

Fun with Henry

Dirk Pattinson
Department of Computing
Imperial College London

Example: The Tudors



Henry VIII



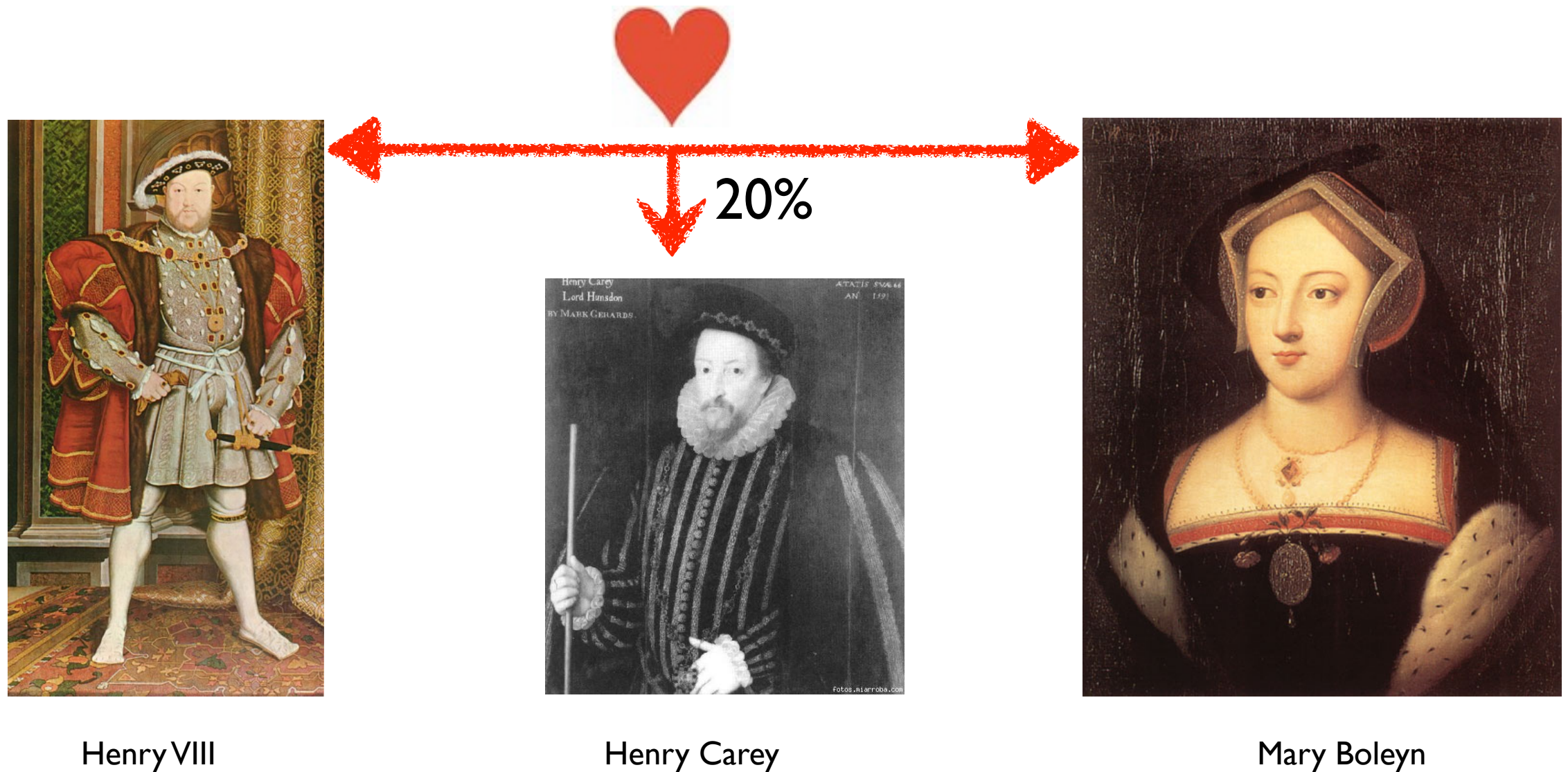
Henry Carey



Mary Boleyn

There have been speculation that Mary's two children, Catherine and Henry, were fathered by Henry, but this has never been proven

What do we know?



- Mary Boleyn was Henry's Mistress some time between 1520 and 1526
- Suppose that Henry Carey is a child of Henry VIII with probability 0.2

What are good Models?

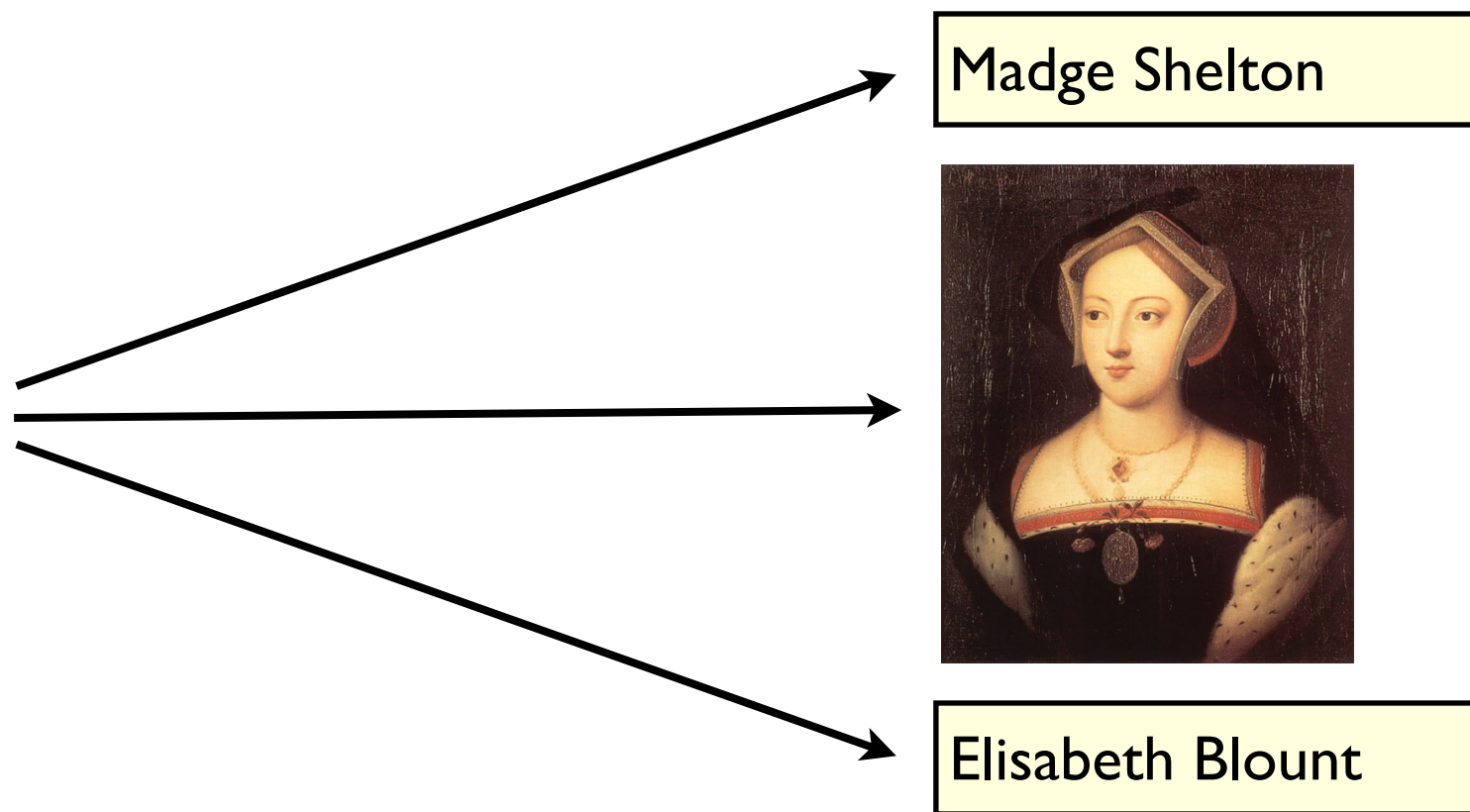
Probabilistic Information about offspring



Models are **probability distributions** on **sets**: $W \rightarrow \mathcal{D}(\mathcal{P}(W))$

What are “good” models?

Certainty about amorous affairs:



Models are **Relations**:

$$W \rightarrow \mathcal{P}(W)$$

Combination of both facets:

$$W \rightarrow \mathcal{D}(\mathcal{P}(W)) \times \mathcal{P}(W)$$

Semantic Framework

Models map **worlds** to **structured successors**:

$$\text{Coalgebras: } W \rightarrow TW$$

where $T : \text{Set} \rightarrow \text{Set}$ is a construction on sets (a functor)

Example: The reign of Henry VIII

$$W \rightarrow \mathcal{D}(\mathcal{P}(W)) \times \mathcal{P}(W)$$

In general: T is a parameter

- graded modal logics, probabilistic logics, neighbourhood frames etc.
- closed under modular combinations

Coalgebraic Logics

Extension of (classical) propositional logic with **modal operators**:

Example:

- Henry **had an affair with** Mary
- Henry **is father of** Henry **with likelihood of at least 20%**

DL Syntax: Henry $\sqsubseteq \exists \text{had_affair.Mary}$

Henry $\sqsubseteq \exists \text{father_of}_{\geq 0.2}.\text{HenryC}$

In general:

- Modal operators talk about **structured sucesors**
- Lifting of **world predicates** to **successor predicates**

Semantically: given model $(W, \gamma : W \rightarrow TW)$ and $w \in W$:

$$w \models \heartsuit A \iff \gamma(w) \in \llbracket \heartsuit \rrbracket (\llbracket A \rrbracket)$$

where $\llbracket \heartsuit \rrbracket : \mathcal{P}(W) \rightarrow \mathcal{P}(TW)$ determines the interpretation of \heartsuit

Semantic Framework

Given: a set Λ of modal operators

Interpretation via Λ -structure:

- Endofunctor $T : \text{Set} \rightarrow \text{Set}$ (defining the model class)
- Interpretations $(\llbracket \heartsuit \rrbracket_W : \mathcal{P}(W) \rightarrow \mathcal{P}(TW))_{W \in \text{Set}}$ (for operators)

Models: Tuples (W, γ, π) where

- W set of worlds and $\pi : V \rightarrow \mathcal{P}(W)$ valuation of variables
- $\gamma : W \rightarrow TW$ structure map

Formal syntax:

$$\mathcal{F}(\Lambda) \ni A, B ::= p \mid A \wedge B \mid A \vee B \mid \neg A \mid \heartsuit A \quad (\heartsuit \in \Lambda, p \in V)$$

Formal semantics over $M = (W, \gamma, \pi)$:

$$\llbracket \heartsuit A \rrbracket_M = \gamma^{-1}(\llbracket \heartsuit \rrbracket_W)(\llbracket A \rrbracket_M)$$

Questions

Satisfiability over empty TBox:

Given $A \in \mathcal{F}(\Lambda)$, is there a model M such that $\llbracket A \rrbracket_M \neq \emptyset$?

Satisfiability over general TBox (knowledge base):

Given $A \in \mathcal{F}(\Lambda)$ and $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{F}(\Lambda)$, is there a model M such that $M \models B$ for all $B \in \mathcal{T}$ and $\llbracket A \rrbracket_M \neq \emptyset$?

Interpretation:

- \mathcal{T} contains background knowledge, satisfied by model
- A is a hypothesis, consistent relative to \mathcal{T}

Extensions:

- New constructs (individuals, fixpoints)
- Other Questions (query answering)

Task: Decision procedures parametric in the notion of model

Example: Satisfiability

Syntactical Approach: **Tableaux**

$A \in \mathcal{F}(\Lambda)$ unsatisfiable \iff A has closed tableau

Two components: fixed **propositional rules**, e.g.

$$\frac{\Gamma, A \wedge B}{\Gamma, A, B} \qquad \frac{\Gamma, A \vee B}{\Gamma, A \quad \Gamma, B}$$

plus plus instance specific **modal rules**, e.g. graded modal logic:

$$\frac{\langle l_1 \rangle A_1, \dots, \langle l_m \rangle A_m, \neg \langle k_1 \rangle B_1, \dots, \neg \langle k_n \rangle B_n}{\sum_i r_i B_i - \sum_j s_j A_j < 0}$$

Rule format in general:

- rule premise describes property of **state** (purely modal)
- rule conclusion describes property of **successors**

(Examples: coalition logic, conditional logics, probabilistic logics, ...)

Example: Probabilistic Modal Logic

Models: coalgebras $\gamma : W \rightarrow \mathcal{D}(W)$ over **probability distributions**

$$\mathcal{D}(W) = \{ \mu : W \rightarrow [0, 1] \mid \text{supp}(\mu) \text{ finite, } \sum_{w \in W} \mu(w) = 1 \}$$

Operators: formal linear inequalities over formulas

$$\sum_{k=1}^l c_k \cdot \mu(A_k) \geq c' \quad \text{written as} \quad \vec{c} \cdot \mu(\vec{A}) \geq c'$$

Interpretation: instantiation with local distribution

$$w \models \sum_{k=1}^l c_k \cdot \mu(A_k) \geq c' \iff \sum_{k=1}^l c_k \cdot \gamma(w)(\llbracket A_k \rrbracket) \geq c'$$

The Satisfiability Problem

Given: coalgebraic semantics plus coherence conditions

Theorem. The tableau calculus characterises satisfiability, i.e.

$$A \in \mathcal{F}(\Lambda) \text{ unsatisfiable} \iff A \text{ has closed tableau}$$

Proof Strategy:

- model construction using coherence conditions
- no reference to underlying semantics

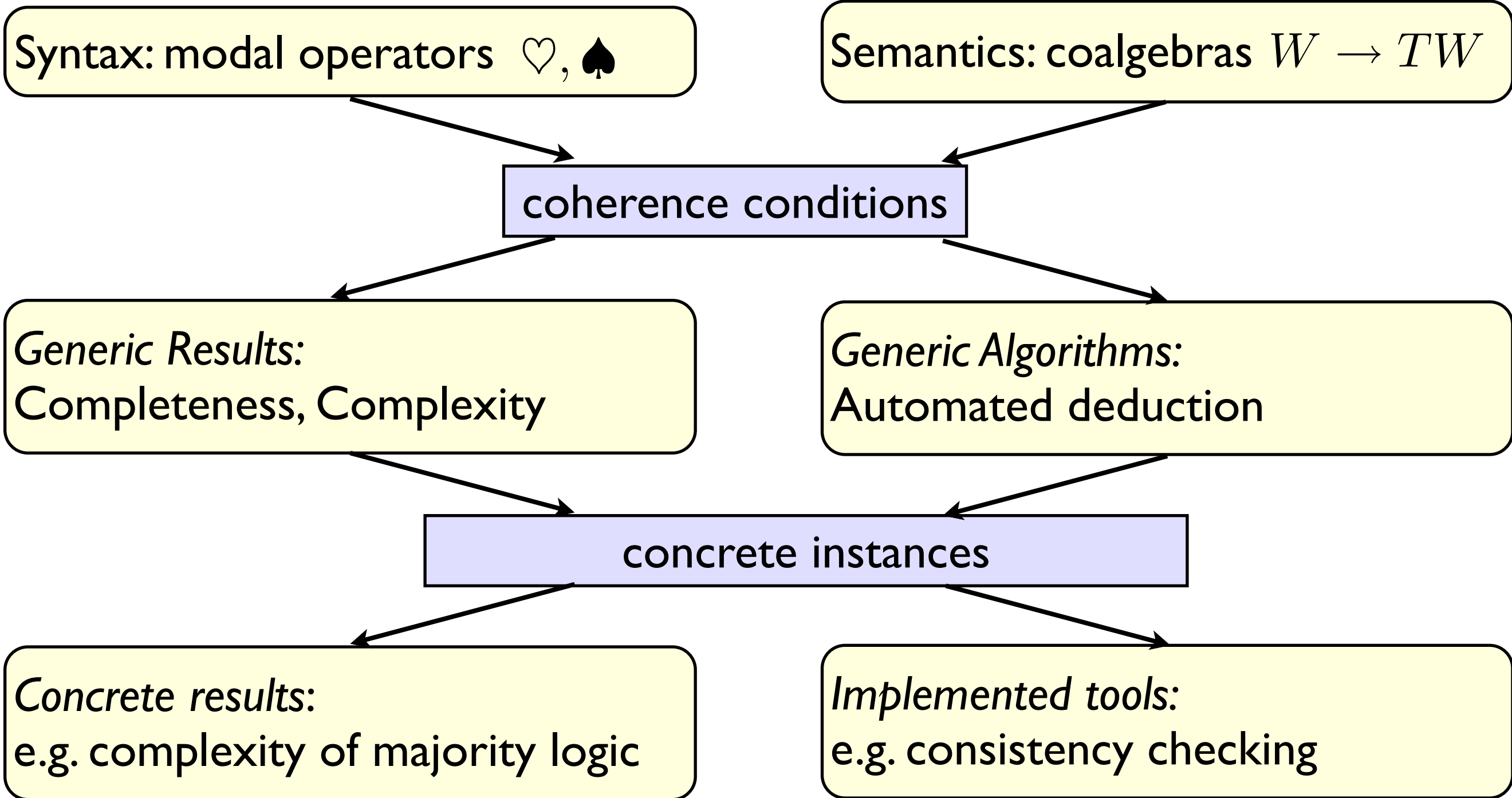
Applications. Satisfiability is (mostly) PSPACE

- analysis of (polynomially deep) tableaux

Extensions. Tableaux for background knowledge, individuals, fixpoints ...

- precisely identical coherence conditions
- extended to cater for specific constructs

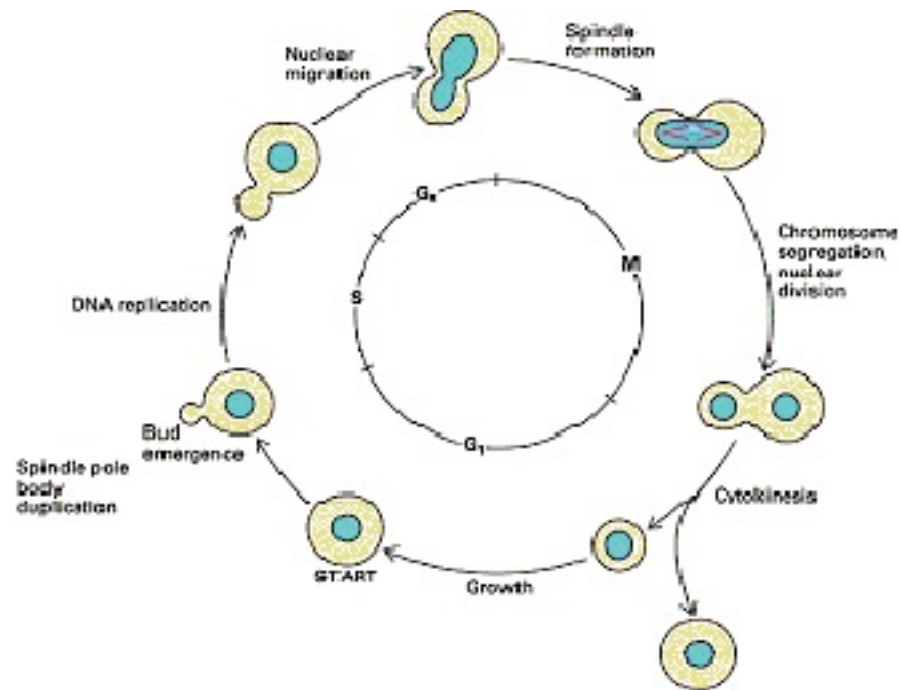
Exploring Uniformity



Fun with Henry ...

(this is where things will start to go wrong ...)

Applications



Stochastische Risiken	Charakteristika	Wichtige Risiken
Produktionsrisiko Lebensversicherung (Todesfallrisiko)	<ul style="list-style-type: none"> Langfristige Verträge mit einer Todesfallleistung Überwiegend mit einer Kapitalauszahlung bei Ablauf Bei Vertragsabschluss fixierte Rechnungsgrundlagen, Beitragsanpassungen nicht möglich 	<p>Sterblichkeit (kurzfristig):</p> <ul style="list-style-type: none"> Zunahme des Aufwands für Versicherungsfälle durch einmalige außergewöhnliche Umstände (z. B. Pandemie) <p>Sterblichkeit (langfristig):</p> <ul style="list-style-type: none"> Zunahme des Aufwands für Versicherungsfälle durch eine nachhaltige Zunahme der Sterblichkeit im Bestand
Rentenversicherung	<ul style="list-style-type: none"> Überwiegend lebenslange garantierte Rentenzahlung Überwiegend bei Vertragsabschluss fixierte Rechnungsgrundlagen 	<p>Langzeitigkeit:</p> <ul style="list-style-type: none"> Zunahme des für die Zukunft erwarteten Aufwands für Altersrenten durch eine nachhaltige Zunahme der Lebenserwartung im Bestand
Berufunfähigkeits- und Invaliditätsversicherung	<ul style="list-style-type: none"> Langfristige Verträge mit einer garantierten zeitlich befristeten Rente im Invaliditätsfall Bei Vertragsabschluss fixierte Rechnungsgrundlagen 	<p>Invalidisierung:</p> <ul style="list-style-type: none"> Erhöhter Aufwand durch Zunahme der Fälle von Invalidität im Bestand sowie eine Verringerung des durchschnittlichen Alters, in dem ein Versicherungsfall eintritt <p>Langzeitigkeit:</p> <ul style="list-style-type: none"> Erhöhter Aufwand durch Anstieg der durchschnittlichen Dauer des Rentenempfangs
Lebensrückversicherung	<ul style="list-style-type: none"> Größtenteils langfristige Verträge, durch die überwiegend Todesfall- und Invaliditätsrisiken von Zedenten übernommen werden 	<p>Sterblichkeit (kurzfristig):</p> <ul style="list-style-type: none"> Zunahme des Aufwands für Versicherungsfälle durch einmalige außergewöhnliche Umstände (z. B. Pandemie) <p>Sterblichkeit (langfristig):</p> <ul style="list-style-type: none"> Erhöhter Aufwand für Versicherungsfälle durch eine nachhaltige Zunahme der Sterblichkeit in den Beständen der Zedenten <p>Invalidisierung:</p> <ul style="list-style-type: none"> Erhöhter Aufwand für Invaliditätsversicherungen in den Beständen der Zedenten
Krankenerstversicherung	<ul style="list-style-type: none"> Überwiegend langfristige Verträge, welche die Übernahme von Kosten für medizinische Behandlung garantieren; zur Deckung erhöhter Kosten im Alter werden Rückstellungen gebildet Variable Rechnungsgrundlagen, Beitragsanpassung bei nachhaltigen Veränderungen der Kostenstruktur möglich 	<p>Morbidität:</p> <ul style="list-style-type: none"> Zunahme der Kosten für medizinische Behandlung, die nicht durch Beitragsanpassungen aufgefangen werden können Zunahme des Aufwands für Versicherungsfälle durch einmalige außergewöhnliche Ereignisse (z. B. Pandemie)
Krankerrückversicherung	<ul style="list-style-type: none"> Überwiegend kurzfristige Verträge, durch die Morbiditätsrisiken von Zedenten übernommen werden 	<p>Morbidität (kurzfristig):</p> <ul style="list-style-type: none"> Zunahme der Kosten für medizinische Behandlung innerhalb der Risikoperiode Zunahme des Aufwands für Versicherungsfälle durch einmalige außergewöhnliche Ereignisse (z. B. Pandemie)

Example: cell cycle of budding yeast

- automated hypotheses checking
- testing mutants in silico
- needs quantitative information

Example: insurance policy

- nonmonotonic reasoning
- no rule without exceptions
- quick classification

Thanks for your attention!

Any Questions?