

Flips stochastiques sur mots à deux lettres

O. Bodini, Th. Fernique, D. Regnault

GT-CRO, 26 octobre 2009

Cadre : PEPS *Stochasflip* (2009-2011), incluant

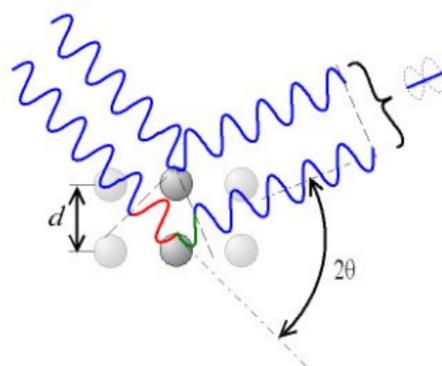
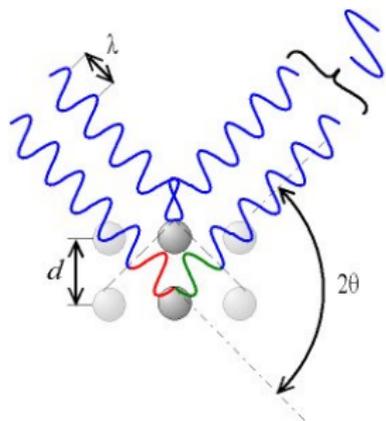
- Olivier Bodini (Paris 6)
- Thomas Fernique (LIF)
- Christian Mercat (I3M, Montpellier)
- Damien Regnault (ATER au LIF depuis septembre 2009)
- Éric Rémila (Ens Lyon)
- Mathieu Sablik (LATP, Marseille)

But : modèle théorique pour la formation des *quasicristaux*

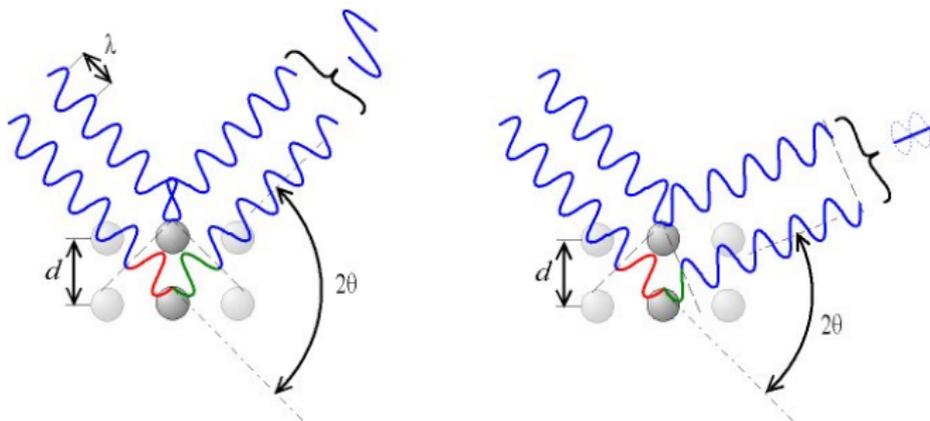
- 1 Motivations
- 2 Cadre d'étude
- 3 Convergence dans le pire cas
- 4 Convergence en moyenne
- 5 Perspectives

- 1 Motivations
- 2 Cadre d'étude
- 3 Convergence dans le pire cas
- 4 Convergence en moyenne
- 5 Perspectives

Matériau **ordonné** : figure de diffraction formée de “pics” (Déf.)

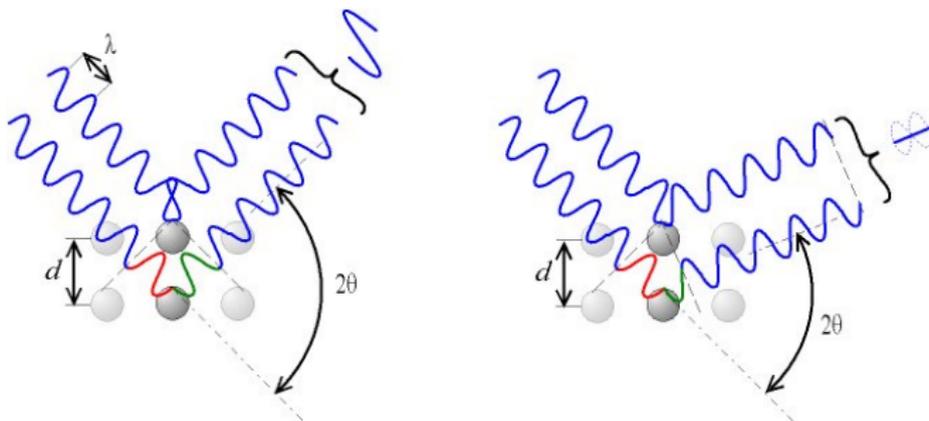


Matériau **ordonné** : figure de diffraction formée de “pics” (Déf.)



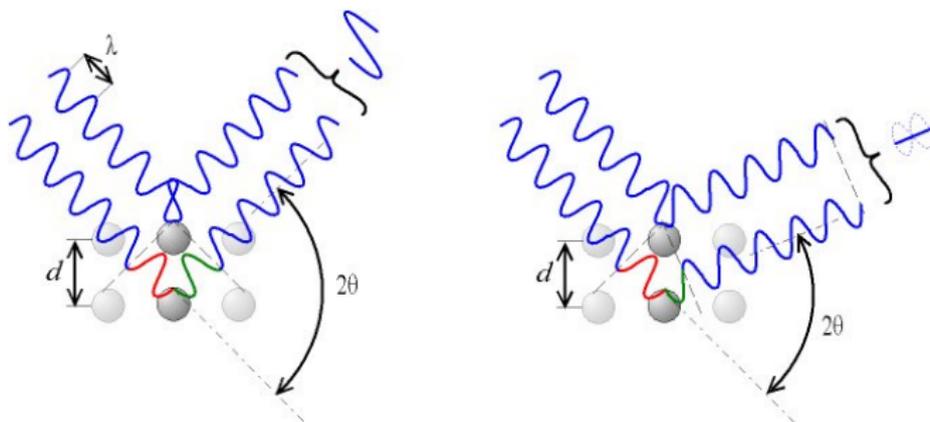
Périodicité spatiale (**cristal**) \Rightarrow pics de diffraction (démonstré)

Matériau **ordonné** : figure de diffraction formée de “pics” (Déf.)



Périodicité spatiale (**cristal**) \Leftrightarrow pics de diffraction (assumé)

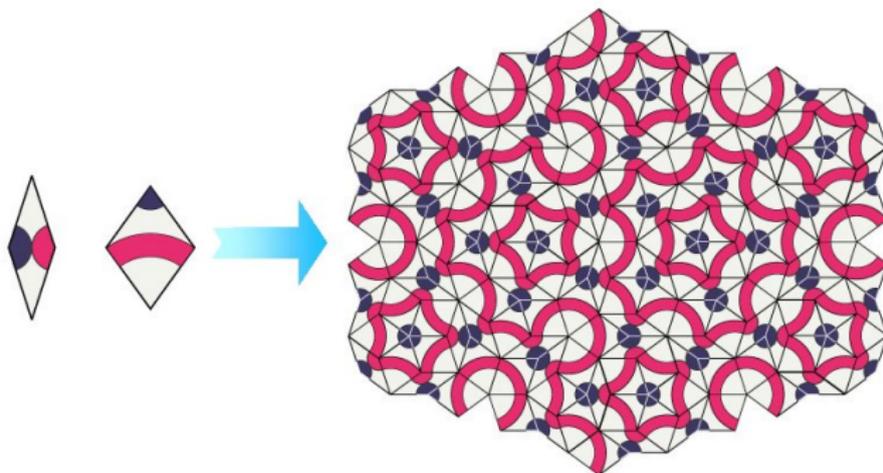
Matériau **ordonné** : figure de diffraction formée de “pics” (Déf.)



Périodicité spatiale (**cristal**) \Leftrightarrow pics de diffraction (assumé)

“Contre-matériau” découvert en 1984 \rightsquigarrow notion de **quasicristal**.

Structures théoriques ordonnées mais non-périodiques : connu !
 Exemple (1974) : pavage de Penrose (plan entier, sym. d'ordre 5)



↪ Modélisation de quasicristaux (structure) par "puzzles infinis".

Modélisation de la formation (dynamique) des quasicristaux ?

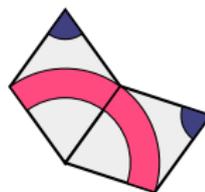
Modélisation de la formation (dynamique) des quasicristaux ?

Assemblage tuile à tuile :



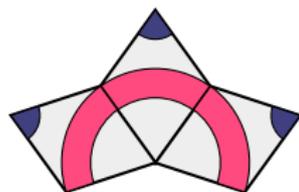
Modélisation de la formation (dynamique) des quasicristaux ?

Assemblage tuile à tuile :



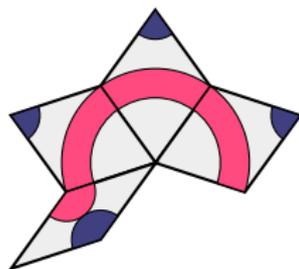
Modélisation de la formation (dynamique) des quasicristaux ?

Assemblage tuile à tuile :



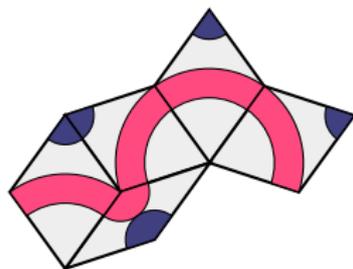
Modélisation de la formation (dynamique) des quasicristaux ?

Assemblage tuile à tuile :



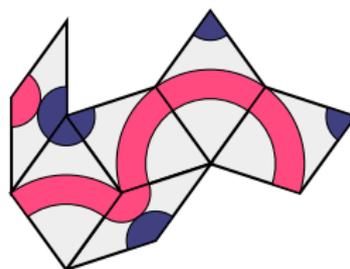
Modélisation de la formation (dynamique) des quasicristaux ?

Assemblage tuile à tuile :



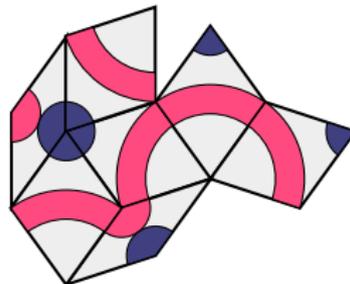
Modélisation de la formation (dynamique) des quasicristaux ?

Assemblage tuile à tuile :



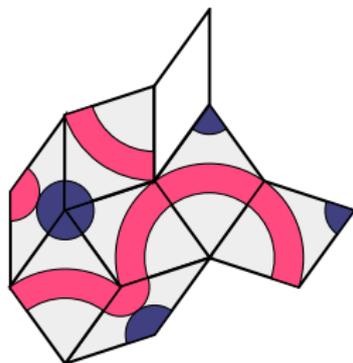
Modélisation de la formation (dynamique) des quasicristaux ?

Assemblage tuile à tuile :



Modélisation de la formation (dynamique) des quasicristaux ?

Assemblage tuile à tuile :



Marche pour les cristaux mais pas pour les quasicristaux (Dworkin)

Matériau **stable** : énergie libre $F = E - TS$ minimale (Déf.)

Matériau **stable** : énergie libre $F = E - TS$ minimale (Déf.)

Modélisation par **puzzles avec erreurs** :

- Énergie interne $E \simeq$ nb. d'erreurs ;
- Entropie $S \simeq$ nb. de puzzles faisables.

À température $T = 0$: F min. $\Leftrightarrow E$ min. \Leftrightarrow pas d'erreur

À haute température : F min. \Leftrightarrow bonnes proportions des tuiles

Matériau **stable** : énergie libre $F = E - TS$ minimale (Déf.)

Modélisation par **puzzles avec erreurs** :

- Énergie interne $E \simeq$ nb. d'erreurs ;
- Entropie $S \simeq$ nb. de puzzles faisables.

À température $T = 0$: F min. $\Leftrightarrow E$ min. \Leftrightarrow pas d'erreur

À haute température : F min. \Leftrightarrow bonnes proportions des tuiles

Processus de relaxation :

- T initiale haute, diminution progressive ;
- Transformations locales aléatoires “tendant” à diminuer E .

- 1 Motivations
- 2 Cadre d'étude**
- 3 Convergence dans le pire cas
- 4 Convergence en moyenne
- 5 Perspectives

Cadre très simplifié :

- Puzzle : mot sur l'alphabet $\{1, 2\}$;
- Erreur : deux lettres identiques consécutives;
- Transformation locale : $12 \leftrightarrow 21$ (flip).



Cadre très simplifié :

- Puzzle : mot sur l'alphabet $\{1, 2\}$;
- Erreur : deux lettres identiques consécutives;
- Transformation locale : $12 \leftrightarrow 21$ (flip).



Entropie maximale : autant de 1 que de 2 (C_{2n}^n mots faisables).

↪ Relaxation dans $\mathcal{W}_{2n} = \{w \in \{1, 2\}^{2n} \text{ t.q. } |w|_1 = |w|_2\}$.

Entropie maximale : autant de 1 que de 2 (C_{2n}^n mots faisables).

↪ Relaxation dans $\mathcal{W}_{2n} = \{w \in \{1, 2\}^{2n} \text{ t.q. } |w|_1 = |w|_2\}$.

Énergie minimale dans \mathcal{W}_{2n} : $E(1212\dots) = E(2121\dots) = 0$.

↪ Jouent le rôle de quasicristaux... périodiques !

Entropie maximale : autant de 1 que de 2 (C_{2n}^n mots faisables).

↪ Relaxation dans $\mathcal{W}_{2n} = \{w \in \{1, 2\}^{2n} \text{ t.q. } |w|_1 = |w|_2\}$.

Énergie minimale dans \mathcal{W}_{2n} : $E(1212\dots) = E(2121\dots) = 0$.

↪ Jouent le rôle de quasicristaux... périodiques !

Variation d'énergie lors d'un flip : dépend des lettres voisines.

- $1122 \rightarrow 1212$: $\Delta E = -2$ (bon flip) ;
- $1122 \leftarrow 1212$: $\Delta E = +2$ (mauvais flip) ;
- $1121 \leftrightarrow 1211$: $\Delta E = 0$ (flip neutre).

Processus : $w_t \rightarrow w_{t+1}$ par un flip *autorisé* choisi unif. au hasard.

Flips autorisés : tous à *haute température*, bons et neutres sinon.

Processus : $w_t \rightarrow w_{t+1}$ par un flip *autorisé* choisi unif. au hasard.

Flips autorisés : tous à *haute température*, bons et neutres sinon.



Haute température

Processus : $w_t \rightarrow w_{t+1}$ par un flip *autorisé* choisi unif. au hasard.

Flips autorisés : tous à *haute température*, bons et neutres sinon.



Haute température

Processus : $w_t \rightarrow w_{t+1}$ par un flip *autorisé* choisi unif. au hasard.

Flips autorisés : tous à *haute température*, bons et neutres sinon.



Basse température

Processus : $w_t \rightarrow w_{t+1}$ par un flip *autorisé* choisi unif. au hasard.

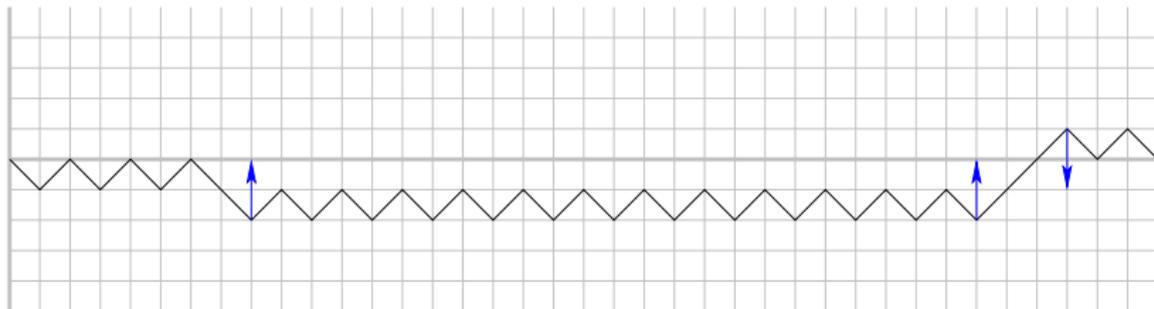
Flips autorisés : tous à *haute température*, bons et neutres sinon.



Basse température

Processus : $w_t \rightarrow w_{t+1}$ par un flip *autorisé* choisi unif. au hasard.

Flips autorisés : tous à *haute température*, bons et neutres sinon.



Basse température

Processus : $w_t \rightarrow w_{t+1}$ par un flip *autorisé* choisi unif. au hasard.

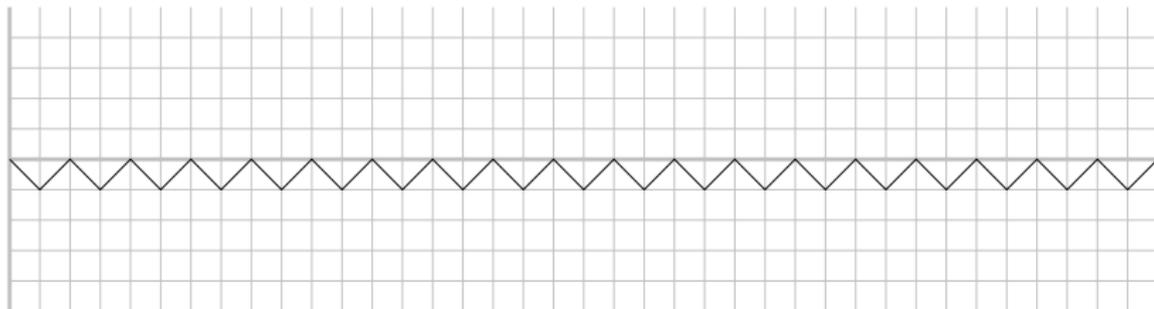
Flips autorisés : tous à *haute température*, bons et neutres sinon.



Basse température

Processus : $w_t \rightarrow w_{t+1}$ par un flip *autorisé* choisi unif. au hasard.

Flips autorisés : tous à *haute température*, bons et neutres sinon.



Basse température

Temps de convergence (variable aléatoire) :

$$T(w_0) = \min\{t \geq 0 \text{ t.q. } E(w_t) = 0\}.$$

Temps de convergence (variable aléatoire) :

$$T(w_0) = \min\{t \geq 0 \text{ t.q. } E(w_t) = 0\}.$$

Pire cas et cas μ -pondéré (μ distrib. sur \mathcal{W}_n) :

$$\hat{T}(n) = \max_{w_0 \in \mathcal{W}_n} T(w_0) \quad \text{et} \quad T_\mu(n) = \sum_{w_0 \in \mathcal{W}_n} \mu(w) T(w).$$

Temps de convergence (variable aléatoire) :

$$T(w_0) = \min\{t \geq 0 \text{ t.q. } E(w_t) = 0\}.$$

Pire cas et cas μ -pondéré (μ distrib. sur \mathcal{W}_n) :

$$\hat{T}(n) = \max_{w_0 \in \mathcal{W}_n} T(w_0) \quad \text{et} \quad T_\mu(n) = \sum_{w_0 \in \mathcal{W}_n} \mu(w) T(w).$$

Espérances (asympt.) de $\hat{T}(n)$ et $T_\mu(n)$ à basse température ?

- 1 Motivations
- 2 Cadre d'étude
- 3 Convergence dans le pire cas**
- 4 Convergence en moyenne
- 5 Perspectives

Outil pour majorer : potentiel strictement décroissant en moyenne

Proposition (Fatès-Morvan-Schabanel-Thierry 2005)

Soit $(w_t)_{t \in \mathbb{N}}$ un processus stochastique sur \mathcal{W} . Soit $\psi : \mathcal{W} \rightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction (*potentiel*) diminuant d'au moins $\varepsilon > 0$ en moyenne :

$$\psi(w_t) > 0 \Rightarrow \mathbb{E}[\psi(w_{t+1}) - \psi(w_t) | w_t] \leq -\varepsilon.$$

Alors

$$\mathbb{E}(\min\{t \geq 0 \text{ t.q. } \psi(w_t) \leq 0\} | w_0) \leq \frac{\psi(w_0)}{\varepsilon}.$$

Outil pour majorer : potentiel strictement décroissant en moyenne

Proposition (Fatès-Morvan-Schabanel-Thierry 2005)

Soit $(w_t)_{t \in \mathbb{N}}$ un processus stochastique sur \mathcal{W} . Soit $\psi : \mathcal{W} \rightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction (*potentiel*) diminuant d'au moins $\varepsilon > 0$ en moyenne :

$$\psi(w_t) > 0 \Rightarrow \mathbb{E}[\psi(w_{t+1}) - \psi(w_t) | w_t] \leq -\varepsilon.$$

Alors

$$\mathbb{E}(\min\{t \geq 0 \text{ t.q. } \psi(w_t) \leq 0\} | w_0) \leq \frac{\psi(w_0)}{\varepsilon}.$$

Potentiel naturel : E . Mais $\mathbb{E}(\Delta E | w_t = 1211212212) = 0$.

Outil pour majorer : potentiel strictement décroissant en moyenne

Proposition (Fatès-Morvan-Schabanel-Thierry 2005)

Soit $(w_t)_{t \in \mathbb{N}}$ un processus stochastique sur \mathcal{W} . Soit $\psi : \mathcal{W} \rightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction (*potentiel*) diminuant d'au moins $\varepsilon > 0$ en moyenne :

$$\psi(w_t) > 0 \Rightarrow \mathbb{E}[\psi(w_{t+1}) - \psi(w_t) | w_t] \leq -\varepsilon.$$

Alors

$$\mathbb{E}(\min\{t \geq 0 \text{ t.q. } \psi(w_t) \leq 0\} | w_0) \leq \frac{\psi(w_0)}{\varepsilon}.$$

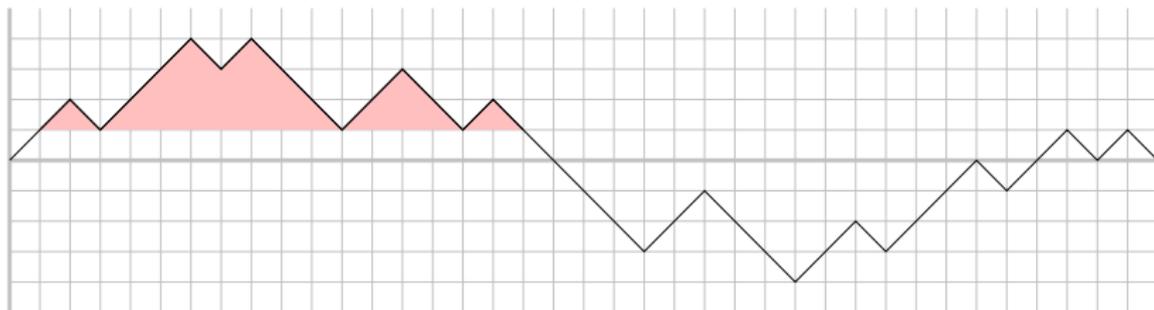
Potentiel naturel : E . Mais $\mathbb{E}(\Delta E | w_t = 1211212212) = 0$.

Potentiel strict. décroissant en moy. t.q. ψ min. $\Rightarrow E = 0$?

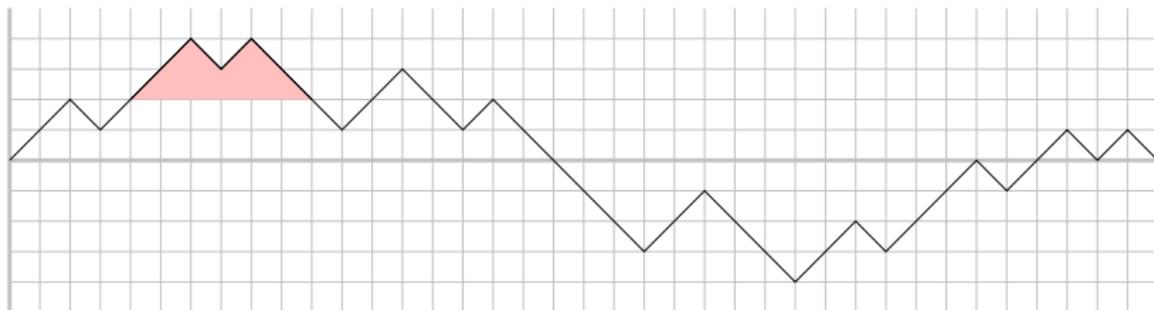
Facteur de Dyck :



Facteur de Dyck :



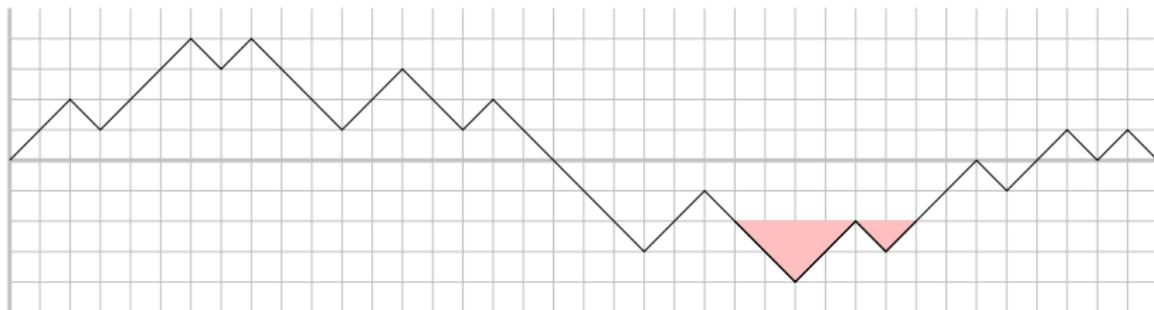
Facteur de Dyck :



Facteur de Dyck :



Facteur de Dyck :



Définition (Potentiel)

Soit $0 < \alpha < 1$. Soit $DF(w)$ les facteurs de Dyck de w . On pose :

$$\psi_\alpha(w) := \sum_{v \in DF(w)} (1 + |v|_1)^\alpha.$$

Lemme (Potentiel borné)

On a $(1 + n/2)^\alpha \leq \psi_\alpha \leq n^{1+\alpha}$, avec égalité à gauche ssi $E = 0$.

Lemme (Potentiel strictement décroissant en moyenne)

$$\psi_\alpha(w) > (1 + n/2)^\alpha \Rightarrow \mathbb{E}(\Delta\psi_\alpha(w)|w) \leq -\frac{\alpha(1-\alpha)}{2}n^{\alpha-2}.$$

Lemme (Potentiel borné)

On a $(1 + n/2)^\alpha \leq \psi_\alpha \leq n^{1+\alpha}$, avec égalité à gauche ssi $E = 0$.

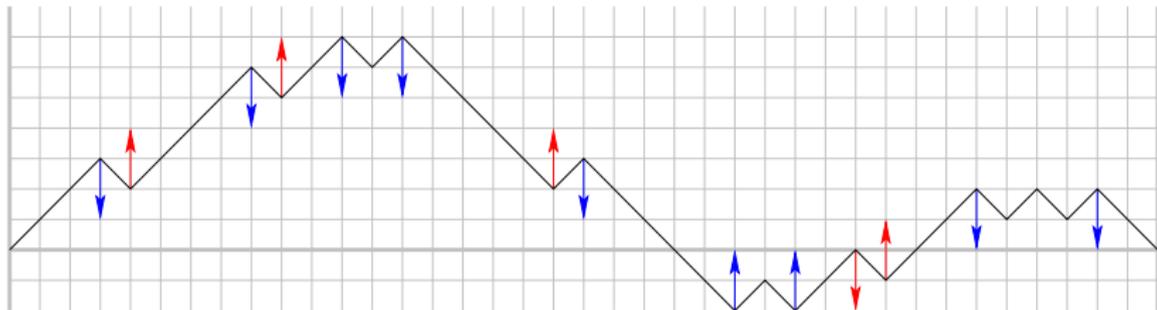
Lemme (Potentiel strictement décroissant en moyenne)

$$\psi_\alpha(w) > (1 + n/2)^\alpha \Rightarrow \mathbb{E}(\Delta\psi_\alpha(w)|w) \leq -\frac{\alpha(1-\alpha)}{2}n^{\alpha-2}.$$

Théorème (Bodini-F-Regnault 2009)

L'espérance du temps de convergence dans le pire cas est cubique :

$$\mathbb{E}(\widehat{T}(n)) \leq \frac{2n^3}{\alpha(1-\alpha)}.$$



Un flip autorisé peut augmenter (rouge) ou diminuer (bleu) ψ_α .



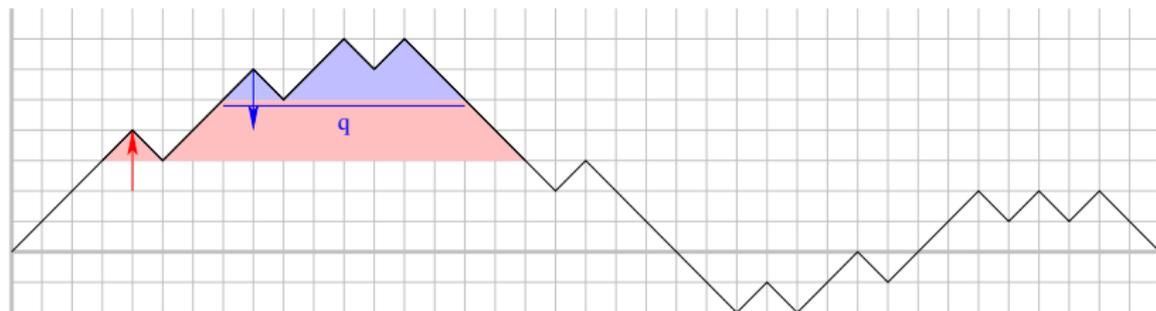
À chaque flip rouge est associé un flip bleu “plus haut” (val. abs.).



Un flip rouge allonge un facteur de Dyck : $\Delta\psi_\alpha = (p+1)^\alpha - p^\alpha$.



Un flip rouge allonge un facteur de Dyck : $\Delta\psi_\alpha = (p+1)^\alpha - p^\alpha$.



Son associé raccourcit un facteur de Dyck : $\Delta\psi_\alpha = (q-1)^\alpha - q^\alpha$.



Son associé raccourcit un facteur de Dyck : $\Delta\psi_\alpha = (q-1)^\alpha - q^\alpha$.



Comme $q \leq p$, la concavité de $x \rightarrow x^\alpha$ assure $\Delta\psi_\alpha + \Delta\psi_\alpha \leq -\varepsilon$.

- 1 Motivations
- 2 Cadre d'étude
- 3 Convergence dans le pire cas
- 4 Convergence en moyenne**
- 5 Perspectives

Temps de convergence μ -pondéré : distribution uniforme sur \mathcal{W}_n ?

Temps de convergence μ -pondéré : distribution uniforme sur \mathcal{W}_n ?

Alternative : distrib. stationnaire du processus à haute température

Temps de convergence μ -pondéré : distribution uniforme sur \mathcal{W}_n ?

Alternative : distrib. stationnaire du processus à haute température

\rightsquigarrow poids proportionnel au nombre F de flips autorisés :

$$\mu(w) \propto F(w) = |w| - E(w).$$

\rightsquigarrow mot d'autant plus probable qu'il est proche de la "cible" $E = 0$.

Majoration du temps de convergence μ -pondéré grâce à ψ_α :

$$T_\mu(n) = \sum_{w \in \mathcal{W}_n} \mu(w) T(w) \leq \frac{2n^{2-\alpha}}{\alpha(1-\alpha)} \sum_{w \in \mathcal{W}_n} \mu(w) \psi_\alpha(w).$$

Majoration du temps de convergence μ -pondéré grâce à ψ_α :

$$T_\mu(n) = \sum_{w \in \mathcal{W}_n} \mu(w) T(w) \leq \frac{2n^{2-\alpha}}{\alpha(1-\alpha)} \sum_{w \in \mathcal{W}_n} \mu(w) \psi_\alpha(w).$$

Plus simple : $\psi_\alpha(w) \leq V(w) \rightsquigarrow$ calcul du **volume μ -pondéré** V_μ .

Majoration du temps de convergence μ -pondéré grâce à ψ_α :

$$T_\mu(n) = \sum_{w \in \mathcal{W}_n} \mu(w) T(w) \leq \frac{2n^{2-\alpha}}{\alpha(1-\alpha)} \sum_{w \in \mathcal{W}_n} \mu(w) \psi_\alpha(w).$$

Plus simple : $\psi_\alpha(w) \leq V(w) \rightsquigarrow$ calcul du **volume μ -pondéré** V_μ .

Soit la **série génératrice** $g(z, u, v) = \sum a_{n,p,q} z^n u^p v^q$, où

$$a_{n,p,q} = \#\{w \in \mathcal{W}_n \text{ t.q. } F(w) = p, V(w) = q\}.$$

Alors :

$$V_\mu(n) = \frac{[z^n] \frac{\partial^2}{\partial v \partial u} g(z, u, v) |_{u=1, v=1}}{[z^n] \frac{\partial}{\partial u} g(z, u, v) |_{u=1, v=1}}.$$

Étape 1 : série génératrice $f(z, u, v)$ pour les mots de Dyck.
Décomposition selon le premier retour à la hauteur initiale :

The diagram shows a decomposition of a Dyck path. On the left is a path starting with a solid line that goes up, then a dashed line that goes up and down, then another solid line that goes up and down, and finally a solid line that goes down. This is equal to the product of two paths in parentheses. The first path in parentheses consists of a solid line that goes up and down, plus a path consisting of a solid line that goes up, a dashed line that goes up and down, and a solid line that goes down. The second path in parentheses consists of a solid line that goes down, plus a path consisting of a solid line that goes up, a dashed line that goes up and down, and a solid line that goes down.

Étape 1 : série génératrice $f(z, u, v)$ pour les mots de Dyck.
 Décomposition selon le premier retour à la hauteur initiale :



Méthodes symboliques à la Flajolet \rightsquigarrow équation fonctionnelle :

$$f(z, u, v) = (z^2 uv + z^2 v f(zv, u, v))(1 + u f(z, u, v)).$$

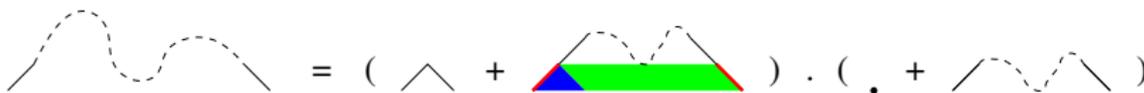
Étape 1 : série génératrice $f(z, u, v)$ pour les mots de Dyck.
 Décomposition selon le premier retour à la hauteur initiale :



Méthodes symboliques à la Flajolet \rightsquigarrow équation fonctionnelle :

$$f(z, u, v) = (z^2 uv + z^2 vf(zv, u, v))(1 + uf(z, u, v)).$$

Étape 1 : série génératrice $f(z, u, v)$ pour les mots de Dyck.
 Décomposition selon le premier retour à la hauteur initiale :



Méthodes symboliques à la Flajolet \rightsquigarrow équation fonctionnelle :

$$f(z, u, v) = (z^2 uv + z^2 v f(zv, u, v))(1 + u f(z, u, v)).$$

Étape 1 : série génératrice $f(z, u, v)$ pour les mots de Dyck.
 Décomposition selon le premier retour à la hauteur initiale :



Méthodes symboliques à la Flajolet \rightsquigarrow équation fonctionnelle :

$$f(z, u, v) = (z^2 uv + z^2 v f(zv, u, v))(1 + u f(z, u, v)).$$

Étape 1 : série génératrice $f(z, u, v)$ pour les mots de Dyck.
 Décomposition selon le premier retour à la hauteur initiale :



Méthodes symboliques à la Flajolet \rightsquigarrow équation fonctionnelle :

$$f(z, u, v) = (z^2 uv + z^2 v f(zv, u, v))(1 + u f(z, u, v)).$$

Étape 1 : série génératrice $f(z, u, v)$ pour les mots de Dyck.
Décomposition selon le premier retour à la hauteur initiale :



Méthodes symboliques à la Flajolet \rightsquigarrow équation fonctionnelle :

$$f(z, u, v) = (z^2 uv + z^2 v f(zv, u, v))(1 + u f(z, u, v)).$$

Étape 2 : mot de $\mathcal{W}_n \simeq$ séquence de mots de Dyck $\rightsquigarrow g(z, u, v)$.

$$\text{On calcule : } V_\mu(n) \sim \frac{\sqrt{2\pi}}{8} n \sqrt{n}.$$

Étape 1 : série génératrice $f(z, u, v)$ pour les mots de Dyck.
Décomposition selon le premier retour à la hauteur initiale :



Méthodes symboliques à la Flajolet \rightsquigarrow équation fonctionnelle :

$$f(z, u, v) = (z^2 uv + z^2 v f(zv, u, v))(1 + u f(z, u, v)).$$

Étape 2 : mot de $\mathcal{W}_n \simeq$ séquence de mots de Dyck $\rightsquigarrow g(z, u, v)$.

$$\text{On calcule : } V_\mu(n) \sim \frac{\sqrt{2\pi}}{8} n \sqrt{n}.$$

Même ordre de grandeur que pour la distribution uniforme !

Majoration de l'espérance du temps de convergence μ -pondéré :

$$\mathbb{E}(T_\mu(n)) \leq \frac{2n^{2-\alpha}}{\alpha(1-\alpha)} V_\mu(n) \sim \frac{\sqrt{2\pi}}{4\alpha(1-\alpha)} n^{\frac{7}{2}-\alpha}.$$

Étude de fonction \rightsquigarrow borne optimale pour $\alpha \sim 1 - \frac{1}{\ln n}$:

$$\mathbb{E}(T_\mu(n)) = O\left(n^{\frac{5}{2}} \ln n\right).$$

Majoration de l'espérance du temps de convergence μ -pondéré :

$$\mathbb{E}(T_{\mu}(n)) \leq \frac{2n^{2-\alpha}}{\alpha(1-\alpha)} V_{\mu}(n) \sim \frac{\sqrt{2\pi}}{4\alpha(1-\alpha)} n^{\frac{7}{2}-\alpha}.$$

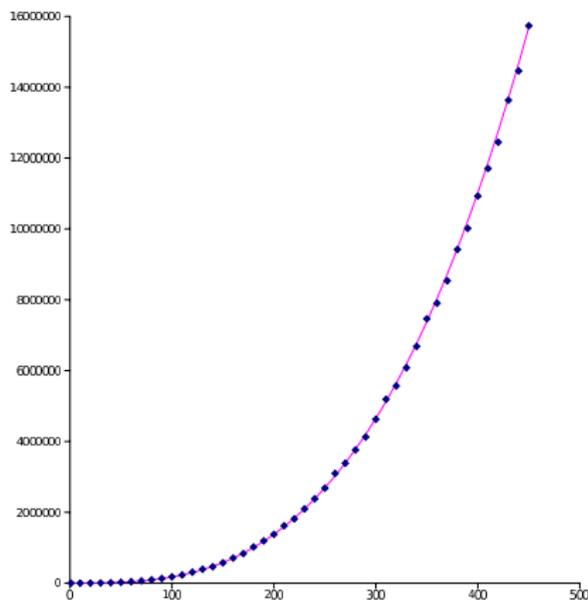
Étude de fonction \rightsquigarrow borne optimale pour $\alpha \sim 1 - \frac{1}{\ln n}$:

$$\mathbb{E}(T_{\mu}(n)) = O\left(n^{\frac{5}{2}} \ln n\right).$$

Conclusion : gain d'un facteur $\frac{\sqrt{n}}{\ln n}$ par rapport au pire cas.

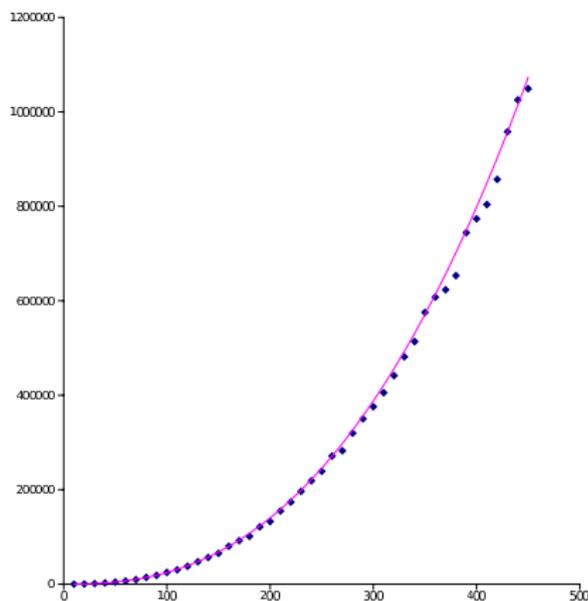
- 1 Motivations
- 2 Cadre d'étude
- 3 Convergence dans le pire cas
- 4 Convergence en moyenne
- 5 Perspectives**

Des simulations laissent penser que les bornes sont optimales :



Moy. sur 10 pire cas (pts. bleus), courbe $0.17n^3$ (rose).

Des simulations laissent penser que les bornes sont optimales :



Moy. sur 1000 cas moyen (pts. bleus), courbe $0.24n^{5/2} \ln n$ (rose).

Modèles de quasicristaux par **coupe et projection** $n \rightarrow d$:

- *direction* V : sous-espace vectoriel d -dim. de \mathbb{R}^n ;
- *coupe* $C(V)$: ens. des faces d -dim. de $\mathbb{Z}^n \cap (V + [0, 1]^n)$;
- *projection* : proj. orthogonale de $C(V)$ sur $V \simeq \mathbb{R}^d$;
- *flip* : échange de $d + 1$ tuiles partageant un même sommet.

Modèles de quasicristaux par **coupe et projection** $n \rightarrow d$:

- *direction* V : sous-espace vectoriel d -dim. de \mathbb{R}^n ;
- *coupe* $C(V)$: ens. des faces d -dim. de $\mathbb{Z}^n \cap (V + [0, 1]^n)$;
- *projection* : proj. orthogonale de $C(V)$ sur $V \simeq \mathbb{R}^d$;
- *flip* : échange de $d + 1$ tuiles partageant un même sommet.

Avec ce formalisme :

- mots à deux lettres : $2 \rightarrow 1$;
- pavages par dimères (losanges) : $3 \rightarrow 2$;
- pavage de Penrose : $5 \rightarrow 2$;
- ...

Temps de convergence ?

Modèles de quasicristaux par **coupe et projection** $n \rightarrow d$:

- *direction* V : sous-espace vectoriel d -dim. de \mathbb{R}^n ;
- *coupe* $C(V)$: ens. des faces d -dim. de $\mathbb{Z}^n \cap (V + [0, 1]^n)$;
- *projection* : proj. orthogonale de $C(V)$ sur $V \simeq \mathbb{R}^d$;
- *flip* : échange de $d + 1$ tuiles partageant un même sommet.

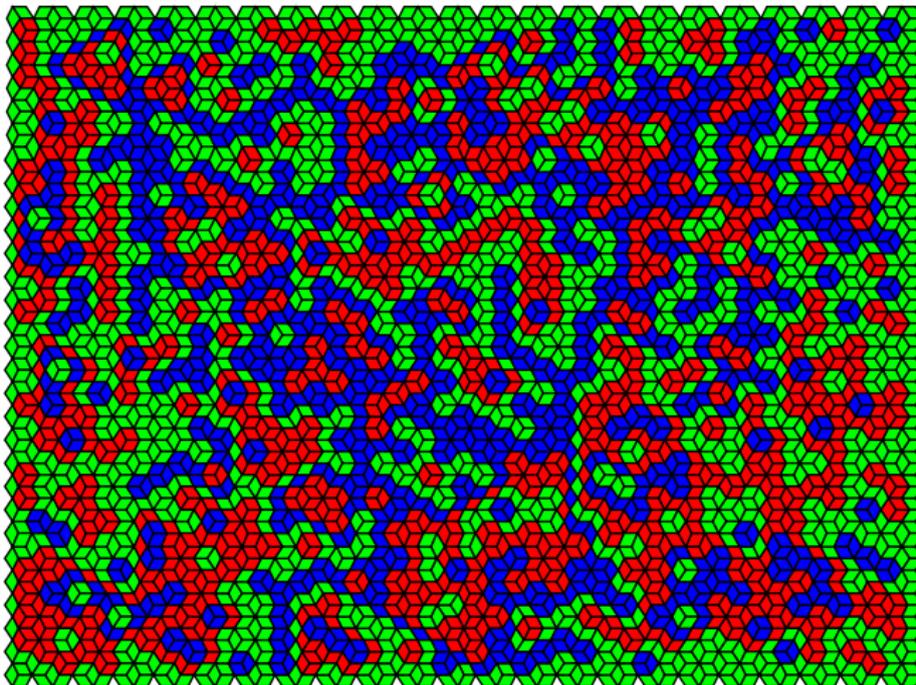
Avec ce formalisme :

- mots à deux lettres : $2 \rightarrow 1$;
- pavages par dimères (losanges) : $3 \rightarrow 2$;
- pavage de Penrose : $5 \rightarrow 2$;
- ...

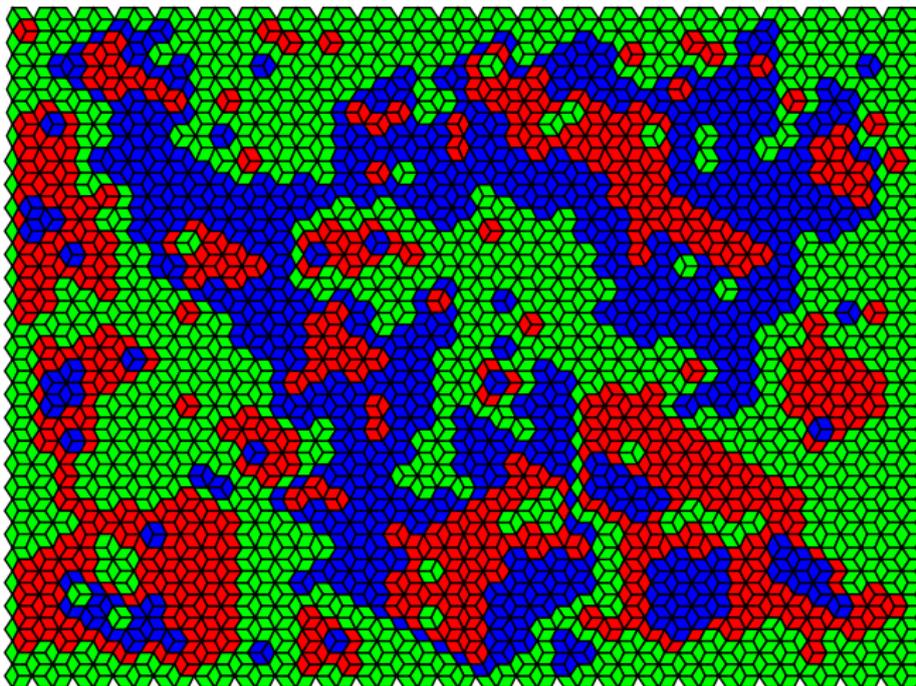
Temps de convergence ?

Flip-accessibilité non triviale, surtout avec des flips "interdits".

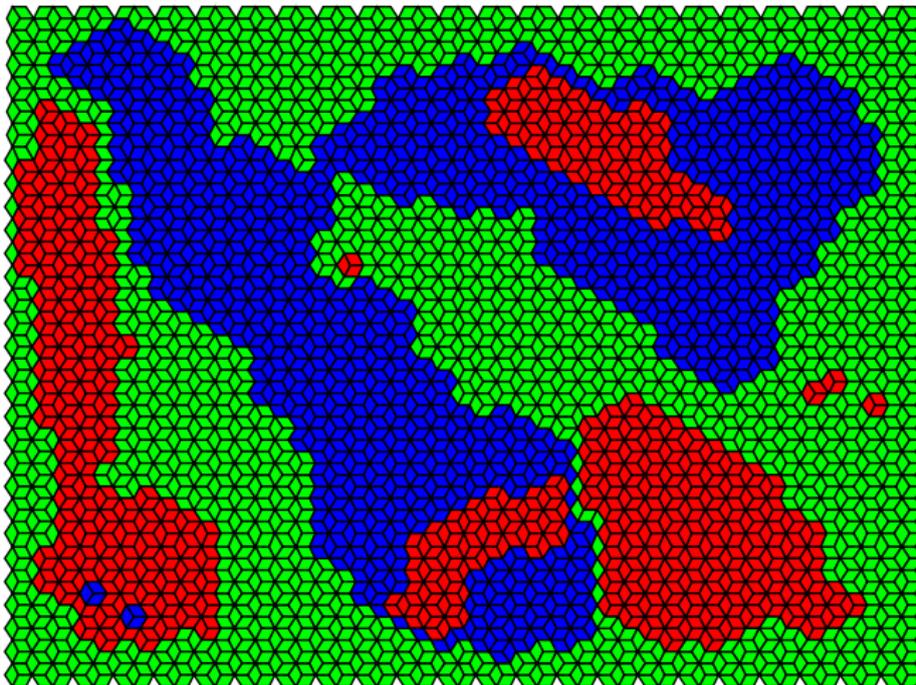
Exemple du $3 \rightarrow 2$: pire cas en n^2 , cas moyen en $n^{\frac{3}{2}} \ln n$ (Conj.)



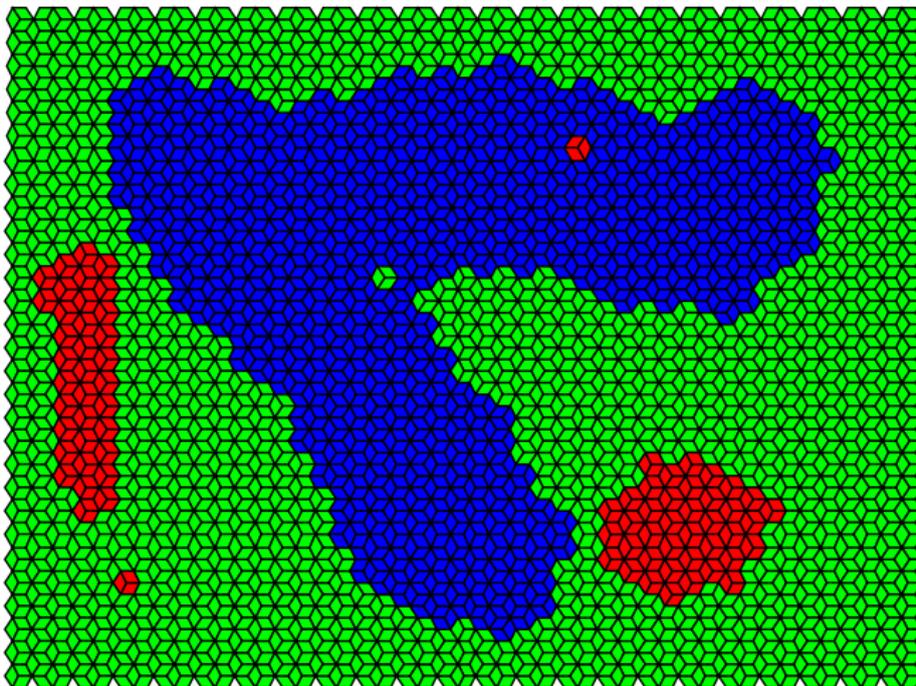
Exemple du $3 \rightarrow 2$: pire cas en n^2 , cas moyen en $n^{\frac{3}{2}} \ln n$ (Conj.)



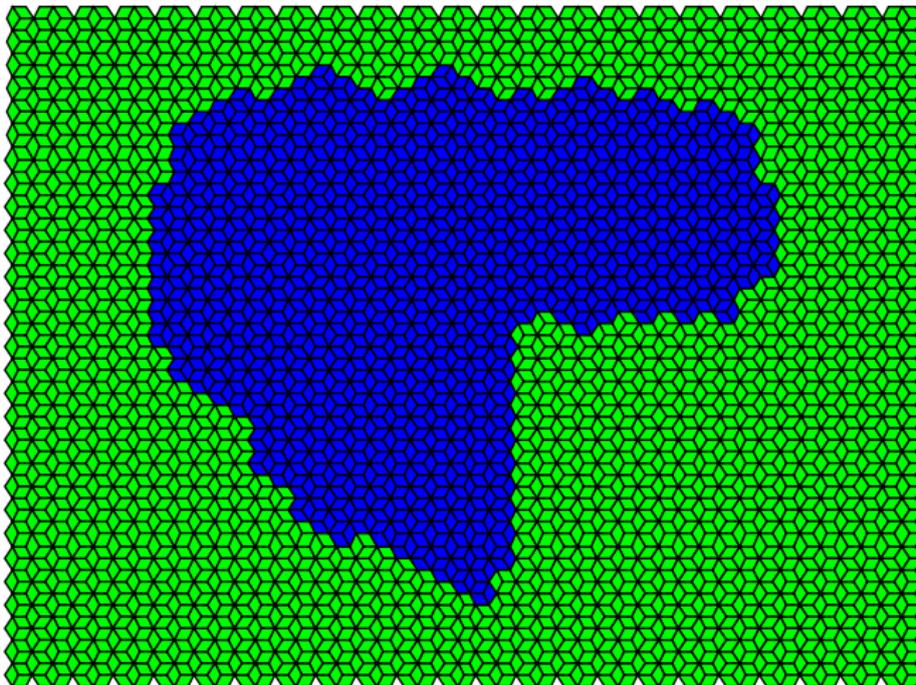
Exemple du $3 \rightarrow 2$: pire cas en n^2 , cas moyen en $n^{\frac{3}{2}} \ln n$ (Conj.)



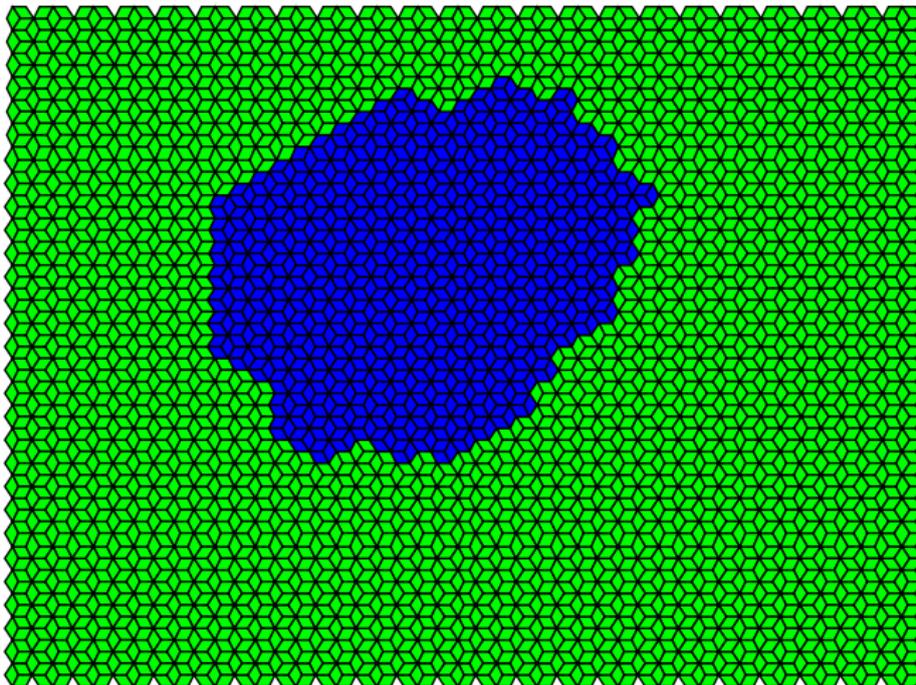
Exemple du $3 \rightarrow 2$: pire cas en n^2 , cas moyen en $n^{\frac{3}{2}} \ln n$ (Conj.)



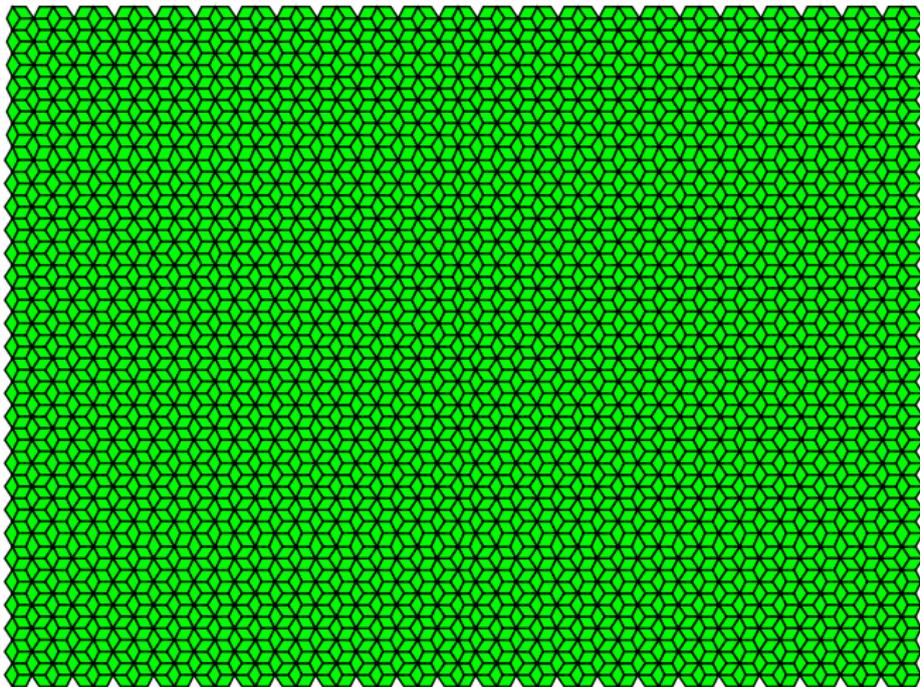
Exemple du $3 \rightarrow 2$: pire cas en n^2 , cas moyen en $n^{\frac{3}{2}} \ln n$ (Conj.)



Exemple du $3 \rightarrow 2$: pire cas en n^2 , cas moyen en $n^{\frac{3}{2}} \ln n$ (Conj.)



Exemple du $3 \rightarrow 2$: pire cas en n^2 , cas moyen en $n^{\frac{3}{2}} \ln n$ (Conj.)



Hypothèses simplificatrices à reconsidérer ?

- température “tout ou rien” (chaud/froid) ;
- température homogène ;
- convergence “totale”, *i.e.*, jusqu'à $E = 0$.

Merci de votre attention.