Université Paris 13 — INFO2 - MI1
Institut Galilée — Année 2011-2012

Devoir de vacances de Programmation Linéaire
(Correction)

À faire pour le 03 Janvier 2012

Soit le programme linéaire :

$$(P)\left\{\begin{array}{lllllll} \max & 6x_1 & + & 4x_2 & & & \\ \text{s.c} & 4x_1 & + & 5x_2 & \leq & 15 & (1) \\ & \frac{1}{2}x_1 & + & x_2 & \geq & 1 & (2) \\ & 4x_1 & + & x_2 & \leq & 12 & (3) \\ & 2x_1 & + & x_2 & \geq & 2 & (4) \\ & x_1 & , & x_2 & \geq & 0 & \end{array}\right.$$

Les exercices se rapportent tous au programme linéaire (P) Néanmoins ils sont indépendants et peuvent être traités dans n'importe quel ordre.

Exercice 1 **Forme canonique, forme standard et dual** *(2 points)*

1. Mettre le programme linéaire sous forme canonique.
2. Mettre le programme linéaire sous forme standard.
3. Donner le dual (D) du programme linéaire (P).

1. Sous forme canonique :

$$(P_c)\left\{\begin{array}{llllll} \max & 6x_1 & + & 4x_2 & & \\ \text{s.c} & 4x_1 & + & 5x_2 & \leq & 15 \\ & -\frac{1}{2}x_1 & - & x_2 & \leq & -1 \\ & 4x_1 & + & x_2 & \leq & 12 \\ & -2x_1 & - & x_2 & \leq & -2 \\ & x_1 & , & x_2 & \geq & 0 \end{array}\right.$$

2. Sous forme standard :

$$(P_s)\left\{\begin{array}{llllllllllllll} \max & 6x_1 & + & 4x_2 & & & & & & & & & & \\ \text{s.c} & 4x_1 & + & 5x_2 & + & x_3 & & & & & & & = & 15 \\ & -\frac{1}{2}x_1 & - & x_2 & & & + & x_4 & & & & & = & -1 \\ & 4x_1 & + & x_2 & & & & & + & x_5 & & & = & 12 \\ & -2x_1 & - & x_2 & & & & & & & + & x_6 & = & -2 \\ & x_1 & , & x_2 & , & x_3 & , & x_4 & , & x_5 & , & x_6 & \geq & 0 \end{array}\right.$$

3. Le dual (D) de (P).

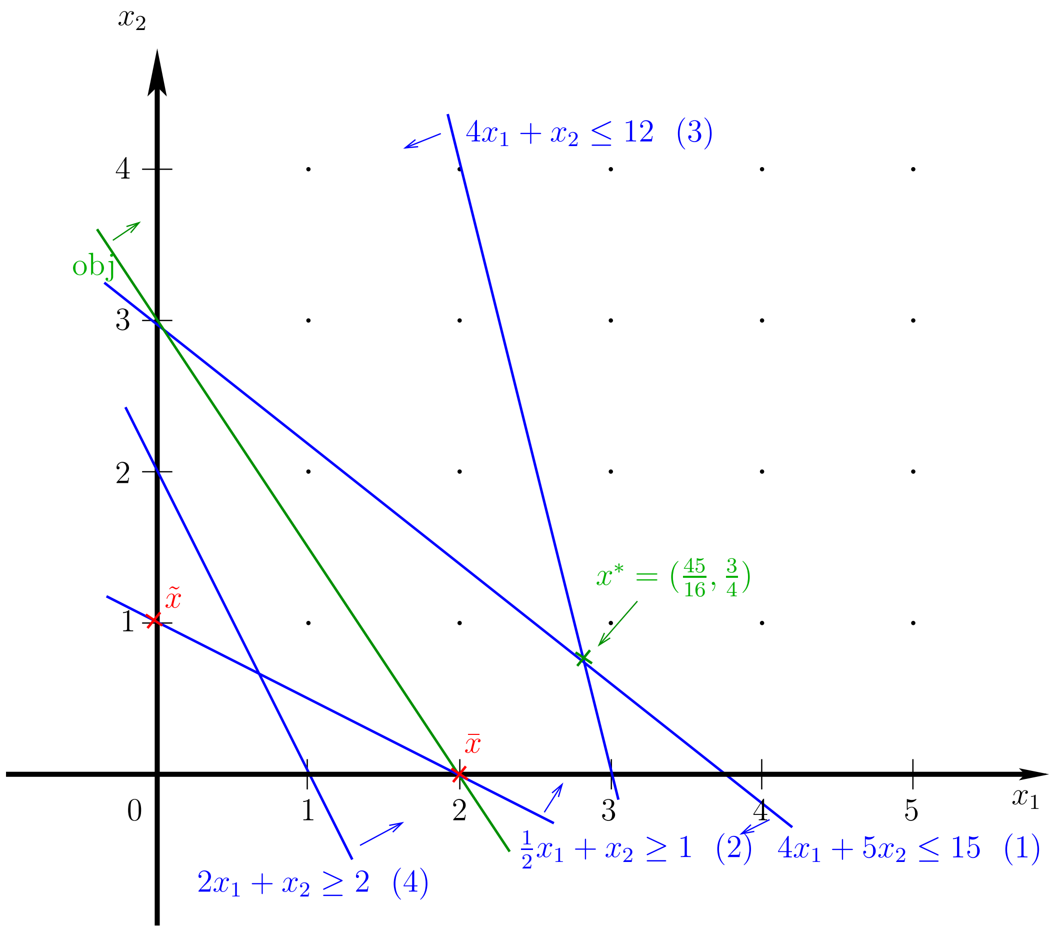
$$(D)\left\{\begin{array}{llllllllll} \min & 15y_1 & + & y_2 & + & 12y_3 & + & 2y_4 & & \\ \text{s.c} & 4y_1 & + & \frac{1}{2}y_2 & + & 4y_3 & + & 2y_4 & \geq & 6 \\ & 5y_1 & + & y_2 & + & y_3 & + & y_4 & \geq & 4 \\ & y_1 & , & & & y_3 & , & & \geq & 0 \\ & & & y_2 & , & & & y_4 & \leq & 0 \end{array}\right.$$

ou

$$(D)\left\{\begin{array}{llllllllll} \min & 15y_1 & - & y_2' & + & 12y_3 & - & 2y_4' & & \\ \text{s.c} & 4y_1 & - & \frac{1}{2}y_2' & + & 4y_3 & - & 2y_4' & \geq & 6 \\ & 5y_1 & - & y_2' & + & y_3 & - & y_4' & \geq & 4 \\ & y_1 & , & y_2' & , & y_3 & , & y_4' & \geq & 0 \end{array}\right.$$

<u>Exercice 2</u> **Résolution graphique** *(3 points)*

Faire la résolution graphique du programme linéaire (P) pour déterminer sa solution optimale et sa valeur $v(P)$.



x^* : intersection entre (1) et (3)

$$\left\{\begin{array}{l} 4x_1 + 5x_2 = 15 \\ 4x_1 + x_2 = 12 \end{array}\right.$$

$$x_1^* = \frac{\begin{vmatrix} 15 & 5 \\ 12 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{-45}{-16} = \frac{45}{16} \text{ et } x_2^* = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 15 \\ 4 & 12 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{-12}{-16} = \frac{3}{4}$$

d'où $x^* = (\frac{45}{16}, \frac{3}{4})$ pour une valeur de $\frac{159}{8}$.

<u>Exercice 3</u> **Solutions de base et algorithme primal du simplexe sous forme tableau** *(8 points)*

Soient x_3, x_4, x_5 et x_6 les variables d'écart associées aux contraintes (1), (2), (3) et (4).

1. *Expliciter la solution de base $\tilde{x}$ définie par $\tilde{x}_1 = 0$ et $\tilde{x}_2 = 1$ (i.e. donner les valeurs de $\bar{x}_3$, $\bar{x}_4$, $\bar{x}_5$ et $\bar{x}_6$). À quelle base cette solution correspond-t-elle ?*

4 contraintes $\rightarrow$ 4 variables en base parmi 6.
$C_6^4 = 15$ solutions de base potentielles.
$\tilde{x}$ vérifie à l'égalité la contrainte $\frac{1}{2}x_1 + x_2 \geq 1$ donc $\tilde{x}_4 = 0$.
$\tilde{x}$ correspond à la solution de base associée à $x_1 = x_4 = 0$
c'est-à-dire l'intersection entre les contraintes $x_1 = 0$ et $x_4 = 0$.
Cette solution correspond à la base $B = \{x_2, x_3, x_5, x_6\}$.

$\tilde{x}$ doit vérifier toutes les contraintes ?
On peut donc se servir de cette propriété pour trouver la valeur de $\tilde{x}_3$, $\tilde{x}_5$ et $\tilde{x}_6$.
$4\tilde{x}_1 + 5\tilde{x}_2 + \tilde{x}_3 = 15 \rightarrow \tilde{x}_3 = 15 - 5 = 10$
$4\tilde{x}_1 + \tilde{x}_2 + \tilde{x}_5 = 12 \rightarrow \tilde{x}_5 = 12 - 1 = 11$
$-2\tilde{x}_1 - \tilde{x}_2 + \tilde{x}_6 = -2 \rightarrow \tilde{x}_6 = -2 + 1 = -1$
donc $\tilde{x} = (0, 1, 10, 0, 11, -1)$.

2. *$\tilde{x}$ est-elle une solution de base réalisable ?*

   Réalisabilité de $\tilde{x}$?
   $\tilde{x}_1 = \tilde{x}_4 = 0 \geq 0$
   $\tilde{x}_2 = 1 \geq 0$
   $\tilde{x}_3 = 10 \geq 0$
   $\tilde{x}_5 = 11 \geq 0$
   mais
   $\tilde{x}_6 = -1 < 0$
   donc $\tilde{x}$ n'est pas réalisable.

3. *$\tilde{x}$ est-elle une solution de base optimale ?*

   Non réalisable donc non optimale.

4. *Expliciter la solution de base $\bar{x}$ définie par $\bar{x}_1 = 2$ et $\bar{x}_2 = 0$ (i.e. donner les valeurs de $\bar{x}_3$, $\bar{x}_4$, $\bar{x}_5$ et $\bar{x}_6$). À quelle base cette solution correspond-t-elle ?*

   4 contraintes $\rightarrow$ 4 variables en base parmi 6.
   $C_6^4 = 15$ solutions de base potentielles.
   $\bar{x}$ vérifie à l'égalité la contrainte $\frac{1}{2}x_1 + x_2 \geq 1$ donc $\bar{x}_4 = 0$.
   $\bar{x}$ correspond à la solution de base associée à $x_2 = x_4 = 0$
   c'est-à-dire l'intersection entre les contraintes $x_2 = 0$ et $x_4 = 0$.
   Cette solution correspond à la base $B = \{x_1, x_3, x_5, x_6\}$.

   $\bar{x}$ doit vérifier toutes les contraintes ?
   On peut donc se servir de cette propriété pour trouver la valeur de $\bar{x}_3$, $\bar{x}_5$ et $\bar{x}_6$.
   $4\bar{x}_1 + 5\bar{x}_2 + \bar{x}_3 = 15 \rightarrow \bar{x}_3 = 15 - 8 = 7$
   $4\bar{x}_1 + \bar{x}_2 + \bar{x}_5 = 12 \rightarrow \bar{x}_5 = 12 - 8 = 4$
   $-2\bar{x}_1 - \bar{x}_2 + \bar{x}_6 = -2 \rightarrow \bar{x}_6 = -2 + 4 = 2$
   donc $\bar{x} = (2, 0, 7, 0, 4, 2)$.

5. *$\bar{x}$ est-elle une solution de base réalisable ?*

   Réalisabilité de $\bar{x}$?
   $\bar{x}_2 = \bar{x}_4 = 0 \geq 0$
   $\bar{x}_1 = 2 \geq 0$
   $\bar{x}_3 = 7 \geq 0$
   $\bar{x}_5 = 4 \geq 0$
   $\bar{x}_6 = 2 \geq 0$
   $\bar{x}_1$, $\bar{x}_3$, $\bar{x}_5$, $\bar{x}_6 \geq 0$ donc $\bar{x}$ est réalisable.

6. *$\bar{x}$ est-elle une solution de base optimale ?*

   Optimalité de $\bar{x}$?
   $\bar{x}$ correspond à la base $\bar{B} = \{x_1, x_3, x_5, x_6\}$.
   (on note B à la place de $\bar{B}$ par abus de langage).
   Il faut calculer les coûts réduits des variables hors base
   $c_N - c_B\tilde{B}^{-1}\tilde{N}$

   $$\tilde{B} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad det\tilde{B} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \neq 0, \quad com\tilde{B} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

   $$\to \tilde{B}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   $$\tilde{N} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ -1 & 1 \\ 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \tilde{B}^{-1}\tilde{N} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -3 & 8 \\ -7 & 8 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$$

   $c_B = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $c_N = \begin{pmatrix} 4 & 0 \end{pmatrix}$
   $c_N - c_B\tilde{B}^{-1}\tilde{N} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 12 & -12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & 12 \end{pmatrix}$
   $\bar{c}_{x_4} > 0$
   donc $\bar{x}$ n'est pas optimale.

7. *Donner une représentation du programme linéaire sous forme tableau associée à l'une des bases précédentes.*

	x_B	x_N
$\tilde{B}^{-1}b$	I	$\tilde{B}^{-1}\tilde{N}$
$-c_B\tilde{B}^{-1}b$	0	$c_N - c_B\tilde{B}^{-1}\tilde{N}$

   $$\tilde{B}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   $$b = \begin{pmatrix} 15 \\ -1 \\ 12 \\ -2 \end{pmatrix} \qquad \tilde{B}^{-1}b = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

   $c_B = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
   $c_B B^{-1}b = 12$

Base	$\bar{b}$	x_1	x_3	x_5	x_6	x_2	x_4
x_1	2	1	0	0	0	2	-2
x_3	7	0	1	0	0	-3	8
x_5	4	0	0	1	0	-7	8
x_6	2	0	0	0	1	3	-4
$-\bar{z}\vert\bar{c}$	-12	0	0	0	0	-8	12

8. *Trouver la solution de base optimale. Pour ce faire, appliquer l'algorithme primal du simplexe en utilisant la forme tableau à partir de la base de la question précédente.*

Base	$\bar{b}$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_1	2	1	2	0	-2	0	0
x_3	7	0	-3	1	8	0	0
x_5	4	0	-7	0	8	1	0
x_6	2	0	3	0	-4	0	1
$-\bar{z}\vert\bar{c}$	-12	0	-8	0	12	0	0

$12 > 0$ donc x_4 entre en base.
$\frac{7}{8} \geq \frac{4}{8}$ donc x_5 sort de base.

Base	$\bar{b}$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_1	3	1	1/4	0	0	1/4	0
x_3	3	0	4	1	0	-1	0
x_4	1/2	0	$-7/8$	0	1	1/8	0
x_6	4	0	$-1/2$	0	0	1/2	1
$-\bar{z}\vert\bar{c}$	-18	0	5/2	0	0	$-3/2$	0

$\frac{5}{2} > 0$ donc x_2 entre en base.
$\frac{3}{\frac{1}{4}} \geq \frac{3}{4}$ donc x_3 sort de base.

Base	$\bar{b}$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_1	45/16	1	0	$-1/16$	0	5/16	0
x_2	3/4	0	1	1/4	0	$-1/4$	0
x_4	37/32	0	0	7/32	1	$-3/32$	0
x_6	35/8	0	0	1/8	0	3/8	1
$-\bar{z}\vert\bar{c}$	$-159/8$	0	0	$-5/8$	0	$-7/8$	0

tous les $\bar{c}_N < 0$ donc optimalité.
$x^* = (\frac{45}{16}, \frac{3}{4}, 0, \frac{37}{32}, 0, \frac{35}{8})$ et $z^* = \frac{159}{8}$. (cohérent avec exercice 2)

Exercice 4 Forme révisée de l'algorithme primal du simplexe *(3 points)*

Appliquer l'algorithme du simplexe sous forme révisée pour résoudre le programme linéaire (P). Soient x_3, x_4, x_5 et x_6 les variables d'écart associées aux contraintes (1), (2), (3) et (4). Utiliser $B = \{x_1, x_3, x_5, x_6\}$ comme base réalisable de départ.

Sous forme standard :

$$(P_s)\left\{\begin{array}{llllllllllllll}
\max & 6x_1 & + & 4x_2 \\
\text{s.c} & 4x_1 & + & 5x_2 & + & x_3 & & & & & & & = & 15 \\
 & -\frac{1}{2}x_1 & - & x_2 & & & + & x_4 & & & & & = & -1 \\
 & 4x_1 & + & x_2 & & & & & + & x_5 & & & = & 12 \\
 & -2x_1 & - & x_2 & & & & & & & + & x_6 & = & -2 \\
 & x_1 & , & x_2 & , & x_3 & , & x_4 & , & x_5 & , & x_6 & \geq & 0
\end{array}\right.$$

Base de départ : $B = \{1,3,5,6\}$ et $N = \{2,4\}$.

$\rightarrow$ <u>Calcul des coûts réduits</u> :

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad det\tilde{B} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \neq 0 \qquad comB = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Pi B = c_B \rightarrow \Pi = c_B B^{-1} = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -12 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\bar{c_N} = c_N - \Pi N = \begin{pmatrix} 4 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -12 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ -1 & 1 \\ 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 4 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 12 & -12 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -8 & 12 \end{pmatrix}$$

x_4 entre en base.

$\rightarrow$ <u>Choix de la variable sortante</u> :

$$Bd = N_{x_4} \rightarrow d = B^{-1}N_{x_4} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 8 \\ 8 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$\rightarrow$ <u>Calcul des x de départ</u> :

$$x_B = B^{-1}b = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 15 \\ -1 \\ 12 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$min\left\{\frac{7}{8},\frac{4}{8}\right\}=\frac{4}{8} \quad \rightarrow x_5$ sort de base.

$\rightarrow$ Changement de base :

$B=\{1,3,4,6\}$ et $N=\{2,5\}$
$x_4 \leftarrow \frac{1}{2}=\frac{4}{8}$
$x_5 \leftarrow 0$
$x_1 \leftarrow x_1 - x_4 d_{x_1} = 2-\frac{1}{2}\times(-2)=3$
$x_3 \leftarrow x_3 - x_4 d_{x_3} = 7-\frac{1}{2}\times 8=3$
$x_6 \leftarrow x_6 - x_4 d_{x_6} = 2-\frac{1}{2}\times(-4)=4$

$\rightarrow$ Calcul des coûts réduits :

$$B=\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad det(B)=4\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}=4 \qquad comB=\begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 1 & -4 & \frac{1}{2} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$B^{-1}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{8} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Pi B = c_B \rightarrow \Pi = c_B B^{-1} = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{8} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{3}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\bar{c_N} = c_N - \Pi N = \begin{pmatrix} 4 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{3}{2} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ -1 & 0 \\ 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 4 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \frac{5}{2} & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

x_2 entre en base.

$\rightarrow$ Choix de la variable sortante :

$$Bd = N_{x_2} \rightarrow d = B^{-1}N_{x_2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{8} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ 4 \\ -\frac{7}{8} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$min\left\{\frac{3}{\frac{1}{4}},\frac{3}{4}\right\}=\frac{3}{4} \quad \rightarrow x_3$ sort de base.

$\rightarrow$ Changement de base :

$B=\{1,2,4,6\}$ et $N=\{3,5\}$
$x_2 \leftarrow \frac{3}{4}$
$x_3 \leftarrow 0$
$x_1 \leftarrow x_1 - x_2 d_{x_1} = 3-\frac{3}{4}\times\frac{1}{4}=\frac{45}{16}$

$x_4 \leftarrow x_4 - x_2 d_{x_4} = \frac{1}{2} - \frac{3}{4} \times -\frac{7}{8} = \frac{37}{32}$
$x_6 \leftarrow x_6 - x_2 d_{x_6} = 4 - \frac{3}{4} \times -\frac{1}{2} = \frac{35}{8}$

→ <u>Calcul des coûts réduits</u> :

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -1 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad det(B) = -\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 16 \neq 0 \qquad comB = \begin{pmatrix} -1 & 4 & \frac{7}{2} & 2 \\ 0 & 0 & 16 & 0 \\ 5 & -4 & \frac{-3}{2} & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 16 \end{pmatrix}$$

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{-1}{16} & 0 & \frac{5}{16} & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{-1}{4} & 0 \\ \frac{7}{32} & 1 & \frac{-3}{32} & 0 \\ \frac{1}{8} & 0 & \frac{3}{8} & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Pi B = c_B \rightarrow \Pi = c_B B^{-1} = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{-1}{16} & 0 & \frac{5}{16} & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{-1}{4} & 0 \\ \frac{7}{32} & 1 & \frac{-3}{32} & 0 \\ \frac{1}{8} & 0 & \frac{3}{8} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{8} & 0 & \frac{7}{8} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\bar{c_N} = c_N - \Pi N = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{5}{8} & 0 & \frac{7}{8} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{5}{8} & \frac{7}{8} \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \frac{-5}{8} & \frac{-7}{8} \end{pmatrix}$$

$\bar{c}_N < 0$ donc STOP "optimalité".

$\bar{x} = (\frac{45}{16}, \frac{3}{4}, 0, \frac{37}{32}, 0, \frac{35}{8})$ et $\bar{z} = \frac{159}{8}$. (cohérent avec exercice 2 et 3).

<u>Exercice 5</u> Phase 1 de l'algorithme primal du simplexe *(Bonus : 4 points)*

Appliquer l'algorithme primal du simplexe pour résoudre le programme linéaire (P) en utilisant un programme linéaire auxilliaire (P_0) (phase 1 du simplexe).

forme standard de (P_0) :

$$(P_0)\left\{\begin{array}{llllllllllllllll} \max & -x_0 & & & & & & & & & & & & & & \\ \text{s.c} & 4x_1 & + & 5x_2 & + & x_3 & & & & & & & & & = & 15 \\ & -\frac{1}{2}x_1 & - & x_2 & & & + & x_4 & & & & & - & x_0 & = & -1 \\ & 4x_1 & + & x_2 & & & & & + & x_5 & & & & & = & 12 \\ & -2x_1 & - & x_2 & & & & & & & + & x_6 & - & x_0 & = & -2 \\ & x_1 & , & x_2 & , & x_3 & , & x_4 & , & x_5 & , & x_6 & , & x_0 & \geq & 0 \end{array}\right.$$

$x^0 = (2, 0, 0, 15, 1, 12, 0)$
$B^0 = \{0, 3, 4, 5\}$ et $N^0 = \{1, 2, 6\}$

forme dictionnaire :
$x_3 = 15 - 4x_1 - 5x_2$

$x_5 = 12 - 4x_1 - x_2$
$x_0 = 2 - 2x_1 - x_2 + x_6$
$x_4 = -1 + x_0 + \frac{1}{2}x_1 + x_2 = -1 + (2 - 2x_1 - x_2 + x_6) + \frac{1}{2}x_1 + x_2 = 1 - \frac{3}{2}x_1 + x_6$
$w = -x_0 = -2 + 2x_1 + x_2 - x_6$

forme tableau :

Base	$\bar{b}$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_0
x_0	2	2	1	0	0	0	-1	1
x_3	15	4	5	1	0	0	0	0
x_4	1	3/2	0	0	1	0	-1	0
x_5	12	4	1	0	0	1	0	0
$-\bar{w}\|\bar{c}$	2	2	1	0	0	0	-1	0

x_1 entre en base.
$\min\{\frac{2}{2}, \frac{15}{4}, \frac{1}{\frac{3}{2}}, \frac{12}{4}\} = \frac{1}{\frac{3}{2}} \rightarrow x_4$ sort de base.

Base	$\bar{b}$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_0
x_0	2/3	0	1	0	$-4/3$	0	1/3	1
x_3	37/3	0	5	1	$-8/3$	0	8/3	0
x_1	2/3	1	0	0	2/3	0	$-2/3$	0
x_5	28/3	0	1	0	$-8/3$	1	8/3	0
$-\bar{w}\|\bar{c}$	2/3	0	1	0	$-4/3$	0	1/3	0

x_2 entre en base.
$\min\{\frac{\frac{2}{3}}{1}, \frac{\frac{37}{3}}{5}, \frac{\frac{28}{3}}{1}\} = \frac{2}{3} \rightarrow x_0$ sort de base.

Base	$\bar{b}$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_0
x_2	2/3	0	1	0	$-4/3$	0	1/3	1
x_3	9	0	0	1	4	0	1	-5
x_1	2/3	1	0	0	2/3	0	$-2/3$	0
x_5	26/3	0	0	0	$-4/3$	1	7/3	-1
$-\bar{w}\|\bar{c}$	0	0	0	0	0	0	0	-1

$B^1 = \{1, 2, 3, 5\}$ et $N^1 = \{0, 4, 6\}$
$w = 0 \rightarrow$ optimalité de P_0.
On a x_0 hors base et $w = 0$
$\Rightarrow$ solution réalisable de base pour (P).

Phase 2 pour (P)

expression des variables en base en fonction des variables hors base
$x_1 = \frac{2}{3} - \frac{2}{3}x_4 + \frac{2}{3}x_6$
$x_2 = \frac{2}{3} + \frac{4}{3}x_4 - \frac{1}{3}x_6$
$x_3 = 9 - 4x_4 - x_6$
$x_5 = \frac{26}{3} + \frac{4}{3}x_4 - \frac{7}{3}x_6$

expression de z en fonction des variables hors base
$z = 6x_1 + 4x_2$

$= 6(\frac{2}{3} - \frac{2}{3}x_4 + \frac{2}{3}x_6) + 4(\frac{2}{3} + \frac{4}{3}x_4 - \frac{1}{3}x_6)$
$= \frac{20}{3} + \frac{4}{3}x_4 + \frac{8}{3}x_6$

Base	$\bar{b}$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_2	$2/3$	0	1	0	$-4/3$	0	$1/3$
x_3	9	0	0	1	4	0	1
x_1	$2/3$	1	0	0	$2/3$	0	$-2/3$
x_5	$26/3$	0	0	0	$-4/3$	1	$7/3$
$-\bar{z}\|\bar{c}$	$-20/3$	0	0	0	$4/3$	0	$8/3$

x_6 entre en base.
$\min\{\frac{\frac{2}{3}}{\frac{1}{3}}, \frac{9}{1}, \frac{\frac{26}{3}}{\frac{7}{3}}\} = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{1}{3}} = 2 \rightarrow x_2$ sort de base.

Base	$\bar{b}$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_6	2	0	3	0	-4	0	1
x_3	7	0	-3	1	8	0	0
x_1	2	1	2	0	-2	0	0
x_5	4	0	-7	0	8	1	0
$-\bar{z}\|\bar{c}$	-12	0	-8	0	12	0	0

La suite est similaire à l'exercice 3 question 8.

$12 > 0$ donc x_4 entre en base.
$\frac{7}{8} \geq \frac{4}{8}$ donc x_5 sort de base.

Base	$\bar{b}$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_6	4	0	$-1/2$	0	0	$1/2$	1
x_3	3	0	4	1	0	-1	0
x_1	3	1	$1/4$	0	0	$1/4$	0
x_4	$1/2$	0	$-7/8$	0	1	$1/8$	0
$-\bar{z}\|\bar{c}$	-18	0	$5/2$	0	0	$-3/2$	0

$\frac{5}{2} > 0$ donc x_2 entre en base.
$\frac{3}{\frac{1}{4}} \geq \frac{3}{4}$ donc x_3 sort de base.

Base	$\bar{b}$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_6	$35/8$	0	0	$1/8$	0	$3/8$	1
x_2	$3/4$	0	1	$1/4$	0	$-1/4$	0
x_1	$45/16$	1	0	$-1/16$	0	$5/16$	0
x_4	$37/32$	0	0	$7/32$	1	$-3/32$	0
$-\bar{z}\|\bar{c}$	$-159/8$	0	0	$-5/8$	0	$-7/8$	0

tous les $\bar{c}_N < 0$ donc optimalité.
$x^* = (\frac{45}{16}, \frac{3}{4}, 0, \frac{37}{32}, 0, \frac{35}{8})$ et $z^* = \frac{159}{8}$. (cohérent avec les exercices précédents)

Exercice 6 **Algorithme dual du simplexe** *(Bonus : 4 points)*

Si c'est possible, appliquer l'algorithme dual du simplexe pour résoudre le programme linéaire (P).

Sous forme standard :

$$(P_s)\begin{cases} \max & 6x_1 + 4x_2 \\ \text{s.c} & 4x_1 + 5x_2 + x_3 = 15 \\ & -\frac{1}{2}x_1 - x_2 + x_4 = -1 \\ & 4x_1 + x_2 + x_5 = 12 \\ & -2x_1 - x_2 + x_6 = -2 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0 \end{cases}$$

Base	$\bar{b}$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_3	15	4	5	1	0	0	0
x_4	-1	$-1/2$	-1	0	1	0	0
x_5	12	4	1	0	0	1	0
x_6	-1	-2	-1	0	0	0	1
$-\bar{z}\vert\bar{c}$	0	6	4	0	0	0	0

Question : Peut-on lancer l'algorithme dual du simplexe à partir du tableau précédent ?
Réponse : Non.

Question : Pourquoi ?

Réponse : La condition pour pouvoir utiliser l'algo dual du simplexe est de disposer d'une base initiale duale-réalisable.

Dans le cas d'une maximisation, une base correspond à une solution duale-réalisable (i.e. réalisable pour (D)) si :

- toutes les variables duales sont nulles
- toutes les contraintes duales sont satisfaites

Dans le tableau primal associé à (P), ces deux conditions se traduisent par :

- des coûts réduits non positifs pour les variables d'origine,
- des coûts réduits non positifs pour les variables d'écart.

Ici la base formée par les variables d'écarts n'est pas duale-réalisable. En effet, les coûts réduits sont > 0.