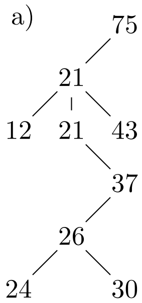
Examen d'Algorithmes et Arbres

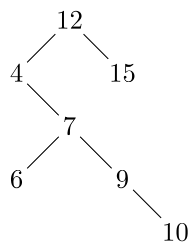
Durée : 2h, polycopiés et calculatrices autorisés, téléphones interdits.
Barème donné à titre indicatif.

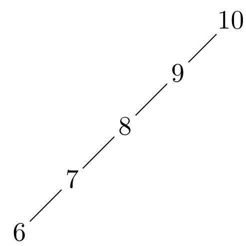
Exercice 1 : Théorème maître (2 points)
1) Peut-on appliquer le théorème maître à la récurrence suivante :
a) $u(n) = 10\,u(\lfloor n/2 \rfloor) + \ln(\ln(n(2+\cos(n))))$
b) $v(n) = v(\lceil n/2 \rceil) + \exp(n)$
2) Dans les cas où le théorème maître s'applique, donner le comportement asymptotique des suites.

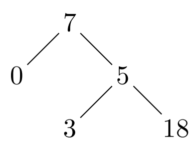
Exercice 2 : Arbres binaires (2 points)
1) Donner une définition récursive du nombre de nœuds ayant un seul fils (gauche ou droit) d'un arbre binaire.
2) En déduire un algorithme qui prend un arbre binaire en entrée et renvoie son nombre de nœuds ayant un seul fils.

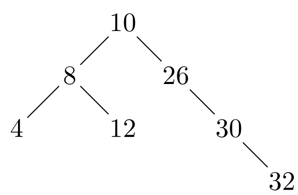
Exercice 3 : Arbres binaires de recherche (5 points)
1) Lesquels de ces arbres ne sont pas des arbres binaires de recherche ? Justifier brièvement.

a)


b)


c)


d)


e)


2) Dessiner l'ABR obtenu en insérant successivement $1, 4, 2, 11, 19, 5, 3, 10$ et 8. Dessiner l'ABR obtenu en supprimant 2 puis 11 de l'arbre obtenu précédemment.
3*) Donner un algorithme qui prend un arbre binaire en entrée et qui revoie VRAI si c'est un arbre binaire de recherche et FAUX sinon.

Exercice 4 : Diviser pour régner (5 points)

Soit $A[1..n]$ un tableau de n entiers différents triés par ordre croissant : pour tout $1 \leq i \leq n$ on a $A[i] < A[i+1]$. Un point fixe de A est un indice i tel que $A[i] = i$.
Par exemple, le tableau $[-12, 1, 3, 4, 8, 9]$ a deux points fixes : 3 et 4.

1) Donner un algorithme linéaire permettant de connaître le nombre de points fixes d'un tableau A de taille n.
2) Donner un algorithme efficace de type diviser pour régner qui renvoie VRAI si le tableau a au moins un point fixe et FAUX sinon. Quelle est sa complexité en nombre de comparaisons ?
3*) On donne un tableau A et un point fixe de ce tableau i. Comment peut-on décider en temps constant s'il existe un autre point fixe ?

Exercice 5 : Programmation dynamique (5 points)
Soit $M[1..n, 1..m]$ un tableau contenant nm entiers. On cherche le plus long chemin strictement croissant qui part de la position $(1, 1)$ et qui n'utilise que des pas $(i, j) \mapsto (i+1, j)$ et $(i, j) \mapsto (i, j+1)$.
1) Trouver le plus long chemin croissant dans le tableau suivant (la case (1,1) est la case en bas à gauche) :

1	4	5
2	3	2
1	4	3

2) Soit $C(i, j)$ la longueur maximale d'un chemin croissant arrivant en (i, j). Donner une récurrence de type programmation dynamique pour $C(i, j)$.
3) En déduire un algorithme récursif pour calculer $C(i, j)$.
4) Quelle est sa complexité en nombre de comparaisons ?

***Exercice 6 : ABR** (4 points)
1) Montrer que l'ordre infixe des clés d'un ABR est l'ordre croissant sur ces clés.
2) Donner un algorithme qui étant donné un ABR A et un entier x donne la position de x dans l'ordre croissant sans écrire cet ordre.