Institut Galilée

Licence 2 Informatique
Avril 2015

TD : algorithmes gloutons

1 Egypte

On appelle fraction égyptienne une fraction de la forme $\frac{1}{n}$ avec $n \in \mathbb{N}^*$.

Q1.1 Soient a et b deux entiers (premiers entre eux) tels que $a < b$. Donner l'expression de la fraction égyptienne la plus grande parmi les fractions égyptiennes strictement plus petites que $\frac{a}{b}$ et l'expression de leur différence.

Q1.2 On considère l'algorithme suivant :

```
function EGYPTE(a, b)                    ▷ (a, b) est un couple d'entiers avec a < b
    c ← a
    a ← numer(c/b)
    b ← denom(c/b)
    if a = 1 then
        return b
    else
        c ← a − b mod a
        d ← b div a + 1
        return (d, EGYPTE(c, b × d))
    end if
end function
```

Quelle est la sortie de l'algorithme avec l'entrée $(a, b) = (2, 2n + 1)$ où $n > 0$?

Q1.3 Quel est le rôle de cet algorithme ? Démontrer.

Q1.4 L'algorithme glouton proposé donne-t-il une décomposition en somme de fractions égyptiennes avec le minimum de termes possibles ?

2 Les épreuves dans le gymnase

Dans un gymnase doivent se dérouler une série d'épreuves. Les épreuves ne sont pas seulement caractérisées par leurs durées : chaque épreuve est caractérisée par une date de début d_i et une date de fin f_i. On souhaite "caser" le plus possible d'épreuves, deux épreuves ne pouvant avoir lieu en même temps (leurs intervalles de temps doivent être disjoints).

Glouton 1. On trie les épreuves par durée croissante, on choisit la plus courte, puis la plus courte parmi celles qui lui sont compatibles, puis ... Ce choix mène-t-il au déroulement d'un nombre d'épreuves maximal ?

Glouton 2. On trie les événements par dates de commencement croissantes et on gloutonne : on choisit l'événement commençant le plus tôt, puis le plus tôt parmi les événements compatibles ... Même question.

Glouton 3. On trie cette fois les événements par nombre d'intersections croissant : on choisit d'abord celui qui intersecte le moins d'événements, puis... Même question.

Glouton 4. On trie les événements par dates de fin croissantes et on gloutonne : on choisit l'épreuve se terminant au plus tôt, puis l'épreuve se terminant au plus tôt parmi celles qui sont compatibles à la première... Même question.

3 Monnaie

Comment rendre une somme donné avec le minimum de pièces. Nous regarderons tout d'abord notre système monétaire : des pièces de 1, 2, 5, 10, 50, 100, 200.

Q3.1 Comment rendre 263 centimes d'euros ?

Q3.2 Trouvez un algorithme glouton pour ce problème.

Q3.3 Montrez que cet algorithme est optimal.

Q3.4 Qu'est ce qui se passe si les pièces ont comme valeur 1, 3, 4 ? Comment rendre la somme de 6 ?

4 Un problème d'ordonnancement

Étant donné un ensemble $E = \{1, 2, \ldots, n\}$ de taches unitaires (toutes ont pour durée une unité de temps) de dates échues $d_1, d_2, \ldots, d_n$ avec $1 \leq d_1 \leq d_2 \leq \ldots \leq d_n \leq n$ et de pénalités $w_1, w_2, \ldots, w_n$, on cherche un ordonnancement des taches $1, 2, ..., n$ qui minimise le cumul des pénalités pour non respect des dates échues.
Un ordonnancement est une permutation des taches $1, \ldots, n$. Un ensemble de taches F est indépendant s'il existe un ordonnancement des taches de F tel qu'aucune ne soit en retard sur sa date échue.

Q4.1 Montrez que le calcul d'un ordonnancement optimal équivaut à trouver un ensemble indépendant de taches de E dont la somme des pénalités soit le plus grand possible.

Q4.2 Soit i une tache de pénalité maximale. Existe-t-il un ensemble indépendant optimal qui contient i ?

Q4.3 En déduire une méthode glouton qui fournit une solution optimale.

5 Le coût de la non panne sèche

Le professeur Bell conduit une voiture entre Amsterdam et Lisbonne sur l'autoroute E10. Son réservoir, quand il est plein, contient assez d'essence pour faire n kilomètres, et sa carte lui donne les distances entre les stations-service sur la route.

Q5.1 Donnez une méthode efficace grâce à laquelle Joseph Bell pourra déterminer les stations-service où il peut s'arrêter, sachant qu'il souhaite faire le moins d'arrêts possible.

Q5.2 Démontrez que votre stratégie est optimale.

6 Bipartition

Étant donné un ensemble de n nombres, répartissez les en 2 sous-ensembles tels que la somme des éléments du premier soit égal à la somme des éléments du second. Proposez des algorithmes gloutons pour résoudre ce problème. Appliquez les aux ensembles suivants :

$$\{2, 10, 3, 8, 5, 7, 9, 5, 3, 2\}$$

$$\{771, 121, 281, 854, 885, 734, 486, 1003, 83, 62\}$$