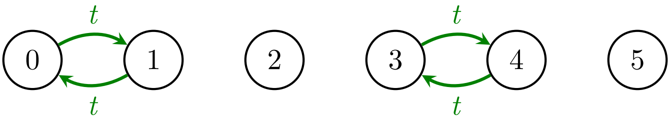
- Leur série génératrice est :

$$\sum_{k\geqslant 0} F_k(t) z^k = \frac{1}{1 - z + t^2 z^2}.$$

Automate des hauteurs



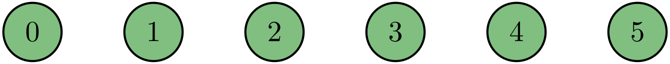
Automate des hauteurs



- $F_k(t)$ compte les configurations de cycles élémentaires :

$$F_k(t) = \sum_{\gamma_1,\ldots,\gamma_r} (-1)^r t^{2r}.$$

Automate des hauteurs



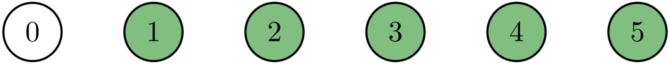
- $F_k(t)$ compte les configurations de cycles élémentaires :

$$F_k(t) = \sum_{\gamma_1,\dots,\gamma_r} (-1)^r t^{2r}.$$

- Il vérifie la relation de récurrence :

$$F_k(t) =$$

Automate des hauteurs



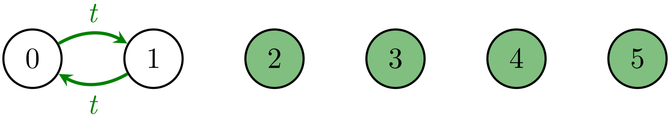
- $F_k(t)$ compte les configurations de cycles élémentaires :

$$F_k(t) = \sum_{\gamma_1, \ldots, \gamma_r} (-1)^r t^{2r}.$$

- Il vérifie la relation de récurrence :

$$F_k(t) = F_{k-1}(t)$$

Automate des hauteurs



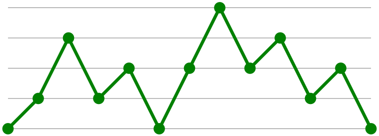
- $F_k(t)$ compte les configurations de cycles élémentaires :

$$F_k(t) = \sum_{\gamma_1, \ldots, \gamma_r} (-1)^r t^{2r}.$$

- Il vérifie la relation de récurrence :

$$F_k(t) = F_{k-1}(t) - t^2 F_{k-2}(t).$$

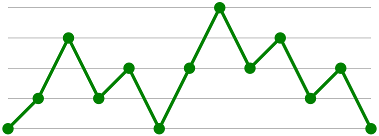
État de l'art



[Duchon 2000, Banderier–Flajolet 2002, Bousquet-Mélou 2008, Bousquet-Mélou–Ponty 2008]

- On se donne un ensemble de pas, ici : $S = \{-2, 1, 2\}$.

État de l'art

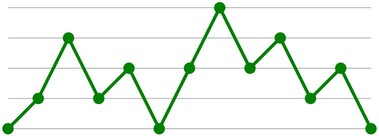


[Duchon 2000, Banderier–Flajolet 2002, Bousquet-Mélou 2008, Bousquet-Mélou–Ponty 2008]

- On se donne un ensemble de pas, ici : $S = \{-2, 1, 2\}$.
- Les séries $E_k(t)$ sont de la forme :

$$E_k(t) = \frac{F_k(t)}{F_{k+1}(t)}.$$

État de l'art



[Duchon 2000, Banderier–Flajolet 2002, Bousquet-Mélou 2008, Bousquet-Mélou–Ponty 2008]

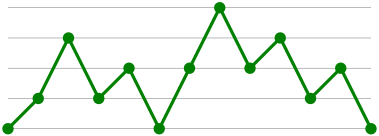
- On se donne un ensemble de pas, ici : $S = \{-2, 1, 2\}$.
- Les séries $E_k(t)$ sont de la forme :

$$E_k(t) = \frac{F_k(t)}{F_{k+1}(t)}.$$

- Les polynômes $F_k(t)$ vérifient :

$$\sum_{k \geqslant 0} F_k(t) z^k = \frac{N(z)}{D(z)}.$$

État de l'art



[Duchon 2000, Banderier–Flajolet 2002, Bousquet-Mélou 2008, Bousquet-Mélou–Ponty 2008]

- On se donne un ensemble de pas, ici : $S = \{-2, 1, 2\}$.
- Les séries $E_k(t)$ sont de la forme :

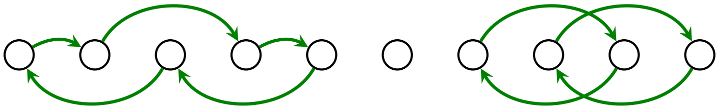
$$E_k(t) = \frac{F_k(t)}{F_{k+1}(t)}.$$

- Les polynômes $F_k(t)$ vérifient :

$$\sum_{k \geqslant 0} F_k(t) z^k = \frac{N(z)}{D(z)}.$$

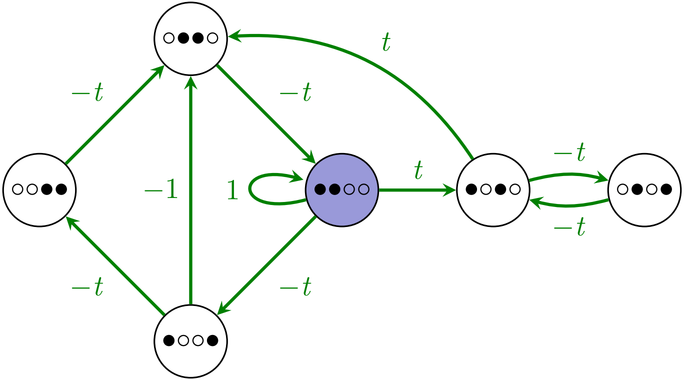
- La série $E(t)$ des excursions vérifie $D(E(t)) = 0$.

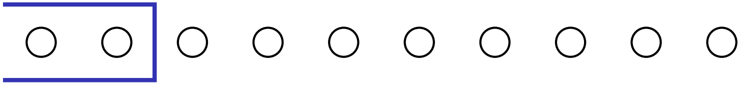
Construction des configurations de cycles



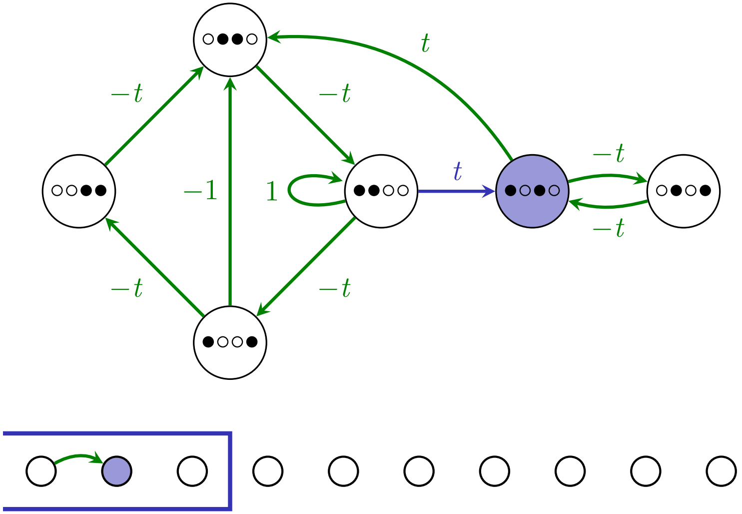
- Comment construire ces configurations ?

Matrice de transfert

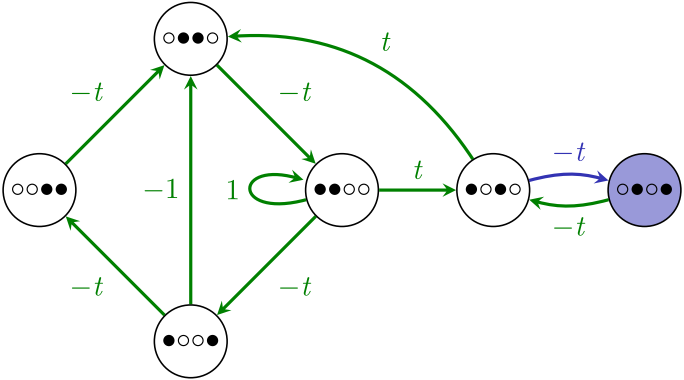


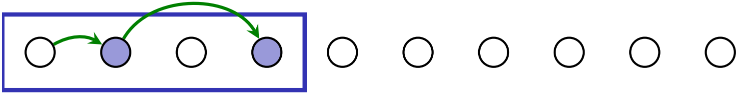


Matrice de transfert

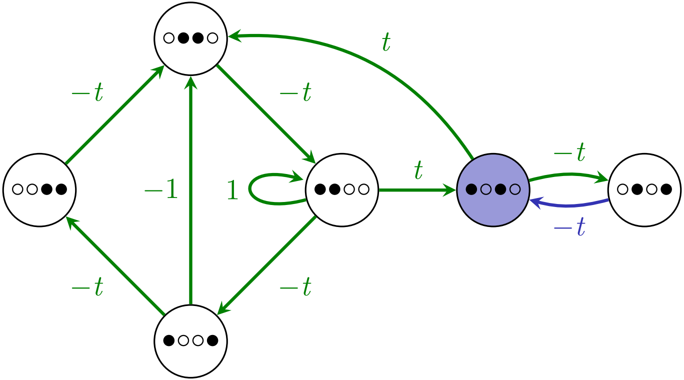


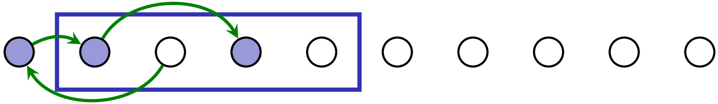
Matrice de transfert



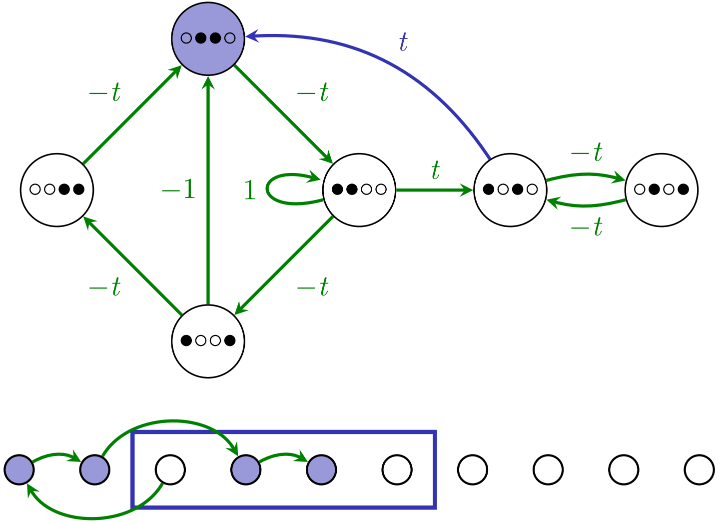


Matrice de transfert

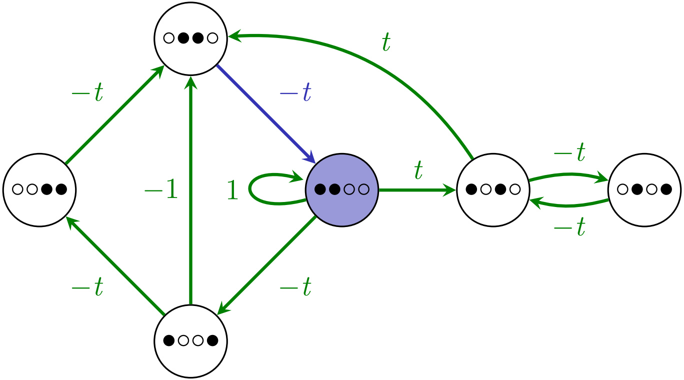


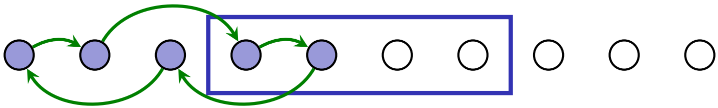


Matrice de transfert

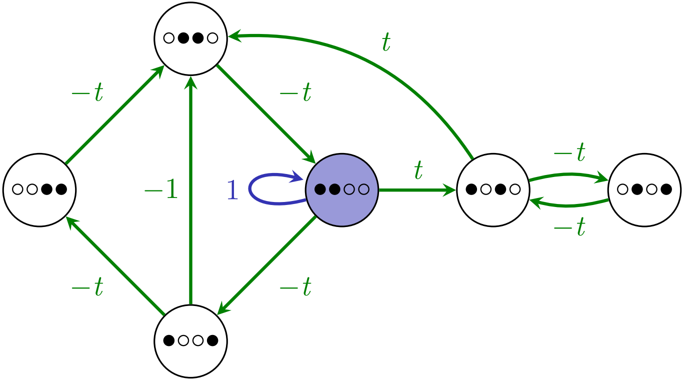


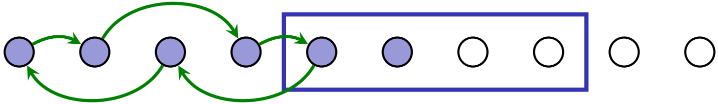
Matrice de transfert



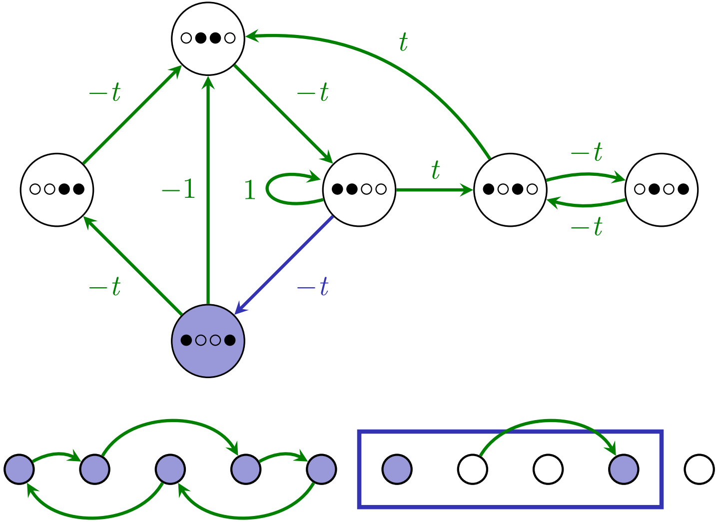


Matrice de transfert

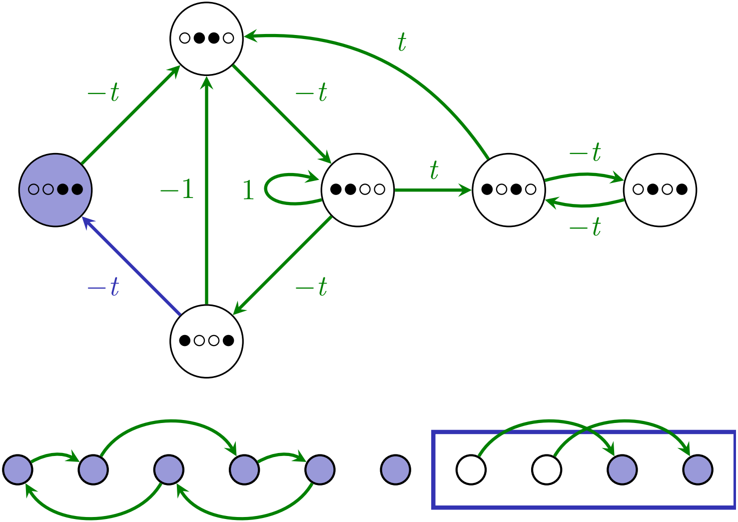




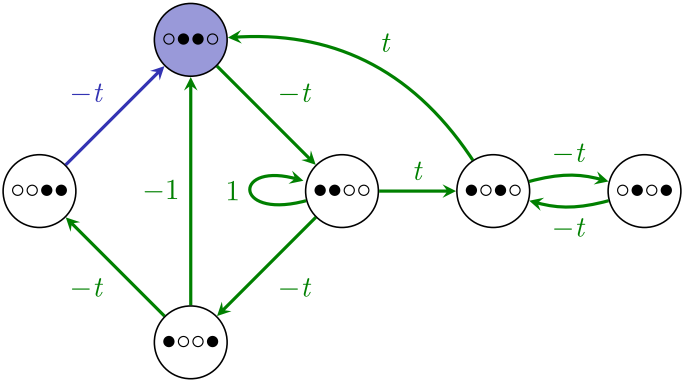
Matrice de transfert

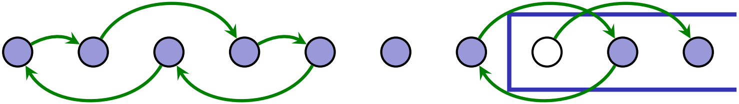


Matrice de transfert

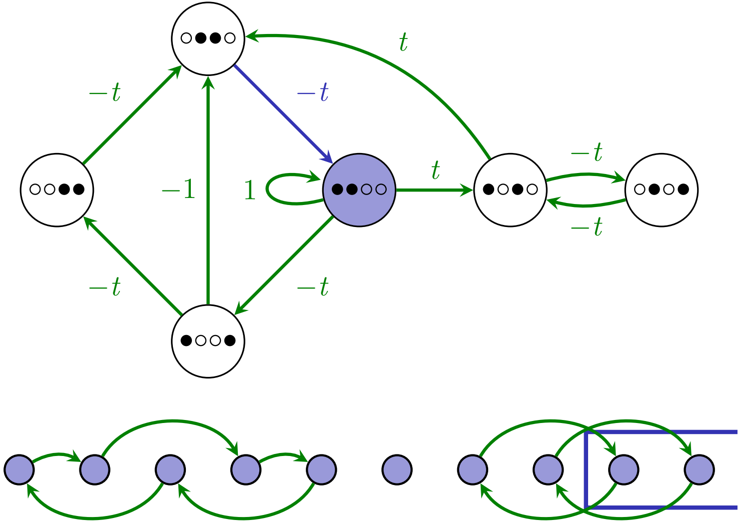


Matrice de transfert

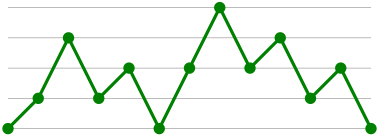




Matrice de transfert



Conséquences

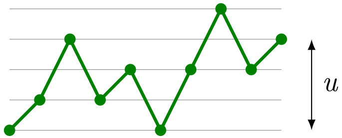


- Si $S \subseteq [-b, a]$, la matrice a pour dimension $\binom{a+b}{a}$.
- Les polynômes $F_k(t)$ sont donnés par :

$$\sum_{k \geqslant 0} F_k(t) z^k = \frac{N(z)}{D(z)},$$

avec $\deg D = \binom{a+b}{a}$ [Bousquet-Mélou 2008].

Méandres



- La série des méandres de hauteur au plus k vaut :

$$M_k(t,u) = \frac{G_k(t,u)}{F_{k+1}(t)}, \text{ avec}$$

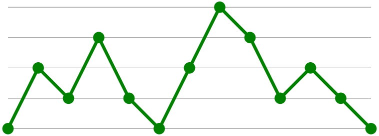
$$\sum_{k \geqslant \ell \geqslant 0} G_k(t,u) z^k = \frac{\widetilde{N}(u,z)}{\widetilde{D}(uz) D(z)}.$$

- La série des méandres non bornés est :

$$M(t,u) = \frac{\widetilde{N}(u, E(t))}{\widetilde{D}(uE(t)) N(E(t))} E(t).$$

- Une autre matrice de transfert est impliquée.

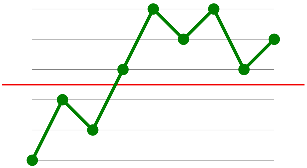
État de l'art



[Bousquet-Mélou 2008]

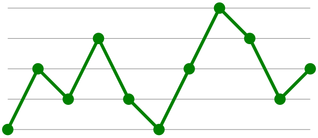
- On considère le cas où l'ensemble S est symétrique (ici, $S = \{-2, -1, 1, 2\}$).
- La série $E(t)$ vérifie $D_0(E(t)) = 0$, avec $\deg D_0 = 2^a$.

Minimisation de l'automate des hauteurs



- On peut se souvenir non pas de la hauteur, mais seulement de la distance au mur le plus proche.

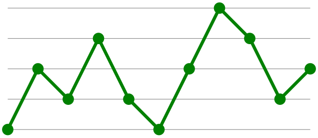
Conséquences



- Le polynôme $F_k(t)$ se factorise :

$$F_k(t) = F_k^+(t) F_k^-(t).$$

Conséquences

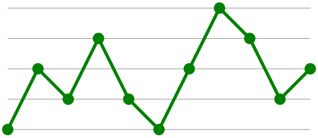


- Le polynôme $F_k(t)$ se factorise :

$$F_k(t) = F_k^+(t) F_k^-(t).$$

- La série $M_k(t)$ des méandres de hauteur k a pour dénominateur $F_{k+1}^+(t)$.

Conséquences



- Le polynôme $F_k(t)$ se factorise :

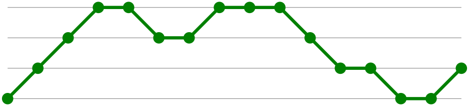
$$F_k(t) = F_k^+(t) F_k^-(t).$$

- La série $M_k(t)$ des méandres de hauteur k a pour dénominateur $F_{k+1}^+(t)$.
- Les quatre suites

$$\left(F_{2k}^+(t)\right)_k, \quad \left(F_{2k}^-(t)\right)_k, \quad \left(F_{2k+1}^+(t)\right)_k, \quad \left(F_{2k+1}^-(t)\right)_k$$

vérifient l'équation de récurrence des $F_k(t)$.

Perspectives



- Peut-on énumérer directement les excursions et méandres non bornés ?
- Quels liens entre cette méthode et l'énumération par fonctions symétriques ?
- Comment trouver le polynôme annulateur $D_0(t)$?
- Peut-on étudier des classes de chemins plus générales ?