

Partiel Algorithmes et complexité
Tout document autorisé, Durée : 2h

Exercice 1

1. Quelle est la série génératrice associée à la suite $u_n = 2^n$.
2. Quelle est la série génératrice associée à la suite $v_n = n2^n$.
3. En déduire la série génératrice associée à la suite $w_0 = 0$ et $\forall n > 0, w_n = 3w_{n-1} + n2^n$.
4. Décomposer en éléments simples la fraction $\frac{2z}{(1-3z)(1-2z)^2}$.
5. En déduire une forme close pour w_n .
6. Donner un équivalent asymptotique pour w_n quand $n \rightarrow \infty$.

Exercice 2

Décrire une machine de Turing qui prend un mot sur $\{0, 1\}^*$ et qui renvoie le mot ayant subi un shift circulaire gauche et qui s'arrête dans un état d'acceptation. Exemple : 1000101 devient 0001011 (le premier 1 passe à la fin).

Exercice 3

Soit E un ensemble d'entiers naturels, le problème ZERO-SUBSET-SUM consiste à décider s'il existe un sous-ensemble non vide de E de somme nulle.

1. Montrer que $\text{ZERO-SUBSET-SUM} \leq_P \text{SUBSET-SUM}$.
2. Montrer que $\text{PARTITION} \leq_P \text{ZERO-SUBSET-SUM}$ (On rappelle que PARTITION consiste à décider si un ensemble E de nombres entiers strictement positifs est partitionnable en deux sous-ensembles de même somme.)