

# MATHÉMATIQUES ET PHYSIQUE

---

## Physique Combinatoire I : Groupes à un paramètre

Gérard H. E. Duchamp<sup>1</sup>, Karol A. Penson<sup>2</sup> et Christophe Tollu<sup>3</sup>

---

### 1. Introduction

En 1925, en l'espace d'un an, après plus de 25 ans de tâtonnements et de discussions scientifiques entre des physiciens et mathématiciens de premier plan, ce n'est pas un ni deux, mais bien trois modèles de la Mécanique Quantique qui ont été proposés (les articles paraissent entre juin 1925 et juin 1926).

Ces modèles sont ceux de Dirac, de Schrödinger, fondé sur une équation aux dérivées partielles, et d'Heisenberg, fondé sur la relation

$$(1) \quad AB - BA = Id .$$

Cette relation apparaît clairement lorsque l'on examine quelques propriétés de l'oscillateur harmonique quantique dont l'Hamiltonien, en une dimension, s'écrit

$$(2) \quad H = \frac{p^2}{2m} + \frac{\gamma}{2}q^2$$

où  $p$  (resp.  $q$ ) désigne l'opérateur moment (resp. l'opérateur position) qui agit sur la fonction d'onde  $\varphi(x)$  comme  $-i\hbar d/dx$  (resp. comme la multiplication par  $x$ ). Le terme  $p^2/2m$  représente l'énergie cinétique et le terme  $(\gamma/2)q^2$  l'énergie potentielle,  $\gamma$  désignant le coefficient de rappel. Les opérateurs  $p$  et  $q$  satisfont à la relation de commutation

$$(3) \quad [q, p] = qp - pq = i\hbar .$$

À partir de  $p$  et  $q$ , on peut construire deux nouveaux opérateurs,

$$(4) \quad P = (\gamma m)^{-1/4} p \quad \text{et} \quad Q = (\gamma m)^{1/4} q ,$$

qui satisfont à la même relation de commutation

$$(5) \quad [Q, P] = i\hbar .$$

Avec ces nouveaux opérateurs, l'Hamiltonien se réécrit :

$$(6) \quad H = \frac{1}{2}\omega(P^2 + Q^2), \quad \text{où} \quad \omega = \left(\frac{\gamma}{m}\right)^{1/2} .$$

---

<sup>1</sup> Université Paris XIII, Laboratoire d'Informatique de Paris Nord. CNRS UMR 7030.

<sup>2</sup> Université Pierre et Marie Curie, Laboratoire de Physique Théorique de la Matière Condensée. CNRS UMR 7600.

<sup>3</sup> Université Paris XIII, Laboratoire d'Informatique de Paris Nord. CNRS UMR 7030.

On peut maintenant définir deux opérateurs qui sont mutuellement conjugués :

$$(7) \quad a^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2\hbar}}(Q - iP)$$

et

$$(8) \quad a = \frac{1}{\sqrt{2\hbar}}(Q + iP) .$$

Ils satisfont la relation de commutation

$$(9) \quad [a, a^\dagger] = 1 ,$$

et l'Hamiltonien se réécrit avec déplacement

$$(10) \quad H = \hbar\omega \left( a^\dagger a + \frac{1}{2} \right) .$$

Les couples d'opérateurs  $(A, B)$  tels que

$$(11) \quad AB - BA = I$$

où  $I$  est l'élément identique d'une algèbre associative, se rencontrent maintenant dans de nombreux domaines, évidemment en Physique Quantique [12, 13, 27] et plus récemment en Combinatoire [26, 37] et en Physique Combinatoire [8, 9].

## 2. Algèbre de Heisenberg-Weyl (un mode)

À partir de maintenant toutes les algèbres sont associatives avec élément unité non nul.

### 2.1. Définition formelle

L'apparition de la relation (11) en 1925 a immédiatement contraint Born, Heisenberg et Jordan à considérer des matrices infinies. En effet, un simple calcul de traces montre immédiatement que la relation (11) ne peut, en caractéristique zéro<sup>4</sup>, se représenter par des matrices finies (non vides). La représentation par des opérateurs continus n'est pas non plus possible dans un espace de Banach. En effet, avec  $k = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ , on peut considérer le groupe à un paramètre  $(e^{tB})_{t \in \mathbb{R}}$  et faire le calcul suivant :

$$(12) \quad ad_A(e^{tB}) = [A, \sum_{n \geq 0} \frac{t^n}{n!} B^n] = \sum_{n \geq 0} \frac{t^n}{n!} [A, B^n] = \sum_{n \geq 1} \frac{t^n}{n!} [A, B^n] = \sum_{n \geq 1} \frac{t^n}{n!} n B^{n-1} = t e^{tB} ,$$

ce qui est contraire au fait que le rayon spectral de  $ad_A$  (qui est continu) soit borné.

Les premières possibilités de représentation fidèle de (11) sont au nombre de deux (ce sont d'ailleurs les deux représentations utilisées traditionnellement).

La première se fait par des opérateurs (fermables et densément définis, mais nécessairement non bornés, comme le montre le calcul ci-dessus) dans un espace

<sup>4</sup> En caractéristique finie, on peut trouver de tels couples en dimension finie, cette possibilité commence à être utilisée en physique [39].

de Hilbert (espace de Fock traditionnel), la deuxième par des opérateurs continus dans un espace de Fréchet (Bargmann-Fock).

On peut définir formellement l'algèbre de Heisenberg-Weyl [29] par

$$(13) \quad HW_{\mathbb{C}} = \mathbb{C}\langle A, B \rangle / \mathcal{J}_{HW}$$

où  $\mathbb{C}\langle A, B \rangle = \mathbb{C}[\{A, B\}^*]$  est l'algèbre du monoïde libre  $\{A, B\}^*$  [3, 4, 30]<sup>5</sup> i.e., l'algèbre des polynômes non commutatifs et  $\mathcal{J}_{HW}$  est l'idéal bilatère engendré par le polynôme  $AB - BA - 1$ .

On notera que cette définition, donnée avec la flèche

$$(14) \quad s : \mathbb{C}\langle A, B \rangle \rightarrow HW_{\mathbb{C}} ,$$

permet de clarifier toutes les ambiguïtés concernant les formes normales qui sont traditionnelles en Physique Quantique : image commutative (opération double-dot) et ordre normal [33]. À partir de maintenant, on posera  $a = s(A)$  et  $a^\dagger = s(B)$  ; l'opérateur  $a$  (resp.  $a^\dagger$ ) est appelé opérateur d'annihilation (resp. de création)<sup>6</sup>.

En général, par *ordre normal* [7] d'une expression  $F(a^\dagger, a)$ , on entend une écriture  $\mathcal{N}(F(a^\dagger, a))$  obtenue en déplaçant (à l'aide de la réécriture  $aa^\dagger \rightarrow a^\dagger a + 1$ , dérivée de Eq. (11)) tous les opérateurs d'annihilation sur la droite. Cette procédure conduit à un opérateur dont l'action est équivalente à celle de l'opérateur original, c'est-à-dire que  $\mathcal{N}(F(a^\dagger, a)) \equiv F(a^\dagger, a)$  en tant qu'opérateurs bien que leurs écritures (dont les composantes homogènes vivent dans  $\mathbb{C}\langle A, B \rangle$ ) puissent être complètement différentes. En utilisant (14), c'est un exercice facile que de montrer que  $\left( (a^\dagger)^i a^j \right)_{i,j \in \mathbb{N}}$  est une base linéaire de  $HW_{\mathbb{C}}$  (base des formes normales).

Les constantes de structure de  $HW_{\mathbb{C}}$ , calculées dans cette base, sont données dans [8] et s'obtiennent par la formule suivante<sup>7</sup>

$$(15) \quad (a^\dagger)^{i_1} a^{j_1} (a^\dagger)^{i_2} a^{j_2} = \sum_{k=0}^{m=\min(j_1, i_2)} \binom{m}{k} k! (a^\dagger)^{i_1+i_2-k} a^{j_1+j_2-k} .$$

## 2.2. Graduation de l'algèbre de Heisenberg-Weyl

Avec la regraduation de  $\mathbb{C}\langle A, B \rangle$  donnée par

$$(16) \quad \deg(B) = -\deg(A) = 1 ,$$

on voit que l'idéal  $\mathcal{J}_{HW}$  est gradué. Cette graduation quotient est donc, de façon pratique, déterminée, pour  $E \in \mathbb{Z}$ , par

$$(17) \quad HW_{\mathbb{C}}^{(E)} = \text{Vect}_{\mathbb{C}}\left( (a^\dagger)^i a^j \right)_{i-j=E}$$

Elle fait de  $HW_{\mathbb{C}}$  une algèbre  $\mathbb{Z}$ -graduée.

La graduation précédente apparaît d'ailleurs comme naturelle quand on représente l'algèbre  $HW_{\mathbb{C}}$  par les deux opérateurs sur  $\mathbb{C}[z]$

<sup>5</sup> Ce monoïde est noté  $\text{Mo}(\{A, B\})$  dans [15], et l'algèbre correspondante  $\text{Libas}_{\mathbb{C}}(\{A, B\})$ .

<sup>6</sup> Que ce soit dans cette algèbre ou dans ses représentations.

<sup>7</sup> Formule qui peut être facilement obtenue à partir de l'approche (équivalente à celle du théorème de Wick) par les « nombres de placements de tours » (« rook numbers », en anglais) [32, 35].

$$(18) \quad \begin{cases} \rho_{BF}(a) = \frac{d}{dz} \\ \rho_{BF}(a^\dagger) = (S \mapsto zS) . \end{cases}$$

Mais on peut varier les espaces. Si l'on dispose, sur une algèbre associative  $\mathcal{A}$  de  
 a) une dérivation  $\partial \in \mathfrak{Der}(\mathcal{A})$   
 b) un élément  $x$  tel que  $\partial(x) = 1$ ,  
 on obtient automatiquement une représentation de  $HW_{\mathbb{C}}$  en posant pour  $\rho(B)$  la multiplication par  $x$  ( $S \mapsto xS$ ), et  $\rho(A) = \partial$ . Cela donne lieu à toute une famille de représentations fidèles<sup>8</sup>, en particulier sur  $\mathbb{C}[z], \mathbb{C}[[z]]$  et  $\mathbb{C}\langle X \rangle, \mathbb{C}\langle\langle X \rangle\rangle, \mathbb{C}[X], \mathbb{C}[[X]]$  avec  $x = \sum_{l \in X} l$ , mais aussi sur les espaces de fonctions  $C^\infty$ , les espaces de distributions. Cette famille de représentations est connue sous le nom de « représentations de Bargmann-Fock ».

En général, et ceci de façon très concrète, on peut associer beaucoup d'opérateurs importants en Physique Quantique avec des éléments de  $HW_{\mathbb{C}}$  ou d'espaces de fonctions (qui sont souvent des complétés dans lesquels l'image d'une orbite de  $HW_{\mathbb{C}}$  est dense). En particulier, si on se donne un élément  $\Omega \in HW_{\mathbb{C}}$ , il est intéressant d'étudier le groupe à un paramètre (groupe d'évolution)[16]

$$(19) \quad \left( e^{\lambda \rho(\Omega)} \right)_{\lambda \in \mathbb{R}} .$$

De tels groupes sont importants en dynamique quantique (ici, le paramètre  $\lambda$  est le temps) ou en mécanique statistique quantique (où  $\lambda$  est l'opposé de l'inverse de la température).

Les questions que l'on se pose sont :

- (1) Est-ce que le groupe (19) est bien défini ? À travers quelle représentation  $\rho$  ? Quel est le domaine du paramètre (dans le cas où c'est un groupe local) ?
- (2) Quelles sont les méthodes combinatoires qui peuvent être extraites de la connaissance de ce(s) groupe(s) ?

Notre premier travail va donc être d'étudier la combinatoire des formes normales des puissances  $\Omega^n$  grâce aux matrices infinies.

<sup>8</sup> Toutes ces représentations sont fidèles car on vérifie aisément qu'un tel  $x$  n'a pas de polynôme minimal et que le  $HW_{\mathbb{C}}$ -module engendré par  $x$  est isomorphe à celui de la représentation de Bargmann-Fock sur  $\mathbb{C}[x]$ .

### 3. Combinatoire des matrices infinies

#### 3.1. Opérateurs homogènes et nombres de Stirling généralisés

Avant de définir des représentations (ou des réalisations) du groupe à un paramètre  $(e^{\lambda\Omega})_{\lambda \in \mathbb{R}}$ , on peut (et on doit) considérer le problème qui consiste à mettre les puissances de  $\Omega$  en ordre normal.

$$(20) \quad \mathcal{N}(\Omega^n) = \sum_{i,j \in \mathbb{N}} \alpha(n,i,j) (a^\dagger)^i a^j .$$

C'est en général un problème à trois paramètres, mais en tirant parti de la graduation précédente, on peut le ramener à deux pour les opérateurs homogènes. Un tel opérateur de degré (ou excès)  $E$  s'écrit

$$(21) \quad \Omega = \sum_{i-j=E} \alpha(i,j) (a^\dagger)^i a^j .$$

On a alors

$$(22) \quad \mathcal{N}(\Omega^n) = \begin{cases} (a^\dagger)^{nE} \sum_{k=0}^{\infty} S_{\Omega}(n,k) (a^\dagger)^k a^k & \text{si } E \geq 0 \\ \left( \sum_{k=0}^{\infty} S_{\Omega}(n,k) (a^\dagger)^k a^k \right) a^{n|E|} & \text{si } E < 0 . \end{cases}$$

C'est la définition des « Nombres de Stirling Généralisés » telle qu'elle a été introduite et utilisée dans [5, 6] pour les monômes ( $\Omega$  est un produit de facteurs) et généralisée aux opérateurs homogènes dans [21] (voir aussi [31]). Ces nombres ont récemment attiré l'attention de combinatoristes [25] qui ont considéré qu'ils constituaient une généralisation non triviale de quantités combinatoires connues depuis 200 ans [2].

La justification du nom *Stirling Numbers* se trouve dans l'exemple ci-dessous, à la suite duquel on donne deux autres exemples.

Avec  $\Omega = a^\dagger a$ , on obtient la matrice des nombres de Stirling de seconde espèce.

$$(23) \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 7 & 6 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 15 & 25 & 10 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 31 & 90 & 65 & 15 & 1 & \dots \\ \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

Cette matrice est bien le tableau des nombres  $(S(n,k))_{n,k \in \mathbb{N}}$  tels que

$$(24) \quad \sum_{n,k \geq 0} S(n,k) \frac{x^n}{n!} y^k = e^{y(e^x-1)} .$$

Ces nombres ont une interprétation combinatoire très simple :  $S(n, k)$  est le nombre de relations d'équivalence sur un ensemble à  $n$  éléments qui ont  $k$  classes ou, de façon équivalente, le nombre de partitions de  $\{1, \dots, n\}$  en  $k$  sous-ensembles non vides (appelés blocs en combinatoire<sup>9</sup>).

Pour  $\Omega = a^\dagger aa^\dagger$ , on a

$$(25) \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 2 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 6 & 18 & 9 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 24 & 96 & 72 & 16 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 120 & 600 & 600 & 200 & 25 & 1 & 0 & \dots \\ 720 & 4320 & 5400 & 2400 & 450 & 36 & 1 & \dots \\ \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

et pour  $\Omega = a^\dagger aaa^\dagger a^\dagger$ ,

$$(26) \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 2 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 12 & 60 & 54 & 14 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 144 & 1296 & 2232 & 1296 & 306 & 30 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 2880 & 40320 & 109440 & 105120 & 45000 & 9504 & 1016 & 52 & 1 & \dots \\ \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

Pour tout mot  $w(a, a^\dagger)$  (et plus généralement, pour tout opérateur homogène), toutes les lignes  $(S_w(n, k))_{k \in \mathbb{N}}$  de la matrice de Stirling sont à support fini<sup>10</sup>. Nous appelons ces matrices « row-finite » [21]. On peut montrer qu'elles codent certaines classes d'opérateurs (par exemple les opérateurs continus de l'espace de Fréchet  $\mathbb{C}[[z]]$  muni de la topologie de Treves [38]<sup>11</sup>).

L'espace des matrices « row-finite » est une algèbre (notée, ci-dessous,  $\text{RF}(\mathbb{N}; \mathbb{C})$ ).

<sup>9</sup> On remarquera ainsi que  $S(0, 0) = 1$  (équivalence au graphe vide), que  $S(0, k) = 0$  pour  $k \geq 1$ , que  $S(n, 0) = 0$  si  $n \geq 1$  et, plus généralement que  $S(n, k) = 0$  dès que  $n < k$ , que  $S(n, n) = 1$  (singletons), que  $S(n, 1) = 1$  dès que  $n \geq 1$  (une seule classe, l'ensemble entier) et enfin, la récurrence (qui définit le tableau dès que l'on a fixé la première ligne)

$$S(n+1, k) = S(n, k-1) + kS(n, k)$$

qui se voit directement au niveau des partitions.

<sup>10</sup> On peut montrer facilement que la matrice est en général en escalier et que la « marche » a pour profondeur le nombre d'annihilations, ce qui explique la forme de la matrice (26).

<sup>11</sup> C'est la topologie définie par les semi-normes

$$\rho_n\left(\sum_{m \geq 0} a_m z^m\right) = |a_n|.$$

### 3.2. Transformations de suites

À chaque matrice « row-finie »  $(M[n, k])_{n, k \in \mathbb{N}}$ , on peut associer un opérateur  $\Phi_M \in \text{End}(\mathbb{C}[[x]])$  tel que l'image de  $f = \sum_{k \in \mathbb{N}} a_k \frac{x^k}{k!} \in \mathbb{C}[[x]]$  soit définie par

$$(27) \quad \Phi_M(f) = \sum_{n \in \mathbb{N}} b_n \frac{x^n}{n!} \text{ avec } b_n = \sum_{k \in \mathbb{N}} M[n, k] a_k .$$

On peut remarquer que si on munit  $\mathbb{C}[[x]]$  de la structure d'espace de Fréchet de la convergence simple sur les coefficients, chaque  $\Phi_M$  est continu. La proposition suivante, dont la preuve est laissée au lecteur, montre qu'il n'y a pas d'autre cas.

**Proposition 1.** *La correspondance  $\varphi : M \rightarrow \Phi_M$  entre  $\text{RF}(\mathbb{N}; \mathbb{C})$  et  $\mathcal{L}(\mathbb{C}[[x]])$  (endomorphismes continus) est un isomorphisme d'espaces vectoriels. C'est aussi un isomorphisme d'algèbres car*

$$(28) \quad \begin{aligned} \Phi_{MN} &= \Phi_M \circ \Phi_N \\ \Phi_I &= \text{Id}_{\mathbb{C}[[x]]} \end{aligned}$$

Cette proposition a une application immédiate pour les groupes à un paramètre  $e^{\lambda\Omega}$  engendrés par des opérateurs homogènes  $\Omega$ , parce que, à travers la représentation de Bargmann-Fock  $\rho_{BF}$ , la matrice  $\varphi^{-1}(\rho_{BF}(\Omega))$  est

- strictement triangulaire inférieure quand  $E < 0$
- diagonale quand  $E = 0$
- strictement triangulaire supérieure quand  $E > 0$ .

Et donc  $e^{\lambda\Omega}$  admet toujours une représentation comme groupe d'opérateurs sur un espace approprié. Pour  $E < 0$ , c'est chacun des espaces de polynômes  $\mathbb{C}_{\leq n}[x]$ <sup>12</sup>, pour  $E \geq 0$  c'est  $\mathbb{C}[[x]]$  muni de la topologie de Treves [38].

### 3.3. Groupes à un paramètre et matrices de Stirling

Dans ce paragraphe, nous nous consacrons à la combinatoire des monômes qui contiennent au plus un opérateur d'annihilation (dans la représentation de Bargmann-Fock, ce sont des opérateurs différentiels du premier ordre au plus). Leur image par  $\rho_{BF}$  est de la forme

$$(29) \quad q(x) \frac{d}{dx} + v(x)$$

(la somme d'un champ scalaire et d'un champ de vecteurs sur la droite). Les groupes à un paramètre engendrés par ces opérateurs peuvent, bien sûr, être intégrés en utilisant des techniques d'équations aux dérivées partielles [16] mais, ici, on va privilégier le point de vue géométrique et montrer qu'un champ du type (29) est conjugué du champ de vecteurs pur  $q(x) \frac{d}{dx}$ .

Aussi, pour calculer  $e^{t(q(x) \frac{d}{dx} + v(x))} [f]$  ( $f$  est une fonction d'un espace approprié et  $t$  est suffisamment petit), on peut utiliser la procédure suivante ( $q$  et  $v$  sont supposés au moins continus, mais  $q$  ne satisfait pas nécessairement à une condition de Cauchy-Lipschitz). Considérons d'abord le cas  $v \equiv 0$  (cas du champ pur) :

<sup>12</sup> Chaque  $\mathbb{C}_{\leq n}[x]$ , constitué des polynômes de degré moindre que  $n$ , est laissé stable par cette action.

- si  $q \equiv 0$ ,  $e^{t\rho_{BF}(\Omega)}[f] = f$  (action triviale);
- si  $q \not\equiv 0$ , on choisit un intervalle ouvert  $I \neq \emptyset$  dans lequel  $q$  ne s'annule pas et  $x_0 \in I$ ;

– pour tout  $x \in I$ , on pose

$$(30) \quad F(x) = \int_{x_0}^x \frac{dt}{q(t)} .$$

Soit  $J = F(I)$  (intervalle ouvert);  $F : I \rightarrow J$  est un difféomorphisme (car  $F$  est strictement monotone);

– on pose

$$(31) \quad s_t(x) = F^{-1}(F(x) + t)$$

pour les couples  $(x, t)$  pour lesquels cette formule a un sens, soit l'ouvert ci-dessous (où  $I$  est choisi maximal)

$$(32) \quad \mathcal{O}_{I,q} = \{(x, t) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in I, F(x) + t \in J\} .$$

Il est clair que  $s_t$  est une déformation de l'identité au sens où  $(x, t) \mapsto s_t(x)$  est continue (et même de classe  $C^1$ ) sur son domaine et que  $s_0(x) = x$ ;

– on a alors que  $e^{t(q(x)\frac{d}{dx})}$  coïncide avec la substitution  $f \mapsto f \circ s_t$ .

**Note 1.** On prendra garde au fait que le domaine de validité de la formule  $e^{t(q(x)\frac{d}{dx})}[f(x)] = f(s_t(x))$  peut être restreint par la nature même de  $f$ .

Maintenant, nous sommes en position d'intégrer le groupe à un paramètre  $e^{t(q(x)\frac{d}{dx} + v(x))}$  pour un champ scalaire général  $v$ , ( $I$ ,  $F$ ,  $s_t$  sont comme ci-dessus).

– Sur  $I$ , posons

$$(33) \quad u(x) = e^{\int_{x_0}^x \frac{v(t)}{q(t)} dt} ;$$

– on vérifie facilement la formule de conjugaison suivante

$$(34) \quad \rho_{BF}(\Omega) = (q(x)\frac{d}{dx} + v(x)) = \frac{1}{u}(q(x)\frac{d}{dx})u ,$$

qui signifie que, sur chaque fonction,  $\rho_{BF}(\Omega)$  opère comme la composition de

- la multiplication de  $f$  par  $u$  (qui est définie, ainsi que son inverse, sur  $I$ )
- l'action du champ de vecteurs  $(q(x)\frac{d}{dx})$  (maintenant sur  $uf$ )
- la division par  $u$ ;

– alors, en utilisant le fait que l'exponentiation commute avec la conjugaison, l'exponentielle devient

$$(35) \quad e^{t(q(x)\frac{d}{dx} + v(x))} = u^{-1}e^{t(q(x)\frac{d}{dx})}u .$$

En utilisant les calculs précédents, on a le groupe à un paramètre sous la forme

$$(36) \quad U_t[f](x) = e^{t(q(x)\frac{d}{dx} + v(x))}[f](x) = \frac{u(s_t(x))}{u(x)}f(s_t(x)) .$$

On peut se convaincre *a posteriori* de la validité de cette procédure en utilisant une technique de vecteur tangent comme suit :

– tester que, pour des petites valeurs  $\lambda, \theta$  du paramètre, on a

$$(37) \quad U_\lambda \circ U_\theta = U_{\lambda+\theta} ;$$

(groupe à un paramètre local)

– tester que

$$(38) \quad \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} U_t[f](x) = (q(x) \frac{d}{dx} + v(x))f(x) .$$

Les transformations du type

$$(39) \quad f \rightarrow g \cdot (f \circ s)$$

s'appellent, en Physique Combinatoire, des *substitutions avec préfonction* [21].

**Exemple 1.** Donnons maintenant un exemple d'intégration du groupe à un paramètre  $e^{\lambda \rho_{BF}(\Omega)}$  pour

$$(40) \quad \Omega = (a^\dagger)^2 a a^\dagger + a^\dagger a (a^\dagger)^2 .$$

On a la forme conjuguée

$$(41) \quad \rho_{BF}(\Omega) = x^2 \frac{d}{dx} x + x \frac{d}{dx} x^2 = x^{-\frac{3}{2}} (2x^3 \frac{d}{dx}) x^{\frac{3}{2}} .$$

En utilisant la procédure ci-dessus, on obtient le groupe à un paramètre de transformations  $U_\lambda$

$$(42) \quad U_\lambda[f](x) = \sqrt[4]{\frac{1}{(1-4\lambda x^2)^3}} \times f\left(\sqrt{\frac{x^2}{1-4\lambda x^2}}\right) .$$

Le lecteur est invité à vérifier par un calcul direct que que l'on a bien une formule d'addition pour les petites valeurs du paramètre i.e.,

$$(43) \quad |\lambda| + |\theta| < \frac{1}{4x^2} \implies U_\lambda \circ U_\theta = U_{\lambda+\theta} .$$

Une fois intégré, le groupe à un paramètre  $U_\lambda$  permet d'obtenir la matrice de Stirling comme le montre le résultat suivant dont des éléments de preuve peuvent être trouvés dans [19, 21].

**Proposition 2.** Avec les définitions déjà introduites,  $U_\lambda$  désignant le groupe à un paramètre  $\exp(\lambda \rho_{BF}(\Omega))$  et  $e \geq 0$ , les conditions suivantes sont équivalentes

i)

$$(44) \quad \sum_{n,k \geq 0} S_\Omega(n,k) \frac{x^n}{n!} y^k = g(x) e^{y\varphi(x)}$$

ii)

$$(45) \quad U_\lambda[f](x) = g(\lambda x^e) f(x(1 + \varphi(\lambda x^e))) .$$

**Exemple 1. (suite)**

Avec  $\Omega = (a^\dagger)^2 a a^\dagger + a^\dagger a (a^\dagger)^2$ , on a le groupe à un paramètre

$$(46) \quad U_\lambda[f](x) = \sqrt[4]{\frac{1}{(1-4\lambda x^2)^3}} \times f\left(\sqrt{\frac{x^2}{1-4\lambda x^2}}\right).$$

En appliquant la correspondance précédente, on obtient

$$(47) \quad \sum_{n,k \geq 0} S_\Omega(n,k) \frac{x^n}{n!} y^k = \sqrt[4]{\frac{1}{(1-4x)^3}} e^{y(\sqrt{\frac{1}{1-4x}}-1)} = \sqrt[4]{\frac{1}{(1-4x)^3}} e^{y(\sum_{n \geq 1} c_n x^n)}$$

où  $c_n = \binom{2n}{n}$  désigne la famille des coefficients binomiaux centraux.

**3.4. Deux exponentielles ou comment les diagrammes apparaissent**

Les premiers développements de cette théorie sont expliqués en détail dans [10, 11, 28, 32, 33, 34], et la structure précise a été établie dans [21, 24].

$$(48) \quad F(z) = \sum_{n \geq 0} a_n \frac{z^n}{n!}, \quad G(z) = \sum_{n \geq 0} b_n \frac{z^n}{n!}, \quad \mathcal{H}(F, G) := \sum_{n \geq 0} a_n b_n \frac{z^n}{n!},$$

on vérifie facilement que

$$(49) \quad \mathcal{H}(F, G) = F\left(z \frac{d}{dx}\right) G(x) \Big|_{x=0}.$$

Lorsque les termes constants de  $F$  et  $G$  sont non nuls on peut, puisque  $\mathcal{H}$  est bilinéaire, normaliser les fonctions de façon que  $F(0) = G(0) = 1$ , le but étant de disposer de formules universelles, on écrit les fonctions comme des exponentielles libres

$$(50) \quad F(z) = \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} L_n \frac{z^n}{n!}\right), \quad G(z) = \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} V_n \frac{z^n}{n!}\right).$$

Les expressions (50) vivent dans  $\mathbb{C}[[\mathbb{L} \cup \mathbb{V}]]$  (où  $\mathbb{L} = \{L_1, L_2, \dots, L_k, \dots\}$  et  $\mathbb{V} = \{V_1, V_2, \dots, V_k, \dots\}$ , voir [21, 24] pour les détails) et la sommabilité est assurée par la topologie de la convergence stationnaire des coefficients.

C'est un classique de la Combinatoire que de déduire aussitôt de (50) que

$$(51) \quad F(z) = \sum_{n \geq 0} \frac{z^n}{n!} \sum_{\alpha \in \mathbb{N}(\mathbb{L})} \text{numpart}(\alpha) \mathbb{L}^\alpha, \quad G(z) = \sum_{n \geq 0} \frac{z^n}{n!} \sum_{\beta \in \mathbb{N}(\mathbb{V})} \text{numpart}(\beta) \mathbb{V}^\beta,$$

où, pour un multiindice  $\alpha \in \mathbb{N}(\mathbb{L})$  (resp.  $\beta \in \mathbb{N}(\mathbb{V})$ ),  $\text{numpart}(\alpha)$  (resp.  $\text{numpart}(\beta)$ ) est le nombre de partitions de l'ensemble  $\{1, \dots, n\}$  de type  $\alpha$  (resp. de type  $\beta$ ) (voir ci-dessous). Avec  $n = \sum_{i \geq 1} i \alpha(L_i) = \sum_{j \geq 1} j \beta(V_j)$ , on obtient

$$(52) \quad \mathcal{H}(F, G) = \sum_{n \geq 0} \frac{z^n}{n!} \sum_{P_1, P_2 \in UP_n} \mathbb{L}_{Type(P_1) \nabla Type(P_2)}$$

où  $UP_n$  désigne l'ensemble des partitions [14] de  $\{1 \dots n\}$  en ensembles non vides (usuellement appelés blocs).

Le type d'une partition  $P \in UP_n$  (noté  $Type(P)$ ) est le multiindice  $\alpha \in \mathbb{N}^{(\mathbb{L})}$  (resp.  $\beta \in \mathbb{N}^{(\mathbb{V})}$ ) tel que  $\alpha(L_k)$  (resp.  $\beta(V_k)$ ) soit le nombre de  $k$ -blocs (c'est-à-dire de parties de cardinal  $k$ ).

C'est ici que la formule s'« intrique » et que les diagrammes de la théorie émergent. On doit remarquer que

- le calcul du monôme  $\mathbb{L}_{Type(P_1) \nabla Type(P_2)}$  requiert bien moins d'informations que ce qui est contenu dans le couple de partitions  $(P_1, P_2)$  (par exemple on peut réétiqueter les éléments)
- à deux partitions  $(P_1, P_2)$  du même ensemble, on peut associer la matrice d'incidence

$$(\text{card}(Y \cap Z))_{(Y, Z) \in P_1 \times P_2}$$

- cette matrice peut être représentée par un graphe bicoloré comme suit
  - (1) tout bloc de  $P_1$  (resp. de  $P_2$ ) étiquette un point noir (resp. blanc)
  - (2) on trace des lignes entre le point noir  $Y \in P_1$  et le point blanc  $Z \in P_2$  en nombre  $\text{card}(Y \cap Z)$ .

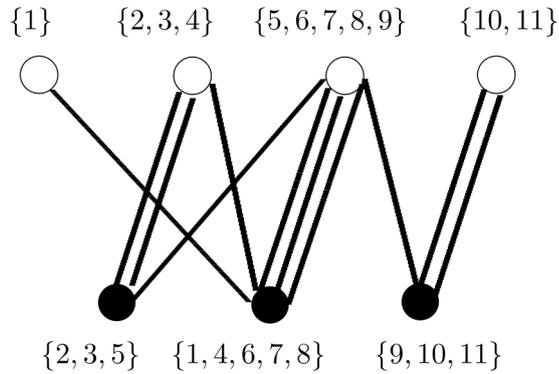


FIG. 1. Diagramme engendré par un couple de partitions  $P_1, P_2$  de  $\{1, \dots, 11\}$ .  $P_1 = \{\{2, 3, 5\}, \{1, 4, 6, 7, 8\}, \{9, 10, 11\}\}$  et  $P_2 = \{\{1\}, \{2, 3, 4\}, \{5, 6, 7, 8, 9\}, \{10, 11\}\}$  (étiquetant respectivement les points noirs et les points blancs).

On obtient ainsi un graphe avec  $p$  ( $= \text{card}(P_1)$ ) points noirs et  $q$  ( $= \text{card}(P_2)$ ) points blancs, aucun sommet isolé et des multiplicités entières. Nous notons l'ensemble de ces diagrammes **diag**.

La formule du produit devient

$$(53) \quad \mathcal{H}(F, G) = \sum_{n \geq 0} \frac{z^n}{n!} \sum_{\substack{d \in \text{diag} \\ |d|=n}} \text{mult}(d) \mathbb{L}^{\alpha(d)} \mathbb{V}^{\beta(d)}$$

où  $\alpha(d)$  (resp.  $\beta(d)$ ) est le « type blanc » (resp. « type noir »), i.e. le multiindice  $\alpha$  (resp.  $\beta$ ) tel que  $\alpha(L_i)$  (resp.  $\beta(V_i)$ ) soit le nombre de sommets blancs (resp. de sommets noirs) de degré  $i$  et  $\text{mult}(d)$  est le nombre de couples de partitions de  $\{1 \dots |d|\}$  (ici  $|d| = |\alpha(d)| = |\beta(d)|$ ) est le nombre d'arêtes de  $d$ ).

Nous avons donc une flèche

$$(54) \quad d \mapsto \mathbb{L}^{\alpha(d)} \mathbb{V}^{\beta(d)}$$

qui se prolonge par linéarité à  $k^{(\text{diag})}$ .

La question principale est la suivante :

(Q) existe-t-il une structure d'algèbre de Hopf sur  $k^{(\text{diag})}$  qui relève les opérations d'algèbre de Hopf de  $k[\mathbb{L} \cup \mathbb{V}]$  ?

La réponse est positive en ce qui concerne le produit et l'on peut relever le coproduit d'un sous-alphabet. L'algèbre obtenue admet un relèvement non commutatif qui se déforme [24] en des algèbres de Hopf combinatoires classiques [17].

## 4. Conclusion

Les groupes à un paramètre qui sont si naturellement indispensables pour la théorie de Lie, mais *a priori* de nature continue peuvent conduire à des identités non triviales dans le monde combinatoire et discret. Les classes de graphes justiciables de la formule exponentielle [36] fournissent, quand on en fait la statistique par nombre de sommets et de composantes connexes, des matrices infinies unipotentes du type (23), c'est-à-dire correspondant à des substitutions sans préfonction (cas du champ de vecteurs pur). Le dictionnaire

champs de vecteurs  $\longleftrightarrow$  matrices infinies

est biunivoque, mais aucune théorie descriptive satisfaisante ne semble s'être constituée.

Dans un prochain article nous montrerons, à travers la notion de fonction représentative sur un semi-groupe et la combinatoire classique du monoïde libre que, dans l'espace de Fock (voir la section 2.1, ci-dessus), le calcul des « paquets de changement de niveau » (ensemble de produits d'opérateurs montants et descendants) conduit à des questions simples et profondes de représentation symbolique des fractions continues non commutatives. Ces représentations sont suffisamment expressives pour permettre de résoudre des questions de rationalité [23] en géométrie non commutative et le problème mentionné (les paquets de changement de niveau dans l'espace de Fock). De plus, la structure d'orbite finie des éléments ainsi représentés permet une bonne manipulation des éléments du dual de Sweedler de l'algèbre de Hopf des polynômes non commutatifs [22, 23].

## 5. Références

- [1] C. M. BENDER, D. C. BRODY, AND B. K. MEISTER, Quantum field theory of partitions, *J. Math. Phys.* **40** (1999) 3239–3245.
- [2] M. BERNSTEIN AND N.J.A. SLOANE, Some canonical sequences of integers. *Linear Algebra Appl.* **57** (1995) 226–228.
- [3] J. BERSTEL AND D. PERRIN, *Theory of codes*, Academic Press, 1985.
- [4] J. BERSTEL AND C. REUTENAUER, *Rational series and their languages*, Springer (EATCS Monographs on Theoretical Computer Science), 1988.
- [5] P. BLASIAK, K.A.PENSON AND A. I. SOLOMON, The general boson normal ordering problem, *Phys. Lett. A* **309** (2003) 198–205.
- [6] P. BLASIAK, K.A.PENSON AND A. I. SOLOMON, The boson normal ordering problem and generalized Bell numbers, *Annals of Combinatorics* **7** (2003) 127–139.
- [7] P. BLASIAK, A. HORZELA, K.A. PENSON, A.I. SOLOMON AND G.H.E. DUCHAMP, Combinatorics and Boson normal ordering : A gentle introduction, *Am. J. Phys.* **75** (2008) 639–646. arXiv : 0704.3116 [quant-ph]
- [8] P. BLASIAK, G. H. E. DUCHAMP, A. HORZELA, K. A. PENSON, AND A. I. SOLOMON, Heisenberg-Weyl algebra revisited : combinatorics of words and paths, *J. Phys. A : Math. and Theoret.* **41** (2008) 415204.
- [9] P. BLASIAK AND P. FLAJOLET, Combinatorial models of creation-annihilation, arXiv : 1010.0354v2. Séminaire Lotharingien de Combinatoire, **65** (2011).
- [10] P. BLASIAK, A. HORZELA, K. A. PENSON, G. H. E. DUCHAMP, AND A.I. SOLOMON, Boson normal ordering via substitutions and Sheffer-Type Polynomials, *Phys. Lett. A* **338** (2005) 108.
- [11] P. BLASIAK, K. A. PENSON, A.I. SOLOMON, A. HORZELA, AND G. H. E. DUCHAMP, Some useful combinatorial formulas for bosonic operators, *J. Math. Phys.* **46** (2005) 052110-052114.
- [12] M. BORN, W. HEISENBERG UND P. JORDAN, Zur Quantenmechanik II, *Z. Phys.* **35** (1926) 557–615.
- [13] M. BORN UND P. JORDAN, Zur Quantenmechanik, *Z. Phys.* **34** (1925) 858–888.
- [14] N. BOURBAKI, *Theory of sets*, Springer, 2004.
- [15] N. BOURBAKI, *Algebra, chapter I to III*, Springer, 2006.
- [16] G. DATTOLI, P.L. OTTAVIANI, A. TORRE AND L. VÀSQUEZ, Evolution operator equations : integration with algebraic and finite difference methods, *La Rivista del Nuovo Cimento* **20**(1) (1997) 3–133.
- [17] G.H.E. DUCHAMP, F. HIVERT, AND J.-Y. THIBON, Noncommutative symmetric functions VI : Free quasi-symmetric functions and related algebras, *Int. J. Alg. Comput.* **12**(5) (2002) 671–717.
- [18] G.H.E. DUCHAMP, J.-G. LUQUE, J.-C. NOVELLI, C. TOLLU, AND F. TOUMAZET, Hopf algebras of diagrams, *Int. J. Alg. Comput.* (to appear), DOI No : 10.1142/S0218196711006418.
- [19] G.H.E. DUCHAMP, L. POINSOT, A.I. SOLOMON, K.A. PENSON, P. BLASIAK, AND A. HORZELA, Ladder Operators and Endomorphisms in Combinatorial Physics, *Discrete Mathematics & Theoretical Computer Science*, **12**(2) (2010).
- [20] G.H.E. DUCHAMP, C. TOLLU, K. A. PENSON AND G. A. KOSHEVOY, Deformations of Algebras : Twisting and Perturbations, *Séminaire Lotharingien de Combinatoire* **B62e** (2010) 14 p., <http://www.emis.de/journals/SLC/>.
- [21] G.H.E. DUCHAMP, K.A. PENSON, A.I. SOLOMON, A. HORZELA AND P. BLASIAK, One-Parameter Groups and Combinatorial Physics, In J. Govaerts, M. N. Hounkonnou and A. Z. Msezane (eds), *Proc. of the Third International Workshop on Contemporary Problems in Mathematical Physics (COPROMAPH3)*, Porto-Novo (Benin), November 2003, p. 436, World Scientific Publishing, Singapore, 2004. arXiv : quant-ph/0401126
- [22] G.H.E. DUCHAMP AND C. TOLLU, Sweedler's duals and Schützenberger's calculus, In K. Ebrahimi-Fard, M. Marcolli and W. van Suijlekom (eds), *Combinatorics and Physics*, p. 67–78, Amer. Math. Soc. (Contemporary Mathematics, vol. 539), 2011.
- [23] G.H.E. DUCHAMP, C. REUTENAUER, *Un critère de rationalité provenant de la géométrie noncommutative* *Invent. Math.* **128** 613-622. (1997).

- [24] G.H.E. DUCHAMP, A. I. SOLOMON, P. BLASIAK, A. HORZELA AND K. A. PENSON, A multipurpose Hopf deformation of the algebra of Feynman-like diagrams, In J.L. Birman, S. Catto and B. Nicolescu (eds), *Proc. of the 26th International Colloquium on Group Theoretical Methods in Physics*, New York, Canopus Publishing, 2009.
- [25] P. FLAJOLET AND R. SEDGEWICK, *Analytic Combinatorics*. Cambridge University Press, 2009. [Version préliminaire, <http://algo.inria.fr/flajolet/Publications/books.html>]
- [26] S. FOMIN Duality of graded graphs, *J. Alg. Comb.*, **3**(4) (1994) 357–404.
- [27] W. HEISENBERG, Über quantentheoretische Umdeutung kinematischer und mechanischer Beziehungen, *Z. Phys.* **33** (1925) 879–893.
- [28] A. HORZELA, P. BLASIAK, G.H.E. DUCHAMP, K. A. PENSON AND A.I. SOLOMON, A product formula and combinatorial field theory, In C. Burdík, O. Navrátil, and S. Posta (eds), *Proc. of the XI International Conference on Symmetry Methods in Physics (SYMPHYS-11)* Prague, Czech Republic, June 2004, JINR Publishers, Dubna, 2004. arXiv : quant-ph/0409152
- [29] KATRIEL J., DUCHAMP G., *Ordering relations for q-boson operators, continued fractions techniques, and the q-CBH enigma*. Journal of Physics A **28** 7209-7225 (1995).
- [30] M. LOTHFAIRE, *Combinatorics on Words*, Cambridge University Press (Cambridge Mathematical Library), 1997.
- [31] M. MENDEZ, P. BLASIAK AND K. A. PENSON, Combinatorial approach to generalized Bell and Stirling numbers, *J. Math. Phys.* **46** (2005) 083511-083518.
- [32] A.I. SOLOMON, G.H.E. DUCHAMP, P. BLASIAK, A. HORZELA AND K.A. PENSON, Normal Order : Combinatorial Graphs, In P.C. Argyres, T.J. Hodges, F. Mansouri, J.J. Scanio, P. Suranyi, L.C.R. Wijewardhana (eds), 'Quantum Theory and Symmetries', *Proc. of the 3rd International Symposium on Quantum Theory and Symmetries*, p. 398–406, World Scientific Publishing, 2004. arXiv : quant-ph/0402082
- [33] A.I. SOLOMON, P. BLASIAK, G.H.E. DUCHAMP, A. HORZELA AND K.A. PENSON, Combinatorial Physics, Normal Order and Model Feynman Graphs, In B. Gruber, G. Marmo and N. Yoshinaga (eds.), *Proc. of the Symposium 'Symmetries in Science XIII', Bregenz, Austria, 2003*, p. 527, Kluwer Academic Publishers, 2004. arXiv : quant-ph/0310174
- [34] A.I. SOLOMON, G.H.E. DUCHAMP, P. BLASIAK, A. HORZELA AND K. A. PENSON, Partition functions and graphs : A combinatorial approach, In C. Burdík, O. Navrátil, and S. Posta (eds), *Proc. of the XI International Conference on Symmetry Methods in Physics (SYMPHYS-11)* Prague, Czech Republic, June 2004, JINR Publishers, Dubna, 2004. arXiv : quant-ph/0409082
- [35] A. VARVAK, Rook numbers and the normal ordering problem, *J. Comb. Theory A*, **112**(2) (2005) 292–307.
- [36] R. STANLEY, *Enumerative Combinatorics, Vol I and II*, Cambridge University Press, 1993 and 1999.
- [37] R.P. STANLEY, Differential posets. *J. Amer. Math. Soc.*, **1**(4) (1988) 919–961.
- [38] F. TREVES, *Topological Vector Spaces, Distributions and Kernels*, Academic Press, 1967.
- [39] A. VOURDAS, Quantum systems with positions and momenta on a Galois field, *J. Phys. : Conf. Ser.* **104** (2008) 012014.

Les auteurs, tous participants du projet « Physique Combinatoire » Programme PHYSCOMB No. ANR-08-BLAN-0243-2 de l'Agence Nationale de la Recherche, tiennent à remercier l'agence pour son soutien financier ainsi que celui du projet PICS PAN/CNRS N° 4339 (2008-2010).