1 Projet de recherche pour la période 2012-2017

Le projet ci-dessous vise à coordonner et approfondir les liens tout récemment mis à jour entre Combinatoire et Physique à la lumière des écoles françaises (de rayonnement international) de
- Combinatoire Algébrique
- Combinatoire Analytique
- Informatique Théorique

Ce projet s'articule en deux parties : le projet scientifique lui-même (quatre sous-parties) et la coordination de la recherche.

1.1 Projet scientifique

1.1.1 Algèbre de Hopf et Bigèbres combinatoires et de diagrammes

Il y a trois familles de ces structures qui sont apparues en Physique Combinatoire et pour lequelles je propose d'examiner des problèmes ouverts.

Famille $\mathbf{Ldiag}$. — Cette famille est issue de $\mathbf{Diag}$, qui est commutative et co-commutative (en fait c'est une algèbre de polynômes) qui vient par relèvement d'une formule du produit développée pour un modèle-jouet de QFT [A]. Deux extensions ont été faites : $\mathbf{Ldiag}$ (passage à un produit non-commutatif) et $\mathbf{Ldiag}(q_c, q_s, q_t)$ (déformation à trois paramètres [**?**]). La nature des trois paramètres a été élucidée dans [**?**] : q_s est une perturbation du coproduit primitif (comme le coproduit de Hoffman, dual du produit de stuffle), q_c est une déformation de la structure tensorielle et $q_t \in \{0, 1\}$ est un paramètre booléen (en fait, il y a deux familles à 2 paramètres continus ou formels). Une tentative pour étendre q_t en un paramètre continu a déjà été faite (arXiv :0704.2522v1 [math-ph]) en utilisant la liberté de $\mathbf{Ldiag}(q_c, q_s, q_t)$ en tant qu'algèbre. Nous nous proposons d'utiliser plus finement cette liberté et d'étudier combinatoirement la variété (algébrique) des coproduits co-associatifs sur $\mathbf{Ldiag}$ pour joindre $\mathbf{Ldiag} = \mathbf{Ldiag}(0, 0, 0)$ et $\mathbf{MQSym} = \mathbf{Ldiag}(1, 1, 1)$ (pour lesquelles on a déjà une déformation continue en tant qu'algèbres).

Famille Heisenberg-Weyl. — Une deuxième famille est apparue lors d'une visite "research in pairs" à Oberwolfach (MFO Institute) où j'ai été invité par Pawel Blasiak. L'idée était de voir si on pouvait coder par des diagrammes le processus d'ordre normal bosonique. Les diagrammes qui s'imposent sont les graphes de Heisenberg-Weyl (qui sont des graphes à trois types d'arêtes : des demi-arêtes rentrantes et sortantes et des arêtes complètes internes) [**?**]. Cette algèbre $\mathcal{G}$ de diagrammes (qui est une algàbre de Hopf) se projette comme algèbre de Hopf sur l'algèbre enveloppante de l'algèbre de Lie (de dimension 3) engendrée par $\{a, a^\dagger, e\}$ (une création, une annihilation et un élément central) qui elle-même se projette (en tant qu'algèbre) sur l'algèbre de Heisenberg-Weyl

$$HW_{\mathbf{C}} = \langle a, a^\dagger \; ; \; [a, a^\dagger] = 1 \rangle_{\mathbf{C}-AAU} \; .$$

($\mathbf{C} - AAU$ étant la catégorie des Algèbres Associatives avec Unité complexes).
Il se trouve que $\mathcal{G}$ est graduée (par le nombre de demi-arêtes[1]) cocommutative et connexe, c'est donc (d'après le théorème de Cartier-Milnor-Moore) l'algèbre enveloppante de ses éléments primitifs pour lequels on n'a encore ni description, ni algorithmique (on peut

[1] Appelé puissance totale en Physique.

coder les graphes sur machine). Je propose d'utiliser le projecteur de Patras-Solomon (le fameux $log_*(I)$, le logarithme de l'identité pour la convolution) qui est ici localement nilpotent[2] pour développer une telle algorithmique et pouvoir calculer à l'aide de ces graphes qui codent des processus de réécriture vers les formes normales. D'autre part, on peut utiliser une algèbre de Heinsenberg-Weyl (avec centre) sur un alphabet infini

$$\langle (a_i^-)_{i\geq 1}, (a_j^+)_{j\geq 1}, (e_{ij})_{i,j\geq 1}\ ;\ [a_i, a_j^\dagger] = e_{ij};\ [a_i^\pm, e_{kl}] = 0\rangle_{\mathbf{C}-AAU}\ .$$

pour coder l'histoire des réécritures dans le produit de $\mathcal{G}$ qui aboutit à des "matchings" entre les graphes de Heisenberg-Weyl (fait, non encore soumis). Je propose aussi d'examiner, dans la mesure du possible, les liens entre ces matchings et les "histoires de fichiers" pour laquelle l'algèbre ci-dessus pourrait donner un éclairage complémentaire.

Famille $\mathbf{WMat}$. — Il est parfois difficile de rapprocher le monde des algèbres de Hopf combinatoires définies sur des structures discrètes de type informtique (mots, matrices d'entiers, permutations, etc.) et les algèbres de Hopf de la physique (qui sont souvent définies par des diagrammes). Le rapprochement a été fait avec succès pour l'algèbre de Connes-Kreimer d'arbres par l'équipe de Marne-la-Vallée, mais semble difficile à étendre directement aux algèbres de Connes-Kreimer de graphes. Une voie prometteuse est de considérer les polynômes connus (Tutte, Symanzik) et de passer par les matroïdes. Nous sommes, avec Adrian Tanasa, en train de collaborer avec l'équipe de Marne-la-Vallée autour d'un modèle-jouet d'algèbre de Hopf ($\mathbf{WMat}$, en cours) qui code, à l'intérieur de mots sur un alphabet infini $(x_n)_{n\geq 0}$, la fonction rang des matroïdes (x_0 jouant le rôle de vecteur nul). Cet algèbre est modelée sur l'algèbre de Hopf de Crapo-Schmitt [F].

1.1.2 Problème des moments

Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert séparable de base hilbertienne $|n\rangle$, $n = 0, 1, 2, \ldots$. Pour toute suite de nombres strictement positifs $\rho(n)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ (d'origine combinatoire ou non), on introduit les états suivants

$$|z\rangle = \mathcal{N}^{-1/2}(|z|^2) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\sqrt{\rho(n)}} |n\rangle \tag{1}$$

où $\mathcal{N}(|z|^2)$ est ajusté de façon que les $|z\rangle$ soient unitaires (pour tout z dans un disque[3] $\mathbf{D} \subset \mathbf{C}$ centré en zéro). Les états superposés $|z\rangle$ sont appelés *états cohérents (généralisés)* (CS) de la Mécanique Quantique[4]. Ces états doivent satisfaire une propriété de *résolution de l'unité* pour une certaine mesure sur $\mathbf{D}$ qui, lorsque la mesure est supposée invariante par rotation (le cas qui intéresse nos recherches), s'écrit

$$\frac{1}{\pi} \int_{\mathbf{D}\subset\mathbf{C}} dz\, W(|z|^2)\ |z\rangle\langle z| = \mathbf{I} = \sum_{n=0}^{\infty} \Big(|n\rangle\langle n|\Big)\ . \tag{2}$$

[2] C'est à dire que pour tout graphe Γ, la somme

$$\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n} I^{*n}(\Gamma)$$

est à support fini.

[3] Ce disque n'est autre que le disque de convergence de la série entière $\sum_{n=0}^{\infty} |z|^{2n}/\rho(n) = \mathcal{N}(|z|^2)$.

[4] Les (CS) ont été originellement proposés par Erwin Schrödinger cf la note en bas de page dans [**?**].

Ces égalités sont à prendre au sens faible, c'est à dire que pour tout couple $m, n \in \mathbf{N}$ l'intégrale de $\langle m|z\rangle\langle z|n\rangle$ par rapport à la mesure $W(|z|^2)dz$ vaut δ_{mn}. Une décomposition polaire du domaine d'intégration montre aussitôt que l'intégrale est nulle pour $n \neq m$ (à cause de la périodicité différente des angles de z^n et z^m). La condition de l'Eq. (2) se réduit alors à l'ensemble infini d'équations

$$\int_0^r x^n \Big[\pi \frac{W(x)}{\mathcal{N}(x)}\Big] dx = \rho(n), \qquad n = 0, 1, 2, \ldots . \tag{3}$$

(r est le rayon de $\mathbf{D}$) qui est précisément le problème des moments de Stieltjes ($r = \infty$) ou de Hausdorff ($r < \infty$). Pour ces états se posent encore de nombreux problèmes parmi lesquels

1. l'unicité de la mesure pour les états cohérents (Stieltjes, voir [**?**])
2. le calcul de la mesure dans le cas de suites combinatoires connues.

Je propose d'utiliser les transformations intégrales pour le point (2) et l'analyse convexe pour le (1).

1.1.3 Groupes de Lie combinatoires

A) Matrices infinies

Il s'agit de l'étude combinatoire de certains groupes de Lie de dimension infinie apparaissant en Physique. En voici un exemple simple.
On considère à nouveau les opérateurs $\{a, a^+\}^*$ de l'algèbre de Heisenberg-Weyl et un mot $w \in \{a, a^+\}^*$ (une chaîne de bosons). Désignons, comme dans les travaux de Blasiak, Penson and Solomon [B, C, D, E], par $r,\ s$, respectivement $|w|_{a^+}$ (le numbre d'opérateurs de creation), et par $|w|_a$ (le numbre d'opérateurs d'annihilation) et $m = min(r, s)$, alors la forme normale de w^n est

$$\mathcal{N}(w^n) = \sum_{k=0}^{nm} S_w(n, nm-k)(a^+)^{nr-k} a^{ns-k} \tag{4}$$

ce qui, selon que l'excès $e = r - s$ est positif ou négatif s'écrit,

$$(a^+)^{ne} \left(\sum_{k=0}^{\infty} S_w(n,k)(a^+)^k a^k \right) \text{or} \left(\sum_{k=0}^{\infty} S_w(n,k)(a^+)^k a^k \right) (a)^{n|e|} \tag{5}$$

Considérons, par exemple, la partie supérieure gauche des matrices doublement infinies $(S_w(n,k))_{n,k\geq 0}$.
Pour $w = a^+a$, on obtient la matrice des nombres de Stirling de deuxième espèce.

$$\left[\begin{array}{cccccccc}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\
0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\
0 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\
0 & 1 & 7 & 6 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\
0 & 1 & 15 & 25 & 10 & 1 & 0 & \cdots \\
0 & 1 & 31 & 90 & 65 & 15 & 1 & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots
\end{array}\right. \tag{6}$$

Pour $w = a^+aa^+$, on a

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 2 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 6 & 18 & 9 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 24 & 96 & 72 & 16 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 120 & 600 & 600 & 200 & 25 & 1 & 0 & \cdots \\ 720 & 4320 & 5400 & 2400 & 450 & 36 & 1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \tag{7}$$

pour $w = a^+aaa^+a^+$, on a

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 2 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 12 & 60 & 54 & 14 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 144 & 1296 & 2232 & 1296 & 306 & 30 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 2880 & 40320 & 109440 & 105120 & 45000 & 9504 & 1016 & 52 & 1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \tag{8}$$

dans chaque cas la matrice S_w est en escalier et il n'est pas difficile de voir que la "marche" est égale au nombre d'annihilations. Dans [**?**, **?**], nous avons traité le cas $s = 1$ (une seule annihilation), relié ces matrices aux champs de vecteurs sur la demi-droite $[0, +\infty[$ et à leurs conjugués et étudié les groupes de transformations de suites associés à ces matrices. Ces groupes sont des groupes de Lie de dimension infinie (Fréchet) dont l'algèbre de Lie est une sous algèbre (de Lie) de l'espace des matrices triangulaires inférieures (doublement infinies) à diagonale nulle. Nous proposons d'explorer la combinatoire de ces matrices plus en détail en particulier d'avoir une correspondance $log \leftrightarrow exp$ satisfaisante (comment décrire le "champ de Stirling", par exemple).
D'autre part nous avons quelques pistes pour les opérateurs différentiels d'ordre supérieur ($s > 1$), comme les dérivées de Laguerre [**?**], mais pas de théorie générale. Je propose d'augmenter le corpus des résultats afin (peut-être) d'avoir une vision combinatoire unifiée de ces groupes (qui sont des groupes d'exponentielles).

B) Groupes de Hausdorff

Soit X un alphabet (totalement) ordonné (fini ou infini) et k un anneau qui contient $\mathbf{Q}$ (pour la combinatoire et les calculs on prend souvent $k = \mathbf{Q}$). on munit $k\langle X\rangle$ de sa structure d'algèbre de Hopf standard

$$(k\langle X\rangle, conc, 1_{X^*}, \Delta, \epsilon, S)$$

où conc est la concaténation, $\epsilon(P) = \langle P|1_{X^*}\rangle$ (le terme constant) et, pour toute lettre $x \in X$ $\Delta(x) = x \otimes 1 + 1 \otimes x$ (c'est le dual du produit de shuffle). A priori,, pour une série $S \in k\langle\langle X\rangle\rangle$, on a

$$\Delta(S) = \sum_{w \in X^*} \langle S|w\rangle \Delta(w)$$

qui est une série double sur les mots (ne se factorisant pas en général). Les séries telles que

$$\Delta(S) = S \otimes S \ ; \ \langle S|1\rangle = 1$$

forment un groupe (le groupe de Hausdorff). Ce groupe comprend les solutions d'équations différentielles de type Drinfel'd [**?**]. Pour ce groupe, la factorisation de Reutenauer-Schützenberger (qui est aussi une résolution de l'unité)

$$\sum_{w \in X^*} w \otimes w = \prod_{l \in \mathcal{L}ynX}^{\searrow} \exp(\check{b}_l \otimes b'_l). \tag{9}$$

(où $LynX$ est l'ensemble des mots de Lyndon de X^*, b'_l est une base de l'algèbre de Lie libre sur laquelle on construit une base monomiale, de Poincaré-Birkhoff-Witt, b'_w et b_w est sa base duale) définit un système de coordonnées locales. On a donc, pour toute série de type groupe

$$\sum_{w \in X^*} \langle S|w\rangle w = \prod_{l \in \mathcal{L}ynX}^{\searrow} \exp(\langle S|\check{b}_l\rangle b'_l). \tag{10}$$

parce que $\langle S|u \sqcup\!\sqcup\, v\rangle = \langle S|u\rangle\langle S|v\rangle$. Nous proposons de tirer au clair la combinatoire d'une factorisation semblable qui a lieu pour le stuffle et d'appliquer notre savoir faire dans les factorisations du monoide libre pour réarranger les produits infinis et, ainsi, obtenir des résultats sur les fonctions polyzétas [**?**].

1.1.4 Problèmes de rationalité

Le dual de Sweedler de l'algèbre de Hopf précédente $(k\langle X\rangle, conc, 1_{X^*}, \Delta, \epsilon, S)$ n'est autre que l'ensemble des séries reconnaissables par automate (à multiplicités dans k) fini et, lorsque l'alphabet est fini, c'est la clôture rationnelle [**?**] de $k\langle X\rangle$. Losque l'alphabet est infini, c'est la cloture rationnelle des séries homogènes de degré 1 (i.e. les sommes $S = \sum_{x \in X} \langle S|x\rangle$ [**?**]). ceci permet de maîtriser la combinatoire des duals de Sweedler (dont on dit souvent qu'on ne peut pas les manipuler car ils sont trop gros) des algèbres de Hopf de la Physique (qui sont souvent des algèbres libres en tant qu'algèbres) à l'aide de la riche notation de la théorie des langages (somme, produit, étoile). Nous proposons de développer une technologie de "calcul de Schützenberger" pour ces duals à la suite de [**?**]).

1.2 Coordination de la recherche

Nous sommes actuellement en discussion Cedric Villani (directeur de l'IHP) pour implémenter un nouveau Journal International de Physique Combinatoire (à ma connanisance le premier). Nous avons déjà un « Editorial Board » de 23 noms des meilleurs spécialistes répartis sur les 5 continents.
Je compte utiliser mon nouvel emploi du temps à bien piloter ce journal dont je dois être co-éditeur en chef (avec Alan Sokal).
Je consacrerai aussi une partie significative de mon temps à monter des projets, le plus possible fédérateurs entre les différentes écoles de Combnatoire françaises et étrangères et continuerai à faire rayonner le séminaire CIP dont je m'occuppe depuis 2002.

Research project for the 2012-2017 period.

The project below aims at coordinating and at deepening the links quite recently updated between Combinatorics and Physics in the light of the French schools (of international audience) of
- Algebraic Combinatorics
- Analytic Combinatorics
- Theoretical Computer Science

This project is divided in two parts : the scientific project itself (four subsections) and the coordination of the research.

1.3 Scientific project.

1.3.1 Combinatorial and diagrammatic Hopf algebras and Bialgebras.

There are three families of such structures which appeared in Combinatorial Physics and for which I suggest to examine the open problems.

The $\mathbf{Ldiag}$ family. — This family arises from $\mathbf{Diag}$, which is commutative and co-commutative (in fact it is an algebra of polynomials) which comes by pulling back from a product formula which was proposed for a toy-model ‘ of QFT [A]. Two extensions were made : $\mathbf{Ldiag}$ (passage to a non-commutative product) and $\mathbf{Ldiag}(q_c, q_s, q_t)$ (three-parameter deformation [**?**]). The nature of the three parameters was clarified in [**?**] : q_s is a perturbation of the primitive coproduct (as Hoffman's coproduct, dual of the stuffle product), q_c is a deformation of the tensor structure and $q_t \in \{0, 1\}$ is a boolean parameter (in fact, there are two families with 2 parameters, continuous or formal). An attempt to extend q_t as a continuous parameter was already made (arXiv :0704.2522v1 [math-pH]) by using the freedom of $\mathbf{Ldiag}(q_c, q_s, q_t)$ as an algebra. We propose to use more finely this freedom and to study combinatorially the (algebraic) variety of the co-associative coproducts on $\mathbf{Ldiag}$ in order to join $\mathbf{Ldiag} = \mathbf{Ldiag}(0, 0, 0)$ and $\mathbf{MQSym} = \mathbf{Ldiag}(1, 1, 1)$ (for which we already possess a continuous deformation as algebras).

The Heisenberg-Weyl family. — A second family appeared during a visit “research in pairs” at Oberwolfach (MFO Institute) where I was invited by Pawel Blasiak. The idea was to see if we could code by diagrams the process of bosonic normal ordering. The diagrams which are lead are the Heisenberg-Weyl graphs (which are graphs with three types of edges : half ingoing and outgoing edges and internal complete edges) [**?**]. This algebra $\mathcal{G}$ of diagrams (which is a Hopf algebra) provides an onto Hopf mapping on the enveloping algebra of the Lie algebra (of dimension 3) generated by $\{a, a^\dagger, e\}$ (a creation, an annihilation and a central element) which admits an onto algebra morphism on the Heisenberg-Weyl algebra

$$HW_{\mathbf{C}} = \langle a, a^\dagger \ ; \ [a, a^\dagger] = 1\rangle_{\mathbf{C}-AAU} \ .$$

($\mathbf{C} - AAU$ denoting the category of complex associative Algebras with Unit).

It turns out that $\mathcal{G}$ is graded (by the number of half-edges[5]) cocommutative and connected, it is thus (according to the theorem of Cartier-Milnor-Moore) the enveloping algebra of its

[5]Called total power in Physics.

primitive elements for which we have still neither description, nor algorithmics (we can code the graphs on machine). I suggest to use the projector of Patras-Solomon (the famous $log_*(I)$, the logarithm of the identity for the convolution) which is here locally nilpotent[6]. On the other hand one can use a Heisenberg-Weyl algebra (with center) generated by an infinite alphabet

$$\langle (a_i^-)_{i\geq 1}, (a_j^+)_{j\geq 1}, (e_{ij})_{i,j\geq 1} \ ; \ [a_i, a_j^\dagger] = e_{ij}; \ [a_i^\pm, e_{kl}] = 0 \rangle_{\mathbf{C}-AAU} \ .$$

to encode the track (story) of rewritings in the multiplication of $\mathcal{G}$. This product gives rise to "matchings" between Heisenberg-Weyl graphs (done, but not yet submitted). I also propose to examine, as possible, the links between thses matchings and the "histoires de fichiers" for which the algebra above could give a complementary lighting.

Famille $\mathbf{WMat}$. — It is sometimes difficult to move closer to the world of combinatorial Hopf algebras defined on discrete structures of computer science (words, matrices of integers, permutations, etc.), the Hopf algebras of physics which are often defined by diagrams. The link was successfully made for the algebra of Connes-Kreimer of trees by the team of Marne-la-Vallée, but seems difficult to transpose directly to the algebras of Connes-Kreimer of graphs. A promising way is to consider the known polynomials (Tutte, Symanzik) and to pass through matroids. We are, with Adrian Tanasa, collaborating with the team of Marne-la-Vallée around a toy-model of Hopf algebra ($\mathbf{WMat}$, under construction) who codes, within the words on an infinite alphabet $(x_n)_{n\geq 0}$, the rank function of matroids (x_0 playing the role of null vector). This algebra is modelled after the Hopf algebra of Crapo and Schmitt [F].

1.3.2 Moment problem

Let $\mathcal{H}$ be a separable Hilbert space with Hilbert basis $|n\rangle$, $n = 0, 1, 2, \ldots$. For any sequence of strictly positive numbers $\rho(n)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ (of combinatorial origin or not), we introduce the following states

$$|z\rangle = \mathcal{N}^{-1/2}(|z|^2) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\sqrt{\rho(n)}} |n\rangle \tag{11}$$

where $\mathcal{N}(|z|^2)$ is adjusted so that $|z\rangle$ be of norm 1 (for any z within some disk[7] $\mathbf{D} \subset \mathbf{C}$ being centered at zero). The mixed states $|z\rangle$ are called *generalized coherent states* (CS) of Quantum Mechanics[8]. These states have to satisfy a property of *resolution of unity* for a certain measure on $\mathbf{D}$ which, when the measure is supposed angular invariant (the case which interests our researches), reads

$$\frac{1}{\pi} \int_{\mathbf{D}\subset\mathbf{C}} dz \, W(|z|^2) \ |z\rangle\langle z| = \mathbf{I} = \sum_{n=0}^{\infty} \Big(|n\rangle\langle n| \Big) \ . \tag{12}$$

[6]That is to say for any graph Γ, the sum

$$\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n} I^{*n}(\Gamma)$$

is finitely supported.

[7]This disk is none other than the disk of convergence of the Taylor series $\sum_{n=0}^{\infty} |z|^{2n}/\rho(n) = \mathcal{N}(|z|^2)$.

[8]The (CS) were originally proposed by Erwin Schrödinger cf the footnote in [**?**].

These equalities are to be taken in the weak sense, that is that for any couple $m, n \in \mathbf{N}$ the integral of $\langle m|z\rangle\langle z|n\rangle$ with respect to the measure $\mu(|z|^2)d(z)$ is equal to δ_{mn}. A polar decomposition of the integration domain shows immediately that this integral is zero for $n \neq m$ (because of different periodicity of the angles of z^n and z^m). The condition of Eq. (12) is then reduced to the infinite set of equations

$$\int_0^r x^n \Big[\pi \frac{W(x)}{\mathcal{N}(x)}\Big] dx = \rho(n), \qquad n = 0, 1, 2, \ldots. \tag{13}$$

(where r is the radius of $\mathbf{D}$) which is exactly the Stieltjes moment problem ($r = \infty$) or the Hausdorff moment problem ($r < \infty$). For these states remain numerous open problems among which

1. the uniqueness of the measure for coherent states (Stieltjes, see [**?**])
2. the computation of the measure in the case of known combinatorial sequences.

I suggest using the integral transforms for point (2) and convex analysis for (1).

1.3.3 Combinatorial Lie groups.

A) Infinte Matrices

It is the combinatorial study of certain Lie groups of infinite dimension appearing in Physical Combinatorics. A simple example of them is as follows.
We consider again the operators $\{a, a^+\}^*$ of the Heisenberg-Weyl algebra and a word $w \in \{a, a^+\}^*$ (a boson string). Let us denote, as in Blasiak, Penson and Solomon's works [B, C, D, E], by $r,\ s$, respectively $|w|_{a^+}$ (number of creation operators), and by $|w|_a$ (number of annihilation operators) and $m = min(r, s)$, then the normal form of w^n reads

$$\mathcal{N}(w^n) = \sum_{k=0}^{nm} S_w(n, nm-k)(a^+)^{nr-k}a^{ns-k} \tag{14}$$

which, according to the sign of $e = r - s$ reads,

$$(a^+)^{ne}\left(\sum_{k=0}^{\infty} S_w(n,k)(a^+)^k a^k\right) \text{ or } \left(\sum_{k=0}^{\infty} S_w(n,k)(a^+)^k a^k\right)(a)^{n|e|} \tag{15}$$

For example, let us consider the left top corner of doubly infinite matrices $(S_w(n,k))_{n,k\geq 0}$.
For $w = a^+a$, one gets the matrix of Stirling numbers of the second kind.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & 7 & 6 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & 15 & 25 & 10 & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & 31 & 90 & 65 & 15 & 1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \tag{16}$$

With $w = a^+aa^+$, one has

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 2 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 6 & 18 & 9 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 24 & 96 & 72 & 16 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 120 & 600 & 600 & 200 & 25 & 1 & 0 & \cdots \\ 720 & 4320 & 5400 & 2400 & 450 & 36 & 1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \tag{17}$$

For $w = a^+aaa^+a^+$, we get

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 2 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 12 & 60 & 54 & 14 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 144 & 1296 & 2232 & 1296 & 306 & 30 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 2880 & 40320 & 109440 & 105120 & 45000 & 9504 & 1016 & 52 & 1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \tag{18}$$

In every case the matrix S_w is in staircase form and it is not difficult to see that the "step" is equal to the number of annihilations. In [**?**, **?**], we treated the case $s = 1$ (a single annihilation), linked these matrices with the vector fields on the line $[0, +\infty[$ and their conjugates and studied the groups of transforms of sequences associated to these matrices. These groups are (Frechet) Lie groups of infinite dimension the Lie algebra of which is a sub(Lie) algebra of the space of lower triangular matrices (doubly infinite) with null diagonal. We propose to investigate in more detail the combinatorics of these matrices in particular we will aim at obtaining a satisfying correspondence $log \leftrightarrow exp$ (how describe tha "Stirling field", for example).
On the other hand, we have obtained some results for higher order differential operators ($s > 1$), as Laguerre derivatives [**?**], but we are far from a general theory. I propose to amplify the corpus of results in order to (perhaps) have a unified combinatorial vision of these groups (which are groups of exponentials).

B) Hausdorff groups

Let X be a (totally) ordered alphabet (finite or infinite) and k a ring which contains $\mathbf{Q}$ (for the combinatorics and the calculations we often set $k = \mathbf{Q}$). We endow $k\langle X\rangle$ with its standard Hopf algebra structure

$$(k\langle X\rangle, conc, 1_{X^*}, \Delta, \epsilon, S)$$

Where conc is the concatenation, $\epsilon(P) = \langle P|1_{X^*}\rangle$ (the constant term) and, for any letter $x \in X$ $\Delta(x) = x \otimes 1 + 1 \otimes x$ (it is the comultiplication dual of the shuffle product). A priori, for a series $S \in k\langle\langle\rangle\rangle X)$, we have

$$\Delta(S) = \sum_{w \in X^*} \langle S|w\rangle \Delta(w)$$

which is a series on pairs of words (not factorizing generally). The set of series such as

$$\Delta(S) = S \otimes S \ ; \ \langle S|1\rangle = 1$$

is a group (the Hausdorff group). This group includes the solutions of differential equations of type Drinfel'd [**?**]. For this group, the factorization of Reutenauer-Schützenberger (which is also a resolution of the unity)

$$\sum_{w\in X^*} w \otimes w = \prod_{l\in \mathcal{L}ynX}^{\searrow} \exp(\check{b}_l \otimes b'_l). \tag{19}$$

Where $LynX$ is the set of Lyndon words of X^*, b'_l is a basis of the free Lie algebra on which we build a monomial basis, of Poincaré-Birkhoff-Witt, b'_w (and b_w is its dual basis) defines a system of local coordinates. We thus have, for any group-like series

$$\sum_{w\in X^*} \langle S|w\rangle w = \prod_{l\in \mathcal{L}ynX}^{\searrow} \exp(\langle S|\check{b}_l\rangle b'_l). \tag{20}$$

because $\langle S|u \sqcup\!\sqcup v\rangle = \langle S|u\rangle\langle S|v\rangle$. We propose to clear up the combinatorics of a similar factorization which takes place for the stuffle and to apply our knowledge in the factorizations of the free monoid to re-arrange the infinite products and, so, obtain results on the polyzétas functions [**?**].

1.3.4 Problèmes de rationalité

The Sweedler's dual of the previous Hopf algebra $(k\langle X\rangle, conc, 1_{X^*}, \Delta, \epsilon, S)$ is none other than the set of series that are recognizable by finite-states automata (with multiplicities in k) and, when the alphabet is finite, it is the rational closure [**?**] of $k\langle X\rangle$. When the alphabet is infinite, it is the rational closure of the homogeneous series of degree 1 (i.e. the sums $S = \sum_{x\in X}\langle S|x\rangle$ [**?**]). This allows to master the combinatorial of Sweedler's duals (about which one often say that they are impossible to manipulate because they are too big) of Hopf algebras of Physics (which are often free algebras as algebras) by means of the rich notation of the theory of languages (sum, product, star). This allows to master the combinatorial of Sweedler's duals (about which one often say that they are impossible to manipulate because they are too big) of Hopf algebras of Physics (which are often free algebras as algebras) by means of the rich notation of the theory of the languages (sum, product, star).
We propose to develop a technology of "Schützenberger calculus" for these duals after [**?**].

1.4 Coordination of research

We are at present in discussion with Cedric Villani (director of the IHP) to implement a new International Newspaper of Combinatorial Physics (up to my knowledge, the first one). We already have an "Editorial Board" of 23 names, the best specialists distributed on 5 continents.
I plan to use my new timetable to pilot well this newspaper as co-Editor in Chief (with

Alan Sokal).
I shall also dedicate a significant part of my time to build projects, as much as possible federative, between the various schools of French and foreign Combnatorics and shall continue to make shine the CIP seminar which I am in charge since 2002.

2 Liste des 5 publications les plus significatives.

Références

[1] DUCHAMP G., REUTENAUER C., *Un critère de rationalité provenant de la géométrie noncommutative* Invent. Math. **128** 613-622. (1997).
Résumé en français. — Nous donnons, à l'aide de la théorie des automates, une preuve d'une conjecture que Alain Connes a publié dans son livre "Non Commutative Geometry". Cette conjecture fournit un critère de rationalité pour les éléments de la fermeture (rationnelle) de $\mathbf{C}[\Gamma(X)]$ (algèbre à coefficients complexe d'un groupe libre de base X), dans l'espace des operateurs bornés de $l^2(\Gamma(X))$. Nous montrons que ce critère s'applique aussi à l'anneau des séries de Malcev-Neumann sur le groupe ordonnable $\Gamma(X)$.
Résumé en anglais. — Using the theory of automata, we prove a conjecture of Alain Connes published in his book "Non Commutative Geometry". This conjecture provides a rationality criterion for elements of the (rational) closure of $\mathbf{C}[\Gamma(X)]$ (complex algebra of the free group with basis X) in the space of bounded operators in $l^2(\Gamma(X))$. We show that this criterion applies also to the ring of Malcev-Neumann series on the orderable group $\Gamma(X)$.

[2] G. DUCHAMP, K.A. PENSON, A.I. SOLOMON, A. HORZELA AND P. BLASIAK, *One-Parameter Groups and Combinatorial Physics*,Proceedings of the Third International Workshop on Contemporary Problems in Mathematical Physics (COPROMAPH3), Porto-Novo (Benin), November 2003, J. Govaerts, M. N. Hounkonnou and A. Z. Msezane Eds., p. 436, World Scientific Publishing, Singapore (2004)
arXiv : `quant-ph/0401126`
Résumé en français. — Dans cet article, on s'intéresse aux opérateurs Ω qui sont combinaisons linéaires du type $\Omega = \sum c_{r,s}(b)^r a(b)^s$ où a (resp. b) est l'opérateur d'annihilation (resp. de création) bosonique ; ces opérateurs satisfont la relation de Heisenberg-Weyl [a, b]= ab - ba = 1 et, dans cette note, on peut considérer par exemple que a = d/dx and b = x. Nous discutons l'intégration des groupes à un paramètre $exp(t\Omega)$ et ses conséquences combinatoires. En particulier, on montre comment ces groupes se réalisent comme groupes de substitutions avec préfonction.
Résumé en anglais. — In this communication, we consider the normal ordering of operators of the type $\Omega = \sum c_{r,s}(b)^r a(b)^s$ where a (resp. b) is a boson annihilation (resp. creation) operator ; these satisfy the Heisenberg-Weyl commutation [a, b]= ab - ba = 1, and for the purposes of this note may be thought of as a = d/dx and b = x. We discuss the integration of the one-parameter groups $exp(t\Omega)$ and

their combinatorial by-products. In particular we show how these groups can be realized as groups of substitutions with prefactor functions.

[3] GÉRARD H. E. DUCHAMP, FLORENT HIVERT, JEAN-CHRISTOPHE NOVELLI, JEAN-YVES THIBON, *Noncommutative Symmetric Functions VII : Free Quasi-Symmetric Functions Revisited*, Annals of Combinatorics, **15** Number 4 (2011). arXiv :0809.4479v2 [math.CO]

Résumé en français. — Nous montrons une identité de Cauchy pour les fonctions quasi-symétriques libres et appliquons cette identité à l'étude de différentes bases. Une formule de Weyl libre et une généralisation de la formule d'éclatement sont aussi discutées.

Résumé en anglais. — We prove a Cauchy identity for free quasi-symmetric functions and apply it to the study of various bases. A free Weyl formula and a generalization of the splitting formula are also discussed.

[4] G. H. E. DUCHAMP, P. BLASIAK, A. HORZELA, K. A. PENSON AND A. I. SOLOMON, *A three-parameter Hopf deformation of the algebra of Feynman-like diagrams*, Russian Laser Research : Volume 31, Issue 2 (2010), Page 162.

Résumé en français. — Nous construisons une déformation à trois paramètres de l'algèbre de Hopf $\mathbf{Ldiag}$. C'est l'algèbre qui apparaît lors du développement, indexé aux diagrammes « Feynman-like », de la formule du produit d'une version simplifiée de la théorie quantique des champs. Cette déformation est une vraie déformation de Hopf qui se réduit à $\mathbf{Ldiag}$ pour un jeu de paramètres et à l'algèbre des fonctions Quasi-symétriques matricielles ($\mathbf{MQSym}$) pour un autre et donc relie $\mathbf{Ldiag}$ à d'autres algèbres de Hopf de la physique contemporaine. De plus, il y a une application lineaaire sujective compatible avec les produits de notre algèbre sur l'algèbre des sommes de Euler-Zagier.

Résumé en anglais. — We construct a three-parameter deformation of the Hopf algebra $\mathbf{Ldiag}$. This is the algebra that appears in an expansion in terms of Feynman-like diagrams of the *product formula* in a simplified version of Quantum Field Theory. This new algebra is a true Hopf deformation which reduces to $\mathbf{Ldiag}$ for some parameter values and to the algebra of Matrix Quasi-Symmetric Functions ($\mathbf{MQSym}$) for others, and thus relates $\mathbf{Ldiag}$ to other Hopf algebras of contemporary physics. Moreover, there is an onto linear mapping preserving products from our algebra to the algebra of Euler-Zagier sums.

[5] P. BLASIAK, G. H. E. DUCHAMP, A. I. SOLOMON, A. HORZELA, K. A. PENSON, *Combinatorial Algebra for second-quantized Quantum Theory*, Adv. Theor. Math. Phys. **14** (2011) 1-35
`arXiv` : 1001.4964 [math-ph].

Résumé en français. — Nous décrivons une algèbre G de diagrammes qui donne une representation sous forme de diagrammes à la fois de la structure de l'algèbre de Heisenberg-Weyl H, l'algèbre associative des opérateurs de création et annihilation de la mécanique quantique et aussi de U(LH), l'algèbre enveloppante de l'algèbre de Lie de Heisenberg LH. Nous montrons explicitement comment G peut être munie d'une structure d'algèbre de Hopf qui reflète aussi celle de U(LH). Comme à la fois H et U(LH) sont des images de G, l'algèbre a une struc-

ture plus riche et incorpore une réaslisation combinatoire plus fine du système création-annihilation dont elle donne une réalisation concrète.
Résumé en anglais. — We describe an algebra G of diagrams which faithfully gives a diagrammatic representation of the structures of both the Heisenberg-Weyl algebra H, the associative algebra of the creation and annihilation operators of quantum mechanics and U(LH), the enveloping algebra of the Heisenberg Lie algebra LH. We show explicitly how G may be endowed with the structure of a Hopf algebra, which is also mirrored in the structure of U(LH). While both H and U(LH) are images of G, the algebra G has a richer structure and therefore embodies a finer combinatorial realization of the creation-annihilation system, of which it provides a concrete model.

Bibliographie complémentaire/Extra references

Références

[A] C. M. Bender, D. C. Brody, B. K. Meister, Quantum field theory of partitions, J. Math. Phys. **40**, 3239 (1999)

[B] P. Blasiak, K.A. Penson and A.I. Solomon, The general boson normal ordering problem *Phys. Lett.* A **309** 198 (2003)

[C] P. Blasiak, K.A. Penson and A.I. Solomon, The boson normal ordering problem and generalized Bell numbers *Ann. Comb.* **7** 127 (2003)

[D] P. Blasiak, K.A. Penson and A.I. Solomon, Dobiński-type relations and the log-normal distribution, *J. Phys. A : Math. Gen.* **36** L273 (2003)

[E] P. Blasiak, K.A. Penson and A.I. Solomon, Combinatorial coherent states via normal ordering of bosons *Lett. Math. Phys.*, **67**, 13-23 (2004) arXiv : `quant-ph/0311033`

[F] H. Crapo, W. Schmitt, Primitive elements in the matroid-minor Hopf algebra, J. of Alg. Combinat., **28**, Issue 1, (2008)