

RESEARCH ARTICLE

ETUDE DU TREILLIS DES CONGRUENCES A DROITE SUR LE MONOÏDE BICYCLIQUE

Gérard Duchamp

Communiqué par Gérard Lallement

L'étude des langages rationnels de A^* fournit des théorèmes du type : " Un langage L est reconnu par un monoïde apériodique fini M si et seulement si L est sans étoile ". Des énoncés analogues, pour les parties algébriques de A^* , ne peuvent se formuler sans précision supplémentaire, par exemple sur l'image de L ou la nature de M . Ainsi, si L est reconnu par $\mathbb{Z}$, L est algébrique si et seulement si L est rationnel si et seulement si L est déterministe; ou encore: "un langage algébrique dont le monoïde syntaxique est un groupe abélien est déterministe si et seulement si le rang du groupe est ≤ 1 ". (Sa).

Avec $\mathbb{Z}$, un des monoïdes infinis les plus simples est le monoïde bicyclique $(B = \{a, b\}^* / (ab=1))$ (Cl-Pr).

Dans une étude récente (Ro-Sa), F. Romian et J. Sakarovitch déterminent la structure des parties algébriques déterministes de $\{a, b\}^*$, qui sont saturées pour la congruence engendrée par la relation $ab=1$. Leur technique utilisant une décomposition des congruences à droite sur B comme borne supérieure de congruences à droite plus simples, il était utile de disposer:

1) d'une classification des congruences à droite de B les plus élémentaires en périodiques et non périodiques, classes paramétrées par des relations d'équivalence sur $\mathbb{N}$.

2) de l'existence d'une décomposition unique des congruences à droite en leurs composantes périodiques et apériodiques maximales.

3) E désignant l'ensemble des congruences à droite (de B), d'une description de la structure de treillis de E et de ses intervalles remarquables, par des conditions simples sur les quotients, ainsi que d'une représentation de ces derniers.

Les deux premières parties du paragraphe II sont consacrées à la description des congruences à droite périodiques et apériodiques élémentaires (A et P), qui sont les pièces détachées de notre décomposition $E = AvP$, et dans la dernière on précise les caractéristiques de celle-ci (unicité, maximalité). Le paragraphe III est l'étude des quotients de B par les éléments de E , ce qui permet de compléter l'analyse du treillis, amorcée au paragraphe II.

I - GENERALITES SUR LES CONGRUENCES A DROITE

1) Notations et représentation

$Eq(X)$: Dans la suite toutes les relations d'équivalence seront identifiées à leur graphe, et on notera indifféremment xRy ou $(x,y) \in R$. Si X est un ensemble, $Eq(X)$ désigne l'ensemble des relations d'équivalence sur X . C'est un treillis complet pour la relation $\subseteq$, de plus grand élément $X \times X$ et de plus petit élément $\Delta_X = \{(x,x) \mid x \in X\}$

Intervalles: Soit $(X, \leq)$ un ensemble ordonné. Nous noterons $] \leftarrow, a] = \{x \in X \mid x \leq a\}$, $[a, \rightarrow[= \{x \in X \mid a \leq x\}$, $[a, b] = \{x \in X \mid a \leq x \leq b\}$, nous dirons que $S \subset X$ est un segment initial (resp. terminal) si $(\forall x \in S) (] \leftarrow, x] \subset S)$ (resp. $(\forall x \in S) (x, \rightarrow[\subset S)$).

Monoïde bicyclique: Soient x et y deux lettres et

$B = \{x, y\}^* / (xy=1)$ le monoïde bicyclique; si $a = \bar{x}$ et $b = \bar{y}$, tout

élément de B s'écrit de façon unique $b^p a^q$. (C1-Pr)

Représentation utilisée: Dans la suite, un élément $b^p a^q$ de B sera représenté par le point de $\mathbb{N}^2$ de coordonnées (p, q) , et deux éléments en relation seront joints par un segment.

$(E, \mathcal{C})$: $R \in \text{Eq}(B)$ est une congruence à droite ssi

$\forall (x, y, z) \in B^3 \quad x R y \Rightarrow x z R y z$. $(E, \mathcal{C})$ est un sous treillis complet de $(\text{Eq}(B), \mathcal{C})$.

2) La relation $R_b(\rho)$.

Si $\rho \in E$, on définit $R_b(\rho) \in \text{Eq}(\mathbb{N})$ par: $p_1 R_b(\rho) p_2 \Leftrightarrow b^{p_1} \rho b^{p_2}$

$R_b(\rho)$ est une congruence dans $(\mathbb{N}, \mathcal{A})$ et $\rho \mapsto R_b(\rho)$ est une application croissante $(E, \mathcal{C}) \longrightarrow (\text{Eq}(\mathbb{N}), \mathcal{C})$.

II - STRUCTURE DE $(E, \mathcal{C})$

Comme $\rho \mapsto R_b(\rho)$ est croissante $A = \{\rho \in E / R_b(\rho) = \Delta_{\mathbb{N}}\}$ est un segment initial de E . Afin de paramétrer commodément les éléments de A , nous noterons $\mathcal{J} \subset \text{Eq}(\mathbb{N})$ l'ensemble des relations d'équivalence sur $\mathbb{N}$ dont toutes les classes sont des intervalles; il est facile de montrer que $(\mathcal{J}, \mathcal{C})$ est un sous treillis complet de $(\text{Eq}(\mathbb{N}), \mathcal{C})$.

1) Le segment initial A .

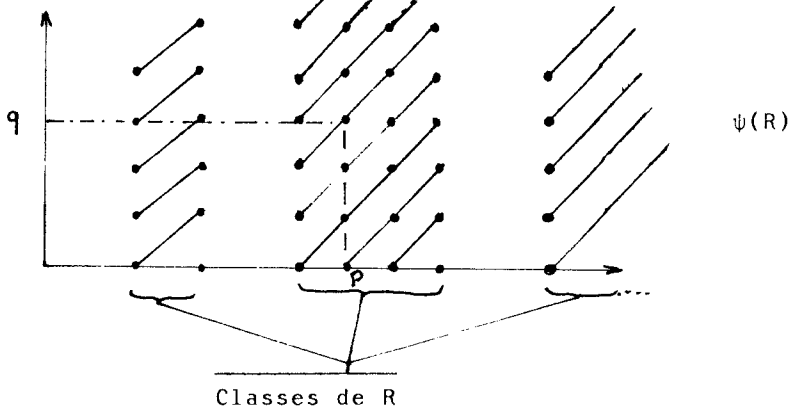
PROPOSITION 1. Soit $R \in \mathcal{J}$; notons $\psi(R)$ la relation sur B définie par: $b^{p_1} a^{q_1} \psi(R) b^{p_2} a^{q_2} \Leftrightarrow p_1 R p_2$ et $p_1 - q_1 = p_2 - q_2$.
(voir fig.1.)

Alors: (1) $\psi(R) \in \mathcal{A}$

(2) $R \mapsto \psi(R)$ est un isomorphisme $\mathcal{J} \rightarrow \mathcal{A}$.

En particulier, en notant ψ_I la relation $\psi(I \times I \cup \Delta_{\mathbb{N}})$ pour I un intervalle de $\mathbb{N}$, on a $A = [\psi_I, \psi_{\mathbb{N}}] = [\Delta_B, \psi_{\mathbb{N}}]$.

Fig.1. Les classes d'équivalence non triviales sont figurées par un trait continu.



PREUVE: (1) Il suffit de montrer que la multiplication par b à droite conserve la relation dans le cas où $p_1 < p_2$, ce qui est trivial si $q_1 \neq 0$ (car alors $q_2 \neq 0$) et si $q_1 = 0$ on obtient $(b^{p_1+1}, b^{p_2} a^{q_2-1})$ qui sont en relation puisque $cl_R(p_1) \supset [p_1, p_2]$ donc $p_2 R p_1 + 1$.

(2) Résulte du

LEMME: (1) Soit $\rho \in E$. La relation ainsi définie:

$$p_1 R_1(\rho) p_2 \iff (q_1, q_2) \in \mathbb{N}^2 \text{ } b^{p_1} a^{q_1} \rho b^{p_2} a^{q_2}$$

est une relation d'équivalence sur $\mathbb{N}$.

(2) Si $\rho \in A$ alors $R_1(\rho) \in J$ et $\psi(R_1(\rho)) = \rho$.

PREUVE: Seule la transitivité n'est pas immédiate. Elle résulte du fait que si $b^{p_1} a^{q_1} \rho b^{p_2} a^{q_2}$ et $b^{p_2} a^{q_2} \rho b^{p_3} a^{q_3}$ on a $b^{p_1} a^{q_1+q_2} \rho b^{p_2} a^{q_2+q_2} \rho b^{p_3} a^{q_3+q_2}$, d'où $p_1 R_1(\rho) p_3$.

(2) Soit $\rho \in A$; supposons $b^{p_1} a^{q_1} \rho b^{p_2} a^{q_2}$ avec $q_1 \leq q_2$.

On a $b^{p_1+q_2-q_1} \rho b^{p_2}$ d'où $p_1+q_2-q_1 R_b(\rho) p_2$ et $p_1+q_2-q_1 = p_2$ soit $p_1 - q_1 = p_2 - q_2$ (*). Soient maintenant $p_1 < p_2$, tels que $p_1 R_1(\rho) p_2$; (*) donne $q_1 < q_2$, donc $b^{p_1} \rho b^{p_2} a^{q_2-q_1}$ et

$b^{p_1+1} \rho b^{p_2} a^{q_2-q_1-1}$ ce qui prouve que $p_1+1 R_1(\rho) p_2$; toutes les classes de ρ sont donc des intervalles; (*) montre que $b^{p_1} a^{q_1} \rho b^{p_2} a^{q_2}$ implique ($p_1 R_1(\rho) p_2$ et $p_1-q_1=p_2-q_2$).

Inversement, supposons la proposition entre parenthèses vérifiée; alors il existe une relation $b^{p_1} a^{q_1} \rho b^{p_2} a^{q_2}$ comme $p_1-q_1=p_2-q_2$ on se ramène à $b^{p_1} a^{q_1} \rho b^{p_2} a^{q_2}$ par multiplication à droite par un a^k ou un b^k convenable.

Fin de la preuve du théorème: Il reste à voir que si $R \in \mathcal{J}$, $R_1(\psi(R))=R$ ce qui résulte de l'équivalence:

$$b^{p_1} a^{q_1} \psi(R) b^{p_2} a^{q_2} \Leftrightarrow p_1 R p_2 \text{ et } p_1-q_1=p_2-q_2$$

et de (*) dans le lemme ci-dessus.

2) Le segment initial P (relations périodiques élémentaires).

Soit C une congruence de $(\mathbb{N}, +)$. Notons $\phi(C)$ la relation $b^{p_1} a^{q_1} \phi(C) b^{p_2} a^{q_2} \Leftrightarrow p_1 C p_2 \text{ et } q_1=q_2$

Notons encore $\text{Co}(\mathbb{N})$ le sous treillis complet de $\text{Eq}(\mathbb{N})$ formé des congruences de $(\mathbb{N}, +)$. Soit $P = \{ \phi(C) \mid C \in \text{Co}(\mathbb{N}) \}$; cet ensemble possède les propriétés suivantes:

PROPOSITION 2. (1) $P \subseteq E$ et $P = [\Delta_B, \phi(\mathbb{N} \times \mathbb{N})]$

(2) $C \mapsto \phi(C)$ est un isomorphisme de treillis complets $\text{Co}(\mathbb{N}) \rightarrow P$

(3) Pour $(m, k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$ soit $C(m, k)$ la congruence d'indice m et de période k (définie par: $p=q$ si $p < m$ ou $q < m$, $p \equiv q(k)$ sinon), Avec la notation $\phi(m, k)$ pour $\phi(C(m, k))$, on a:

(i) $(m, k) \mapsto \phi(m, k)$ est une bijection $\mathbb{N} \times \mathbb{N}^* \rightarrow P - \{ \Delta_B \}$

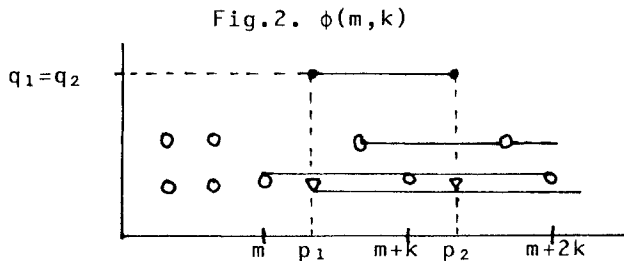
(ii) $\forall \phi(m_i, k_i) = \phi(\inf(m_i), \text{pgcd}(k_i))$
 $i \in I$

$$(iii) \bigwedge_{i \in I} \phi(m_i, k_i) \begin{cases} = \Delta_B \text{ si } \sup(m_i) = +\infty \text{ ou } \text{ppcm}(k_i) = +\infty \\ = \phi(\sup(m_i), \text{ppcm}(k_i)) \text{ sinon} \end{cases}$$

PREUVE: (1) $\phi(C)$ est manifestement stable par les multiplications à droite par a et b . Pour la seconde égalité il suffit de remarquer que si $\rho \in \phi(\mathbb{N} \times \mathbb{N})$, $b^{p_1} a^{q_1} \rho b^{p_2} a^{q_2}$ implique $q_1 = q_2$ d'où $b^{p_1} \rho b^{p_2}$ ce qui prouve $\rho \in \phi(R_b(\rho))$ et comme on a toujours l'inclusion inverse ceci montre (1).

(2) D'après ce qui précède, pour établir (2) il suffit de prouver que pour $C \in \text{Co}(\mathbb{N})$ on a $R_b(\phi(C)) = C$. Ceci résulte des définitions.

(3) Considérons $\mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$, produit des ensembles ordonnés $\mathbb{N}$ - avec la relation d'ordre opposée à la relation $\leq$ - et $\mathbb{N}^*$ - avec la relation de divisibilité -; on obtient aussitôt l'isomorphisme de treillis $(m, k) \mapsto C(m, k)$ $\mathbb{N} \times \mathbb{N}^* \rightarrow \text{Co}(\mathbb{N}) - \{\Delta_{\mathbb{N}}\}$ avec des formules de bornes inf. et sup. analogues à (ii) et (iii). Le point (i) s'établit par composition à l'aide de (2) et de l'isomorphisme précédent.



3) $E = \text{PVA}$

Dans ce qui suit nous appellerons support de $R \in \text{Eq}(X)$ la réunion des classes non triviales: $\text{supp}(R) = \{x \in X \mid \text{cl}(x) \neq \{x\}\}$.

PROPOSITION 3. (1) Pour toute $\rho \in E$, il existe une unique
décomposition $\rho = \phi(R_b(\rho)) \vee \psi(R)$ avec $R \in J$ et $\text{supp}(R)$ dans
 $[0, m+k]$ si m et k sont tels que $R_b(\rho) = C(m, k)$.

(2) $\phi(R_b(\rho))$ est le plus grand élément de
 $P \cap [\Delta_B, \rho]$. Si $\rho \notin A$, $\psi(R)$ est le plus grand élément de
 $[\Delta_B, \psi_{[0, m+k]}] \cap [\Delta_B, \rho]$, avec m, k comme en (1).

Remarque: Si $\rho \in A$, il n'y a plus, dans (1), aucune contrainte
sur $\text{supp}(R)$ et l'on retrouve la PROPOSITION 1 (2).

PREUVE: (1) Existence de la décomposition:

Il découle de la remarque que l'existence n'est à prou-
ver que si $\rho \notin A$ (en ce cas $R_b(\rho) \neq \Delta_N$).

Soit $\psi(R)$ le plus grand élément de $[\Delta_B, \psi_{[0, m+k]}] \cap [\Delta_B, \rho]$
(cet ensemble est fini). On a évidemment

$\delta = \phi(R_b(\rho)) \vee \psi(R) \leq \rho$; montrons l'inclusion réciproque.

Supposons que $b^{p_1} a^{q_1} \rho b^{p'_1} a^{q_2}$ et soient p_1, p_2 les repré-
sents canoniques de p et p' dans $[0, m+k-1]$, modulo $R_b(\rho)$.
Nous nous plaçons, sans restreindre la généralité, dans le
cas où $p_1 \leq p_2$.

1^{er} cas: $0 \leq q_2 - q_1 \leq p_2 - p_1$ (voir schéma ci-dessous).

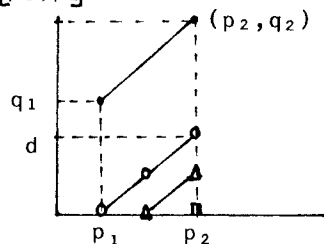
Posons $d = q_2 - q_1$ alors $b^{p_1} \rho b^{p_2} a^d$ d'où $b^{p_1+d} \rho b^{p_2}$; comme
 $p_1 + d \leq p_2 \leq m+k$ on a nécessairement $p_1 + d = p_2$; pour tout t dans
 $[0, d]$ on a $b^{p_1+t} \rho b^{p_2} a^{d-t}$ puis $b^{p_1+t} a^t \rho b^{p_2} a^d \rho b^{p_1}$. Ceci
montre que $\psi_{[p_1, p_2]} \leq \rho$ et comme $\psi_{[p_1, p_2]} \leq \psi(R)$ on a donc
bien $b^{p_1} a^{q_1} \psi(R) b^{p_2} a^{q_2}$.

Dans ce cas $b^{p_1} a^{q_1} \phi \circ \psi \circ \phi b^{p'_1} a^{q_2}$.

2^{ème} cas: $q_2 < q_1$. Soit $d = q_1 - q_2$;

on obtient, par multiplication,

$b^{p_1} a^d \rho b^{p_2}$ puis $b^{p_1} \rho b^{p_2+d}$ d'où



$p_2 + d - p_1 = nk$ avec $n \neq 0$ et

$m \leq p_1 \leq p_2 < m+k$. D'où deux sous-cas

2.1. $n=1$. Alors $p_2 - p_1 + d = k$, on a

$$b^{p_1} a^{d-1} \rho b^{p_2+1}, \quad b^{p_1} a^d \rho b^{p_2+1} a$$

et, si $0 \leq t \leq d$ $b^{p_1} a^{d-t} \rho b^{p_2+t}$ et

donc $b^{p_2} \rho b^{p_1} a^d \rho b^{p_2+t} a^t$ ce qui

montre que $\psi_{[p_2, m+k]} \subset \rho$ (car

$t = p_2 - m + k \leq d$). Pour t tel que

$m+k-p_2 \leq t \leq d$ posons $p_2+t = m+k+u$

on a $b^{m+k+u} a^{m+k-p_2+u} \rho b^{p_1} a^d$,

comme u varie alors entre

0 et $p_1 - m$ on obtient que $\psi_{[m, p_1]} \subset \rho$. Nous avons alors

$b^{p_1} a^d \psi(R) b^m a^{d-(p_1-m)} \phi b^{m+k} a^{d-(p_1-m)} \psi(R) b^{p_2}$, où ϕ désigne

$\phi(m, k)$ qui est incluse dans ρ . On obtient $b^{p_1} a^d \psi \circ \phi \circ \psi b^{p_2}$

($\psi = \psi(R)$). Par multiplication on a $b^{p_1} a^{q_1} \psi \circ \phi \circ \psi b^{p_2} a^{q_2}$ d'où

$b^{p_1} a^{q_1} \phi \circ \psi \circ \phi \circ \psi \circ \phi b^{p_2} a^{q_2}$.

2.2. $n > 1$. Par un raisonnement analogue au précédent, on

montre que $\psi_{[m, m+k]} \subset \rho$ et que $b^m (\psi \circ \phi)^s b^{m+k} a^{sk}$ pour tout

$s \in \mathbb{N}$. On a donc successivement

$b^{p_1} a^d \psi b^m a^{d-(p_1-m)}$ puis

$b^{p_2} \psi b^{m+k} a^{m+k-p_2} \phi b^m a^{m+k-p_2}$

mais $d - (p_1 - m) - (m + k - p_2) = (n-1)k$

donc $b^m a^{m+k-p_2} (\psi \circ \phi)^{n-1} b^{m+k} a^u$

avec $u = d - (p_1 - m)$. Par suite

$b^{p_1} a^d \psi \circ (\psi \circ \phi)^{n-1} \circ \phi \circ \psi b^{p_2}$

3^{ème} cas: $q_2 - q_1 > p_2 - p_1$. Posant

$d = q_2 - q_1$, on obtient

$b^{p_1} \rho b^{p_2} a^d$ d'où b^{p_2} est congru

Fig.3. 2^{ème} cas

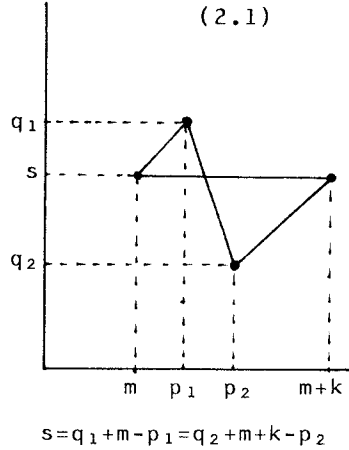
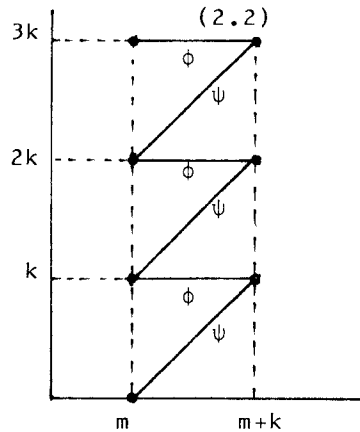


Fig.4. 2^{ème} cas



à $b^{p_2} a^{d-(p_2-p_1)}$ (modulo ρ). On est ramené au cas précédent avec $n = \frac{d-p_2+p_1}{k}$ et $b^{p_1} \psi b^{p_2} a^{p_2-p_1} (\psi \circ \phi)^n b^{p_2} a^d$.

(1) Unicité de la décomposition:

Elle est évidente si $R_b(\rho) = \Delta_{\mathbb{N}}$. Sinon, nous n'avons que trois possibilités:

$$Cl_R(m) = [m, m+k]$$

$$Cl_R(m) = [r, s] \text{ avec } r < m \leq s \text{ et } Cl_R(m+k) = \{m+k\}$$

$$Cl_R(m) = [m, s] \text{ et } Cl_R(m+k) = [t, m+k] \text{ avec } m \leq s < t \leq m+k.$$

Les autres possibilités sont exclues du fait que, sinon, $R_b(\rho)$ aurait un indice strictement inférieur à m .

Les trois cas sont entièrement déterminés par ρ .

Le premier et le troisième sont tels que l'ensemble

$U = \{ b^p a^q \mid m \leq p \leq m+k \}$ soit saturé par ρ ; dans le premier cas U/ρ est fini (de cardinal k), tandis que dans le troisième U/ρ est infini (ceci sera montré dans l'analyse des cas).

Dans le second cas U n'est pas saturé.

1^{er} cas: $Cl_R(m) = [m, m+k]$. $V = \{ b^p a^q \mid 0 \leq p < m \}$ est saturé par $\psi(R)$ et, comme $\phi(m, k)$ induit l'identité sur V , les classes de ρ dans V sont exactement celles de $\psi.R$ est donc entièrement déterminée par ρ . Si $p_1, p_2 \in [m, m+k]$ on a:

$b^{p_1} a^{q_1} \rho b^{p_2} a^{q_2} \Leftrightarrow p_1 - q_1 = p_2 - q_2 \pmod{k}$ il y a donc k classes d'équivalence dans U . (Voir Figure 5)

2^{ème} cas: $Cl_R(m) = [r, s]$ et $Cl_R(m+k) = \{m+k\}$ avec $r < m \leq s$. Le saturé de U contient des points de première coordonnée r . Comme précédemment R est entièrement déterminée par la trace de ρ sur $V = \{ b^p a^q \mid 0 \leq p < r \}$

3^{ème} cas: $Cl_R(m) = [m, s]$ et $Cl_R(m+k) = [t, m+k]$ avec $m \leq s < t \leq m+k$. U est saturé par $\phi V \psi$ et $Cl_\rho(b^t a^q)$ est la réunion de

$C_1 = \{b^u a^{q+u-t} \mid t \leq u \leq m+k\}$ et de $C_2 = \{b^u a^{q+u+k-t} \mid m \leq u \leq s\}$. (Voir Figure 6). Puisque, pour tout $q \in \mathbb{N}$ la classe $Cl_\rho(b^t a^q)$ est finie, U/ρ est infini. De plus les entiers s et t sont entièrement déterminés comme abscisses minimale et maximale dans une classe $Cl_\rho(b^t a^q)$ pour q suffisamment grand. $Cl_R(m)$ et $Cl_R(m+k)$ sont donc entièrement déterminées par ρ . De plus, sur $V = \{b^p a^q \mid 0 \leq p < m \text{ ou } s < p < t\}$, ϕ induit l'identité et, comme V est saturé par ψ , les classes de V/ρ sont celles de ψ . R est donc déterminée par ρ .

Fig.5. Sur le dessin $k=4$.

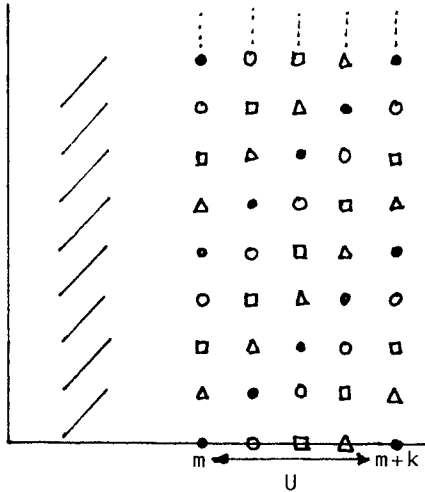
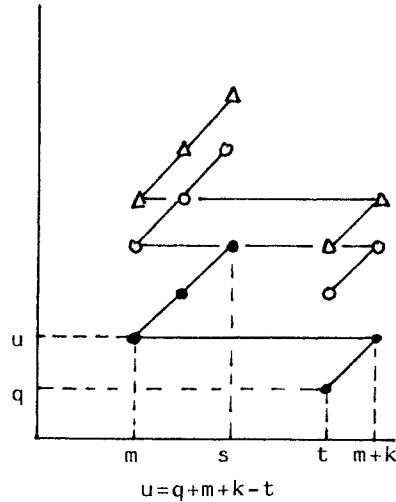


Fig.6. Classes du 3^{ème} cas.



Remarque: Si $\rho = \phi V \psi$ et $x \rho y$ alors il existe une chaîne $x = x_0, \dots, x_n = y$ avec $x_i \mu_i x_{i+1}$ et $\mu_i \in \{\phi, \psi\}$; si la chaîne est de longueur minimale, $\mu_i \neq \mu_{i+1}$ et la preuve d'existence donne des bornes pour n .

III - QUOTIENTS

1) $R_b(\rho) = \Delta_{\mathbb{N}} \cdot (\rho \in A)$

Soit F_0 l'ensemble des plus petits éléments des R -classes (triviales ou non), alors $F = \{b^p a^q \mid p \in F_0\} \cup \{b^p \mid p \in \mathbb{N}\}$ est un

système fondamental de représentants; ce qui donne l'allure du quotient.

Fig.7. $\rho \in A$, classes
(les éléments de F sont
portés par un double trait)

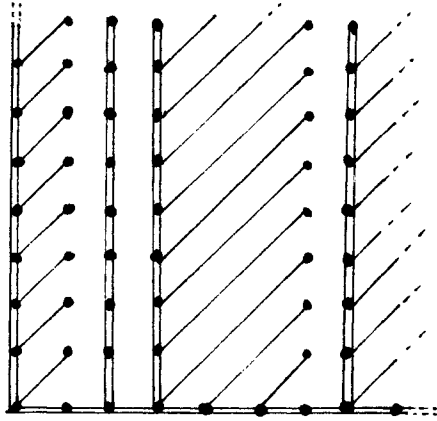
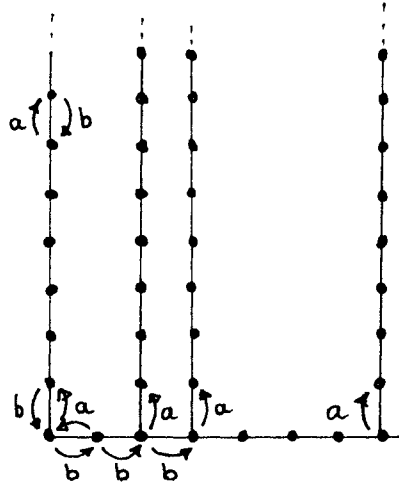


Fig.8. $\rho \in A$, quotient



2) B/ρ , considéré comme B -ensemble, admet une partie stable finie.

a) Décomposition de ρ .

Pour $(m, k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$ on définit $\chi(m, k) = \psi_{[m, m+k]} \vee \phi(m, k)$ et $X = \{\chi(m, k) \mid (m, k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*\}$. B/ρ étant un B -ensemble (automate complet) pour l'action à droite de B on dira que B admet un sous-quotient fini (par ρ) s'il existe $F \neq \emptyset$, partie de B/ρ , B -stable et finie. On a alors:

PROPOSITION 4. Soit E_{sf} l'ensemble des $\rho \in E$ telles que B admette un sous-quotient fini (par ρ). Soit $E_f (\subset E_{sf})$ l'ensemble des éléments $\rho \in E$ telles que B/ρ soit fini.

Alors:

- (i) E_{sf} et E_f sont des segments terminaux de E .
- (ii) Pour que ρ soit dans E_{sf} , il faut et il suffit qu'elle

soit minorée par un élément de X . Dans ce cas il existe une décomposition unique $\rho = \chi(m, k) \vee \psi(R)$ avec $\text{supp}(R)$ dans $[0, m-1]$; on a alors $\rho = \chi \circ \psi = \psi \circ \chi$ et χ est le plus grand élément de $[\Delta_B, \rho] \cap X$.

(iii) $\chi \in E_{sf}$ et $E_f = \{\chi(0, k) \mid k \in \mathbb{N}^*\}$.

PREUVE: (i) Si $\rho \in \mu$ on a une surjection canonique

$B/\rho \longrightarrow B/\mu$ d'où (i).

(ii) Si $\rho \in A$ alors $\rho \in \psi_{\mathbb{N}}$; mais $Z = B/\psi_{\mathbb{N}}$ est simple donc $\rho \notin E_{sf}$. Si $\rho \notin A$ alors $\rho = \psi(R) \vee \phi(m, k)$ et B/ρ admet une partie (non vide) stable minimale qui est W/ρ avec $W = \{b^p a^q \mid r \leq p \leq m+k\}$, où $r = \inf(Cl_R(m))$. Le seul cas où $|W/\rho|$ est fini étant celui où $Cl_R(m) = [m, m+k]$, on a $\rho = \psi(R_1) \vee \psi_{[m, m+k]} \vee \phi(m, k) = \psi(R_1) \vee \chi(m, k)$ avec $\text{supp}(R_1)$ dans $[0, m-1]$ et ceci de façon unique. En remarquant que $\chi \in E_{sf}$, ceci prouve la première partie de (ii).

Si $\chi(u, v) \in \rho$ et $\rho \in E_{sf}$, soient m, k l'indice et la période de $R_b(\rho)$. On a $R_b(\chi(u, v)) = C(u, v) \in C(m, k)$ d'où $u \geq m$ et $v \in \mathbb{N}k$ ce qui entraîne $\chi(u, v) \in \chi(m, k) \in \rho$. Il reste à voir que $\rho = \chi \circ \psi = \psi \circ \phi$ ce qui résulte du fait que si $R, S \in \text{Eq}(Y)$ sont telles que $\text{supp}(R) \cap \text{supp}(S) = \emptyset$ alors $R \circ S = S \circ R = R \vee S$.

(iii) Si, dans la décomposition $\rho = \chi(m, k) \vee \psi(R)$, on avait $m > 0$, les classes des éléments a^q seraient toutes distinctes et B/ρ serait infini.

b) Structure des quotients.

Soit F_0 l'ensemble des plus petits éléments des R -classes $(\rho = \psi(R) \circ \chi(m, k))$, comme ci-dessus, $F = \{b^p a^q \mid p \in F_0\} \cup \{b^p \mid p \leq m+k\}$ est un système fondamental de représentants; ce qui donne l'allure du quotient.

Fig.9. $\rho \in E_{sf}$, classes

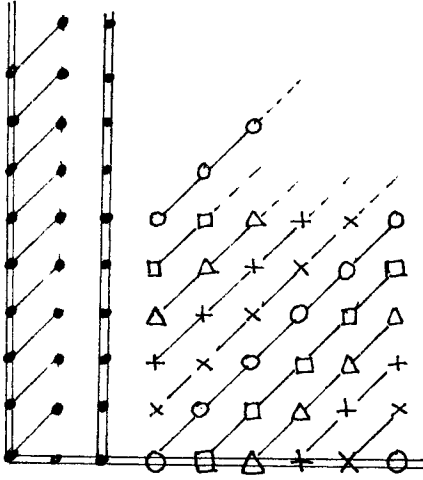
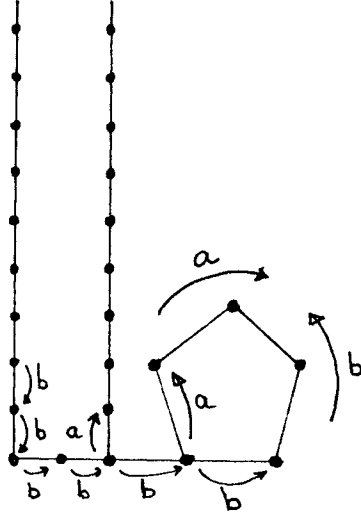


Fig.10. $\rho \in E_{sf}$, quotient



3) $\rho \in E - E_{sf} - A$.

On a alors:

$$Cl_R(m) = [r, s] \text{ et } Cl_R(m+k) = \{m+k\} \text{ avec } r \leq m \leq s < m+k \quad (3.1)$$

$$\text{ou } Cl_R(m) = [m, s] \text{ et } Cl_R(m+k) = [t, m+k] \text{ avec } m \leq s < t < m+k \quad (3.2)$$

(3.1): Soit F_0 l'ensemble des plus petits éléments des R-classes de $[0, m+k-1]$; $F = \{b^p a^q \mid \rho \in F_0\} \cup \{b^p \mid \rho \in [0, m+k]\}$ est un système fondamental de représentants. (Figures 11 et 12)

Fig.11. Cas 3.1, classes

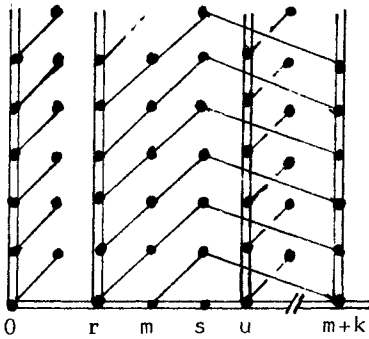
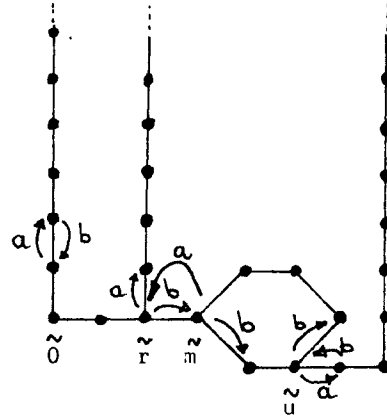


Fig.12. Cas 3.1, quotient

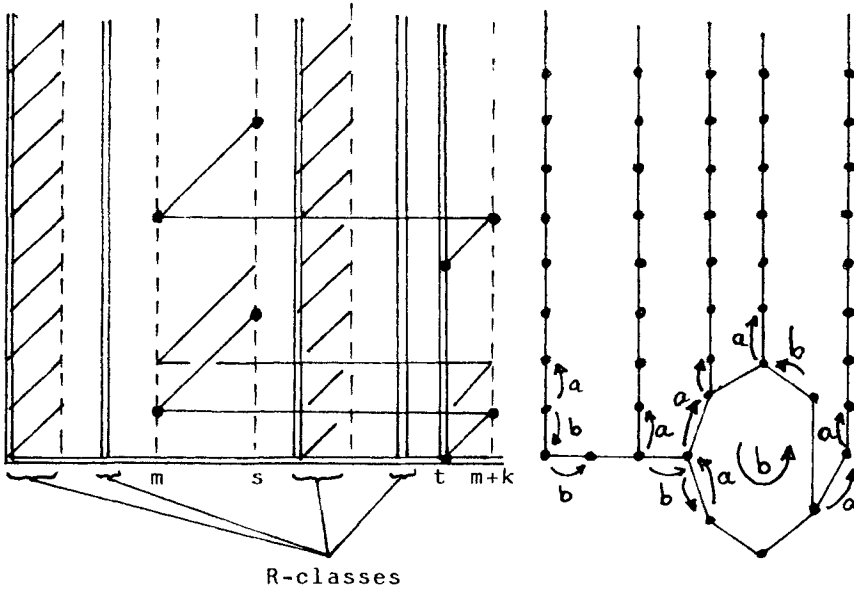


Dans la figure 12, $\tilde{n} = Cl_\rho(b^n)$.

(3.2): Soit F_0 l'ensemble des plus petits éléments des classes de R , différentes de $[m, s]$ et $[t, m+k]$;
 $F = \{b^p a^q \mid p \in F_0\} \cup \{b^t a^q \mid q \in \mathbb{N}\} \cup \{b^p \mid 0 \leq p \leq m+k\}$ est un système fondamental de représentants.

Fig.13. Cas 3.2, classes

Fig.14. Cas 3.2, quotient



IV - CONCLUSION

La structure de treillis de E est représentée par le schéma Figure 15 ci-dessous. Les seules congruences de A sont $\psi_{\mathbb{N}}$ et Δ_B ; en effet si $\psi = \psi(R)$ et $pRp+1$ alors, par multiplication, $b^{p-1}\psi b^p a$, si $p \neq 0$; ce qui prouve que la seule classe de R est $\mathbb{N}$. Si $\rho \notin A$ et que ρ est une congruence, on doit avoir $m=0$ car $b^m \rho b^{m+k}$ implique $b^{m-1} \rho b^{m+k-1}$, si $m \neq 0$. Un raisonnement simple montre qu'alors $\rho = \chi(0, k) \in E_f$; nous retrouvons ainsi le résultat (Cl-Pr Vol I, cor. 1, 32 p.45): les seuls monoïdes quotients de B sont $B, \mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$.

BIBLIOGRAPHIE

1. (Cl-Pr).Clifford,A.H. et G.B.Preston,The algebraic theory of semigroups,A.M.S,Math Surveys 7.1 (1961),43-45.
2. (Ro-Sa).Romian,F. et J.Sakarovitch,Parties algebriques deterministes du monoïde bicyclique, (à paraître).
3. (Sa).Sakarovitch,J. Syntaxe des langages de Chomsky
Essai sur le déterminisme,Thèse de doctorat d'état,Université de Paris VI (1979),17-22.

Auteur:Gérard Duchamp(Université Paris VII (L.I.T.P.))

35,rue A.Blanqui
93600 AULNAY-SOUS-BOIS
(FRANCE)

Reçu le 15 mai 1985 et le 8 novembre sous sa forme
finale