

T.D. 3 NP-Complétude

Exercice 1

Montrer que les problèmes suivants sont NP-complets :

1. Une clique dans un graphe non orienté G , est un sous-ensemble de sommets qui forme un graphe complet (toutes les arêtes sont présentes). Le problème CLIQUE est de savoir, étant donné G et k s'il existe une clique de k sommets dans G .
Indication : On montrera que $3\text{-SAT} \leq_P \text{CLIQUE}$
2. Une couverture de sommet d'un graphe non orienté G est un sous-ensemble de sommets S' tel que toutes les arêtes du graphe ont au moins une extrémité dans S' . Le problème VERTEX-COVER est de savoir, étant donné G et k s'il existe une couverture de k sommets dans G .
Indication : On montrera que $\text{CLIQUE} \leq_P \text{VERTEX-COVER}$
3. Un ensemble indépendant d'un graphe non orienté G est un sous-ensemble de sommets S' tel que il n'y a aucune arête reliant les sommets de S' . Le problème INDEPENDENT-SET est de savoir, étant donné G et k s'il existe un ensemble indépendant de k sommets dans G .
Indication : On montrera que $\text{CLIQUE} \leq_P \text{INDEPENDENT-SET}$
4. On se donne un sous-ensemble fini $E \subset \mathbb{N}$ et une cible $c \in \mathbb{N}$, Le problème SUBSUM-SET est de savoir, étant donné E et t s'il existe un sous ensemble E' de E tel que $\sum_{x \in E'} x = c$.
Indication : On montrera que $\text{VERTEX-COVER} \leq_P \text{SUBSUM-SET}$.
5. Un couplage triparti d'un graphe non orienté G est un sous-ensemble de sommets S' tel que il n'y a aucune arête reliant les sommets de S' . Le problème INDEPENDENT-SET est de savoir, étant donné G et k s'il existe un ensemble indépendant de k sommets dans G .
Indication : On montrera que $\text{CLIQUE} \leq_P \text{INDEPENDENT-SET}$
6. Soit E un ensemble fini et $A \in E^3$, le problème 3D-MATCHING consiste à trouver un sous-ensemble de A tel que pour tout $x \in E$, x appartient exactement à un seul triplet de A . Indication : On montrera que $3\text{-SAT} \leq_P 3\text{D-MATCHING}$.
7. Soit M une matrice $m \times n$ de 0-1. Le problème ZOE consiste à trouver un vecteur v en 0-1 tel que $Mv = (1, \dots, 1)$. Indication : On montrera que $3\text{D-MATCHING} \leq_P \text{ZOE}$.