

Partiel Algorithmes et complexité
Tout document autorisé, Durée : 2h

Exercice 1

1. Dans le cadre de la preuve que $SAT \leq_P 3SAT$, donner en expliquant brièvement la formule de 3-SAT qui est équivalente en termes de satisfaisabilité à la formule $(\bar{x} \vee \bar{z}) \wedge (x \vee y \vee z \vee w)$ de SAT.
2. Dans le cadre de la preuve que $3SAT \leq_P CLIQUE$, donner en expliquant brièvement le graphe sur lequel le problème de la clique permet de résoudre la satisfaisabilité de $(x \vee \bar{y} \vee \bar{z}) \wedge (\bar{x} \vee y \vee z) \wedge (x \vee y \vee z)$.

Exercice 2

1. Décrire (dessin + explication sur 5 lignes maximum) une machine de Turing qui prend un mot m sur $\{0, 1\}^*$ et qui s'arrête dans un état d'acceptation si et seulement si m contient le facteur (motif) 00 exactement une fois. Par exemple, les mots 01011110 ou 100011 ne sont pas acceptés, mais 100111 oui.
2. Décrire (dessin + explication sur 5 lignes maximum) une machine de Turing qui prend un mot m sur $\{0, 1\}^*$ et qui s'arrête dans un état d'acceptation si et seulement si m contient le facteur (motif) 00 exactement deux fois. Par exemple, les mots 01011110 ou 10011 ne sont pas acceptés, mais 1000111 ou 1001001 oui.
3. Décrire (dessin + explication sur 5 lignes maximum) une machine de Turing qui prend un mot m sur $\{0, 1\}^*$ et qui s'arrête dans un état d'acceptation si et seulement si m a autant de 0 que de 1.

Exercice 3

On rappelle que PARTITION consiste à décider si un ensemble E de nombres entiers strictement positifs est partitionnable en deux sous-ensembles de même somme. Ce problème est NP-complet. On appelle n -PARTITION le problème consistant à décider si un ensemble E de nombres entiers strictement positifs est partitionnable en n sous-ensembles de même somme.

1. Montrer que $PARTITION \leq_P 3$ -PARTITION, en déduire que 3-PARTITION est NP-complet.
2. Montrer que n -PARTITION $\leq_P (n + 1)$ -PARTITION, en déduire que pour tout $n > 1$, n -PARTITION est NP-complet.
3. Montrer que 4-PARTITION \leq_P PARTITION (On pourra remarquer que pour tout $a > 0$, $E' \subset E$ vérifie $\sum_{E'} x = \sum_{E \setminus E'} x$ si et seulement si $\sum_{E'} ax = \sum_{E \setminus E'} ax$).
4. En déduire que 3-PARTITION \leq_P PARTITION.