

Signaux sur automates cellulaires en plusieurs dimensions

J.-C. Dubacq¹

¹Laboratoire LIPN – UMR 7030
CNRS – Université Paris 13

Rencontre Programmation Sur Automates Cellulaires



Outline

- 1 Définitions
 - Automates cellulaires
 - Signaux
 - Fischer-constructibilité
- 2 Propriétés générales
 - Fischer-constructibilité et signaux
 - Limites en 1D
- 3 Signaux en 2D
 - Représentation
 - Résultats



Outline

1 Définitions

- Automates cellulaires
 - Signaux
 - Fischer-constructibilité

2 Propriétés générales

- Fischer-constructibilité et signaux
- Limites en 1D

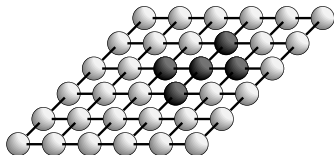
3 Signaux en 2D

- Représentation
- Résultats



Définitions standards

```
#include <stdca.h>
```



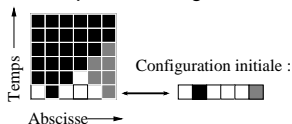
- Élément de base : la configuration
- Configuration : éléments organisés en grille de dimension d (ligne, plan), tous identiques, prenant un nombre de valeurs finies.
- Évolution de configurations grâce à une table de transition *locale* et *uniforme*
- Voisinage : ensemble des cellules dont dépend l'état d'une cellule après une itération de l'automate. Identique pour toutes les cellules.
- Notion de temps discret



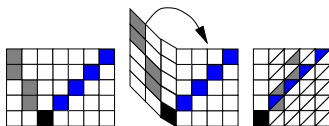
Diagrammes espace-temps

Du bas vers le haut

- Représentation des données par des diagrammes espace-temps



- Opérations simples sur les diagrammes \implies Transformations systématiques sur l'AC



- Exemple du pliage
- Temps réel : Ensemble des sites du diagramme espace-temps où la cellule correspondante, initialement inactive, pourrait pour la première fois devenir active.

Outline

- 1 Définitions
 - Automates cellulaires
 - **Signaux**
 - Fischer-constructibilité
- 2 Propriétés générales
 - Fischer-constructibilité et signaux
 - Limites en 1D
- 3 Signaux en 2D
 - Représentation
 - Résultats



Signaux

- Régularités du diagramme espace-temps
 - ⇒ Notion de signal
 - ⇒ Nouvelle vision : une cellule reçoit et réemet des signaux.
- Définition : Un signal \mathcal{S} sera dans cet exposé continu (connexe par voisinage) de dimension 1.
- Problème de ressemblance des états.
- Signaux simples (pente rationnelle, forme exponentielle) connus en 1D.
On s'intéresse à la construction de signaux de formes diverses.



Outline

1 Définitions

- Automates cellulaires
- Signaux
- Fischer-constructibilité

2 Propriétés générales

- Fischer-constructibilité et signaux
- Limites en 1D

3 Signaux en 2D

- Représentation
- Résultats



Fischer-constructibilité

- Fischer : crible d'Erathostène pour compter les nombres premiers
- Faire des tops à intervalles réguliers sur une cellule *déterminée* par la configuration initiale
- le $i^{\text{ème}}$ top au temps $f(i)$

Cette notion est très liée à la notion de signal pour une fonction strictement croissante.

Definition (Fischer-constructibilité)

Soit f une fonction croissante de $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$. On dit que f est d -Fischer-constructible s'il existe un automate cellulaire de dimension d et un sous-ensemble D des états de l'automate tel que :

$$s(0, i) \in D \iff \exists ! n \in \mathbb{N}, f(n) = i.$$



Stabilité des constructions

De bonnes fondations

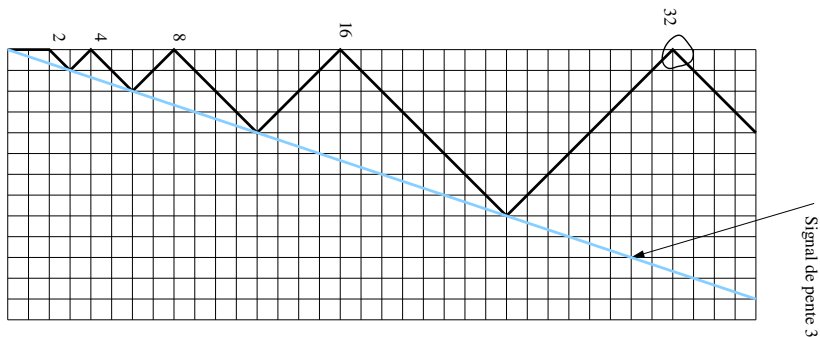
Stabilité obtenue par des preuves géométriques :

- par multiplication par un scalaire
- par multiplication
- par addition
- par composition



Construction de Čulik-Choffrut

Dessin penché pour des raisons de format



Outline

- 1 Définitions
 - Automates cellulaires
 - Signaux
 - Fischer-constructibilité
- 2 Propriétés générales
 - Fischer-constructibilité et signaux
 - Limites en 1D
- 3 Signaux en 2D
 - Représentation
 - Résultats



Fischer-constructibilité et signaux

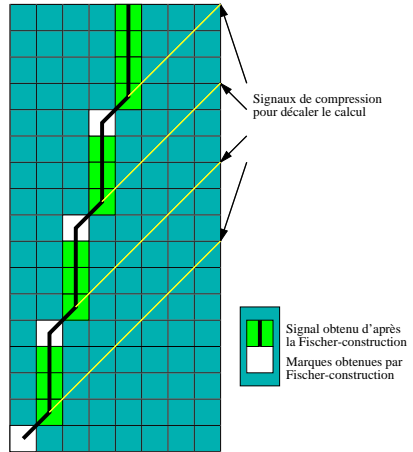
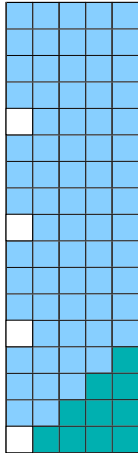
Theorème

Soit f strictement croissante. On a alors :

- 1 Si f est Fischer-constructible, et qu'il existe $\alpha > 0$, tel que $f \geq n(1 + \alpha)$, alors on sait construire le signal de pente f ;
- 2 Si f croît plus vite qu'une exponentielle asymptotiquement, et qu'il existe un signal de pente f , alors $2f$ est Fischer-constructible (et donc f).



Construction



Outline

- 1 Définitions
 - Automates cellulaires
 - Signaux
 - Fischer-constructibilité
- 2 Propriétés générales
 - Fischer-constructibilité et signaux
 - Limites en 1D
- 3 Signaux en 2D
 - Représentation
 - Résultats



Limites en 1D

Problématique : construire des signaux aussi proches que possible du temps réel.

Exemple : construire une réciproque de fonction ayant des grandes valeurs (par rapport au temps réel)

Theorème (Inversion)

Si f est une fonction strictement croissante, et qu'il existe un signal de forme f , il est possible de construire un signal de forme $2(n + f^{-1}(n))$.

Theorème (Mazoyer-Terrier)

Il n'est pas possible de faire de signaux entre $n + a$ et $n + b \log(n)$

\implies Impossible de faire plus rapide que $n + \log(n)$.



Dimension 2 ?

Problématique de la propagation des informations en dimension 2

- Limitation en 1D \implies quelles sont les limites en 2D ?
- Utile pour la programmation et les algorithmes cellulaires
- Domaine non encore exploré (en 1995)



Outline

- 1 Définitions
 - Automates cellulaires
 - Signaux
 - Fischer-constructibilité
- 2 Propriétés générales
 - Fischer-constructibilité et signaux
 - Limites en 1D
- 3 **Signaux en 2D**
 - **Représentation**
 - Résultats



Représentation en 2D

En fait, en 3D

Problème de la représentation en 2D des diagrammes espace-temps

⇒ Visualisation 3D

⇒ Impossibilité de représenter des blocs « pleins »

Autre problème Le temps réel dépend du voisinage

⇒ Voisinage de Moore

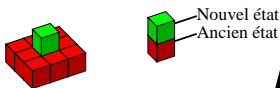
⇒ On parlera aussi ici des signaux contenus dans un même plan.



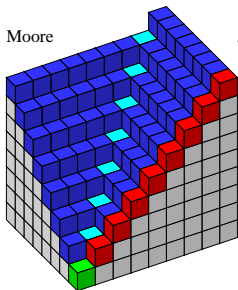
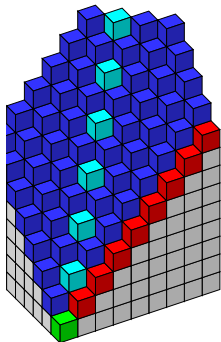
Conventions de représentation



Von Neumann



Moore



Ceci est le temps réel



Outline

- 1 Définitions
 - Automates cellulaires
 - Signaux
 - Fischer-constructibilité
- 2 Propriétés générales
 - Fischer-constructibilité et signaux
 - Limites en 1D
- 3 Signaux en 2D
 - Représentation
 - Résultats



Théorème d'inversion stricte

Théorème

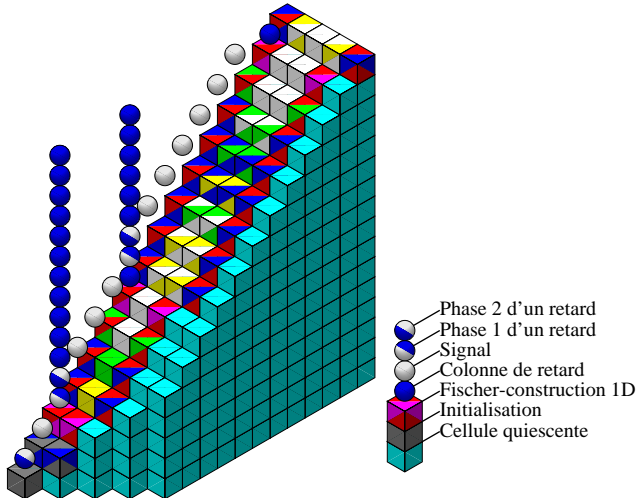
Pour tout signal Fischer-constructible de forme f en 1D, on peut faire un signal de forme $n + f^{-1}(n)$.

Construction simple :

- ⇒ Réciproque augmente à chaque top
- ⇒ Laisser une balise au moment du top
- ⇒ le signal « grimpe » à chaque balise



Construction générique

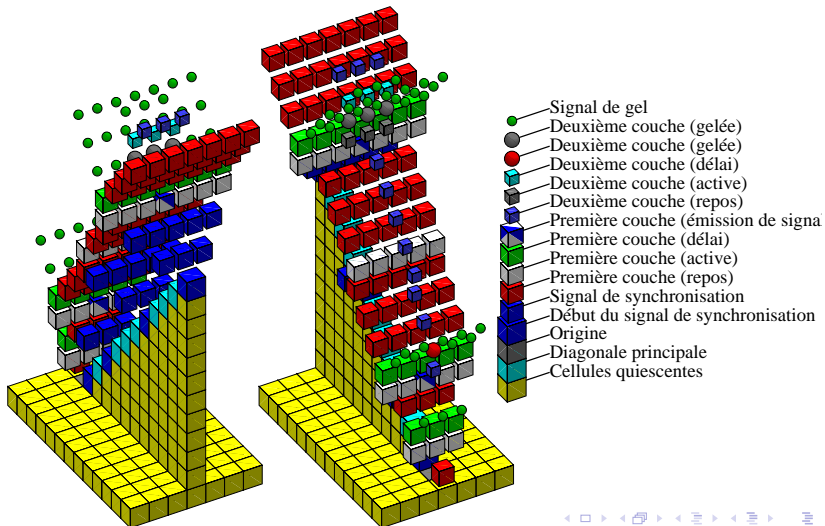


Augmentation de puissance

- On sait construire le \log^* en 1D
- Augmentation stricte de la capacité de génération des signaux en 2D
- Généralisation possible en dimension n ?
- « Classification » possible ?



Construction du \log^*



Limitation 2D

- Voisinage de Von Neumann
- Démonstration analogue au 1D
- Principe : fortes dépendances \implies périodicité sur les diagonales
- Résultat Terrier-Dubacq 2001 : limitation en dimension quelconque.

\implies Impossible de faire plus rapide que $n + \log \log n$ en 2D et en Von Neumann.

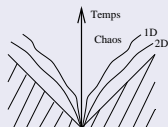


Conclusion (obsolète)

- Description des automates cellulaires comme des émetteurs/récepteurs de signaux
- Possibilité de classifier en fonction de la dimension et du voisinage
- Dimension : lien entre la hiérarchie de Grzegorzcyk et la classification des automates cellulaires.
- Problème du voisinage peu exploré
- Pas d'entrées : notion de chaos intrinsèque

Conjecture

Les fonctions d -Fischer-constructibles avec $d \geq 2$, sont de classe $d + 3$ dans la hiérarchie de Grzegorzcyk.



Gwenaël Roussel--Dubacq

24 mai 2008, 3h54

