T.D. 5 Analyse de complexité.

Exercice 1

1. Déterminer le nombre d'opérations + effectuées par l'algorithme (stupide) suivant sur l'entrée n :

Algorithme 1 : FIBO

Entrées : Un entier positif n.
Sorties : Le n-ième nombre de Fibonacci.

FIBO(n)
si $n < 2$ **alors**
  retourner n
sinon
  retourner $FIBO(n-1)+FIBO(n-2)$

Exercice 2

Considérons un algorithme A qui pour résoudre un problème de taille n, appelle récursivement 2 fois A sur des instances de taille $n-1$ et effectue 2^n comparaisons pour reconstruire la solution à partir des 2 sous-solutions.Sur une instance de taille 0, l'algorithme ne fait aucune opération.

1. Donner la récurrence pour C_n le nombre de comparaisons que fait l'algorithme pour une instance de taille n.
2. Quelle est la série génératrice $C(z)$ de C_n.
3. En déduire une expression close pour C_n.

Exercice 3

1. Montrer que le nombre moyen C_n de comparaisons effectué par QuickSort pour trier une instance de taille n vérifie $C_0 = 0$ et $C_n = n + 1 + \sum_{1 \le k \le n} \frac{1}{n}(C_{k-1} + C_{n-k})$
2. En déduire que la série génératrice $C(z)$ de C_n, vérifie :$C'(z) = \dfrac{2}{(1-z)^3} + 2\dfrac{C(z)}{1-z}$
3. En déduire que $C_n = 2(n+1)(H_{n+1} - 1)$ où $H_n = \sum_{1 \le k \le n} \dfrac{1}{k}$.
4. On admet que $H_n = \ln(n) + \gamma + \dfrac{1}{2n} - \dfrac{1}{12n^2} + O(\dfrac{1}{n^3})$, en déduire, le comportement moyen asymtoptique de QuickSort.