

Projet de thèse de doctorat de Matthieu Deneufchâtel

1 Identification de la thèse

Titre de la thèse: Combinatoire d'opérateurs issus de la théorie des représentations, applications à deux problèmes de physique.

Laboratoire d'accueil: LIPN, Université de Paris 13 et CNRS, UMR 7030

Directeur de thèse: Gérard H.E. Duchamp, professeur d'informatique à l'université de Paris 13

Co-encadrant: Jean-Gabriel Luque, professeur d'informatique à l'université de Rouen

2 Environnement scientifique

Matthieu Deneufchâtel sera intégré au groupe de travail CIP (Combinatoire, informatique, physique) du LIPN, animé par Gérard H.E. Duchamp, professeur à l'institut Galilée, qui est le coordinateur scientifique du projet ANR blanc interdisciplinaire `PHYSCOMB` (Physique combinatoire), qui finance la thèse. M. Deneufchâtel sera aussi accueilli par l'équipe Combinatoire et algorithmes du LITIS (EA 4108, Universités de Rouen et du Havre, INSA de Rouen); Jean-Gabriel Luque, professeur à l'université de Rouen, est le responsable d'un partenaire du projet ANR `PHYSCOMB`.

3 Description du sujet de thèse

Le travail de thèse s'inscrira dans le projet ANR `PHYSCOMB` et plus largement dans les objectifs de recherche du groupe CIP du LIPN, qui est depuis 2004 impliqué dans un programme scientifique de développement de modèles combinatoires et d'outils de calcul symbolique pour la physique quantique. Il comportera deux volets, à l'unité desquels on veillera scrupuleusement pendant le déroulement de la thèse.

3.1 Combinatoire des opérateurs de Jack et applications à la physique

Le but de ce premier travail consistera à concevoir des algorithmes et des programmes pour manipuler les polynômes de Jack et leurs généralisations (par exemple les polynômes de Macdonald) [9] en vue d'applications à la théorie des matrices aléatoires [10], au calcul hyperdéterminantal [2] et à la physique de l'effet de Hall fractionnaire quantique [7].

Ces polynômes interviennent en particulier dans le calcul des intégrales de type Selberg [5]. La compréhension de ces objets est un des enjeux cruciaux de la théorie des matrices aléatoires. Dans un premier temps, nous étudierons la combinatoire et l'algorithmique sous-jacente à ces intégrales en liaison avec les polynômes de Jack [8]. Nos efforts se concentreront sur l'aspect calcul formel et fonctions symétriques dans le but d'étendre ces résultats pour d'autres mesures que celles liées à la distribution β (intégrale de Selberg usuelle). Nous tenterons aussi de faire rentrer dans ce cadre certaines intégrales plus

compliquées, comme les intégrales de Kaneko [6], faisant apparaître des généralisations multivariées des polynômes orthogonaux usuels [6] dont la combinatoire n'est connue que partiellement.

3.2 Combinatoire des opérateurs montants et descendants de petit degré

La thèse sera aussi consacrée à des variations autour de la relation de commutation canonique de la physique quantique :

$$[D, X] = 1 \quad (\text{i.e. } DX - XD = 1) \quad (1)$$

Il est connu que cette relation ne peut se représenter dans aucun espace complexe de dimension finie et même dans aucune algèbre de Banach (à cause de la présence d'états cohérents qui expriment que le spectre de D doit être non borné) et les premières représentations (qui fournissent déjà une combinatoire non triviale [3]) de (1) sont l'espace de Fock standard et la représentation de Bargmann-Fock [4].

Récemment ces opérateurs ont fait irruption en Combinatoire Algébrique par le biais des graphes gradués : parmi ceux-ci, la relation (1) caractérise les graphes auto-duaux de Fomin ou les ensembles partiellement ordonnés différentiels de Stanley. L'exemple le plus étudié, en particulier par l'école russe de théorie asymptotique des représentations (Vershik, Kerov, Olshanski, Okounkov, Borodin) est le treillis de Young, qui est aussi le diagramme de Bratteli pour l'emboîtement canonique des groupes symétriques finis.

Le travail de thèse proposé consistera à étudier plusieurs déformations de (1). La première est le q -analogue classique $[D, X]_q = 1$ et la seconde est l'étude de couples d'opérateurs, l'un montant (de degré +1) et l'autre descendant (de degré -1), permettant de définir des processus "up-down" sur chaque composante de rang k d'un graphe gradué et d'étudier le comportement asymptotique de ce processus. On espère ainsi étendre à d'autres diagrammes de Bratteli les fascinantes propriétés combinatoires, probabilistes et géométriques mises en évidence ces dernières années pour le treillis de Young (voir par exemple, récemment, [1]), et obtenir en retour un éclairage neuf sur certains espaces de Fock généralisés de la physique mathématique.

4 Plan de travail

M. Deneufchâtel commencera par parfaire sa maîtrise des techniques de fonctions symétriques pour la physique par l'étude approfondie de la combinatoire des polynômes de Jack, ce qui occupera la première année de la thèse et sera mené sous la conduite de Jean-Gabriel Luque au LITIS (Rouen). Puis il reprendra à nouveaux frais, sous la conduite de Gérard H.E. Duchamp (et de Christophe Tollu) au LIPN (Villetaneuse), les liens entre la relation (1) et les graphes auto-duaux, avant d'étudier les liens entre le q -analogue $[D, X]_q = 1$ et certaines q -déformations du système de mesures de Plancherel associé à ces graphes. Il abordera ensuite le cas des couples d'opérateurs (un montant, un descendant) associés à des déformations d'un autre type (qu'on peut qualifier de spectrales).

Les techniques mises en œuvres seront surtout combinatoires ; elles emprunteront aussi aux probabilités quantiques, et c'est par ce biais qu'on peut espérer (pendant la 3e année) des lumières nouvelles sur des espaces de Fock généralisés.

Références

- [1] A. BORODIN, G. OLSHANSKI, *Infinite-dimensional diffusions as limits of random walks on partitions*, Probability Theory and Related Fields **144**(1-2) (2009) 281-318
- [2] A. BOUSSICAULT, J.-G. LUQUE, C. TOLLU, *Hyperdeterminantal computation for the Laughlin wavefunction*, J. Phys. A: Math. Theor. **42** 145301 (13pp)
- [3] G. H. E. DUCHAMP, K.A. PENSON, A.I. SOLOMON, A. HORZELA, P. BLASIAK, *One-Parameter Groups and Combinatorial Physics*, Proceedings of the Third International Workshop on Contemporary Problems in Mathematical Physics (COPRO-MAPH3), J. Govaerts, M. N. Hounkonnou and A. Z. Msezane Eds., p. 436, World Scientific Publishing, Singapore, 2004. arXiv : quant-ph/0401126
- [4] G. DUCHAMP, C. TOLLU, F. TOUMAZET, *Combinatorics of the q -shuffle product and the quon Weyl algebra*, in Group24: Physical and Mathematical Aspects of Symmetries (Proc. XXIV International Colloquium on Group Theoretical Methods in Physics, Paris, July 15-20, 2002) IoP Conference Series **173** (2003) 803.
- [5] PETER J. FORRESTER, S. OLE WARNAAR, *The importance of the Selberg integral*, Bull. Amer. Math. Soc. **45** (2008) 489-534.
- [6] J. KANEKO, *Selberg integrals and hypergeometric functions associated with Jack polynomials*, SIAM Journal Math. Analysis **24** (1993) 1086-1110.
- [7] R.B. LAUGHLIN, *Anomalous Quantum Hall Effect: An incompressible Quantum fluid with fractionally charged excitation*, Phys. Rev. Lett. **50** (1983) 1395-1398.
- [8] J.-G. LUQUE, JEAN-YVES THIBON, *Hyperdeterminantal calculations of Selberg's and Aomoto's integrals*, Molecular Physics **102**: 11-12 (2004) 1351-1359.
- [9] I.G. MACDONALD, "Symmetric function and Hall polynomials", 2nd ed., Oxford university press, 1995.
- [10] M. L. MEHTA, "Random matrices", 2nd ed., Academic Press, 1991.