Christophe Tollu - 12/07/2011
Lien entre multiplicité et extrémalité des caractères

Matthieu Deneufchâtel

19 juillet 2011

L'origine de ce lien peut être trouvée dans la théorie des représentations et l'exemple le plus représentatif est alors celui des représentations du groupe symétrique infini

$$\mathfrak{S}_\infty = \lim_{\rightarrow} \mathfrak{S}_n \tag{1}$$

limite inductive de la suite des groupes symétriques de taille n (l'induction consistant à considérer une permutation de $\{1, \ldots, n\}$ comme une permutation de $\{1, \ldots, n+1\}$ laissant invariant $n+1$). Les éléments du groupe symétrique infini sont considérés comme des permutations de $\{1, \ldots, n, \ldots\}$ qui laissent invariants presque tous les entiers naturels.

Il se trouve que $\mathfrak{S}_\infty$ est un *groupe sauvage* : il est difficile de classifier ses représentations (par exemple factorielles).

Un premier résultat important est dû à E. Thoma (1960). Il s'agit d'une caractérisation des caractères de $\mathbb{C}\mathfrak{S}_\infty$, c'est-à-dire des formes linéaires ϕ centrales ($\phi(ab) = \phi(ba)$) et définies positives ($\forall a \in \mathbb{C}\mathfrak{S}_\infty$, $\phi(aa^+) \geq 0$) sur $\mathbb{C}\mathfrak{S}_\infty$. Ces caractères sont paramétrés par les points du simplexe dit de Thoma, de dimension infinie, inclus dans $\mathbb{R}^\infty \times \mathbb{R}^\infty$, défini comme suit :

$$\left.\begin{matrix} \alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \cdots \geq 0 \\ \beta_1 \geq \beta_2 \geq \cdots \geq 0 \end{matrix}\right\} \text{ telles que } \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i + \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i = 1. \tag{2}$$

Nous désignons par Sym l'algèbre sur $\mathbb{R}$ des fonctions symétriques sur un alphabet infini (que l'on peut voir comme la limite projective des ensembles de polynômes symétriques à n variables :

$$\mathrm{Sym} = \lim_{\leftarrow} \mathbb{R}\left[x_1 \ldots x_n\right]^{\mathfrak{S}_n} \tag{3}$$

la projection du niveau $n+1$ sur le niveau n consistant à mettre à zéro la $n+1$-ième variable) et par s_λ la fonction de Schur correspondant à la partition λ. De plus, la k-ième somme de puissance est désignée par p_k

Nous pouvons alors présenter le résultat suivant (dû à Kerov, Okounkov et Olshanski) :

Theorem 0.1. *Soit ϕ un homomorphisme d'algèbres de* Sym *dans $\mathbb{R}$ tel que $\phi(p_1) = 1$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

- *ϕ est positive sur toutes les fonctions de Schur ;*
- *$\exists \alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \cdots \geq 0$ and $\beta_1 \geq \beta_2 \geq \cdots \geq 0$ satisfaisant $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i + \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i \leq 1$ telles que*

$$\phi(p_m) = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i^m + (-1)^{m-1} \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i^m. \tag{4}$$

Note 0.2. *Notons que l'on peut remplacer dans l'énoncé précédent les fonctions de Schur par les polynômes de Jack, à condition de remplacer le $(-1)^{m-1}$ par $(-\theta)^{m-1}$ dans le cas du polynôme de Jack correspondant à θ .*

Soit maintenant $\mathcal{A}$ une algèbre. Si K est un cône contenu dans $\mathcal{A}$, on dit que K est *générateur* ou *filtrant* si $K \cap (-K) = \{0\}$ et $K + (-K) = \mathcal{A}$. L'ordre suivant est défini sur K : $\forall a, b \in K$, $a \geq b$ si $a - b \in K$.

D'autre part, si P est un ensemble convexe, on appelle *point extrémal* de P un élément $p \in P$ tel que

$$p = \alpha p_1 + (1-\alpha) p_2, \text{ avec } p_1, p_2 \in P \text{ and } 0 \leq \alpha \leq 1 \Rightarrow \alpha = 0 \text{ ou } 1. \tag{5}$$

Nous sommes en mesure d'énonce le *Ring theorem* :

Theorem 0.3. *Soient $\mathcal{A}$ une algèbre commutative avec unité sur $\mathbb{R}$, K un cône convexe générateur et tel que, $\leq$ désignant l'ordre induit par le cône,*

- *$1_{\mathcal{A}} \geq 0$;*
- *$K \cdot K \subseteq K$;*
- *$\forall b \in K, \exists \epsilon > 0,\ 0 \leq \epsilon b \leq 1$.*

Soit $P \subseteq \mathcal{A}^*$ l'ensemble des formes linéaires ψ sur $\mathcal{A}$ telles que

- *$\psi(a) \geq 0, \forall a \in \mathcal{A}$;*
- *$\psi(1_{\mathcal{A}}) = 1$.*

(i) Si ψ est un point extrémal de P, ψ est multiplicative ($\psi(ab) = \psi(a)\psi(b)$).

(ii) De plus, si K possède un ensemble générateur dénombrable, la réciproque est vraie.

Proof :

1. Commençons par prouver la multiplicativité des formes linéaires qui sont des points extrémaux de P. Montrons d'abord que la propriété suivante est vraie :

   Lemma 0.4. *S'il existe $a \in K$ tel que $\psi(a) = 0$, alors $\forall b \in \mathcal{A}$, $\psi(ab) = 0$.*

   Supposons que $\psi(a) = 0$, $a \in K$. Soit $b \in K$, $b \leq 1$. Puisque $1 - b \in K$, $a(1-b) \in K$. Ainsi,

   $$0 \geq \psi(ab) \leq \psi(ab) + \psi(a(1-b))$$

   puisque ψ est positive. Mais $\psi(a(1-b)) = \psi(a) - \psi(ab)$, donc $\psi(ab) = 0$.
   Soit $0 \leq a \leq 1$ and $b \in K$ tels que $\psi(ab) = \psi(a)\psi(b)$. Posons $a' = 1 - a$. Supposons, de plus, que $\psi(a)$ et $\psi(a')$ sont non nuls. Il est alors possible de définir les formes linéaires suivantes :

   $$\left.\begin{array}{l} \psi_a : b \mapsto \dfrac{\psi(ab)}{\psi(a)} \\ \psi_{a'} : b \mapsto \dfrac{\psi(ab)}{\psi(a')} \end{array}\right\} \psi_a \text{ and } \psi_{a'} \in P.$$

   En fait, ψ est une combinaison linéaire de ψ_a et de $\psi_{a'}$: $\psi = \psi(a)\psi_a + \psi(a')\psi_{a'}$. En effet, $\forall b \in \mathcal{A}$,

   $$\psi(a)\psi_a(b) + \psi(a')\psi_{a'}(b) = \psi(ab) + \psi(a'b) = \psi((a+a')b) = \psi(b).$$

   Cette combinaison linéaire est convexe puisque $\psi(a) + \psi(a') = 1$. L'extrémalité de ψ implique que $\psi = \psi_a$ ou $\psi = \psi_{a'}$.
   Reste le cas où $\psi(a)$ (ou $\psi(a')$) est nul. Il est en fait couvert par le lemme précédent.

2. Prouvons maintenant l'autre implication : (ii) implique l'existence de $b_1 = 1, \ldots, b_n, \cdots \in K$ tels que $0 \leq b_i \leq 1$ et tels que la famille $\{b_i\}_i$ forme une base (linéaire) de $\mathcal{A}$. Il est alors possible de montrer que P est homéomorphe à un sous-ensemble fermé de $[0,1]^{\infty}$:

   $$\begin{array}{ll} P \hookrightarrow & [0,1]^{\infty} \\ \psi \mapsto (\psi(b_1), \ldots, \psi(b_n), \ldots). \end{array} \tag{6}$$

   Puisque P est compact, fermé et métrisable, le théorème de Choquet assure qu'il existe une représentation intégrale :

   $$\psi(a) = \int_{\epsilon(P)} \phi(a) \sigma(d\phi). \tag{7}$$

Il est possible de considérer σ comme une mesure de probabilités sur $[0,1]^\infty$ et les formes coordonnées comme des variables aléatoires. Ces dernières satisfont l'équation

$$\psi(b_i^2) = \psi(b_i)^2 \tag{8}$$

puisqu'elles sont multiplicatives. Cette égalité implique que la variance de chaque forme coordonnée est nulle et donc que les formes coordonnées sont presque sûrement constantes. Par conséquent, σ est supportée par un seul point, ce qui sous-entend que ψ est un point extrémal de P.