Logique et Ensembles.

I.U.P. d'informatique du Mirail
Jean-François Culus
Année 2005-2006

Table des matières

1 Calcul propositionnel **3**
- 1.1 Introduction . . . 3
- 1.2 Lexique . . . 3

2 Théorie des Ensembles **7**
- 2.1 Premières définitions . . . 7
- 2.2 Opération sur les ensembles . . . 7
- 2.3 Diagramme de Venn . . . 8

3 Relations et Applications **10**
- 3.1 Introduction . . . 10
- 3.2 Relation . . . 10
- 3.3 Fonctions . . . 10
- 3.4 Image directe, image réciproque . . . 12

4 Calcul des prédicats **13**
- 4.1 Introduction . . . 13
- 4.2 Lexique . . . 13
- 4.3 Mise sous une forme standardisée . . . 15
- 4.4 Résolution en calcul de prédicats . . . 16
- 4.5 Résolution par la méthode d'unification . . . 16

5 Bibliographie **19**

Introduction

Ce cours de Logique et Ensembles est un enseignement de mathématiques au sein d'une formation professionnalisante en informatique. Aussi, plusieurs choix ont-ils été faits, tant qu'aux prérequis que dans les objectifs de ce module.

Les étudiants (vous donc) sont supposés avoir quelques familiarités avec les notions de logique (typiquement, avoir suivi un cours). Les notions que nous aborderons ne demanderons pas spécialement de prérequis, mais une certaine familiarité est attendue afin de passer relativement rapidement sur certaines méthodes (par exemple, les tables de vérité). Pour la partie ensembles et applications, aucune connaissance n'est supposée de la part des étudiants.

Les objectifs sont multiples : apporter des connaissances qui vous serviront dans d'autres cours (programmation logique), vous familiariser avec un formalisme afin que vous puissiez, par la suite, aborder d'autres notions de manière autonome. Réactualiser certaines connaissances mathématiques au moyen de la logique, afin de vous aider à mieux aborder des enseignements futurs, et enfin, vous apporter une petite culture scientifique sur le sujet (en particulier, que vous ne soyez pas ignorants sur la notion de complexité, voire les liens entre logique et base de donnée...).

La forme de ce cours a été résolument voulue basée sur l'interactivité et la recherche personnelle des étudiants ; c'est pourquoi, la partie cours est des plus succinte. Les notions sont généralement définies au cours d'un exercice dans lequel elles sont immédiatement utilisées.

Ce cours est découpé en 4 chapitres, une première révision des bases de la logique, puis un chapître portant sur les Ensembles, le troisème porte sur les Applications et le dernier sur le calcul des Prédicats.

1 Calcul propositionnel

1.1 Introduction

Une phrase assertive (par exemple « il fait beau » ou « j'aimerais aller à la piscine ») peut faire l'objet d'un jugement de vérité, c'est-à-dire qu'elle peut être soit $Vraie$, soit $Fausse$ (selon les circonstances, que l'on appelera ici plutôt selon le modèle). Ces phrases assertives particulières sont modélisées par des *variables propositionnelles*, qui sont des variables pouvant prendre deux valeurs : 0 (ou $Faux$) et 1 (ou $Vrai$). Ces variables sont désignées par les lettres p, q, r ou encore par ces mêmes lettres indicées p_0, p_1, r_i ...

Certaines phrases assertives sont composées de connecteurs logiques (par exemple « il fait beau et j'aimerais aller à la piscine ») ; la valeur de vérité d'une telle phrase est alors fonction du jugement de vérité que l'on porte à chacune des variables propositionnelles la composant. Si, à l'instant choisi, il fait effectivement beau et que, effectivement, j'aimerais aller à la piscine, alors la phrase composée sera elle-même $Vraie$.

1.2 Lexique

Une *expression propositionnelle* (ou proposition) est une séquence de symboles pouvant appartenir aux catégories suivantes :
– Les variables propositionnelles.
– les connecteurs logiques : $\neg$ (non), $\wedge$ (et), $\vee$ (ou inclusif) et $\rightarrow$ (implication).
– des parenthèses, servant à lever l'ambiguité dans la phrase.

Note : En français, le « ou » à deux interprétations : la première est inclusive (les deux cas peuvent se produirent), la seconde est exclusive (seul l'un des deux cas peut se produire, à l'exclusion de l'autre). Le symbole $\vee$ représente le *ou inclusif*.

Exercice 1 *Sémantique*
Toute suite composée de variables propositionnelles, parenthèses et connecteurs logiques n'a pas de sens logique, comme par exemple :

$$(\rightarrow\rightarrow \vee r.$$

Une expression propositionnelle est dite ***bien formée*** *si elle peut être obtenue par un nombre quelconque les règles de syntaxe suivantes :*

R1 Une variable propositionnelle est une expression propositionnelle bien formée.
R2 Si E est une expression propositionnelle bien formée, alors $\neg E$ l'est aussi.
R3 si E_1 et E_2 sont des expressions propositionnelles bien formées, alors $E_1 \vee E_2$, $E_1 \wedge E_2$ et $E_1 \rightarrow E_2$ sont aussi des expressions propositionnelles bien formées.

Les expressions suivantes sont-elles bien formées ? (ajouter éventuellement des parenthèses pour « désambiguiser »ces expressions).

1. $\neg p \rightarrow qr$
2. $(\neg p) \rightarrow q \wedge r$
3. $(p\neg) \rightarrow (q \vee r)$

Non, puisque $\neg p$ n'est pas une expression bien formée.

4. $\neg(\rightarrow p)$

Exercice 2 *Table de vérité des Connecteurs logiques*
Compléter les tables de vérité suivantes :

p	$\neg p$
V	
F	

p	q	$p \wedge q$
V	V	
V	F	
F	V	
F	F	

p	q	$p \vee q$
V	V	
V	F	
F	V	
F	F	

p	q	$p \rightarrow q$
V	V	
V	F	
F	V	
F	F	

Indications pour ceux n'ayant jamais fait de logique : Le $\vee$ est le « ou inclusif », c'est-à-dire $fromage \vee dessert$ signifie que vous pouvez prendre du fromage et du déssert. $p \rightarrow q$ est « logiquement équivalent » à $\neg p \vee q$ (l'explication sera donnée ultérieurement).

Exercice 3 *Equivalence logique*
Deux propositions sont dites ***logiquement équivalentes*** *(ou* ***équivalentes*** *ou encore égales) si elles ont mêmes tables de vérité.*

On définit les connecteurs $\leftrightarrow$ et $|$ par les tables suivantes :

p	q	$p \leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

p	q	$p \vert q$
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	V

1. Montrer, en complétant la table de vérité suivante, que $p \leftrightarrow q$ est logiquement équivalent à $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$.

p	q	$p \rightarrow q$	$q \rightarrow p$	$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$
V	V			
F	V			
V	F			
F	F			

2. Montrer que $p|q$ est logiqment équivalent à $\neg(p \wedge q)$.

p	q	$p \wedge q$	$\neg(p \wedge q)$
V	V		
F	V		
V	F		
F	F		

3. Pouvez-vous trouver une équivalence logique entre $p \leftrightarrow q$ et $p|q$?

Exercice 4 *Tautologies et contradictions*
Une ***tautologie*** *est une proposition toujours vraie, quelque soit les valeurs de vérités affectées aux variables propositionnelles la composant. Une* ***contradiction*** *est une proposition toujours fausse, quelques soit les valeurs de vérités affectées aux variables la composant.*

Montrer, à l'aide des tables de vérités, que les propositions suivantes sont des tautologies :

1. $\neg(\neg p) \leftrightarrow p$
2. $\neg(p \vee q) \leftrightarrow (\neg p) \wedge (\neg q)$
3.$\neg(p \wedge q) \leftrightarrow (\neg p) \vee (\neg q)$
4. $\neg(p \rightarrow q) \leftrightarrow (p \wedge (\neg q))$
5. $(p \wedge (p \rightarrow q)) \leftrightarrow q$
6. $p \rightarrow (q \rightarrow r)) \leftrightarrow ((p \wedge q) \rightarrow r)$
7. $((p \rightarrow q) \wedge (\neg p \rightarrow q)) \leftrightarrow q$

8. ***Contraposée*** $(p \to q) \leftrightarrow (\neg p \to \neg q)$
9. *Montrer que* $p \wedge \neg p$ *est une contradiction (principe de non-contradiction).*

Exercice 5 *Réciproque, contraposée et négation*
Si P *est une phrase assertive, la* ***négation*** *de* P *est* $\neg P$*. Lorsque cette phrase est une implication* $(A \to B)$*, la réciproque de cette implication est l'implication* $B \to A$ *alors que la* ***contraposée*** *de* P *est l'implication* $\neg B \to \neg A$*.*

Donnez, pour chacune des phrases assertives suivantes, sa réciproque, sa contraposée et sa négation. Précisez, lorsque cela vous est possible, pour chaque assertion obtenue, si elle est vraie ou non.

1. *S'il pleut, alors mon jardin est mouillé.*
2. *Si* a *est un réel strictement positif, alors* $a + \frac{1}{a} \geqslant 2$*.*
3. *Si* a *est un réel positif, alors* $\sin(a) \leqslant a$*.*
4. *Si* a *est un réel positif, alors* $\cos(a) \leqslant a$*.*
5. *Si* f *et* g *sont deux fonctions à valeurs réelles croissantes, alors* $f + g$ *est une fonction croissante.*
6. *Si* $a + b = c + d$*, alors* $a = c$ *et* $b = d$*.*

Exercice 6 *Système minimal de connecteurs*
Les différents connecteurs logiques $\{\neq, \vee, \wedge, \to\}$ *que nous venons de présenter sont redondants, c'est-à-dire que nous pouvons tous les exprimer à l'aide d'un nombre plus petit de connecteurs.*

1. *Montrer que vous pouvez exprimer* $p \wedge q$ *et* $p \to q$ *à l'aide des seuls connecteurs logiques* $\neg$ *et* $\vee$*.*
2. *Montrer de même que vous pouvez exprimer tous les connecteurs logiques précédents à l'aide des seuls* $\neg$ *et* $\wedge$*.*
3. *La* ***barre de Sheffer*** *(*`NAND` *en informatique), notée* $|$*, est définie dans l'exercice 3.*

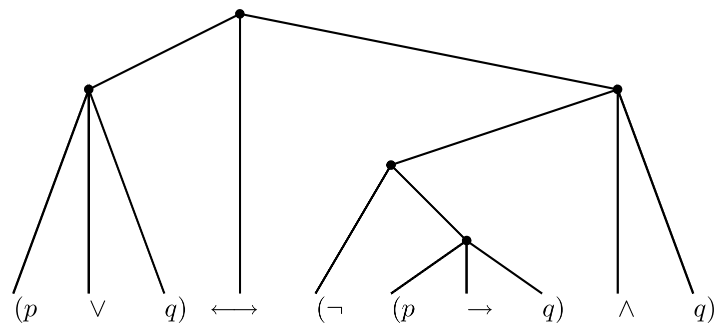
Montrer que la barre de Sheffer est un ***connecteur universel****, c'est-à-dire que tous les connecteurs logiques précédemment définis peuvent s'exprimer à l'aide de la seule barre de Sheffer.*

Exercice 7 *Formes équivalentes à la double implication*
Le fait de pouvoir réécrire une expression à l'aide d'un petit nombre de connecteurs logiques permet d'obtenir une écriture normalisée des propositions. Les deux dernières ici présentées sont largement utilisées pour formalisées les expressions logiques.

1. *Ecrire* $p \leftrightarrow q$ *uniquement à l'aide des connecteurs logiques* $\neg$ *et* $\vee$*.*
2. ***Forme Normale Conjonctive :*** *Ecrire* $p \leftrightarrow q$ *comme conjonction de disjonctions.*
3. ***Forme Normale Disjonctive :*** *Ecrire* $p \leftrightarrow q$ *comme disjonction de conjonctions.*

Exercice 8 *Evaluation des expressions propositionnelles*
On considère une expression propositionnelle E *bien formée. L'évaluer, c'est indiquer la valeur qu'elle prend pour toute combinaison de valeurs de vérité des variables propositionnelles qu'elle comporte. On associe alors un arbre a la formule propositionnelle.*

1. E_1 *:* $(p \vee q) \longleftrightarrow (\neg(p \to q) \wedge q)$ *à pour arbre associé :*



Compléter alors le tableau suivant :

$(p$	$\vee$	$q)$	$\leftrightarrow$	$(\neg$	$(p$	$\rightarrow$	$q)$	$\wedge$	$q)$
V		V			V		V		V
V		F			V		F		F
F		V			F		V		V
F		F			F		F		F

A quel condition ce raisonnement est-il vrai ?

2. On considère le raisonnement suivant :

Amélie est toujours bouleversée lorqu'elle lit un poème de Baudelaire. Or, Amélie est bouleversée par le poème qu'elle lit actuellement. Donc Amélie lit un poème de Baudelaire.

On donne pour formaliser le précédent raisonnement les symboles suivants :

- *p : « Amélie lit actuellement un poème de Baudelaire »*
- *q « Amélie est bouleversée. »*

a. Donnez l'expression propositionnelle formalisant le raisonnement.

b. Evaluez cette proposition.

c. Le raisonnement précédent est-il ***valide*** *(i.e. est-ce une tautologie) ? Si non, proposez un « monde » dans lequel il est faux.*

3. On considère le raisonnement suivant :

Si Amélie porte ses livres, c'est qu'elle va à la faculté. Or, Amélie ne va pas à la fac donc elle ne porte aucun livre.

On formalise le précédent raisonnement par :

- *p : « Amélie porte des livres »*
- *q « Amélie va à la faculté. »*

a. Donnez l'expression propositionnelle formalisant le raisonnement.

b. Evaluez cette proposition.

c. Le raisonnement précédent est-il ***valide*** *(i.e. est-ce une tautologie) ? Si non, proposez un « monde » dans lequel il est faux.*

2 Théorie des Ensembles

2.1 Premières définitions

C'est Cantor qui, le premier, élabora une théorie des ensembles. « Par ensemble, on entend regroupement en un tout d'objets bien distincts de notre intuition ou de notre pensée ». Ces objets sont appelés **éléments**.
Si a est un élément de l'ensemble E, on note $a \in E$. Soient E et F deux ensembles. Si pour tout élément a de E, nous avons $a \in F$, on dit que l'ensemble F est **inclus** dans l'ensemble E, ou encore que F est une partie de E, et on note cette relation $F \subset E$.

Un ensemble peut être défini de deux façons :

- En **extension**, par la donnée de la liste de ces éléments (ex : $\{Benoit,\ Virginie,\ Aude\}$).
- En **compréhension** par la donnée d'une propriété caractéristique des éléments (par exemple, l'ensemble des filles d'une classe, ou encore les agriculteurs, ou le fait d'être un entier pair). A ce titre, la propriété donnée ne peut être quelconque ; on dit qu'elle doit être collectivisante. Par exemple, $x \in x$ n'est pas une telle propriété.

Un ensemble ayant un unique élément est un **singleton**, alors qu'un ensemble ayant deux éléments est une **paire**. Il existe un ensemble n'ayant aucun élément, appelé **ensemble vide**, et noté $\emptyset$. L'ensemble contenant tous les éléments est appelé l'**univers**. Le nombre d'éléments d'un ensemble est dit le **cardinal** de l'ensemble.

Exercice 9 *Définition d'ensembles*
Précisez le cardinal des ensembles suivants, et les écrire en extension lorsqu'ils sont donnés en compréhension.

1. $E_1 = \{x \in \mathbb{N} : x^3 = 2\}$.
2. $E_2 = \{x : x \textit{ est une lettre de l'alphabet}, x \textit{ est une voyelle}\}$.
3. $E_3 = \{x \in \mathbb{R} / x^2 + 3x + 2 = 0\}$.
4. $E_4 = \{(x, y)/x \in \{1, 2, ..., 6\}, y \in \{1, 2, .., 6\} \textit{ et } x + y = 10\}$.
5. $E_5 = \emptyset$
6. $E_6 = \{\emptyset\}$
7. $E_7 = \{\{\emptyset\}\}$
8. $E_8 = \{\{1, 2, 3, 4, 5\}\}$

2.2 Opération sur les ensembles

L'**union** de deux ensembles A et B, notée $A \cup B$, est l'ensemble de tous les éléments appartenant à A ou à B, soit : $A \cup B = \{x/x \in A \text{ ou } x \in B\}$.

L'**intersection** de deux ensembles A et B est l'ensemble de tous les éléments appartenant à la fois à A et à B, soit : $A \cap B = \{x/x \in A \textbf{ et } x \in B\}$.

Le **complémentaire** de A est l'ensemble des éléments (de l'univers) n'appartenant pas à l'ensemble A, soit $A^c = \{x : x \notin A\}$. On le note aussi $\overline{A}$.

Exercice 10 *Différence et différence symétrique*
*Soient A et B deux parties de l'ensemble E. On définit la **différence** de A et B par :*

$$A \setminus B = \{x : x \in A \textit{ et } x \notin B\}$$

*La **différence symétrique** de A et B est définie par :*

$$A \Delta B = \{x : [x \in A \textit{ et } x \notin B] ou [x \in B \textit{ et } x \notin A]\}.$$

1. *Simplifiez les expressions suivantes :* $A \setminus \emptyset$ *;* $A \setminus E$ *;* $E \setminus A$.
2. *Exprimez* $A \setminus B$ *à l'aide de l'intersection et du complémentaire.*
3. *Simplifiez les expressions suivantes :* $A\Delta\emptyset$ *;* $A\Delta E$ *;* $A\Delta A$.
4. *Comparez* $A\Delta B$ *avec* $B\Delta A$.
5. *Simplifiez l'expression suivante :* $(A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B)$.
6. *Montrez l'égalité suivante :* $A\Delta(B\Delta C) = A\Delta[(A \cap \overline{C}) \cup (\overline{B} \cap C)]$.

Exercice 11 *Opérations élémentaires sur les ensembles*
On considère les ensembles suivants comme parties de $E = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ *:*
$A = \{0, 1, 2, 3\}$, $B = \{0, 2, 4\}$, $C = \{1, 3, 5\}$

Donnez en extension les ensembles suivants, et précisez leur cardinal.
1. $A \cup B$.
2. $A \setminus B$.
3. $A \cap C$.
4. $(A \cap B) \cup C$.
5. $(A\Delta B)^c \cap C$.

Exercice 12 *Simplifications*
Soient A *et* B *deux parties d'un ensemble* E*. Simplifier l'écriture des ensembles suivants :*
1. $A \cap (A \cup B)$
2. $A \cup (A \cap B)$
3. $A \cap (\overline{A} \cup B)$
4. $(A \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B)$.

Exercice 13 *Manipulation sur les opérations sur les ensembles*
Soient A, B *et* C *des parties d'un ensemble* E*. Démontrer :*
1. $\overline{\overline{A}} = A$.
2. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ *et* $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.
3. $[A \subset B] \leftrightarrow [A \cap B = A] \leftrightarrow [\overline{B} \subset \overline{A}]$.
4. $(A \cup B) \cap (B \cup C) \cap (C \cup A) = (A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (C \cap A)$.
5. *Si* $(A \cap B) \subset (A \cap C)$ *et* $(A \cup B) \subset (A \cup C)]$*, alors* $B \subset C$.

Exercice 14 *Ensemble des parties d'un ensemble*
Soit E *un ensemble. On note par* $\mathcal{P}(E)$ *l'ensemble des parties de* E*, c'est-à-dire :*

$$\mathcal{P}(E) = \{A : \quad A \subset E\}$$

1. *Ecrire en extension les ensembles suivants :* $\mathcal{P}(\{1\})$, $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\{1\}))$, $\mathcal{P}(\emptyset)$, $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset))$.
2. *Est-il vrai que :* $\forall A, B \in \mathcal{P}(E)$, $\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$ *?*
3. *Est-il vrai que :*$\forall A, B \in \mathcal{P}(E)$, $\mathcal{P}(A \cup B) = \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$ *?*
4. *Soit* A *un ensemble de cardinal égal à* n*. Quel est le cardinal de* $\mathcal{P}(A)$ *?*

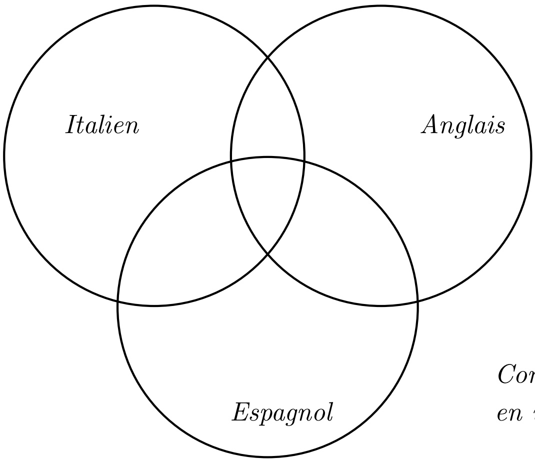
2.3 Diagramme de Venn

Exercice 15 *Cardinaux et opérations élémentaires*
Soient A, B, C *trois parties d'un ensemble* E*. Montrer que :*
1. $Card(A \cup B) = Card(A) + Card(B) - Card(A \cap B)$.
2. $Card(A \cup B \cup C) = Card(A) + Card(B) + Card(C) - Card(A \cap B) - Card(A \cap C) - Card(B \cap C) + Card(A \cap B \cap C)$.

Exercice 16 *Diagramme de Venn*

100 des 120 étudiants inscrits en première année apprennent au moins une langue étrangère, parmi l'anglais, l'italien et l'espagnol. Le département de langue nous informe que :

- *65 apprennent l'anglais*
- *45 apprennent l'italien*
- *42 apprennent l'espagnol*
- *20 apprennent l'anglais et l'italien*
- *25 apprennent l'anglais et l'espagnol*
- *15 apprennnet l'italien et l'espagnol*



Completez ce diagramme en indiquant le cardinal de chaque classe.

1. *Combien y-a-t'il d'étudiant pratiquant les trois langues ?*
2. *Combien d'étudiants pratiquant exactement une langue étrangère ?*

Exercice 17 *Retour vers la logique*

Le raisonnement suivant est adapté d'un dialogue d'« Alice au pays des merveilles » :

- *Mes casseroles sont les seuls objets en étain que je possède.*
- *Je trouve vos cadeaux très utiles.*
- *Aucune de mes casseroles ne présente la moindre utilité.*
- *Les cadeaux que vous me faites ne sont pas en étain.*

Représentez ces assersions à l'aide d'ensembles, et déduisez-en la validité du raisonnement.

3 Relations et Applications

3.1 Introduction

Nous avons précédemment rencontré la notion de paires $\{a, b\}$ d'éléments, qui n'étaient pas ordonnées $\{a, b\} = \{b, a\}$. Une *paire ordonnée* (a, b) d'éléments est la donnée de deux éléments, un premier (a) et un second (b). Ainsi, $(a, b) \neq (b, a)$ à moins que $a = b$.

Soient A et B deux ensembles. Le *produit cartésien* de A et B, noté $A \times B$, est l'ensemble des paires ordonnées (a, b) avec $a \in A$ et $b \in B$. On note généralement A^2 le produit $A \times A$.

3.2 Relation

Exercice 18 *Relation entre deux ensembles*
*Une **relation** $\mathcal{R}$ entre les éléments x de E et y de F est la donnée d'une partie de $E \times F = \{(x, y) : x \in E, y \in F\}$. Si $x \in E$ et $y \in F$ sont en relation par $\mathcal{R}$, on note $x\mathcal{R}y$ ou encore $\mathcal{R}(x, y)$.*
1. Donnez les relations définies, sur $E = F = \{1, 2, .., 6\}$ par :
a. $(x\mathcal{R}_1 y) \Longleftrightarrow x + y = 6$.
b. $(x\mathcal{R}_2 y) \Longleftrightarrow x = y$.
c. $(x\mathcal{R}_3 y) \Longleftrightarrow x$ divise y.

2. A présent, $E = \{1, 2, ..., 6\}$ et $F = \{un, deux, trois, quatre, cinq, six\}$. Définissez la relation $\mathcal{R}$ suivante sur $E \times F$: $x\mathcal{R}y$ si y contient x lettres.

Exercice 19 *Eléments de théorie des relations*
Une relation $\mathcal{R}$ sur les éléments d'un même ensemble E est dite :
- ***réflexive** si, pour tout $x \in E$, $\mathcal{R}(x, x)$.*
- ***symétrique** si, $x\mathcal{R}y \Rightarrow y\mathcal{R}x$.*
- ***antisymétrique** si $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}x \Longrightarrow x = y$.*
- ***transitive** si $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z \Longrightarrow x\mathcal{R}z$.*

1. Quelles sont les propriétés des relations entre nombres entiers suivantes :
a. $x\mathcal{R}_1 y \Leftrightarrow x$ divise y.
b. $x\mathcal{R}_2 y$ si $x - y$ est divisible par 2.
c. $x\mathcal{R}_3 y$ si $x \leqslant y$.
d. $x\mathcal{R}_4 y$ si $x = y$.
e. $x\mathcal{R}_5 y$ si x et y ont même ensemble de diviseurs premiers (par exemple, 20 à pour ensemble de diviseurs premiers $\{2, 5\}$).

*Une relation est une **relation d'équivalence** si elle est réflexive, symétrique et transitive. Une relation est une **relation d'ordre** si elle est réflexive, antisymétrique et transitive. Les relations précédentes étaient-elles d'équivalence ?, d'ordre ?*

3.3 Fonctions

Exercice 20 *Fonction ou application*
*Une **fonction** de A dans B est la donnée, pour tout élément de A, d'un élément de B. L'élément lié à $a \in A$ par la fonction f est noté $f(a)$, et est dit image de a par f.*

Les applications suivantes sont-elles des fonctions ?
1. $A = \mathbb{N}$, $B = \mathcal{P}(\mathbb{N})$; $f_1(x) = \{y : y$ divise $x\}$.
2. $A = \mathbb{N}$, $B = \mathcal{P}(\mathbb{N}$; $f_2(x) = \{y : y = 2x + 3\}$.
3. $A = \mathbb{R}$, $B = \mathbb{R}$; $f_3(x) = \{y \in \mathbb{R} : y^2 = x\}$.
4. $A = \{etudiants\}$, $B = \mathcal{N}$; à chaque étudiant de la classe, on attribue son âge.

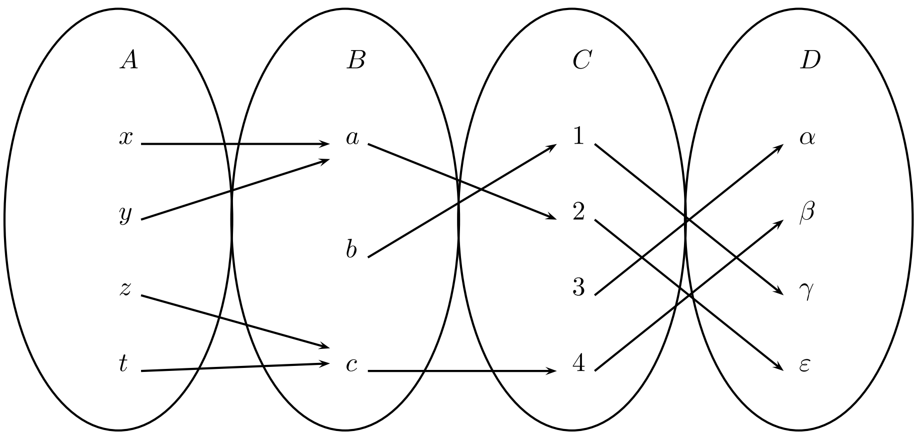
5. $A = \{enseignants\}$, $B = \{etudiants\}$; à chaque enseignant de l'IUP, on attribue ses étudiants.

Exercice 21 *Propriété des applications*
Une fonction f de A dans B est dite ***injective*** *si les différents éléments de A ont des images distinctes.*
Une fonction f de A dans B est dite ***surjective*** *si chaque élément de B est l'image d'un élément de A.*

1. Ecrivez les propriétés précédentes à l'aide de propositions logiques.

2. Les fonctions suivantes sont-elles surjectives ? injectives ?
a. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, $f(x) = x^2$.
b. $f : \mathbb{R} \to [-1, 1]$, $f(x) = \sin(x)$.
c. A chaque individu d'une classe, on attribue son âge.
d. A chaque pays, on attribue la latitude et la longitude de sa capitale.
e. A chaque livre, on attribue le nom de son premier auteur.

Exercice 22 *Composition de fonctions*
Si $f : A \to B$ et $g : B \to C$ sont deux fonctions, on définit la fonction $g \circ f : A \to C$ par : $(g \circ f)(x) = g(f(x))$.
On considére les fonctions $f : A \to B$, $g : B \to C$ et $h : C \to D$ définies ci-dessous :



1. Ces fonctions sont-elles injectives ? Surjectives ?
2. Définissez les fonctions composées $k = g \circ f$ et $l = h \circ g$?
3. Les fonctions k et l sont-elles injectives ? surjectives ?

Exercice 23 *Injective ou surjective ?*
Soient $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, $f : x \longrightarrow 2x$, et $g : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, $g : x \longrightarrow \begin{cases} \frac{x}{2} & \text{si } x \text{ est pair} \\ \frac{x+1}{2} & \text{si } x \text{ est impair} \end{cases}$
1. Les applications f et g sont-elles injectives et / ou surjectives ?
2. Déterminer $f \circ g$ et $g \circ f$.
3. Les fonctions $f \circ g$ et $g \circ f$ sont-elles injectives ? Surjectives ?

Exercice 24 *Injection, surjection et composition version théorique*
Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications.

1. Montrer que si f et g sont injectives, alors $g \circ f$ l'est aussi.
2. Montrer que si f et g sont surjectives, alors $g \circ f$ l'est aussi.
3. Montrer que si $g \circ f$ est surjective, alors g est surjective.
4. Montrer que si $g \circ f$ est injective, alors f est injective.
5. Montrer que si $g \circ f$ est surjective et g injective, alors f est surjective.
6. Montrer que si $g \circ f$ est injective et f est surjective, alors g est injective.
7. Soient E et F deux parties de $\mathbb{R}$. Montrer qu'une fonction f strictement croissante de E dans F est injective.

Exercice 25 *Bijection*
Une fonction f de E dans F est dite ***inversible*** *s'il existe une fonction g de F dans E telle que, pour tout $x \in X$, $(g \circ f)(x) = x$ et pour tout $y \in F$, $(f \circ g)(y) = y$. La fonction g est alors l'inverse de f, notée f^{-1}.*
La fonction $f : E \to F$ est une ***bijection*** *si f est à la fois injective et surjective. La fonction f est inversible si et seulement si c'est une bijection.*

Les fonctions suivantes sont-elles des bijections ? Si oui, donnez la fonction inverse.
1. $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \to 2x + 1$.
2. $f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $x \to x^2$.
3. $f_3 : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$; $x \to x^2$.
4. $f_4 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $x \to x^3 + 1$.
5. $f_5 : \mathcal{P}(E) \to \mathcal{P}(E)$, $A \to \overline{A}$ $(E \neq \emptyset)$.
6. $f_6 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$; $(x, y) \to (2x + y, x - y)$.

3.4 Image directe, image réciproque

Exercice 26 *Définition et application*
*Soit $f : E \to F$ une application et A une partie de E. L'**image directe** de A par f, notée $f(A)$, est l'ensemble des images des éléments de A par F.*
*Si B est une partie de F, l'**image réciproque** de B par F, notée $f^{-1}(B)$ est l'ensemble des éléments de E dont l'image par f appartient à B.*
1. $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_1(x) = x + 2$. $A = [2, 4]$ *et* $B = [1, 2]$. *Qu'est-ce-que* $f_1(A)$? $f_1^{-1}(B)$?
2. $f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_2(x) = x^2$. $A = [2, 4]$ *et* $B = [1, 2]$. *Qu'est ce que* $f_2(A)$? $f_2^{-1}(B)$?
3. *Qu'est ce que* $f_1^{-1}(f_1(A))$? *Même question pour* $f_2(f_2^{-1}(B))$.

Exercice 27 *Propriétés des images directes et réciproques*
Soit $f : E \to F$ une application de E dans F. Soient A et A' deux parties de E et B et B' deux parties de F.
1. *Montrer que si* $A \subset A'$, *alors* $f(A) \subset f(A')$.
2. *Montrer que* $f(A \cap A') \subset f(A) \cap f(A')$. *Qu'obtient-on si f est injective ?*
3. *Montrer que* $f(A \cup A') = f(A) \cup f(A')$.
4. *Montrer que* $f^{-1}(B \cup B') = f^{-1}(B) \cup f^{-1}(B')$.
5. *Montrer que* $f^{-1}(B \cap B') = f^{-1}(B) \cap f^{-1}(B')$.
6. *Montrer que* $f^{-1}(\overline{B}) = \overline{f^{-1}(B)}$
7. *Montrer que* $A \subset f^{-1}(f(A))$. *A quelle condition sur f obtient-on l'inclusion réciproque ?*
8. *Montrer que* $f(f^{-1}(B)) \subset B$. *A quelle condition sur f obtient-on l'inclusion réciproque ?*

4 Calcul des prédicats

4.1 Introduction

Certaines inférences échappent au modèle du calcul propositionnel vu précédemment. Par exemple, considérons le raisonnement suivant :

- Tous les hommes sont mortels.
- Socrate est un homme
- donc Socrate est mortel.

Ce type de raisonnement ne peut se vérifier dans le seul cadre du calcul propositionnel (pour lequel les trois assertions seraient trois propositions différentes pouvant prendre des valeurs de vérité de manières indépendantes). En terme ensembliste, Platon appartient à l'ensemble des hommes, qui est un sous-ensemble de l'ensemble des mortels, donc Platon est un élément de l'ensemble des mortels. L'inférence est donc correcte.

Pour capter ces inférences du langage naturel, intuitivement perçues comme vraies, on introduit la notion de *prédicat*, qui exprime la propriété qu'un élément appartenant à un certain univers peut, ou non, posséder. De même, on introduit aussi deux *quantificateurs*, le premier d'existence ($\exists$) et le second dit universel ($\forall$).

4.2 Lexique

On retrouve la notion de proposition bien formée, mais cette fois-ci, les propositions utilisent les symboles des ensembles suivants :

- un ensemble dénombrable de *variables individuelles* (x, y, z...).
- un ensemble dénombrable de *constantes d'individus* (a, b, c...).
- un ensemble dénombrable de *variables propositionnelles* (p, q, r...).
- un ensemble dénombrable de *prédicats* unaires ($r^{1,0}$, $r^{1,1}$, ...), binaires ($r^{2,0}$, $r^{2,1}$,...), ... n-aire ($r^{n,0}$, $r^{n,1}$,...).
- un ensemble dénombrable de *fonctions* unaire, binaire, n-aire
- les *connecteurs logiques* $\{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$.
- les *quantificateurs* $\{\forall x, \exists x, \forall y, ...\}$.
- les *parenthèses*

Exercice 28 *Exemple de modèle*
Un ***modèle*** *est la donnée d'un ensemble (ou domaine) auquel on fait correspondre les symboles de constantes d'individus avec les éléments du domaine, les prédicats correspondent aux relations sur le domaine et les fonctions correspondent aux fonctions du domaine.*
1. On considère alors la syntaxe dont $\{a, b, c\}$ *sont les constantes,* L *est un prédicat unaire et* $\{P, Q\}$ *sont les prédicats binaires. Nous avons les assertions suivantes :*

- $\forall x, L(x)$
- $P(a, b)$, $P(a, c)$
- $Q(b, c)$

Les ensembles suivants sont-ils des modèles de la précédente syntaxe ?

$M_1 = \{Sandrine, Sabine, Emma\}$ *avec les relations : Sabine est la mère de Sandrine et Emma, qui sont donc soeurs.*

$M_2 = M_1 = \{Sandrine, Sabine, Emma\}$ *avec les relations : Sabine est la mère de Sandrine qui est la mère d'Emma, et donc Sabine est la grand-mère d'Emma.*

Le modèle étendu $M[x|a]$ *est le modèle obtenu, partant du modèle* M*, en associant la variable* x *à l'élément* $a \in M$*.*

$$M \models \forall x, P \text{ si } M[a|x] \models P, \text{ pour tout élément } a \text{ de } M.$$

$$\models \exists x, P \text{ si } M[a|x] \models P, \text{ pour un élément } a \text{ de } M.$$

Exercice 29 *Thème*
Ecrire les phrases suivantes à l'aide de quantificateurs :

1. *On peut toujours trouver un rationnel compris entre deux rationnels donnés.*
2. *Il n'existe pas d'entier supérieur à tous les autres.*
3. *Si la somme de deux entiers naturels est nulle, alors ces deux entiers sont nuls.*
4. *Etant donné un réel quelconque, il existe des réels qui lui sont strictement supérieurs.*

Exercice 30 *Version*
Dans les assertions suivantes, a, b et c désignent des entiers naturels. Traduisez ces assertions en langue naturelle et précisez, pour chacune d'elle, si elle est vraie ou fausse.

1. $\forall a, \exists b, \exists c,\ a = bc$
2. $\forall b, \forall c, \exists a,\ a = bc$
3. $\exists a, \exists b, \exists c,\ a = bc$
4. $\exists b, \forall a, \exists c,\ a = bc.$

Exercice 31 *Comment quantifier l'amour ?*
Dans cet exercice, nous considérons qu' « aimer »est une relation binaire (non nécessairement symétrique). On note $Aime(x, y)$ si la personne x aime la personne y.
Représentez, à l'aide de propositions logiques, les phrases suivantes :

1. *Quelqu'un aime Valentine.*
2. *Personne n'aime Quentin.*
3. *Toute personne aime quelqu'un.*
4. *Quelqu'un est aimé de tous.*
5. *Toute personne s'aime.*
6. *Il n'y a personne qui ne s'aime pas lui-même.*

Les deux propositions suivantes sont-elles équivalentes ?
$(\exists x, Aime(x, Caroline)) \wedge (\exists x, Aime(Caroline, x))$.
$\exists x, (Aime(x, Caroline \wedge Aime(Caroline, x)$.

Exercice 32 *Exemple de relation*
Dans cet exercice, P désigne un ensemble de personnes et A un ensemble d'activités. On considère les relations suivantes :

- $faire(x, a)$ *signifie que la personne x fait l'activité a.*
- $necessite(a, b)$ *signifie que l'activité a nécessite, avant d'être faite, que l'activité b soit faite.*
- $competent(x, a)$ *signifie que la personne x peut faire l'activité x.*

Traduisez en langage logique les assertions suivantes :

1. *Toute activité doit être réalisée par quelqu'un de compétent pour cette activité.*
2. *Franck est compétent pour toutes les activités.*
3. *Cette activité est tellement simple que tout le monde est compétent pour la réaliser.*
4. *Il faut réaliser toutes les activités prérequises par l'activité Decoration avant de réaliser celle-ci.*
5. *Toute personne est compétente dans au moins une activité.*
6. *Toute activité dispose au moins d'une personne compétente.*
7. *Les activités pour lesquelles Anna est compétente ont toutes au moins un prérequis.*

Exercice 33 *Hein ? ? ?*
Soit I un ensemble fini. Qu'est Q pour I ?

$$(\forall q \in Q, q \subset I) \wedge (\forall i \in I, \exists q \in Q, i \in q) \wedge (\forall q \in Q, \forall q' \in Q, (q \cap q' = \emptyset \Leftrightarrow q \neq q')).$$

4.3 Mise sous une forme standardisée

Exercice 34 *Forme prénexe*
Une formule est en ***forme prénexe*** *si elle ne contient aucun quantificateur ou si elle est de la forme*

$$Q_1 x_1 Q_2 x_2 ... Q_n x_n A$$

avec pour tout $i \in \{1, 2, ..., n\}$, $Q_i \in \{\forall, \exists\}$ *et où* A *est une formule sans quantificateur.*
Donnez la forme prénexe des propositions suivantes :

1. $\neg \exists x, P(x)$
2. $\neg \forall x, P(x)$
3. $(\neg \forall x, P(x)) \rightarrow \forall y, Q(y)$ *(Notez bien que dans la forme prénexe, le symbole* $\rightarrow$ *n'apparaît pas !).*
4. $\forall x (\forall y Q(x, y) \rightarrow P(x))$.

Exercice 35 *Skolémisation*
On considère ici une proposition mise sous forme prénexe. Sa ***Skolémisation*** *consiste à supprimer les quantificateurs présents dans la formule de la façon suivante : on considère le quantificateur le plus profond dans la formule*

- *si c'est un quantificateur universel, on le supprime (et transformons la variable quantifiée en variable libre)*
- *si c'est un quantificateur existentiel, on le supprime et on remplace toutes les occurences de la variable quantifiée par une fonction dépendant de toutes les variables quantifiées universellement qui précèdent. Une telle fonction est dite* ***fonction de Skolem****.*

Mettre sous forme de Skolem les expressions suivantes :

1. $\forall x, P(x)$
2. $\forall x, \exists y, P(x, y)$.
3. $\exists y, \forall x, P(x, y)$.
4. $\forall x, \forall y, P(x, y)$.
5. $\forall x, \exists y, \forall z, Q(x, y, z)$.
6. $\forall x, \forall y, \exists z; Q(x, z, y)$.
7. $\forall x, \exists y, \forall z, \exists t, R(x, y, z, t)$

Indication : Réponse7. $R(x, g(x), z, f(x, z))$

8. $\forall x, (\forall y, Q(x, y) \rightarrow P(x))$.

Exercice 36 *Mise sous forme clausale*
Un littéral est, soit un prédicat $P(x_1, x_2, ..., x_n)$*, soit la négation de ce prédicat* $\neg P(x_1, x_2, ..., x_n)$*.*
Une formule est sous forme ***clausale*** *si elle est disjonction de littéraux (ou de clauses), c'est-à-dire si elle se présente comme disjonction de conjonctions.*

Mettre sous forme clausale les formes de Skolem obtenues à l'exercice 35.
Indic : 8. $P(x) \vee \neg Q(x, f(x))$.

4.4 Résolution en calcul de prédicats

Il existe deux façons différentes de montrer la validité d'un raisonnement. La première est de montrer directement sa validité au moyen des méthodes du type *coupures de Gentzen.* La seconde consiste à montrer que, partant des prémisses et de la négation de la conclusion, nous obtenons une absurdité (raisonnement par *falsification*). Ces deux méthodes présentent des avantages et des inconvénients. Nous allons, dans la suite, mettre en place les principaux arguments utilisés dans la méthode de falsification.

Cette méthode consiste :

– Réécrire les prémisses sous une forme normalisée.
– Utiliser un théorème de Herbrand.

Exercice 37 *Jeux d'écritures*
On s'intéresse au raisonnement suivant :

P1 Un dragon est heureux si tous ses enfants peuvent voler.
P2 Les dragons verts peuvent voler.
P3 Un dragon est vert s'il a au moins un parent vert ou rose.
C Les dragons verts sont heureux.

On prend les notations suivantes : $h(x)$ *pour* x *est heureux,* $ve(x)$ *pour* x *est vert,* $ro(x)$ *pour* x *est rose,* $vo(x)$ *pour* x *vole et* $p(x, y)$ *pour* x *est le parent de* y*.*

1. Ecrivez les propositions en termes logiques.

2. Transformez les expressions $P1$*,* $P2$ *et* $P3$ *obtenues en formes clausales. Transformez la négation de la conclusion* C *en forme clausale (conjonction de disjonctions).*

3. Quelles sont les différentes clauses que vous obtenez finalement ?

Réponse : L'ensemble des clauses est :
$\{p(x_1, f(x_1)) \vee h(x_1); \neg vo(f(x_2)) \vee h(x_2); \neg ve(x_3) \vee vo(x_3);$
$\neg p(y_1, x_4) \vee \neg ve(y_1) \vee ve(x_4); \neg p(y_2, x_5) \vee \neg r(y_3) \vee ve(x_5); ve(a); \neg h(a)\}$

4.5 Résolution par la méthode d'unification

Remarquons que certaines expressions sont semblables. Par exemple, $\forall x, P(x)$, $\forall y, P(y)$ sont trivialement égales. De même, on peut déduire de la proposition précédente la proposition : $\forall x, \forall y, P(f(y))$, puisque $P(x)$ est vrai pour tout x, donc en particulier pour ceux de la forme $f(y)$. Cela montre l'intérêt de la substitution ; on substitue dans une expression certaines variables afin d'obtenir une autre expression. Sous forme clausale, les expressions sont : $P(x)$ et $P(f(y))$. La substitution $x \to f(y)$ est notée $\sigma = [x|f(y)]$. Nous obtenons ainsi : $P(x)\sigma = P(f(y))$.

Exercice 38 *Unificateur*
Les expressions E_1 *et* E_2 *sont dites* ***unifiables*** *s'il existe une substitution* σ *telle que* $E_1\sigma = E_2\sigma$*, avec* $\sigma = [x_1|t_1, ..., x_n|t_n]$*.*

Trouver, s'il existe, l'unificateur des propositions suivantes :

1. $P(x)$ *et* $P(A)$*.*
2. $P(f(x), y, g(x))$ *et* $P(f(x), x, g(x))$*.*
3. $P(f(x), y, g(y))$ *et* $P(f(x), z, g(x))$*.*
4. $P(g(f(v)), g(u))$ *et* $P(x, y)$*.*
5. $P(x, f(x))$ *et* $P(x, x)$*.*

Soit S une formule mise sous forme clausale, et C_1, C_2 deux clauses de S. S'il existe un atome L tel que $L \in C_1$ et $\neg L \in C_2$, alors la clause

$$R \equiv (C_1 \setminus L) \vee (\mathbb{C}_2 \setminus \{\neg L\}$$

est appelée *résolvante* de C_1 et C_2, et est une conséquence logique de S. Ainsi, S et $S \vee R$ sont logiquement équivalentes.

Exercice 39 *Le retour des dragons*

On reprend les notations et résultats de l'exercice 37. Le tableau ci-dessous regroupe les clauses obtenues :

1. Quel est l'unificateur des clauses 2 *et* 7 *? Quelle est la résolvante des clauses* 2 *et* 7 *? Recopiez celle-ci en ligne* 8

2. Quel est l'unificateur des clauses 8 *et* 3 *? Déduisez-en alors la résolvante de ces clauses, et recopiez-là en ligne 9.*

3. Sur le même principe, complétez le tableau afin d'obtenir une absurdité. Que concluez-vous quant-à la validité du raisonnement ?

1	$p(x_1, f(x_1)) \vee h(x_1)$	$P1$
2	$\neg vo(f(x_2)) \vee h(x_2)$	$P1$
3	$\neg ve(x_3) \vee vo(x_3)$	$P2$
4	$\neg p(y_1, x_4) \vee \neg ve(y_1) \vee ve(x_4)$	$P3$
5	$\neg p(y_2, x_5) \vee \neg r(y_3) \vee ve(x_5)$	$P3$
6	$ve(a)$	$\neg$ *Conclusion*
7	$\neg h(a)$	$\neg$ *Conclusion*
8		*2 et 7* $[x_2 \vert \quad]$
9		*8 et 3* $[x_3 \vert \quad]$
10		*9 et 4* $[x_4 \vert \quad]$
11		*1O et 1* $[x_1 \vert \quad ; y_1 \vert \quad]$
12		*11 et 6*
13		*12 et 7*
14		*13 et 9*

Exercice 40 *Qui a tué le chat ?*

On considère la base de connaissances suivante :

a. Luc possède un chien.
b. Toute personne possédant un chien aime les animaux.
c. Les personnes qui aiment les animaux ne tuent pas les animaux.
d. Luc a tué Félix ou la curiosité a tué Félix.
e. Félix est un chat.
f. Tous les chats sont des animaux.

On introduit les notations suivantes : $Possede(x, y)$ *si* x *possède* y, $Chien(x)$ *si* x *est un chien,* $Chat(x)$ *si* x *est un chat,* $AimeAni(x)$ *si* x *aime les animaux,* $Animal(x)$ *si* x *est un animal,* $Tuer(x, y)$ *si* x *à tuer* y.

1. Formaliser le lexique employé dans cette base de connaissances ; quelles sont les constantes d'individus, les relations, les fonctions ?

2. Modélisez le précédent raisonnement en langage des prédicats.

3. Mettez les expressions obtenues sous formes clausales afin d'obtenir l'ensemble de clauses suivant :

$$\left\{ \begin{array}{c} Chien(Fido), Possede(Luc, Fido), \neg Possede(x,y) \vee \neg P(y) \vee AimeAni(x), \\ \neg AimeAni(x) \vee \neg A(x,y) \vee \neg Tuer(x,y), Tuer(Luc, Felix) \vee Tuer(Curiosite, Felix), \\ Chat(Felix), \neg Chat(x) \vee Animal(x) \end{array} \right\}$$

4. Conjecturer quelle pourrait être la conclusion de ce raisonnement. Mettez la négation de cette conclusion sous forme clausale.

5. Complétez le tableau suivant :

1	*Chien(Fido)*	*a.*
2	*Possede(Luc,Fido)*	*a.*
3	$\neg Possede(x,y) \vee \neg Chien(y) \vee AimeAni(x)$	*b.*
4	$\neg AimeAni(x) \vee \neg A(x,y) \vee \neg Tuer(x,y)$	*c.*
5	$Tuer(Luc, Felix) \vee Tuer(Curiosite, Felix)$	*d.*
6	$Chat(Felix)$	*e.*
7	$\neg Chat(x) \vee Animal(x)$	*f.*
8		*¬ Conclusion*
9	$Tuer(Luc, Felix)$	*5 et 8*
10		*7 et 6* $[x\vert\quad]$
11		*4 et 9* $[x\vert\quad, y\vert\quad]$
12		*10 et 11*
13		*12 et*
14		*13 et*
15	*Absurde car :*	

Exercice 41 *Retour sur Aristote*
Reconsidérons le raisonnement :

p_1 *Aristote est un homme.*

p_2 *Tout homme est mortel.*

c Donc Aristote est mortel.

1. Traduisez en syntaxe logique le précédent raisonnement.

2. Mettez l'expression obtenue à partir de l'assertion p_2 *sous forme prénexe puis de Skolem.*

3. Quelle substitution faut-il alors faire pour que l'on puisse déduire la conclusion (c) des prémisses ?

Exercice 42 *Démonstration d'une tautologie*
Pour démontrer qu'une expression est une ***tautologie****, il suffit de montrer que l'on dérive une contradiction de la négation de cette expression. On souhaite démontrer que*

$$[(\forall x, P(x) \rightarrow Q(x)) \wedge P(A)] \rightarrow Q(A).$$

1. Quelle est la forme causale de la négation de cette expression ?

2. Utilisez la méthode d'unification sur deux clauses.

3. En déduire que vous aboutissez à une contradiction.

Exercice 43 *On considère le raisonnement suivant :*

- *Aucun enfant de moins de douze ans n'est accepté dans cette école en tant qu'interne.*
- *Tous les enfants studieux ont les cheveux courts.*
- *Aucun externe n'apprend le grec.*
- *Seuls les élèves de moins de douze ans sont paresseux.*
- *donc les héllénistes ont les cheveux courts.*

1. Mettre ces assertions sous forme logique.
2. Le raisonnement est-il valide ?

5 Bibliographie

Vous trouverez sur internet de nombreux cours, souvent sous forme de notes de cours ou de diaporamas. Pour préparer ce support de cours, je me suis inspiré des cours et supports suivants :

Cours de Stéphane Lafrance, Ecole supérieure de technologie de l'Université du Quebec, LOG620.

Cours de Prolog de Jussien, ENM 2002

Cours de Logique de Denis Creissels, Université Lyon II Lumière.

Cours de Jean-Yves Antoine, de l'IUP Blois, Université François Rabelais.

Toujours sur internet, pour approfondir certaines notions, vous pouvez regarder les notes de cours de Laure Danthony ainsi que les notes de cours de Logique de Jean-Pierre Jouannaud (mais les notions abordées dans ces cours dépassent assez largement l'ambition du présent cours).

Enfin, comme références bibliographiques, mentionnons un ouvrage très accèssible :

Mathématiques discrètes, de Seymour Lipshutz, de la série Shaum's, aux éditions McGraw-Hill.

Enfin, mentionnons un ouvrage en anglais : Mathematical logic, de Stephen Cole Kleene.