

**Partiel Algorithmes et complexité**  
**Tout document autorisé, Durée : 2h**

## Exercice 1

1. Quelle est la série génératrice associée à la suite  $u_n = 2^n$ .
2. Quelle est la série génératrice associée à la suite  $v_n = n2^n$ .
3. En déduire la série génératrice associée à la suite  $w_0 = 0$  et  $\forall n > 0, w_n = 3w_{n-1} + n2^n$ .
4. Décomposer en éléments simples la fraction  $\frac{2z}{(1-3z)(1-2z)^2}$ .
5. En déduire une forme close pour  $w_n$ .
6. Donner un équivalent asymptotique pour  $w_n$  quand  $n \rightarrow \infty$ .

## Exercice 2

Décrire une machine de Turing qui prend un mot sur  $\{0, 1\}^*$  et qui renvoie le mot ayant subi un shift circulaire gauche et qui s'arrête dans un état d'acceptation. Exemple : 1000101 devient 0001011 (le premier 1 passe à la fin).

## Exercice 3

Soit  $E$  un ensemble d'entiers naturels, le problème ZERO-SUBSET-SUM consiste à décider s'il existe un sous-ensemble non vide de  $E$  de somme nulle.

1. Montrer que  $\text{ZERO-SUBSET-SUM} \leq_P \text{SUBSET-SUM}$ .
2. Montrer que  $\text{PARTITION} \leq_P \text{ZERO-SUBSET-SUM}$  (On rappelle que PARTITION consiste à décider si un ensemble  $E$  de nombres entiers strictement positifs est partitionnable en deux sous-ensembles de même somme.)