Algorithme de réduction des degrés dans une gamme musicale

(d'après la théorie d'Yves Hellegouarch)

Marc CHEMILLIER & Gérard DUCHAMP
(*Université de Caen & Université de Rouen*)

Introduction

Dans la théorie d'Yves Hellegouarch, les « gammes naturelles » sont des gammes constituées de fréquences ayant entre elles des rapports rationnels. Ainsi, la gamme de Pythagore est obtenue en formant des intervalles d'octave et de quinte justes, c'est-à-dire en multipliant une fréquence de référence par des puissances de 2 et 3. La gamme de Zarlino est obtenue en formant des intervalles d'octave, de quinte et de tierce justes, c'est-à-dire en multipliant une fréquence de référence par des puissances de 2, 3 et 5.

Le problème posé par les intervalles justes est que, par exemple, si l'on parcourt le cycle des quintes ascendantes *do*, *sol*, *ré*, *la*, *mi*, etc. à partir d'un *do* initial, on ne peut pas retomber sur un *do* identique à une octave supérieure, parce que $(3/2)^{12}$ n'est pas une puissance de 2. Construire une gamme revient à introduire des approximations, en convenant par exemple d'« identifier » la note obtenue par un cycle de 12 quintes ascendantes redoublées (quinte plus octave) et celle obtenue par un saut de 19 octaves. Mathématiquement, cela revient à imposer une relation $3^{12}/2^{19} = 1$ dans le sous-groupe multiplicatif $< 2, 3 >$ de $\mathbb{Q}_+^*$ engendré par 2 et 3 (on dit alors que $c = 3^{12}/2^{19}$ est un *comma* du groupe). L'approximation est choisie de telle sorte que le quotient du sous-groupe $< 2, 3 >$ modulo c soit monogène isomorphe au groupe additif des entiers $\mathbb{Z}$. Les « degrés » de la gamme obtenue sont alors les éléments du sous-groupe quotient, classés dans l'ordre des puissances croissantes $g, g^2, ..., g^n$ du générateur g.

Pour choisir un représentant canonique de chaque degré de la gamme, Yves Hellegouarch introduit la notion de *hauteur* d'une fraction p/q comme étant le maximum du numérateur p et du dénominateur q. Le représentant canonique d'un degré est celui de hauteur minimale dans sa classe, c'est-à-dire la fraction dont les numérateur et dénominateur sont les plus petits possibles. Ainsi, dans la gamme de Pythagore, avec le comma $c = 3^{12}/2^{19}$ et en partant de la note *do*, le degré correspondant à la note *fa*♯ peut être représenté à la fois par la fraction $3^6/2^9$ et par la fraction $2^{10}/3^6 = 3^6/2^9 \times c^{-1}$ qui est équivalente. Mais la première fraction est de hauteur plus petite que la seconde et c'est elle qui est choisie comme représentant du degré *fa*♯.

Nous proposons ici un algorithme simplepermettant de calculer les représentants canoniques de tous les degrés d'une gamme définie par un ensemble de générateurs et un ensemble de commas. L'algorithme consiste à calculer de proche en proche les représentants canoniques des puissances successives $g, g^2, ..., g^n$ du générateur g, en remarquant que si une combinaison de commas et de leurs inverses permet de réduire g^i, alors elle permet également d'obtenir pour g^{i+1} une fraction de hauteur plus petite.

Description de l'algorithme

Le sous-groupe multiplicatif $< p_1, ...p_n >$ de $\mathbb{Q}^{+*}$ engendré par les $p_i, i \leqslant n$, est isomorphe au groupe additif $\mathbb{Z}^n$. Le n-uplet $(x_1, ..., x_n)$ représente la fraction $p_1^{x_1}...p_n^{x_n}$.

On quotiente $< p_1, ...p_n >$ par $n-1$ commas, de telle sorte que le quotient soit isomorphe à $\mathbb{Z}$. Soient g et $u_1, ..., u_{n-1}$ les n-uplets représentant respectivement le générateur du quotient et les $n-1$ commas. La hauteur d'une fraction est le maximum du numérateur et du dénominateur. Le problème est de trouver des fractions de plus petite hauteur équivalentes respectivement aux puissances successives du générateur du quotient.

Si x est un n-uplet, on note $h(x)$ la hauteur de la fraction correspondant à x, et $p(x) = log(h(x))$. L'application p est une norme. On note H l'hyperplan engendré par les commas $u_j, j \leqslant n-1$, et N le réseau $\mathbb{Z}u_1 + ... + \mathbb{Z}u_{n-1}$ inclus dans H. Le n-uplet $k.g$ représente la puissance kième du générateur. On cherche un élément de $k.g + N$ de hauteur minimale. Le logarithme étant croissant, le problème revient à chercher un élément de $k.g + N$ de norme minimale pour p.

Lemme 1. *Soit w le vecteur de N tel que $k.g + w$ soit de norme minimale pour p. Alors $(k+1).g + w$ est de norme inférieure à celle de $(k+1).g$.*

Preuve — On a $p(k.g + w) \leqslant p(k.g)$. Donc $p((k+1).g + w) = \frac{k+1}{k}p(k.g + \frac{k}{k+1}w) \leqslant \frac{k+1}{k}p(k.g) = p((k+1).g)$, car $k.g + \frac{k}{k+1}w$ est sur le segment d'extrémités $k.g$ et $k.g + w$, et la fonction p est une norme, donc une fonction convexe. $\square$

Pour réduire $(k+1).g$, on peut donc commencer par effectuer la même réduction w que pour $k.g$, c'est-à-dire se ramener à la réduction de $z = (k+1).g + w$. On cherche alors les éléments t de N tels que $p(z+t) \leqslant p(z)$. Cela équivaut par définition à :

$$t \in B_p(-z, r) \cap N$$

où $B_p(-z, r)$ est la boule de centre $-z$ et de rayon $r = p(z)$ pour la norme p. Le principe de l'algorithme est de recouvrir l'intersection $B_p(-z, r) \cap N$ par un pavé du réseau N, et de parcourir un à un les éléments de ce pavé.

Lemme 2. *La boule unité $B_p(1)$ de p est incluse dans l'hypercube correspondant à la boule unité de la norme*

$$L(x) = sup_{i \leqslant n}(|x_i| log(p_i))$$

On recouvre ensuite cet hypercube par un autre hypercube dont les arêtes sont parallèles aux lignes du réseau N. Soit S l'ensemble des sommets de l'hypercube $B_L(1)$. Les coordonnées des sommets dans la base canonique de $\mathbb{Z}^n$ sont de la forme $\frac{1}{log(p_i)}$ et $\frac{-1}{log(p_i)}$. On complète la base $(u_j)_{j\leq n-1}$ de H pour former une base U de $\mathbb{Z}^n$, et on décompose chaque sommet s dans la base U en notant s_j la composante de s sur u_j. On pose :

$$m_j = sup_{s\in S}(s_j)$$

Lemme 3. *Soit X_j la j-ème coordonnée de x sur la base U. La boule unité $B_L(1)$ est incluse dans la boule unité $B_M(1)$ de la norme :*

$$M(x) = sup_{j\leqslant n}\frac{|X_j|}{m_j}$$

Une boule pour la norme M est un pavé dont les arêtes sont parallèles aux vecteurs de la base $(u_j)_{j\leqslant n}$. Il est facile de réaliser informatiquement un parcours des éléments de ce pavé de coordonnées entières sur les commas. L'algorithme peut finalement se décrire comme suit :

(1) *Formules de changement de base :* les coordonnées des commas u_j permettent d'obtenir les coordonnées x_i d'un vecteur x en fonction de ses coordonnées X_j dans la base U. On inverse ces formules, pour calculer l'expression des X_j en fonction des x_i.

(2) *Calcul des m_j :* on parcourt l'ensemble des $s = (\frac{e_1}{log(p_1)}, ..., \frac{e_n}{log(p_n)})$ où $|e_i| = 1$, en calculant à chaque fois les coordonnées s_j de s dans la base U, pour obtenir finalement les valeurs des $m_j = sup(s_j)$.

(3) *Réduction :*

(a) On suppose que la réduction de $k.g$ est effectuée et soit w le vecteur de N obtenu, tel que $k.g + w$ soit de hauteur minimale. On pose $z = (k+1).g + w$.

(b) Soit $r = p(z)$. On calcule les dimensions du pavé de l'hyperplan H de centre $-z$ et de rayon r pour la norme M, en prenant les coordonnées $z_1, ...z_{n-1}$ de z dans la base U, puis en calculant pour j compris entre 1 et $n-1$ les valeurs $a_j = -z_j - r.m_j$ et $b_j = -z_j + r.m_j$. Le pavé obtenu est $[a_1, b_1] \times \cdots \times [a_{n-1}, b_{n-1}]$.

(c) On parcourt ce pavé en énumérant tous ses éléments t de coordonnées entières sur la base U, et en calculant à chaque fois la hauteur $h(z + t)$ jusqu'à obtenir la valeur minimale. Le vecteur t obtenu est tel que $z + t$ est le représentant canonique de $(k+1).g$, c'est-à-dire que $w + t$ est le nouveau vecteur de réduction.

Exemples de réduction pour la gamme de Zarlino

Le groupe correspondant à la gamme de Zarlino est $< 2, 3, 5 >$. Les relations $2^{19} = 3^{12}$ et $2^4.5 = 3^4$ donnent les deux commas $u = (19, -12, 0)$ et $v = (4, -4, 1)$. On cherche à réduire les puissances du générateur $g = 2^4/3.5$. Les réductions s'expriment par des couples de coordonnées sur la base (u, v).

Exemple 0.1. Réduction de g^{13}.

La réduction précédente donnant le représentant canonique de g^{12} *est* $(-5, 12)$ *et la hauteur de la fraction obtenue en appliquant cette réduction à* g^{13} *est* $h = 32$. *L'algorithme fournit les bornes suivantes pour le parcours :* $[-1, 0]$ *sur l'axe* u, *et* $[-2, 5]$ *sur l'axe* v. *On obtient le tableau ci-dessous où les hauteurs ne sont affichées que si elles sont inférieures à* h.

	-1	0
5	*	*
4	*	*
3	25	*
2	*	*
1	*	*
0	*	32
-1	*	*
-2	*	*

On voit que que c'est l'élément $(-1, 3)$ *qui fournit la plus petite hauteur. Cumulé à la réduction précédente, il donne la nouvelle réduction* $(-6, 15)$. *On obtient la fraction réduite suivante :*

$$(\frac{2^4}{3.5})^{13} \times (\frac{2^{19}}{3^{12}})^{-6} \times (\frac{2^4.5}{3^4})^{15} = \frac{5^2}{2^2.3}$$

dont la hauteur est $max(5^2, 2^2.3) = 25$.

Exemple 0.2. Réduction de g^{18}

La réduction précédente donnant le représentant canonique de g^{17} *est* $(-7, 17)$ *et la hauteur de la fraction obtenue en appliquant cette réduction à* g^{18} *est* $h = 128$. *L'algorithme fournit les bornes suivantes pour le parcours :* $[-2, 0]$ *sur l'axe* u, *et* $[-4, 7]$ *sur l'axe* v. *On obtient le tableau ci-dessous où les hauteurs ne sont affichées que si elles sont inférieures à* h.

	-2	-1	0
7	*	*	*
6	*	*	*
5	*	*	*
4	*	*	*
3	*	25	*
2	*	45	*
1	*	*	*
0	*	*	128
-1	*	*	72
-2	*	*	*
-3	*	*	*
-4	*	*	*

On voit que que c'est l'élément $(-1, 3)$ *qui fournit la plus petite hauteur. Cumulé à la réduction précédente, il donne la nouvelle réduction* $(-8, 20)$. *On obtient la fraction réduite suivante :*

$$(\frac{2^4}{3.5})^{18} \times (\frac{2^{19}}{3^{12}})^{-8} \times (\frac{2^4.5}{3^4})^{20} = \frac{5^2}{3^2}$$

dont la hauteur est $max(5^2, 3^2) = 25$.

Bibliographie

HELLEGOUARCH Y., Scales, *C. R. Soc. Roy. Math. Canada*, vol. IV, **05** (1982), vol. V, **02** (1983).

HELLEGOUARCH Y., Gammes naturelles, *Publ. APMEP*, **53** (1983).

HELLEGOUARCH Y., Kreisleriana, IREM de Basse-Normandie (1985).

HELLEGOUARCH Y., Une esthétique galiléenne : la théorie de la musique de Leonhard Euler, *Sem. Philo. Math.*, ENS Ulm, **50** (1986), repris dans *Destin de l'art, desseins de la science*, ADERHEM, Caen, 1991.

HELLEGOUARCH Y., À la recherche de l'arithmétique qui se cache dans la musique, *Gazette des mathématiciens*, **33** (1987).