

Problèmes à N corps, Intégrabilité et Fonctions Symétriques Séminaire CIP

Matthieu Deneufchâtel
Stage dirigé par J.-Y. Thibon

Université Paris 7 - Institut d'Électronique et d'Informatique Gaspard Monge

15 Septembre 2009



Plan

- 1 Introduction
 - Définitions
 - Motivations
- 2 Différentes preuves de l'intégrabilité du système de Calogero
 - Cas classique : Intégrales en involution
 - Transformation canonique de H_C 1 (cas classique)
 - Transformation canonique de H_C 2 (cas quantique)
- 3 Fonctions propres du Hamiltonien de Calogero (cas quantique)
- 4 Expression de l'Hamiltonien de Calogero en termes des Fonc. Sym. Elém.
- 5 Conclusion



Hamiltonien de Calogero ^a :^aF. Calogero, *Jour. of Math. Phys.*, **10**, 2197 (1969)

$$H_C = H_{Cin} + H_{Inter} \quad (1)$$

$$H_{Cin} = \sum_{i=1}^N \frac{p_i^2}{2}, \quad H_{Inter} = \sum_{i < j} \frac{\epsilon(\epsilon - 1)}{(x_i - x_j)^2} \left(+\omega \sum_{i,j} (x_i - x_j)^2 \right) \quad (2)$$



Hamiltonien de Calogero ^a :^aF. Calogero, *Jour. of Math. Phys.*, **10**, 2197 (1969)

$$H_C = H_{Cin} + H_{Inter} \quad (1)$$

$$H_{Cin} = \sum_{i=1}^N \frac{p_i^2}{2}, \quad H_{Inter} = \sum_{i < j} \frac{\epsilon(\epsilon - 1)}{(x_i - x_j)^2} \left(+\omega \sum_{i,j} (x_i - x_j)^2 \right) \quad (2)$$

Définition

$$D = \sum_{i=1}^N \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + \epsilon \sum_{i \neq j} \frac{1}{x_i - x_j} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_j} \right) \quad (3)$$



Hamiltonien de Calogero ^a :^aF. Calogero, *Jour. of Math. Phys.*, **10**, 2197 (1969)

$$H_C = H_{Cin} + H_{Inter} \quad (1)$$

$$H_{Cin} = \sum_{i=1}^N \frac{p_i^2}{2}, \quad H_{Inter} = \sum_{i < j} \frac{\epsilon(\epsilon - 1)}{(x_i - x_j)^2} \left(+\omega \sum_{i,j} (x_i - x_j)^2 \right) \quad (2)$$

Définition

$$D = \sum_{i=1}^N \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + \epsilon \sum_{i \neq j} \frac{1}{x_i - x_j} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_j} \right) \quad (3)$$

Définition

 $f(x_1, \dots, x_N)$ est symétrique si

$$f(x_1, \dots, x_N) = f(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(N)}), \quad \forall \sigma \in S_N \quad (4)$$



D apparaît dans différents problèmes :

- Dynamique de matrices aléatoires dépendant d'un paramètre
- Méthode de projection de Perelomov-Olshanski
- Généralisation de l'opérateur de Laplace-Beltrami sur un espace de matrice
- Transformation canonique du Hamiltonien de Calogero quantique



D apparaît dans différents problèmes :

- Dynamique de matrices aléatoires dépendant d'un paramètre
- Méthode de projection de Perelomov-Olshanski
- Généralisation de l'opérateur de Laplace-Beltrami sur un espace de matrice
- Transformation canonique du Hamiltonien de Calogero quantique

Motivations à long terme

- Explication *naturelle* des apparitions de D dans ces contextes différents
- Étude des fonctions symétriques utiles dans le problème de Calogero
- En particulier, faire le lien avec les polynômes de Jack



Cas classique : Intégrabilité au sens de Liouville

Définition

Un système à N degrés de liberté est *intégrable* s'il existe F_1, \dots, F_N , N fonctions des x_i et des p_i , linéairement indépendantes, vérifiant

$$\{F_i, F_j\} = 0, \forall i, j \in 1, \dots, N \quad (5)$$

Intégrales *canoniques* pour le système de Calogero ^a :

^aS. Wojciechowski, *Lett. N. Cim.*, **18**, 103 (1977)

$$I_N = \exp \left(-\frac{1}{2} \sum_{i \neq j} V(x_i - x_j) \frac{\partial}{\partial p_i} \frac{\partial}{\partial p_j} \right) \prod_{k=1}^N p_k \quad (6)$$

$$I_{n-1} = \left\{ I_n, \sum_{k=1}^N x_k \right\} \quad (7)$$



Cas classique : Algèbre $sl(2, \mathbb{R})$

Définition

$$T_+ = \left(\sum_{i=1}^N \frac{p_i^2}{2} + \frac{\epsilon(\epsilon-1)}{2} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^N \frac{1}{(x_i - x_j)^2} \right) \quad (8a)$$

$$T_- = \sum_{i=1}^N \frac{x_i^2}{2} \quad (8b)$$

$$T_0 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N x_i p_i \quad (8c)$$

Ces opérateurs vérifient les relations qui définissent l'algèbre $sl(2, \mathbb{R})$:

$$\{T_0, T_{\pm}\} = \pm T_{\pm} \quad (9a)$$

$$\{T_+, T_-\} = -2T_0 \quad (9b)$$



Cas classique : Transformation canonique 1

$$A \rightarrow \exp[\text{ad}(i\lambda T_1)] \cdot A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\lambda)^n}{n!} \underbrace{\{T_1, \dots, \{T_1, A\}\}}_{n \text{ times}} \quad (10)$$

$$T_1 = \frac{i}{2} (T_+ + T_-), \quad \text{ad}(x) \cdot y = \{x, y\}.$$



Cas classique : Transformation canonique 1

$$A \rightarrow \exp[\text{ad}(i\lambda T_1)] \cdot A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\lambda)^n}{n!} \underbrace{\{T_1, \dots, \{T_1, A\}\}}_{n \text{ times}} \quad (10)$$

$$T_1 = \frac{i}{2} (T_+ + T_-), \quad \text{ad}(x) \cdot y = \{x, y\}.$$

Définition

Avec $\tilde{T}_{\pm,1} = \tilde{T}_{\pm,1}(\epsilon = 0)$, on définit une nouvelle transformation canonique :

$$T : A \rightarrow \exp[\text{ad}(-i\pi \tilde{T}_1)] \cdot [\exp[\text{ad}(\pi T_1)] \cdot A] \quad (11)$$



Cas classique : Transformation canonique 1

$$A \rightarrow \exp[\text{ad}(i\lambda T_1)] \cdot A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\lambda)^n}{n!} \underbrace{\{T_1, \dots, \{T_1, A\}\}}_{n \text{ times}} \quad (10)$$

$$T_1 = \frac{i}{2} (T_+ + T_-), \quad \text{ad}(x) \cdot y = \{x, y\}.$$

Définition

Avec $\tilde{T}_{\pm,1} = \tilde{T}_{\pm,1}(\epsilon = 0)$, on définit une nouvelle transformation canonique :

$$T : A \rightarrow \exp[\text{ad}(-i\pi \tilde{T}_1)] \cdot [\exp[\text{ad}(\pi T_1)] \cdot A] \quad (11)$$

On montre que

$$T \cdot T_+ = \exp[\text{ad}(-i\pi \tilde{T}_1)] \cdot [\exp[\text{ad}(\pi T_1)] \cdot T_+] = \sum_{i=1}^N \frac{p_i^2}{2} \quad (12)$$



Cas quantique : Élimination du fondamental

$$\psi_g(\mathbf{x}) = \prod_{1 \leq j < k \leq N} |x_j - x_k|^\epsilon \exp \left[-\frac{1}{2} \sum_{l=1}^N x_l^2 \right] \quad (13)$$

est le fondamental, d'énergie $E_g = \frac{1}{2}N((N-1)\epsilon + 1)$.



Cas quantique : Élimination du fondamental

$$\psi_g(\mathbf{x}) = \prod_{1 \leq j < k \leq N} |x_j - x_k|^\epsilon \exp \left[-\frac{1}{2} \sum_{l=1}^N x_l^2 \right] \quad (13)$$

est le fondamental, d'énergie $E_g = \frac{1}{2} N((N-1)\epsilon + 1)$. On transforme H_C en H comme suit :

$$H = \psi_g^{-1} [H_C - E_g] \psi_g \quad (14)$$

Le calcul donne :

$$\begin{aligned} H &= -\frac{1}{2} D + \sum_{l=1}^N x_l \frac{\partial}{\partial x_l} \\ &= -\frac{1}{2} D + \mathcal{O}_E \end{aligned} \quad (15)$$



Transformation canonique 2

Cas quantique : Transformation canonique 2 (cas quantique)

$$T = \exp \left[-\frac{1}{4} D \right] \exp \left[\frac{1}{4} \Delta \right] \exp \left[\frac{1}{2} \mathbf{x}^2 \right] \quad (16)$$

avec $\Delta = \sum_{j=1}^N \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$.



Transformation canonique 2

Cas quantique : Transformation canonique 2 (cas quantique)

$$T = \exp \left[-\frac{1}{4} D \right] \exp \left[\frac{1}{4} \Delta \right] \exp \left[\frac{1}{2} \mathbf{x}^2 \right] \quad (16)$$

$$\text{avec } \Delta = \sum_{j=1}^N \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}.$$

La conjugaison de H par T donne

$$T^{-1} H T = \sum_{j=1}^N n_j = \sum_{j=1}^N a_j^\dagger a_j \quad (17)$$

où n_j est un opérateur nombre pour un oscillateur harmonique 1D, d'où l'intégrabilité du système.



Fonctions monomiales symétriques

Définition

$$m_{\lambda}(\mathbf{x}) = \sum_{\sigma \in S_N} x_1^{\lambda_{\sigma(1)}} \dots x_N^{\lambda_{\sigma(N)}} \quad (18)$$

$\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_N)$, $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_N) \in \mathbb{N}^N$, $S_N =$ groupe des permutations de $\{1, \dots, N\}$, chaque permutation apparaissant une seule fois.



Fonctions monomiales symétriques

Définition

$$m_\lambda(\mathbf{x}) = \sum_{\sigma \in S_N} x_1^{\lambda_{\sigma(1)}} \dots x_N^{\lambda_{\sigma(N)}} \quad (18)$$

$\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_N)$, $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_N) \in \mathbb{N}^N$, $S_N =$ groupe des permutations de $\{1, \dots, N\}$, chaque permutation apparaissant une seule fois.

- Même symétrisation que pour les fonctions propres d'un système de bosons.
- Symétrisation imposée par les divergences éventuellement créées par le terme en $\exp \left[\sum_{i \neq j} \frac{1}{(x_i - x_j)^2} \right]$;
- Fonctions propres *naturellement* symétriques.



m_λ et opérateurs de création et d'annihilation

Notons :

$$\langle \mathbf{x} | 0 \rangle = \exp\left(-\frac{1}{2}\omega \mathbf{x}^2\right)$$

$$b_j^+ = T a_j^\dagger T^{-1} = \exp\left(-\frac{1}{4}D\right) x_j \exp\left(\frac{1}{4}D\right)$$

(opérateurs qui interviennent dans la première transformation canonique).

Fonctions propres

$$|\lambda\rangle = m_\lambda \left(\hat{\mathbf{b}}^+\right) |0\rangle \quad (19)$$

indexées par λ partition de $\sum_i \lambda_i$ de taille N .



Remarque

Les fonctions "intéressantes" dans ce problème **sont** symétriques.
Pour faciliter cette étude, il est utile d'exprimer les différents opérateurs en termes des ESF \Rightarrow travail avec ACE.

$$H_C = \sum_{l \leq m} A_{lm} \frac{\partial^2}{\partial e_l \partial e_m} - \epsilon \sum_{k=2}^N \frac{(N-k+2)(N-k+1)}{2} e_{k-2} \frac{\partial}{\partial e_k} + \sum_{k=1}^N k e_k \frac{\partial}{\partial e_k} \quad (20)$$

avec

$$A_{lm} = (2 - \delta_{l,m}) [(N - m + 1) e_{l-1} e_{m-1}$$

$$- \left. \sum_{k=1}^{\min(l-1, N-m+1)} (m-l+2k) e_{l-1-k} e_{m-1-k} \right]$$



Avec des coordonnées invariantes par translation

$$y_i = x_i - \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N x_j, \quad \tau_i = e_i(y(x)) \quad (21)$$

On a

$$H_C = -\frac{1}{2} \sum_{j,k=2}^N B_{jk} \frac{\partial^2}{\partial \tau_j \partial \tau_k} + \sum_{i=2}^N i \tau_i \frac{\partial}{\partial \tau_i} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{N} + \epsilon \right) \sum_{i=2}^N (N-i+2)(N-i+1) \tau_{i-2} \frac{\partial}{\partial \tau_i}$$

avec

$$B_{jk} = \frac{(N-j+1)(k-1)}{N} \tau_{j-1} \tau_{k-1} + \sum_{l \geq \max(1, k-j)} (k-j-2l) \tau_{j+l-1} \tau_{k-l-1}$$



Conclusion

- Revue de quelques propriétés et techniques utiles pour ce problème
- Liens établis entre le problème physique et les fonctions symétriques
- Survol de liens entre des problèmes de physique différents reliés par les fonctions ou opérateurs qu'ils font intervenir
- Initiation à certains algorithmes déjà existant pour les fonctions symétriques (ACE \Rightarrow Sage?)



Conclusion

- Revue de quelques propriétés et techniques utiles pour ce problème
- Liens établis entre le problème physique et les fonctions symétriques
- Survol de liens entre des problèmes de physique différents reliés par les fonctions ou opérateurs qu'ils font intervenir
- Initiation à certains algorithmes déjà existant pour les fonctions symétriques (ACE \Rightarrow Sage ?)

Perspectives

- Lien avec les polynômes de Jack (Analyse du noyau de D ?)
- Polynômes de Jack et effet Hall quantique (avec Jean-Gabriel ?)

