

# Langages-bandes de pavages par zonotopes

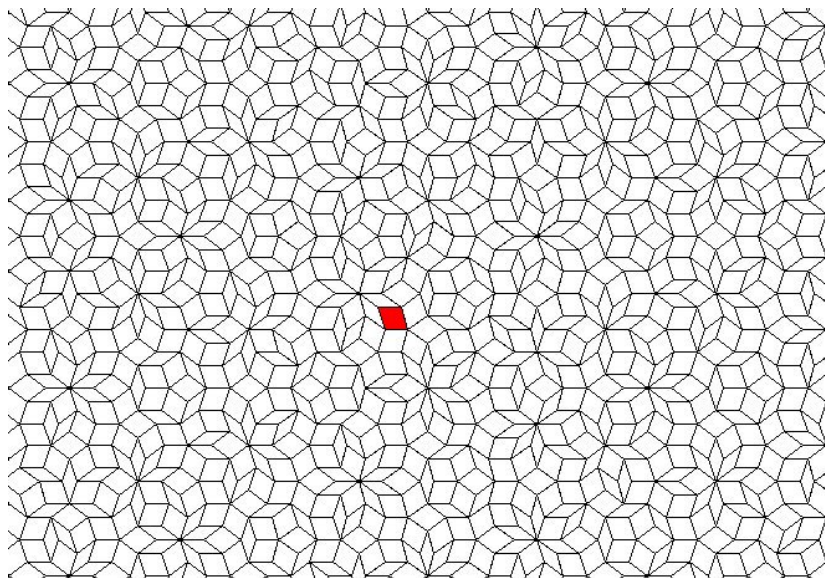
Thomas Fernique

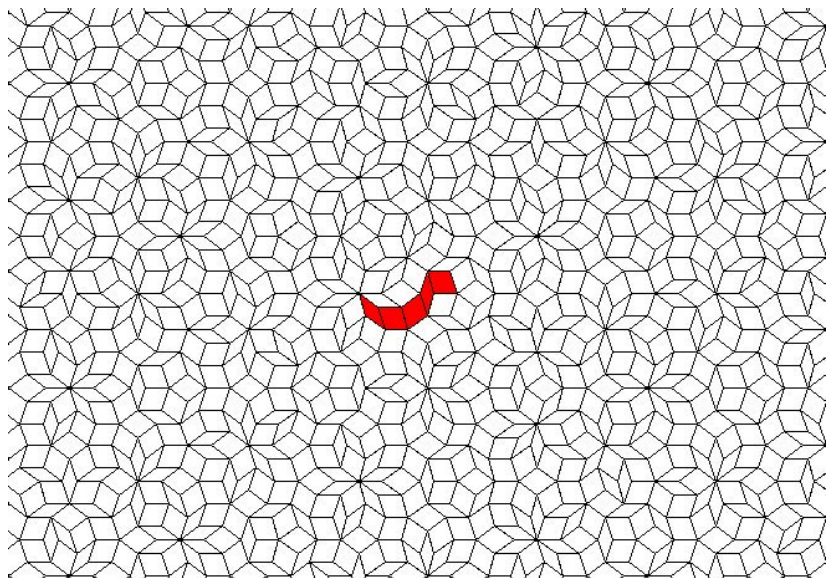
LIRMM - Université Montpellier II

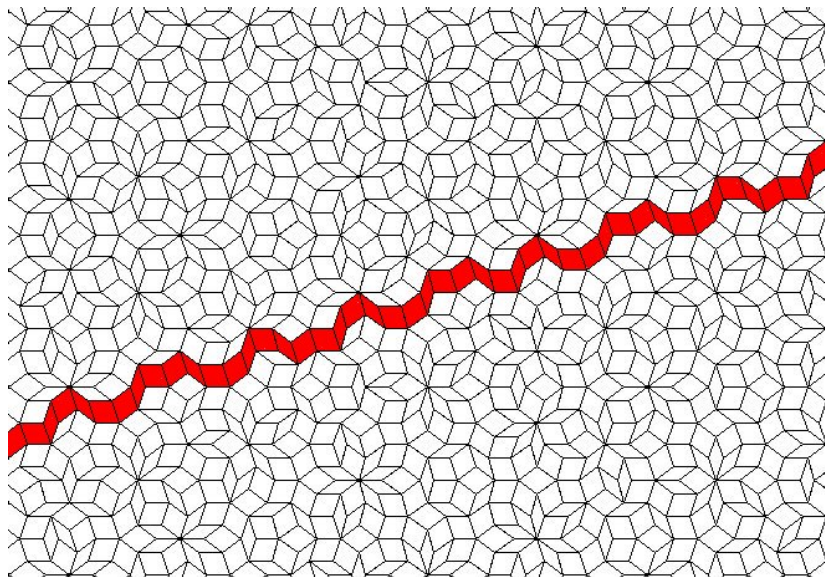
Jeudi 24, 26 ou 28 Janvier 2006

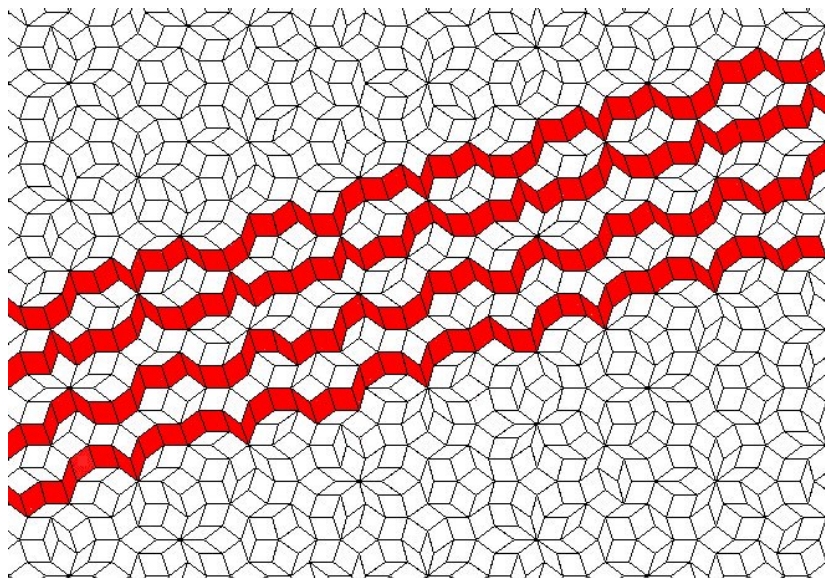
- 1 Un exemple introductif coloré
  - Bandes
  - Langages-bandes
  
- 2 Un exemple plus sturmien
  - Surfaces plissées de  $\mathbb{R}^3$
  - Apériodicité et complexités minimales

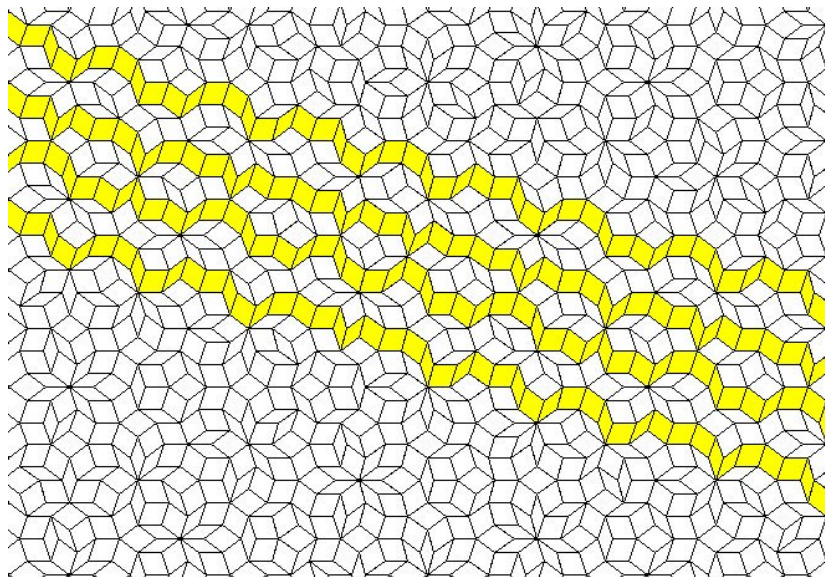
- 1 Un exemple introductif coloré
  - Bandes
  - Langages-bandes
  
- 2 Un exemple plus sturmien
  - Surfaces plissées de  $\mathbb{R}^3$
  - Apériodicité et complexités minimales



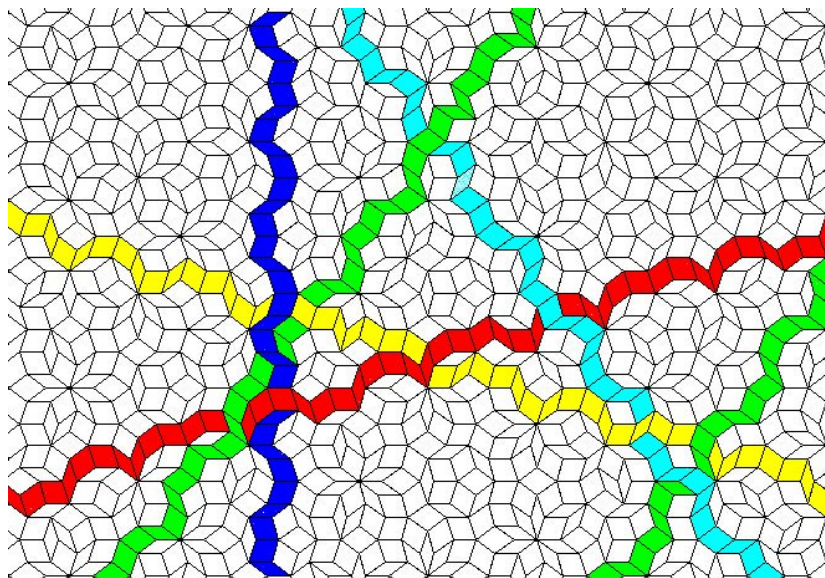












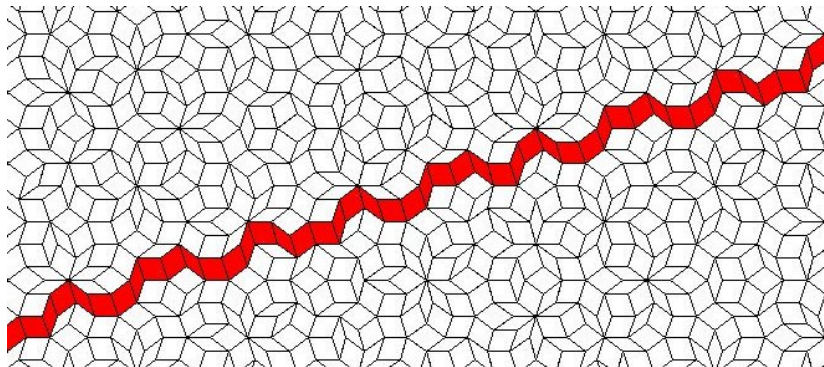
## Definition

Bande : suite bi-infinie de tuiles adjacentes par des faces toutes parallèles.

- 1 Un exemple introductif coloré
  - Bandes
  - Langages-bandes
  
- 2 Un exemple plus sturmien
  - Surfaces plissées de  $\mathbb{R}^3$
  - Apériodicité et complexités minimales

5 directions de bande, 4 tuiles pour les bandes de direction donnée.

↔ codage des bandes par des mots bi-infinis.



... 231243213243213423124321324312432132 ...

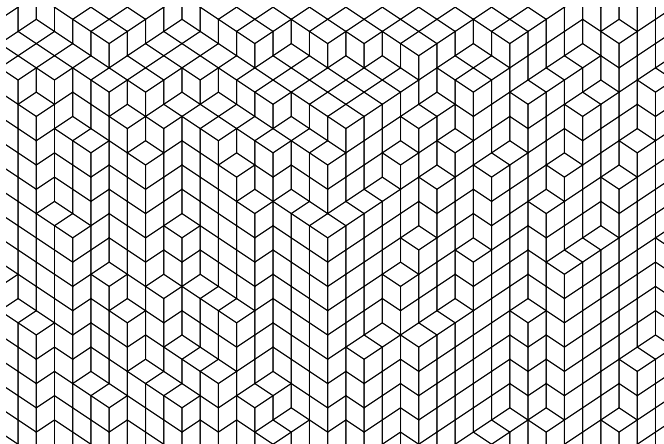
## Definition

Langage-bandes : facteurs des mots codant des bandes parallèles.

↔ pour le pavage précédent, 5 langages-bandes . . . **liés** !

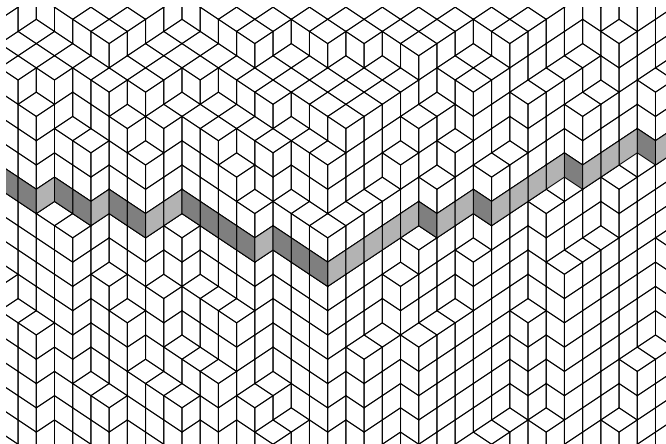
- 1 Un exemple introductif coloré
  - Bandes
  - Langages-bandes
  
- 2 Un exemple plus sturmien
  - Surfaces plissées de  $\mathbb{R}^3$
  - Apériodicité et complexités minimales

# Pavage du plan par 3 types de losanges.

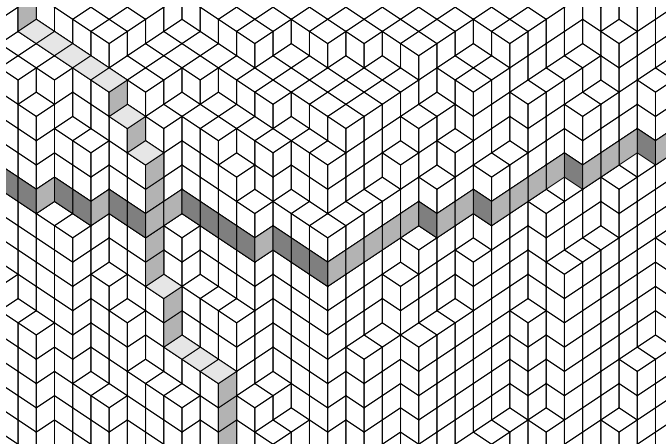




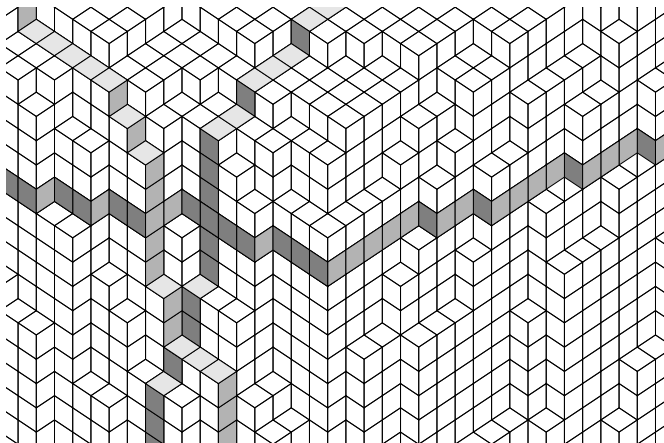
## 2 types de losanges pour chaque direction de bande



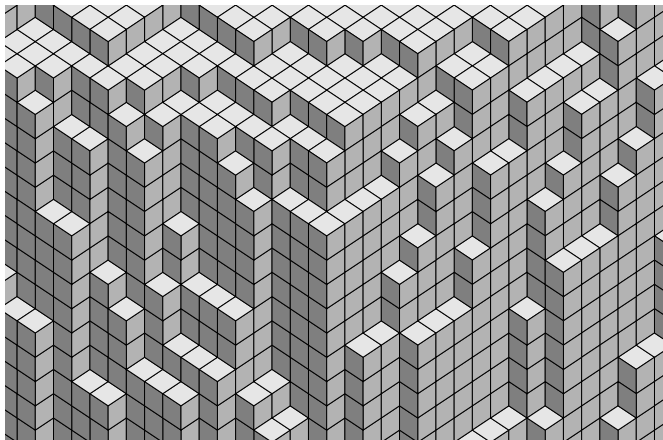
## 2 types de losanges pour chaque direction de bande



## 2 types de losanges pour chaque direction de bande



# Interprétation tridimensionnelle facile (ici)



Surfaces plissées  $\rightsquigarrow$  trois langages-bandes sur deux lettres.

Lien entre périodicité du pavage et complexités de ces langages ?

- 1 Un exemple introductif coloré
  - Bandes
  - Langages-bandes
  
- 2 Un exemple plus sturmien
  - Surfaces plissées de  $\mathbb{R}^3$
  - Apériodicité et complexités minimales

# Rappel 1D

$u$  mot bi-infini  $\rightsquigarrow p_u(n)$  facteurs distincts de longueur  $n$ .

## Théorème (Coven)

- $(\exists n_0 \in \mathbb{N} \mid p_u(n_0) \leq n_0) \Leftrightarrow u$  périodique.
- $(\forall n, p_u(n) = n + 1) \Leftrightarrow u$  sturmien ou de type  ${}^\omega 010^\omega$  ou  ${}^\omega 01^\omega$ .

$u$  de type  $v$  : image par substitutions de  $v$  (se “désubstitue” en  $v$ ).

Utilisable pour les surfaces plissées ?

1 langage-bandes périodique  $\Rightarrow$  surface plissée périodique ?

Cas limite : langages-bandes tous de complexité  $n + 1$ .



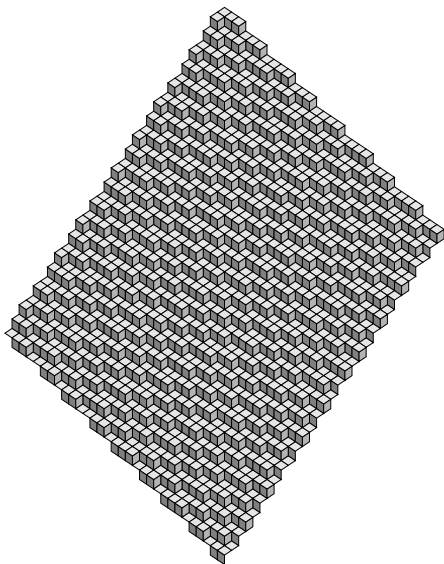
Utilisable pour les surfaces plissées ?

1 langage-bandes périodique  $\Rightarrow$  surface plissée périodique ?

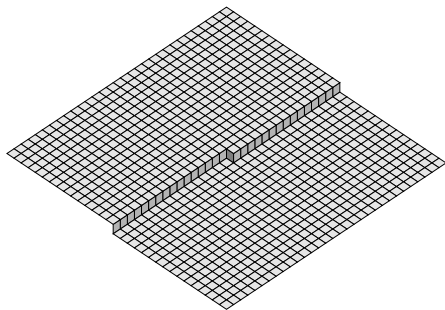
Cas limite : langages-bandes tous de complexité  $n + 1$ .

St.	$\omega 010^\omega$	$\omega 01^\omega$
3	0	0
0	3	0
0	0	3
1	2	0
2	1	0
1	0	2
2	0	1
0	1	2
0	2	1
1	1	1

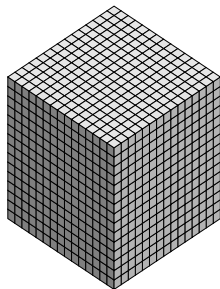
St.	$\omega 010^\omega$	$\omega 01^\omega$
3	0	0
0	3	0
0	0	3
1	2	0
2	1	0
1	0	2
2	0	1
0	1	2
0	2	1
1	1	1



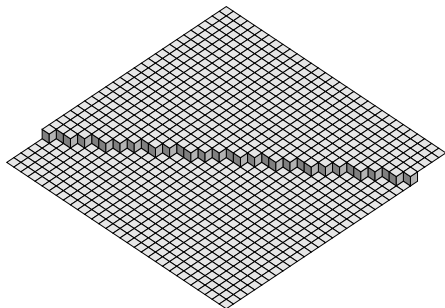
St.	$\omega 010\omega$	$\omega 01\omega$
3	0	0
0	3	0
0	0	3
1	2	0
2	1	0
1	0	2
2	0	1
0	1	2
0	2	1
1	1	1



St.	$\omega 010^\omega$	$\omega 01^\omega$
3	0	0
0	3	0
0	0	3
1	2	0
2	1	0
1	0	2
2	0	1
0	1	2
0	2	1
1	1	1

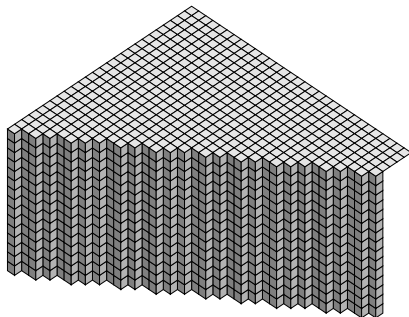


St.	$\omega 010\omega$	$\omega 01\omega$
3	0	0
0	3	0
0	0	3
1	2	0
2	1	0
1	0	2
2	0	1
0	1	2
0	2	1
1	1	1



St.	$\omega 010^\omega$	$\omega 01^\omega$
3	0	0
0	3	0
0	0	3
1	2	0
2	1	0
1	0	2
2	0	1
0	1	2
0	2	1
1	1	1

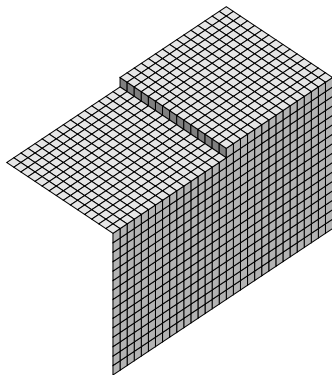
St.	$\omega 010^\omega$	$\omega 01^\omega$
3	0	0
0	3	0
0	0	3
1	2	0
2	1	0
1	0	2
2	0	1
0	1	2
0	2	1
1	1	1



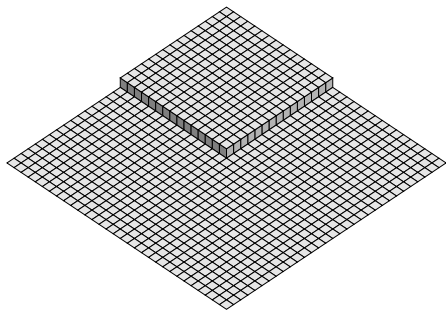


St.	$\omega 010^\omega$	$\omega 01^\omega$
3	0	0
0	3	0
0	0	3
1	2	0
2	1	0
1	0	2
2	0	1
0	1	2
0	2	1
1	1	1

St.	$\omega 010^\omega$	$\omega 01^\omega$
3	0	0
0	3	0
0	0	3
1	2	0
2	1	0
1	0	2
2	0	1
0	1	2
0	2	1
1	1	1



St.	$\omega 010\omega$	$\omega 01\omega$
3	0	0
0	3	0
0	0	3
1	2	0
2	1	0
1	0	2
2	0	1
0	1	2
0	2	1
1	1	1



St.	$\omega 010^\omega$	$\omega 01^\omega$
3	0	0
0	3	0
0	0	3
1	2	0
2	1	0
1	0	2
2	0	1
0	1	2
0	2	1
1	1	1

## Théorème (Bidon)

Surface plissée avec langages-bandes tous de complexité  $n + 1$  :  
plan sturmien ou du type d'un des 6 cas précédents.

Hic : **un** mot de complexité  $n + 1$  est sturmien ou de type  ${}^\omega 010^\omega$   
ou  ${}^\omega 01^\omega$ . Ici : mots “emmelés”, impossible de désubstituer  
indépendamment sur les bandes.

↔ Substitutions généralisées ?

## Théorème (Bidon)

Surface plissée avec langages-bandes tous de complexité  $n + 1$  :  
plan sturmien ou du type d'un des 6 cas précédents.

Hic : **un** mot de complexité  $n + 1$  est sturmien ou de type  ${}^\omega 010^\omega$   
ou  ${}^\omega 01^\omega$ . Ici : mots “emmelés”, impossible de désubstituer  
indépendamment sur les bandes.

↔ Substitutions généralisées ?

## Théorème (Bidon)

Surface plissée avec langages-bandes tous de complexité  $n + 1$  :  
plan sturmien ou du type d'un des 6 cas précédents.

Hic : **un** mot de complexité  $n + 1$  est sturmien ou de type  ${}^\omega 010^\omega$   
ou  ${}^\omega 01^\omega$ . Ici : mots “emmelés”, impossible de désubstituer  
indépendamment sur les bandes.

↪ Substitutions généralisées ?