Christophe Tollu - 29/06/2010
Compactification de Martin et bord de Martin

Matthieu Deneufchâtel

8 juillet 2010

L'origine de cette théorie se trouve dans la théorie de potentiels et des fonctions harmoniques (recherche de solution de l'équation de Laplace $\Delta f = 0$ sur des ouverts). La théorie du bord de Martin est utilisée pour prolonger des solutions. Elle a été introduite ensuite en théorie des probabilités ([1]). Nous nous intéressons ici au cas discret.

1 Fonctions et mesures excessives et harmoniques

Soit $\mathcal{E}$ un ensemble dénombrable d'états et $\mathtt{p} : \mathcal{E} \times \mathcal{E} \to \mathbb{R}_+$ une fonction de transition. $\forall x \in \mathcal{E}$, $\sum_{y \in \mathcal{E}} \mathtt{p}(x,y) = 1$.

Soient f et μ deux fonctions de $\mathcal{E}$ à valeurs réelles. On définit l'opérateur $\mathcal{P}$ agissant à gauche sur les fonctions et à droite sur les mesures (respectivement) comme suit :

$$(\mathcal{P}f)(x) = \sum_{y \in \mathcal{E}} \mathtt{p}(x,y) f(y) \tag{1a}$$

$$(\mu\mathcal{P})(y) = \sum_{x \in \mathcal{E}} \mu(x) \mathtt{p}(x,y) \tag{1b}$$

On définit aussi un crochet $\langle , \rangle$ de la manière suivante :

$$\langle f, \mu \rangle = \sum_{x \in \mathcal{E}} f(x)\mu(x) \tag{2}$$

$\langle f, \mu \rangle$ est l'équivalent de l'intégrale de f par rapport à la mesure μ. D'ailleurs, on dit que f est μ-intégrable (ou, de manière équivalente, que μ est f-finie) si $\langle f, \mu \rangle < +\infty$.

Définition 1.1. *On dit que $f \geq 0$ est* excessive *si $\mathcal{P}f \leq f$. $f \geq 0$ est* harmonique *si $\mathcal{P}f = f$.*

Exemple 1.2. ***Marche aléatoire simple sur $\mathbb{Z}$*** *On rappelle que, pour une marche aléatoire simple dans un espace dont chaque point est entouré de p voisins, la probabilité de passer d'un point à l'un des p voisins est égale à $\frac{1}{p}$. Dans le cas d'une marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$, la probabilité de passer de n à $n-1$ est donc égale à la probabilité de passer de n à $n+1$ et vaut $1/2$:*

$$\mathtt{p}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{if } |x-y| = 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \tag{3}$$

En regardant $\mathtt{p}(x,y)$ comme une matrice (infinie), on a

$$\mathtt{p}(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 & & \\ 1/2 & 0 & 1/2 & & \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \tag{4}$$

Proposition 1.3. *Les fonctions excessives positives sont exactement les fonctions constantes.*

Soit $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}_+$. Définissons $\phi(x) = f(x+1) - f(x)$. f est excessive si $\frac{1}{2}f(x+1) + \frac{1}{2}f(x-1) \leq f(x)$ soit $\phi(x) \leq \phi(x-1)$. Soit $k \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} f(x+k) &= f(x) + \phi(x) + \phi(x+1) + \cdots + \phi(x+k-1) && \text{(5a)} \\ &\leq f(x) + k\phi(x) && \text{(5b)} \\ f(x) &= f(x-k) + \phi(x-k) + \cdots + \phi(x-1) && \text{(5c)} \\ &\leq f(x-k) + k\phi(x-1) && \text{(5d)} \end{aligned}$$

Puisque $f \geq 0$,

$$\left.\begin{array}{ll} f(x) & \geq -k\phi(x) \\ f(x) & \geq k\phi(x) \end{array}\right\} \Rightarrow \phi = 0 \text{ et } f \text{ est constante.}$$

Exercice 1.4. *Quelles sont les fonctions excessives positives pour la marche aléatoire simple sur $\mathbb{Z}^n$, $n \geq 2$?*
***Cas** $n = 2$ **:** Dans $\mathbb{Z}^2$, la marche aléatoire est encore récurrente et la propriété de constance des fonctions positives excessives est encore valable. Revenons à $n = 1$ et notons p_{00}^n la probabilité, partant de 0, de revenir à 0 en n pas. Nécessairement, $p_{00}^{2n+1} = 0$. On montre facilement que $p_{00}^{2n} = \binom{2n}{n}\frac{1}{2^n}\frac{1}{2^n}$. La formule de Stirling permet de montrer que cette quantité est équivalente à $\frac{1}{\sqrt{n}}$ lorsque n tend vers l'infini. Ainsi, $\sum_{n\in\mathbb{N}p_{00}^n}$ diverge, donc la marche est récurrente.*
Dans le cas $n = 2$, une projection de toute marche aléatoire sur les deux diagonales principales permet de se ramener à deux marches aléatoires simples sur $\mathbb{Z}$. On a alors $p_{00,2}^n = \left(p_{00,1}^n\right)^2$ équivalent à $\frac{1}{n}$ dont la somme diverge aussi, ce qui assure que la marche est encore récurrente.
En dimension 3, la marche aléatoire simple devient transitoire.

2 Fonctions de Green

Pour des informations sur les processus de Markov, voir [2] La fonction de Green $g(x,y)$ associée à $\mathtt{p}(x,y)$ est définie de la manière suivante :

$$g(x,y) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathtt{p}(n,x,y) \tag{6}$$

où $\mathtt{p}(n,x,y)$ représente la probabilité de passer de x à y en n étapes (en x à t_1, en y à t_1+n).

On appelle processus transitoire un processus pour lequel $\forall\, x,y \in \mathcal{E},\ g(x,y) < +\infty$.

Au noyau g est associé un opérateur G :

$$Gf(x) = \sum_{y\in\mathcal{E}} g(x,y)f(y) \tag{7}$$

En fait, $G = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathtt{p}^n$. Ainsi, si $f \geq 0$, on a $f + \mathcal{P}Gf = Gf$, donc $\mathcal{P}Gf - Gf = -f \leq 0$ donc Gf est aussi une fonction excessive. L'action de G sur les fonctions excessives positives permet d'engendrer d'autres fonctions excessives positives.

$$\begin{aligned} g(x,y) = \left(G\delta_y\right)(x) &= \sum_{z\in\mathcal{E}} g(x,z)\delta_y(z) \\ = \left(G\delta_x\right)(y) &= \sum_{z\in\mathcal{E}} \delta_x(z)g(z,y) \end{aligned} \tag{8}$$

3 Noyau de Martin

Soit γ une mesure finie (la mesure de l'ensemble est finie, i.e. $\langle 1, \gamma\rangle < +\infty$). Posons $\eta = \gamma G$. Alors

$$\eta(y) = \sum_{x\in\mathcal{E}} \gamma(x) g(x,y) \leq \left(\sum_{x\in\mathcal{E}} \gamma(x)\right) g(x,y) \tag{9}$$

(en effet, on peut récrire $g(x,y)$ sous la forme $\pi(x,y)g(y,y)$ où $\pi(x,y))$ est la probabilité de transition de x à y en un nombre quelconque de pas). Or $\sum_{x\in\mathcal{E}} \gamma(x)$ et $g(x,y)$ sont finis donc $\eta(y) < +\infty$.

Notons $\mathcal{E}_\gamma = \{y|\eta(y) > 0\} \supseteq \{y|\gamma(y) > 0\}$. On appelle *mesure standard* une mesure γ telle que $\mathcal{E}_\gamma = \mathcal{E}$ (on peut, au besoin, se restreindre à $\mathcal{E}_\gamma$ pour considérer une mesure standard).

Soit μ une mesure positive. μG est aussi une mesure positive. La densité de μ par rapport à $\eta = \gamma G$ est donnée par la fonction $f(x) \sum_{x\in\mathcal{E}} \mu(x) k_y(x) = \langle k_y, \mu\rangle$ où

$$k_y(x) = \frac{g(x,y)}{\eta(y)} \tag{10}$$

$k_y(x)$ est le *noyau de Martin*. Dans le cas du graphe de Young, $k_y(x) = \dfrac{d(x,y)}{d(y)}$ où d désigne le nombre de chemin (de x à y) ou de la racine à y.

Theorem 3.1. *Pour toute mesure finie, positive et standard γ, $\lim_{n\to\infty} \langle k_{x_n}, \mu\rangle$ existe presque partout relativement à $\mathbb{P}_\gamma$, avec $\mathbb{P}_\gamma[x_0, \ldots, x_n] = \gamma(x_0)\mathfrak{p}(x_0,x_1)\ldots\mathfrak{p}(x_{n-1},x_n)$.*

En particulier, $\lim_{n\to\infty} k_{x_n(y)}$ (obtenue pour $\mu = \delta$) existe presque sûrement.

Remark 3.2. $\langle k_y, \gamma\rangle = 1$ *(normalisation du noyau de Green).*

On veut une métrique ρ telle qu'une suite $(y_n)_n$ soit de Cauchy ssi :

1. $k_{y_n}(x)$ converge $\forall\, x \in \mathcal{E}$;
2. $N(y_n) \to \infty$ (où N = numérotation des éléments de $\mathcal{E}$) ou $(y_n)_n$ est stationnaire.

Une réalisation de ρ est donnée par :

$$\rho(y,z) = |2^{-N(y)} - 2^{-N(z)}| + \sum_{x\in\mathcal{E}} |k_y(x) - k_z(x)| a(x) 2^{-N(x)} \tag{11}$$

où $a(x) = \sum_{z\in\mathcal{E}} \gamma(z)\pi(z,x)$ est tel que $k_y(x) \leq \dfrac{1}{a(x)}$.

Note 3.3. $\forall\, y, z \in \mathcal{E}, \rho(y,z) \leq 3$.

En complétant $\mathcal{E}$ pour ρ, on obtient un compact $\mathcal{E}^*$ dans lequel $\mathcal{E}$ est ouvert : $\partial\mathcal{E} = \mathcal{E}^* \backslash \mathcal{E}$.

Références

[1] J.L. Doob. *Classical Potential Theory and Its Probabilistic Counterpart.* 1984-2001.

[2] E.B. Dynkin. *Theory of Markov Processes.* Dover Publications, 1961.